Pi Formulas , Part 13

Edgar Valdebenito

abstract

In this note we give some formulas related to the constant Pi

EL NÚMERO π Y LA FUNCIÓN $\phi(x)=\int_0^1 e^{-u^2-2xu}du \quad ,x\geq 0$

EDGAR VALDEBENITO V.
(2003)

Resumen
Se muestra una fórmula que involucra la constante $\pi = 3.14159...$, y la función $\phi(x)$.

1. INTRODUCCIÓN.

El número Pi se define por la serie: $\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, en esta nota se muestra una fórmula que involucra la constante π y la función $\phi(x)=\int_0^1 e^{-u^2-2xu}du \quad ,x\geq 0$ .Además se muestran algunas propiedades de la función $\phi(x)$.

2. ALGUNAS PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN $\phi(x)$.

2.1.

$$\phi(x)=e^{-2x-1}+\int_{exp(-2x-1)}^{1}\frac{ln\left(\frac{1}{u}\right)}{x+\sqrt{x^2-ln(u)}}du \ , x\geq 0$$

$$\phi(x)=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{e^{-u-2x\sqrt{u}}}{\sqrt{u}}du \ , x\geq 0$$

$$\phi(x)=e^{-2x-1}+2\int_0^1 u(u+x)e^{-u^2-2xu}du\ ,x\geq 0$$

$$\phi(x)=\frac{1-e^{-2x-1}}{2x}-\frac{1}{x}\int_0^1 ue^{-u^2-2xu}du\ ,x>0$$

2.2.

$$\phi(0)=\int_0^1 e^{-u^2}du=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

2.3. Para $n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, se tiene:

$$\phi(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{k!(2n)^{2k+1}}\left(1-e^{-2n}\sum_{m=0}^{2k}\frac{(2n)^m}{m!}\right)$$

2.4.

$$e^{-2x-1}\leq\phi(x)\leq 1\quad ,x\geq 0$$

2.5. Para $x\geq 0$, Existe un número $\alpha\in(0,1)$ tal que : $\phi(x)=e^{-\alpha^2-2x\alpha}$

2.6. Para $x>0$, Existe un número $\alpha\in(0,1)$ tal que : $\phi(x)=\dfrac{e^{-\alpha^2}\left(1-e^{-2x}\right)}{2x}$

2.7. Para $x\geq 0$, Existe un número $\alpha\in(0,1)$ tal que : $\phi(x+1)=e^{-2\alpha}\phi(x)$

2.8. Para $n=0,1,2,3,...$, se tiene: $\phi(n+1)<\phi(n)$

2.9. $0\leq y<x\Leftrightarrow\phi(x)<\phi(y)$

2.10. Para $x\geq 0$, se tiene:

$$\phi(x) \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(tan^{-1}\left(\frac{1+x+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\right)-tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)$$

3. FÓRMULA QUE INVOLUCRA EL NÚMERO π Y LA FUNCIÓN $\phi(x)$

3.1.

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n^2}\left(\phi(n)\right)^2 + 8\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty} e^{-\left(n^2+m^2\right)}\phi(n)\phi(m)$$

3.2.

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n^2}\left(\phi(n)\right)^2 + 8\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\left(n^2+(n+m+1)^2\right)}\phi(n)\phi(m+n+1)$$

3.3.

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n^2}\left(\phi(n)\right)^2 + 8\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} e^{-\left((n+1)^2+m^2\right)}\phi(n+1)\phi(m)$$

4. REFERENCIAS.

1. Abramowitz, M. e I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions. Nueva York: Dover, 1965.

2. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products (A. Jeffrey), Academic Press, New York, London, and Toronto, 1980.

3. M. R. Spiegel, Mathematical Handbook, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.

4. E. Valdebenito, Pi Handbook, manuscript, unpublished, 1989 , (20000 fórmulas).