EXPRESSION FORMELLE DE LA CONSTANTE COSMOLOGIQUE ET FORMULATION DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE QUI EN DÉCOULE

CLAUDE LATOURRE, MARS 2016

Depuis plus d'un siècle, les équations de la Relativité Générale ont évoluées au gré des observations de l'Univers. Ces changements se sont exprimés à travers la constante cosmologique (Λ) qui fut d'abord ajoutée côté espace-temps pour rendre l'Univers stationnaire puis retirée lorsqu'on observa l'évolution de celui-ci. Plus récemment, elle est réapparue du coté énergie-impulsion pour traduire l'expansion accélérée de l'Univers.

Nous allons voir maintenant comment la contraction des équations de la Relativité Générale permet d'exprimer formellement sa valeur : $\Lambda = -(R + \kappa\, T)/4$ et aussi, d'en déduire une reformulation équivalente de la Relativité Générale : $\left(R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/4\right) = \kappa\left(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T/4\right)$. Tout ceci sans faire appel à aucun concept physique : Énergie sombre, Quintessence…

HISTORIQUE DES ÉQUATIONS DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Initialement (Einstein, 1915), la première version des équations de la Relativité Générale (qui mettaient en relation la métrique d'espace-temps ($g_{\mu\nu}$), le tenseur de Ricci ($R_{\mu\nu}$), la courbure scalaire (R), le tenseur énergie-impulsion ($T_{\mu\nu}$)) s'énonçait sans constante cosmologique :

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\, R(x) = \kappa\, T_{\mu\nu}(x) \tag{RG$_\kappa$}$$

Un peu plus tard (Einstein, 1917), elle est apparue comme facteur de la métrique du côté espace-temps, pour rendre l'Univers stationnaire :

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\, R(x) - \Lambda^{sta} g_{\mu\nu}(x) = \kappa\, T_{\mu\nu}(x) \tag{RG$_{\kappa\Lambda}$}$$

Ensuite (Hubble, 1929), après avoir observé l'expansion de l'Univers, elle en fut révoquée :

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\, R(x) = \kappa\, T_{\mu\nu}(x) \tag{RG$_\kappa$}$$

Et plus récemment (Riess, 1998) (Perlmutter, 1999), on observa l'accélération de cette expansion et elle fut réintroduite du côté énergie-impulsion :

$$R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\, R(x) = \kappa\, T_{\mu\nu}(x) + \Lambda^{acc} g_{\mu\nu}(x) \tag{RG$_{\kappa\Lambda}$}$$

Et depuis, cette constante d'accélération d'expansion (Λ^{acc}), actuellement évaluée à 10^{-52} m^{-2}, est un paramètre libre de la théorie qui fait l'objet de multiples interprétations (Peebles, 2003) : Énergie sombre, Quintessence…

Mais, ce paramètre est-il vraiment libre, ou bien peut-on le déterminer mathématiquement ? C'est ce que nous allons voir par la suite.

REFORMULATION DES ÉQUATIONS DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Voyons tout d'abord ce qui se passe lorsque l'on contracte les équations (RG$_{\kappa\Lambda}$) avec la métrique inverse ($g^{\mu\nu}$). On obtient :

$$R(x) - 2\,R(x) = \kappa\,T(x) + \Lambda^{acc}4$$

ce qui permet de fixer l'expression de la constante cosmologique :

$$\boxed{\Lambda^{acc} \;= -\tfrac{1}{4}\big(R(x) + \kappa\,T(x)\big)} \qquad \text{(RGR}_\Lambda\text{)}$$

qui dépend donc uniquement de la courbure scalaire (R) et du scalaire d'énergie impulsion (T).

