Хмельник С. И.

Электромагнитная волна в проводе переменного тока

Аннотация

Предлагается решение уравнений Максвелла для провода переменного тока. Рассматривается структура токов и потоков энергии.

Оглавление

1. Вступление

В [1] дано непротиворечивое решение уравнений Максвелла для вакуума. Ниже предлагается аналогичное решение уравнений Максвелла для провода переменного тока.

Уравнения Максвелла в общем случае в системе СГС имеют вид [2]:

$$\mathrm{rot}(E)+\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}=0, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}(H)-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t}-\frac{4\pi}{c}J=0, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}(E)=0, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}(H)=0, \tag{4}$$

$$J=\frac{1}{\rho}E, \tag{5}$$

где

$J,\ H,\ E$ - ток проводимости, магнитная и электрическая напряженности соответственно,

$\varepsilon,\ \mu,\ \rho$ - диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, удельное сопротивление материала провода.

Далее эти уравнения применяются для анализа структуры переменного тока в проводе. При синусоидальном токе в проводе с удельной индуктивностью L и удельным сопротивлением ρ напряженность и ток связаны соотношением вида

$$J = \frac{1}{\rho + i\omega L}E = \frac{\rho - i\omega L}{\rho^2 + (\omega L)^2}E .$$

Отсюда при $\rho << \omega L$ находим:

$$I \approx \frac{-i}{\omega L}E .$$

Следовательно, для анализа структуры синусоидального тока в проводе при достаточно высокой частоте условием (5) можно пренебрегать. При этом необходимо решать систему уравнений (1-4), где известен ток J_z, протекающий вдоль провода, т.е. проекция вектора J на ось oz.

2. Решение системы уравнений Максвелла

Рассмотрим решение системы уравнений Максвелла (1.1-1.4) для провода. В системе цилиндрических координат $r,\ \varphi,\ z$ эти уравнения имеют вид [3]:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = v\frac{dH_r}{dt}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = v\frac{dH_\varphi}{dt}, \qquad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = v\frac{dH_z}{dt}, \qquad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = q\frac{dE_r}{dt} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = q\frac{dE_\varphi}{dt}, \qquad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r}+\frac{\partial H_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}=q\frac{dE_z}{dt}+\frac{4\pi}{c}J_z. \qquad (8)$$

где

$$v=-\mu/c, \qquad (9)$$

$$q=\varepsilon/c, \qquad (10)$$

Далее рассматривается только монохроматическое решение. Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co=\cos(\alpha\varphi+\chi z+\omega t), \qquad (11)$$

$$si=\sin(\alpha\varphi+\chi z+\omega t), \qquad (12)$$

где $\alpha,\ \chi,\ \omega$ – некоторые константы.

Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$H_r.=h_r(r)co, \qquad (13)$$

$$H_\varphi.=h_\varphi(r)si, \qquad (14)$$

$$H_z.=h_z(r)si, \qquad (15)$$

$$E_r.=e_r(r)si, \qquad (16)$$

$$E_\varphi.=e_\varphi(r)co, \qquad (17)$$

$$E_z.=e_z(r)co, \qquad (18)$$

$$J_r.=j_r(r)co, \qquad (19)$$

$$J_\varphi.=j_\varphi(r)si, \qquad (20)$$

$$J_z.=j_z(r)si, \qquad (21)$$

где $h(r),\ e(r),\ j(r)$ - некоторые функции координаты r.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-21) преобразуют систему уравнений (1-8) с четырьмя аргументами $r,\ \varphi,\ z,\ t$ в систему уравнений с одним аргументом r и неизвестными функциями $h(r),\ e(r),\ j(r)$.

Далее предполагается, что существует только ток (21), направленный вдоль оси Z. Этот ток создается внешним источником. Показывается, что наличие этого тока является причиной существования электромагнитной волны в проводе.

В приложении 1 показано, что у системы (1.1-1.4) при условиях (13-21) **<u>существует</u>** решение, имеющее следующий вид:

$$e_\varphi(r)=Ar^{\alpha-1}, \qquad (22)$$

$$e_r(r)=e_\varphi(r), \qquad (23)$$

$$e_z(r) = \hat{\chi}\frac{(M-1)}{\sqrt{M}}\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha c} r e_\varphi(r), \tag{24}$$

$$h_r(r) = \hat{\chi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} e_\varphi(r), \tag{25}$$

$$h_\varphi(r) = -h_r(r), \tag{26}$$

$$h_z(r) = 0, \tag{27}$$

$$j_z(r) = \frac{\varepsilon\omega}{4\pi} e_z(r) = \frac{\chi\varepsilon\omega}{2\pi\alpha} A r^\alpha, \tag{28}$$

где A, c, α, ω – константы.

