Pi Formulas , Part 14 : Pi and Theta Function

Edgar Valdebenito

abstract

In this note we give some formulas related to the constant Pi

ALGUNAS FÓRMULAS QUE INVOLUCRAN EL NÚMERO π Y LA FUNCIÓN THETA $\phi(q)$

EDGAR VALDEBENITO V.
(1999)

Resumen

Se muestran algunas fórmulas que involucran el número π y la función Theta $\phi(q)$

1. INTRODUCCIÓN.

La función Theta (Jacobi) $\theta_3(u,q)$ se define por:

$$\theta_3(u,q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2nui} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nu) \quad , \quad |q|<1$$

poniendo $u=0$, se obtine la función:

$$\phi(q)=\theta_3(0,q)=1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} = \frac{(-q;-q)_\infty}{(q;-q)_\infty} \quad , \quad |q|<1$$

donde

$$(a;q)_\infty=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-aq^n\right) \quad , \quad |q|<1$$

Una importante relación que satisface la función $\phi(q)$ es:

$$\sqrt{a}\,\phi\left(e^{-a^2}\right)=\sqrt{b}\,\phi\left(e^{-b^2}\right) \quad , \quad ab=\pi$$

En esta nota se muestran algunas fórmulas que involucran el número π y la función $\phi(q)$.

2. FÓRMULAS.

2.1.

$$\pi = \frac{1}{2}\left(1+\phi\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\left(\frac{1+\phi\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}{1+\phi\left(\frac{n}{n+1}\right)}\right)^2$$

2.2.Sea $\phi(q) = R(q) + J(q)$, donde:

$$R(q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{(2n)^2} \quad , \quad J(q) = 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{(2n-1)^2}$$

se tiene:

$$\pi = 12\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{\left(1-a^2\right)a^{4n-3}}{1+a^{8n-4}}\right)$$

$$\pi = 16\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{\left(1-b^2\right)b^{4n-3}}{1+b^{8n-4}}\right)$$

$$\pi = 24\sum_{n=1}^{\infty} \tan^{-1}\left(\frac{\left(1-c^2\right)c^{4n-3}}{1+c^{8n-4}}\right)$$

los números $a,b,c \in (0,1)$, satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$3\left(J(a)\right)^2 = \left(R(a)\right)^2 \quad , a = 0.292909...$$

$$\left(R(b)\right)^2 = \left(J(b)\right)^2 + 2R(b)J(b) \quad ,b = 0.207879...$$

$$\left(R(c)\right)^2 + \left(J(c)\right)^2 = 4R(c)J(c) \quad ,c = 0.134061...$$

2.3.Para $0 < q < 1$ se tiene:

$$\pi = 4\tan^{-1}\left(\frac{\phi(-q)}{\phi(q)}\right) + 8\sum_{n=1}^{\infty}\tan^{-1}\left(\frac{\left(1-q^2\right)q^{4n-3}}{1+q^{8n-4}}\right)$$

3. REFERENCIAS.

1. Abramowitz, M. e I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions. Nueva York: Dover, 1965.

2. Bellman. R, A Brief Introduction to Theta Functions, New York, 1961.

3. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products (A. Jeffrey), Academic Press, New York, London, and Toronto, 1980.

4. M. R. Spiegel, Mathematical Handbook, McGraw-Hill Book Company, New York, 1968.

5. E. Valdebenito, Pi Handbook, manuscript, unpublished, 1989 , (20000 fórmulas).