Et maintenant, on peut l'injecter dans les équations (RG$_{\kappa\Lambda}$) :

$$R_{\mu\nu}(x) - \tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}(x)\,R(x) = \kappa\,T_{\mu\nu}(x) - \tfrac{1}{4}\big(R(x) + \kappa\,T(x)\big)\,g_{\mu\nu}(x)$$

pour donner, après simplifications, les équations de la Relativité Générale Reformulée :

$$\left(R_{\mu\nu}(x) - \tfrac{1}{4}\,g_{\mu\nu}(x)\,R(x)\right) = \kappa\left(T_{\mu\nu}(x) - \tfrac{1}{4}\,g_{\mu\nu}(x)\,T(x)\right)$$

Ainsi formulées, les équations expriment simplement la proportionnalité entre les tenseurs à trace nulle :

$$\boxed{\tilde{R}_{\mu\nu}(x) = \kappa\,\tilde{T}_{\mu\nu}(x)} \qquad \text{(RGR}_\kappa\text{)}$$

et tout ceci, sans faire appel à de nouveau concept physique tel que l'énergie du vide ou l'énergie sombre.

ÉQUIVALENCE ENTRE LES DEUX FORMULATIONS

Réciproquement, en ajoutant l'équation (RGR$_\kappa$) et l'équation (RGR$_\Lambda$) multipliée par $g_{\mu\nu}(x)$:

$$\left(R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}\,g_{\mu\nu}(x)\,R(x)\right) - \frac{1}{4}\big(R(x) + \kappa\,T(x)\big)\,g_{\mu\nu}(x) = \kappa\left(T_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}\,g_{\mu\nu}(x)\,T(x)\right) + \Lambda^{acc}g_{\mu\nu}(x)$$

on obtient les équations de la Relativité Générale Actuelle (RG$_{\kappa\Lambda}$) :

$$R_{\mu\nu}(x) - \tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}(x)\,R(x) = \kappa\,T_{\mu\nu}(x) + \Lambda^{acc}g_{\mu\nu}(x)$$

Ce qui permet d'établir l'équivalence entre la formulation actuelle et la nouvelle formulation :

$$\boxed{\begin{gathered} R_{\mu\nu}(x) - \tfrac{1}{2}\,g_{\mu\nu}(x)\,R(x) = \kappa\,T_{\mu\nu}(x) + \Lambda^{acc}g_{\mu\nu}(x) \\ \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \left(R_{\mu\nu}(x) - \tfrac{1}{4}\,g_{\mu\nu}(x)\,R(x)\right) = \kappa\left(T_{\mu\nu}(x) - \tfrac{1}{4}\,g_{\mu\nu}(x)\,T(x)\right) \\ \Lambda^{acc} \;= -\tfrac{1}{4}\big(R(x) + \kappa\,T(x)\big) \end{cases} \end{gathered}}$$

COMPARAISON ENTRE LES DEUX FORMULATIONS

Voyons maintenant, à travers divers exemples, comment la nouvelle formulation conduit aux mêmes solutions que la formulation actuelle, bien souvent obtenues de façon plus directe.

DIVERGENCE COVARIANTE

Comme premier exemple, nous allons calculer la divergence covariante (D^{μ}) des équations. Pour ce faire, on va se baser sur les trois tenseurs qui ont une divergence nulle :

$$D^{\mu}\left(R_{\mu\nu}(x)-\tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\,R(x)\right)=0\ ;\ D^{\mu}\left(T_{\mu\nu}(x)\right)=0\ ;\ D^{\mu}\left(g_{\mu\nu}(x)\right)=0$$

Formulation actuelle

Ainsi, on peut facilement calculer la divergence covariante des équations ($RG_{\kappa\Lambda}$) :

$$D^{\mu}\left(R_{\mu\nu}(x)-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(x)\,R(x)\right)=\kappa\,D^{\mu}\left(T_{\mu\nu}(x)\right)+D^{\mu}\left(\Lambda^{acc}g_{\mu\nu}(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0=0+0$$

qui donne un résultat trivial comme voulu par Einstein.