Сравним решение это решение, и решение, полученное в [1] для вакуума – см. табл. 1. Видно, что (несмотря на идентичность уравнений) эти решения существенно отличаются. Эти различия вызваны наличием внешней электродвижущей силы, в которой $e_z(r) \neq 0$. Она вызывает продольный ток, который существенно изменяет структуру электромагнитной волны.

Таблица 1.

	глава 1	глава 2
χ	$\hat{\chi}\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$	$\hat{\chi}\frac{\omega}{c}\sqrt{M\varepsilon\mu}$, $\hat{\chi} = \pm 1$
j_z	$\mathbf{0}$	$\frac{\varepsilon\omega}{4\pi} e_z(r)$
e_r, e_φ	$Ar^{\alpha-1}$	$Ar^{\alpha-1}$
e_z	$\mathbf{0}$	$\hat{\chi}\frac{(M-1)}{\sqrt{M}}\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha c} r e_\varphi(r)$
h_r	$-e_\varphi(r)$	$\hat{\chi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} e_\varphi(r)$
h_φ	$-h_r(r)$	$-h_r(r)$
h_z	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

3. Напряженности и токи в проводе

Далее мы будем рассматривать только функции $j_z(r)$, $e_r(r)$, $e_\varphi(r)$, $e_z(r)$, $h_r(r)$, $h_\varphi(r)$, $h_z(r)$. Все величины приводятся в системе СГС.

На рис. 1 показаны, например, графики этих функций при $A=1$, $\alpha=3$, $\mu=1$, $\varepsilon=1$, $\omega=300$. Величина $j_z(r)$ показана в единицах $(A/мм\^2)$ – в отличие от всех остальных величин, показанных в системе СГС. <u>Увеличение функции $j_z(r)$ при увеличении радиуса объясняет скин-эффект.</u>

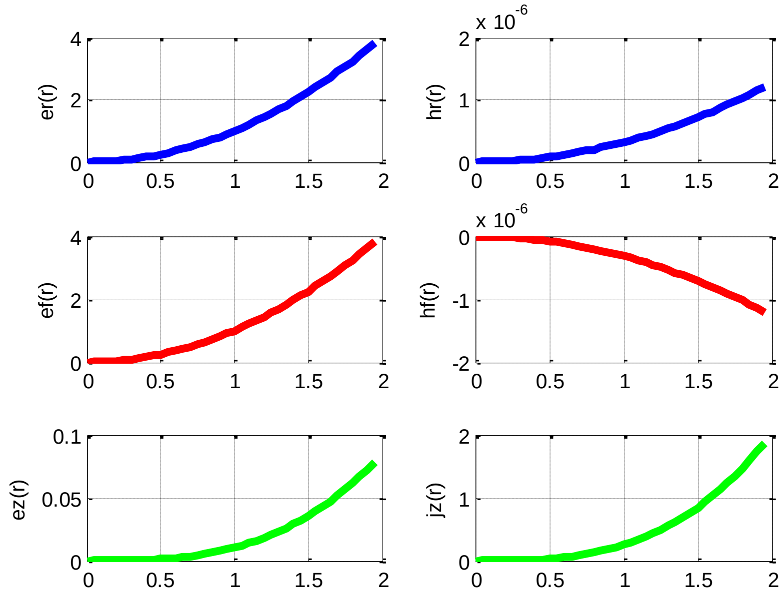

Fig.1. (SSMB)

Плотность энергии электромагнитной волны определяется как сумма модулей векторов E, H из (2.13, 2.14, 2.16, 2.17, 2.23, 2.24) и равна

$$W=E^2+H^2=(e_r(r)si)^2+(e_\varphi(r)si)^2+(h_r(r)co)^2+(h_\varphi(r)co)^2$$

или

$$W=(e_r(r))^2+(e_\varphi(r))^2 \quad (1)$$

- см. также рис. 1. Таким образом, <u>плотность энергии электромагнитной волны постоянна на всех точках окружности данного радиуса</u>.

На рис. 2 для демонстрации сдвига фаз между компонентами волны показаны функции

$$co=\cos(\alpha\varphi+\chi z+\omega t), \quad si=\sin(\alpha\varphi+\chi z+\omega t)$$

или эквивалентные им при $z=ct$ функции

$$co=\cos\left(\alpha\varphi+\frac{2\omega}{c}z\right), \qquad si=\sin\left(\alpha\varphi+\frac{2\omega}{c}z\right) \tag{4a}$$

или

$$co=\cos(\alpha\varphi+2\chi z), \qquad si=\sin(\alpha\varphi+2\chi z) \tag{4в}$$

При $\varphi=0,\ 2\omega/c=0.1$ эти функции принимают вид $co=\cos(z)$, $si=\sin(z)$ и показаны на рис. 2.

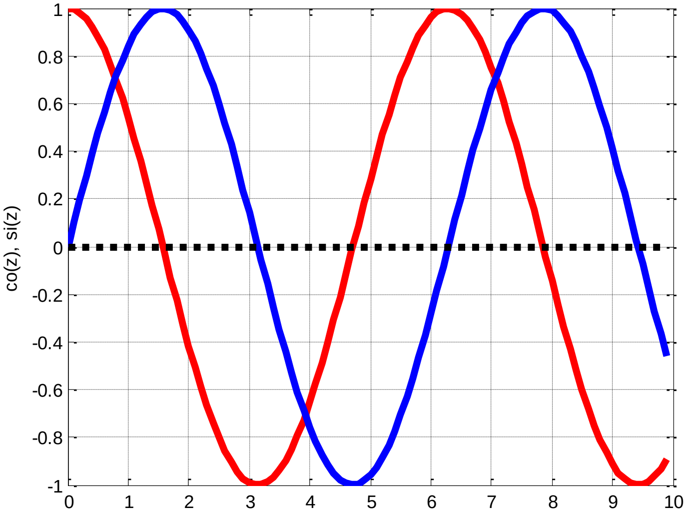

Fig.2. (SSMB)

Найдем среднее значение плотности амплитуды тока в проводе с радиусом R:

$$\overline{J_z}=\frac{1}{\pi R^2}\iint_{r,\varphi}[J_z]dr\cdot d\varphi. \tag{5}$$

С учетом (2.21) найдем:

$$\overline{J_z}=\frac{1}{\pi R^2}\iint_{r,\varphi}[j_z(r)si]dr\cdot d\varphi \tag{5a}$$

Далее найдем:

$$\overline{J_z}=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R j_z(r)\left(\int_0^{2\pi}(si\cdot d\varphi)\right)dr\cdot$$

С учетом (2) найдем:

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\alpha\pi R^2}\int_0^R j_z(r)\left(\cos(2\alpha\pi + \frac{2\omega}{c}z) - \cos(\frac{2\omega}{c}z)\right)dr$$

или

$$\overline{J_z} = \frac{1}{\alpha\pi R^2}\left(\cos(2\alpha\pi) - 1\right)\cdot J_{zr}\,, \tag{6}$$

где

$$J_{zr} = \int_0^R j_z(r)dr\,. \tag{7}$$

С учетом (2.28) найдем:

$$J_{zr} = \frac{A\chi\varepsilon\omega}{2\pi\alpha}\int_0^R \left(r^\alpha\right)dr \tag{9}$$

или

$$J_{zr} = \frac{A\chi\varepsilon\omega}{2\pi\alpha(\alpha+1)}R^{\alpha+1}\,. \tag{10}$$

На рис. 3 показана функция $\overline{J_z}(\alpha)$ (6, 10) при $A=1$, $\chi=0.03$. На этом рисунке пунктирная и сплошная кривые относятся соответственно к $R=2$ и $R=1.75$. Из (6, 8) и рис. 3 следует, что при определенном распределении величины $j_z(r)$ <u>среднее значение плотности амплитуды тока</u> $\overline{J_z}$ существенно зависит от α.