Nouvelle formulation

Bien évidement, la divergence covariante deΛ^{acc}doit être nulle :

$$D^{\mu}\Lambda^{acc}\ =0$$

ce qui se traduit par :

$$-\tfrac{1}{4}\,D^{\mu}\big(R(x)+\kappa\,T(x)\big)\ =0$$

Calculons maintenant la divergence covariante des équations (RGR_{κ}) :

$$D^{\mu}\left(R_{\mu\nu}(x)-\tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}(x)\,R(x)\right)=\kappa\,D^{\mu}\left(T_{\mu\nu}(x)-\tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}(x)\,T(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$D^{\mu}\left(\tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}(x)\,R(x)\right)=\kappa\,D^{\mu}\left(-\tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}(x)\,T(x)\right)$$

qui se simplifie en :

$$0=-\tfrac{1}{4}\ g_{\mu\nu}(x)\,D^{\mu}\big(R(x)+\kappa\,T(x)\big)$$

Et l'on obtient, en utilisant le résultat précédent, la même trivialité :

$$0\ =0$$

LIMITE NEWTONIENNE

À la limite Newtonienne, c. à d. lorsque le champ de gravitation et les vitesses sont faibles, on doit obtenir l'équation de Poisson :

$$\Delta V(x) = 4\pi\, G\, \rho(x)$$

On part donc d'une métrique qui dévie faiblement de celle de Minkowski :

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$

pour obtenir, comme composantes du tenseur de Ricci et comme courbure scalaire :

$$R_{00}(x) \cong \frac{\Delta V(x)}{c^2}\ ; R_{ii}(x) \cong -\frac{\Delta V(x)}{c^2}\ ; R(x) \cong -2\frac{\Delta V(x)}{c^2}$$

tandis que le tenseur d'impulsion-énergie s'exprime, pour de petites vitesses :

$$T_{00}(x) \cong \rho(x)c^2\ ; T(x) \cong \rho(x)c^2$$

Formulation actuelle

Avec la composante $(_{00})$ des équations ($RG_{\kappa\Lambda}$) :

$$R_{00}(x) - \frac{1}{2} g_{00}(x)\, R(x) = \kappa\, T_{00}(x) + \Lambda^{acc} g_{00}(x)$$

on déduit :

$$\frac{\Delta V(x)}{c^2} - \frac{1}{2}\left(-2\frac{\Delta V(x)}{c^2}\right) \cong \kappa\, \rho(x)c^2 + \Lambda^{acc}$$

soit encore :

$$2\frac{\Delta V(x)}{c^2} \cong \kappa\, \rho(x)c^2 + \Lambda^{acc} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta V(x) \cong \frac{\kappa c^4}{2}\rho(x) + \frac{c^2}{2}\Lambda^{acc}$$

que l'on identifie à l'équation de Poisson en prenant : $\kappa = \frac{8\pi\, G}{c^4}$ et $\Lambda^{acc} = 0$

Nouvelle formulation

Les composantes des tenseurs à trace nulle sont :

$$\tilde{R}_{00}(x) \cong \frac{3}{2}\frac{\Delta V(x)}{c^2} \qquad \text{et} \qquad \tilde{T}_{00}(x) \cong \frac{3}{4}\rho(x)c^2$$

Ainsi, de la composante $(_{00})$ des équations (RGR_{κ}) :

$$\tilde{R}_{00}(x) = \kappa\, \tilde{T}_{00}(x)$$

on déduit :

$$\frac{3}{2}\frac{\Delta V(x)}{c^2} \cong \kappa\frac{3}{4}\rho(x)c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta V(x) \cong \frac{\kappa c^4}{2}\rho(x)$$

Cela permet d'évaluer la constante d'accélération d'expansion :

$$\Lambda^{acc} = -\frac{1}{4}\big(R(x) + \kappa\, T(x)\big) \cong -\frac{1}{4}\left(-2\frac{\Delta V(x)}{c^2} + \kappa\, \rho(x)c^2\right) \cong 0$$

SOLUTIONS DE SCHWARZSCHILD

Voyons maintenant quelles sont les solutions pour un système statique à symétrie sphérique dans le vide. La métrique peut s'écrire de façon générale comme suit :

$$ds^2 = g_{tt}\, c^2 dt^2 + g_{rr}\, dr^2 + g_{\theta\theta}\, d\theta^2 + g_{\varphi\varphi}\, d\varphi^2 \qquad \text{avec}$$

$$g_{tt} = -e^{\nu(r)}\ ;\ g_{rr} = e^{\mu(r)}\ ;\ g_{\theta\theta} = r^2\ ;\ g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta$$