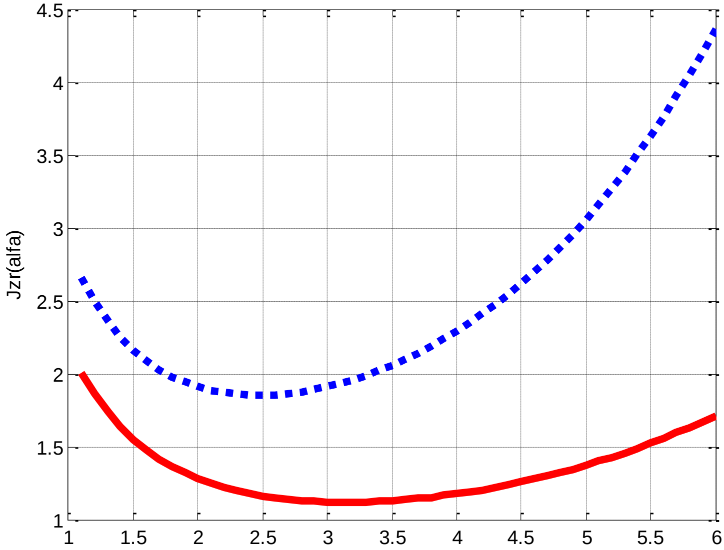

Fig.3. (SSMB)

Ток определяется как

$$J = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t}, \tag{9}$$

или, с учетом (2.13-2.21):

$$J_r. = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_r(r) co, \tag{10}$$

$$J_\varphi. = \frac{\varepsilon\omega}{c} e_\varphi(r) si, \tag{11}$$

$$J_z. = \left(\frac{\varepsilon\omega}{c} e_z(r) + j_z\right) si. \tag{12}$$

Можно говорить о линиях этих токов. Так, например, ток $J_z.$ течет по прямым, параллельным оси провода. Мы рассмотрим линию суммарного тока.

Можно полагать, что скорость распространения тока смещения не зависит от направления тока. В частности, при фиксированном радиусе путь, пройденный током по окружности, и путь, пройденный им по вертикали будут равны. Следовательно, при фиксированном радиусе можно полагать, что

$$z = \gamma \cdot \varphi \tag{13}$$

где γ – константа. На основе этого предположения можно преобразовать функции (4в) к виду

$$co = \cos(\alpha\varphi + 2\chi\gamma\varphi), \qquad si = \sin(\alpha\varphi + 2\chi\gamma\varphi) \tag{14}$$

и построить соответствующую траекторию тока.

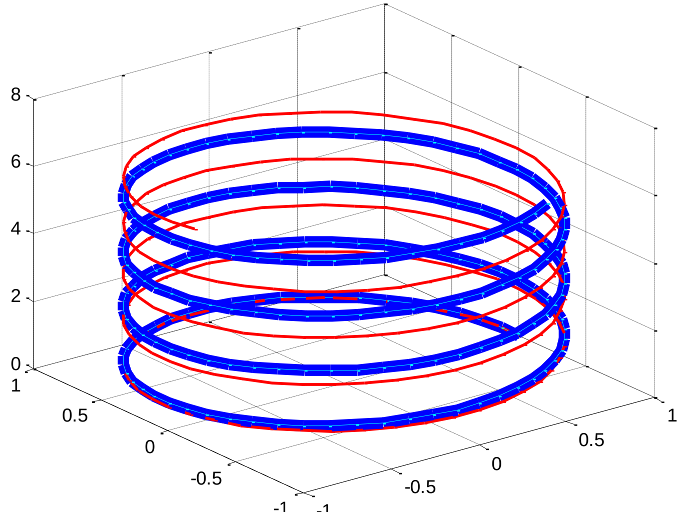

Fig.4. (SSMB)

На рис. 4 показаны две винтовые линии суммарного тока, описываемые функциями вида

$$co = \cos((\alpha+2)\varphi), \qquad si = \sin((\alpha+2)\varphi).$$

На рис. 4 толстая линия построена при $\alpha = 1.8$, а тонкая линия - при $\alpha = 2.5$.

Из (2.19-2.21, 14) следует, что токи будут сохранять свою величину при данных $r,\ \varphi$ (независимо от z) в том случае, если постоянной является величина

$$\beta = (\alpha + 2\chi\gamma). \tag{15}$$

Далее на основе (14, 15) будем применять формулы

$$co = \cos(\beta\varphi), \qquad si = \sin(\beta\varphi). \tag{16}$$

4. Потоки энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга определяется формулой

$$S = \eta E \times H\ , \tag{1}$$

где

$$\eta = c/4\pi. \tag{2}$$

В цилиндрических координатах $r,\ \varphi,\ z$ плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты $S_r,\ S_\varphi,\ S_z$, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\varphi H_z - E_z H_\varphi \\ E_z H_r - E_r H_z \\ E_r H_\varphi - E_\varphi H_r \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Из (2.13-2.18) следует, что поток, проходящий через данное сечение провода в данный момент времени,

$$\overline{S} = \begin{bmatrix} \overline{S_r} \\ \overline{S_\varphi} \\ \overline{S_z} \end{bmatrix} = \eta \iint\limits_{r,\varphi} \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} s_r &= (e_\varphi h_z - e_z h_\varphi) \\ s_\varphi &= (e_z h_r - e_r h_z). \\ s_z &= (e_r h_\varphi - e_\varphi h_r) \end{aligned} \tag{6}$$