Cela donne, comme composantes non nulles du tenseur de Ricci et comme courbure scalaire :

$$R_{tt} = -e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4} + \frac{\nu'}{r}\right] g_{tt}\ ; R_{\theta\theta} = e^{-\mu}\left[\frac{\mu'-\nu'}{2r} + \frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right] g_{\theta\theta}$$

$$R_{rr} = -e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4} - \frac{\mu'}{r}\right] g_{rr}\ ; R_{\varphi\varphi} = e^{-\mu}\left[\frac{\mu'-\nu'}{2r} + \frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right] g_{\varphi\varphi}$$

$$R = -2e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4} - \frac{\mu'-\nu'}{r} - \frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right]$$

Le tenseur d'impulsion-énergie, quand à lui, est nul dans le vide :

$$T_{\mu\nu}(x) = 0$$

Formulation actuelle

Les composantes non nulles des équations ($RG_{\kappa\Lambda}$) sont :

$$\begin{cases} R_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt}\, R = \Lambda^{acc} g_{tt} \\ R_{rr} - \frac{1}{2} g_{rr}\, R = \Lambda^{acc} g_{rr} \\ R_{\theta\theta} - \frac{1}{2} g_{\theta\theta}\, R = \Lambda^{acc} g_{\theta\theta} \\ R_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2} g_{\varphi\varphi}\, R = \Lambda^{acc} g_{\varphi\varphi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-\mu}\left[\frac{\mu'}{r} + \frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right] = \Lambda^{acc} \\ -e^{-\mu}\left[-\frac{\nu'}{r} + \frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right] = \Lambda^{acc} \\ e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4} - \frac{\mu'-\nu'}{2r}\right] = \Lambda^{acc} \\ e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4} - \frac{\mu'-\nu'}{2r}\right] = \Lambda^{acc} \end{cases}$$

La première équation permet d'obtenir $e^{-\mu}$:

$$-e^{-\mu}\left[\frac{\mu'}{r} + \frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right] = \Lambda^{acc} \ \Leftrightarrow\ \left[\frac{(e^{-\mu}-1)'}{r} + \frac{e^{-\mu}-1}{r^2}\right] = \Lambda^{acc} \Leftrightarrow$$

$$[(e^{-\mu}-1)'r + (e^{-\mu}-1)] = r^2\Lambda^{acc} \ \Leftrightarrow\ [(e^{-\mu}-1)\, r]' = r^2\Lambda^{acc} \Leftrightarrow$$

$$(e^{-\mu}-1)\, r = \alpha + \frac{r^3}{3}\Lambda^{acc} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{e^{-\mu} = 1 + \frac{\alpha}{r} + \frac{\Lambda^{acc}}{3} r^2}$$

En soustrayant la 1ère équation avec la 2ème, on obtient :

$$-e^{-\mu}\left[\frac{\mu'}{r}+\frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right]-e^{-\mu}\left[\frac{\nu'}{r}-\frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right]=0 \Leftrightarrow -e^{-\mu}\left[\frac{\mu'}{r}+\frac{\nu'}{r}\right]=0$$

qui est réalisée pour :

$$\nu'=-\mu'$$

Et ainsi :

$$e^{\nu}=e^{-\mu}=1+\frac{\alpha}{r}+\frac{\Lambda^{acc}}{3}r^2$$

Ce qui donne, comme solution la métrique de (Schwarzschild, 1916) :

$$ds^2=-\left(1+\frac{\alpha}{r}+\frac{\Lambda^{acc}}{3}r^2\right)c^2dt^2+\left(1+\frac{\alpha}{r}+\frac{\Lambda^{acc}}{3}r^2\right)^{-1}dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2$$

Nouvelle formulation

On obtient, pour les composantes du tenseur de Ricci à trace nulle :

$$\tilde{R}_{tt}=-\frac{1}{2}e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4}+\frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right]-\frac{1}{2}e^{-\mu}\left[\frac{\mu'+\nu'}{r}\right]g_{tt}=[-A(r)-B(r)]\,g_{tt}$$

$$\tilde{R}_{rr}=-\frac{1}{2}e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4}+\frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right]+\frac{1}{2}e^{-\mu}\left[\frac{\mu'+\nu'}{r}\right]g_{rr}=[-A(r)+B(r)]\,g_{rr}$$

$$\tilde{R}_{\theta\theta}=\frac{1}{2}e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4}+\frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right]g_{\theta\theta}=A(r)\,g_{\theta\theta}$$

$$\tilde{R}_{\varphi\varphi}=\frac{1}{2}e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4}+\frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right]g_{\varphi\varphi}=A(r)\,g_{\varphi\varphi}$$

avec $A(r)=\frac{1}{2}e^{-\mu}\left[\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'(\mu'-\nu')}{4}+\frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right]$ et $B(r)=\frac{1}{2}e^{-\mu}\left[\frac{\mu'+\nu'}{r}\right]$

qui seront nulles pour $A(r)=0$ et $B(r)=0$.

La deuxième relation est réalisée pour : $\nu'=-\mu'$ que l'on reporte dans la première :

$$e^{-\mu}\left[-\frac{\mu''}{2}+\frac{\mu'^2}{2}+\frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right]=0 \Leftrightarrow \frac{(e^{-\mu}-1)''}{2}-\frac{e^{-\mu}-1}{r^2}=0$$

qui admet comme solution :

$$e^{-\mu}=1+\frac{\alpha}{r}+\beta r^2 \qquad \text{avec } \alpha,\beta \text{ des constantes.}$$

On peut maintenant en déduire la valeur de la constante d'accélération d'expansion :

$$\Lambda^{acc}=-\frac{1}{4}R=\frac{1}{2}e^{-\mu}\left[-\frac{\mu''}{2}+\frac{\mu'^2}{2}-2\frac{\mu'}{r}-\frac{e^{\mu}-1}{r^2}\right]=\left[\frac{(e^{-\mu}-1)'}{r}+\frac{e^{-\mu}-1}{r^2}\right]=3\beta$$

Ce qui aboutit à la même solution : $e^{\nu}=e^{-\mu}=1+\frac{\alpha}{r}+\frac{\Lambda^{acc}}{3}r^2$

SOLUTIONS DE FRIEDMANN

En cosmologie, les équations de la Relativité Générale sont basées sur la métrique de Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker qui dépend du facteur d'échelle ($a(t)$) et d'une constante (k) qui reflète le type de courbure de l'Univers (-1 : ouverte ; 0 : nulle ; 1 : fermée). :

$$ds^2 = g_{00}\, c^2 dt^2 + g_{11}\, dr^2 + g_{22}\, d\theta^2 + g_{33}\, d\varphi^2 \qquad \text{avec}$$
$$g_{00} = 1\ ;\ g_{11} = -\frac{a(t)}{1-kr^2}\ ;\ g_{22} = -a(t) r^2\ ;\ g_{33} = -a(t) r^2 \sin^2\theta$$

Avec cette métrique, on obtient, pour les composantes non nulles du tenseur de Ricci et la courbure scalaire :

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{c^2 a}\, g_{00}\ ; R_{ii} = -\frac{2kc^2 + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}}{c^2 a^2}\, g_{ii}\ ; R = -6\frac{kc^2 + \dot{a}^2 + a\ddot{a}}{c^2 a^2}$$

Le tenseur impulsion-énergie est celui d'un fluide parfait :

$$T_{\mu\nu} = \frac{(\rho c^2 + P) V_\mu V_\nu}{c^2} - P\, g_{\mu\nu}$$

qui s'écrit, dans les coordonnées co-mobiles :

$$T_{00} = \rho c^2 g_{00}\ ; T_{ii} = -P g_{ii}\ ; T = \rho c^2 - 3P$$

Formulation actuelle

En appliquant les équations ($RG_{\kappa\Lambda}$), cela conduit aux équations de (Friedmann, 1922) :

$$\begin{cases} R_{00} - \frac{1}{2} g_{00}\, R = \kappa\, T_{00} + \Lambda^{acc} g_{00} \\ R_{ii} - \frac{1}{2} g_{ii}\, R = \kappa\, T_{ii} + \Lambda^{acc} g_{ii} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\frac{kc^2 + \dot{a}^2}{c^2 a^2} = \kappa\, \rho c^2 + \Lambda^{acc} \\ \frac{kc^2 + \dot{a}^2 + 2\, a\ddot{a}}{c^2 a^2} = -\kappa\, P + \Lambda^{acc} \end{cases}$$

Nouvelle formulation

On a, comme composantes des tenseurs à trace nulle :

$$\tilde{R}_{00} = 3\frac{kc^2 + \dot{a}^2 - a\ddot{a}}{2c^2 a^2}\, g_{00}\ ; \tilde{R}_{ii} = -\frac{kc^2 + \dot{a}^2 - a\ddot{a}}{2c^2 a^2}\, g_{ii} ; \tilde{T}_{00} = 3\frac{\rho c^2 + P}{4} g_{00}\ ; \tilde{T}_{ii} = -\frac{\rho c^2 + P}{4} g_{ii}$$

Ainsi, les équations (RGR_κ) conduisent à une seule et même équation :

$$\tilde{R}_{00} = \kappa\, \tilde{T}_{00} \Leftrightarrow \tilde{R}_{ii} = \kappa\, \tilde{T}_{ii}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{\frac{kc^2 + \dot{a}^2 - a\ddot{a}}{c^2 a^2} = \kappa \frac{\rho c^2 + P}{2}}$$

et la valeur de la constante d'accélération d'expansion :

$$\Lambda^{acc} = -\tfrac{1}{4}(R + \kappa\, T) = 3\frac{kc^2 + \dot{a}^2 + a\ddot{a}}{2c^2 a^2} - \kappa\, \frac{\rho c^2 - 3P}{4}$$

peut prendre différentes formes en la combinant avec l'équation précédente :

$$\boxed{\begin{aligned} \Lambda^{acc} &= 3\,\frac{kc^2+\dot{a}^2}{c^2a^2} - \kappa\,\rho c^2 \\ &= \frac{kc^2+\dot{a}^2+2\,a\ddot{a}}{c^2a^2} + \kappa\,P \\ &= 3\,\frac{\ddot{a}}{c^2a} + \kappa\frac{\rho c^2+3P}{2} \end{aligned}}$$

Et l'on reconnait dans les deux premières expressions de Λ^{acc}, les équations de Friedmann.

Voila, on pourrait multiplier les exemples, pour arriver au même résultat : La nouvelle formulation conduit aux mêmes solutions et donc aux mêmes prédictions. Désormais, c'est au rasoir d'Ockham de faire son choix.

Et l'énergie noire dans tout ca ?

Sire, je n'ai pas eu besoin de cette hypothèse…

BIBLIOGRAPHIE

Einstein, A. (1915). « Die Feldgleichungen der Gravitation ». *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* , 844-847.

Einstein, A. (1917). « Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie ». *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte* , 142-152.

Friedmann, A. (1922). « Über die Krümmung des Raumes ». *Zeitschrift für Physik, Volume 10* , 377-386.

Hubble, E. (1929). « A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae ». *National Academy of Sciences, Volume 15* , 168-173.

Peebles, P. &. (2003). « The Cosmological Constant and Dark Energy ». *Reviews of Modern Physicsl, Volume 75* , 559.

Perlmutter, S. &. (1999). « Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae ». *The Astrophysical Journal, Volume 517* , 565-586.

Riess, A. G. (1998). « Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant ». *The Astronomical Journal, Volume 116* , 1009-1038.

Schwarzschild, K. (1916). « Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie ». *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungberichte* , 189-196.