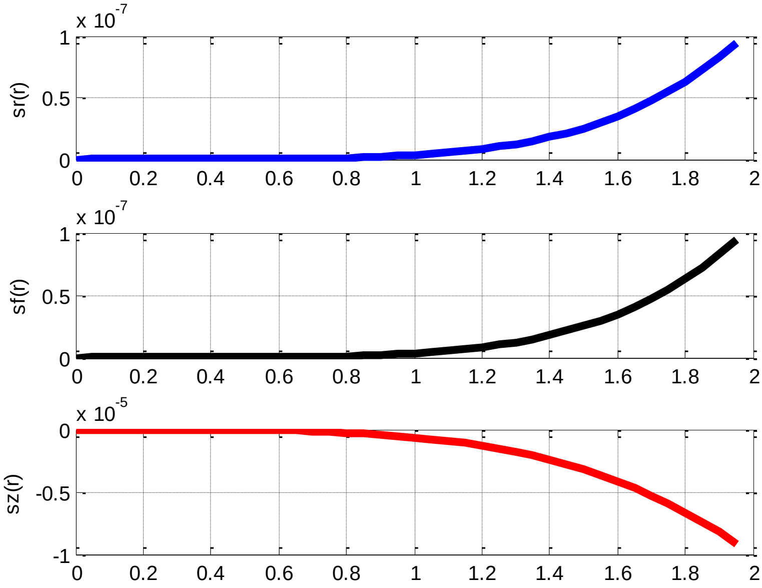

Fig.5. (SSMB)

Этим величинам равна плотность того потока энергии, который при данном радиусе распространяется по радиусу, по окружности и вдоль оси oz соответственно. На рис. 5 показаны графики этих функций в зависимости от радиуса при $A=1,\ \alpha=3,\ \mu=1,\ \varepsilon=1,\ \omega=300$.

Поток энергии вдоль оси oz и равен

$$\overline{S_z}=\eta\iint\limits_{r,\varphi}[s_z\cdot si\cdot co]dr\cdot d\varphi. \tag{7}$$

Найдем s_z. Из (6, 2.22, 2.23, 2.26) получаем:

$$s_z=-2e_\varphi h_r=-\hat{\chi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}}e_\varphi^2(r) \tag{9}$$

или

$$s_z=Qr^{2\alpha-2}, \tag{10}$$

где

$$Q=A^2\hat{\chi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}} \tag{11}$$

В приложении 2 из [1] показано, что из (7) следует, что

$$\overline{S}=\frac{c}{16\alpha\pi}(1-\cos(4\alpha\pi))\int\limits_r(s_z(r)dr). \tag{12}$$

Пусть R – радиус цилиндрического провода. Тогда из (12) получаем, как в главе 1,

$$S_{\text{int}} = \int_{r=0}^{R} (s_z(r)dr) = \frac{Q}{2\alpha - 1} R^{2\alpha-1}, \qquad (13)$$

$$S_{alfa} = \frac{1}{\alpha}(1-\cos(4\alpha\pi)), \qquad (14)$$

$$\overline{S} = \frac{c}{16\pi} S_{alfa} S_{\text{int}}. \qquad (15)$$

Объединяя формулы (11-15), получаем:

$$\overline{S_z} = \frac{c}{16\pi}\frac{1}{\alpha}(1-\cos(4\alpha\pi))A^2\sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}}\frac{\hat{\chi}}{2\alpha-1}R^{2\alpha-1}$$

или

$$\overline{S_z} = \frac{\hat{\chi}A^2 c(1-\cos(4\alpha\pi))}{8\pi\alpha(2\alpha-1)}\sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}}R^{2\alpha-1}. \qquad (16)$$

Этот поток энергии не зависит от координаты и потому сохраняет свое значение на протяжении всего провода.

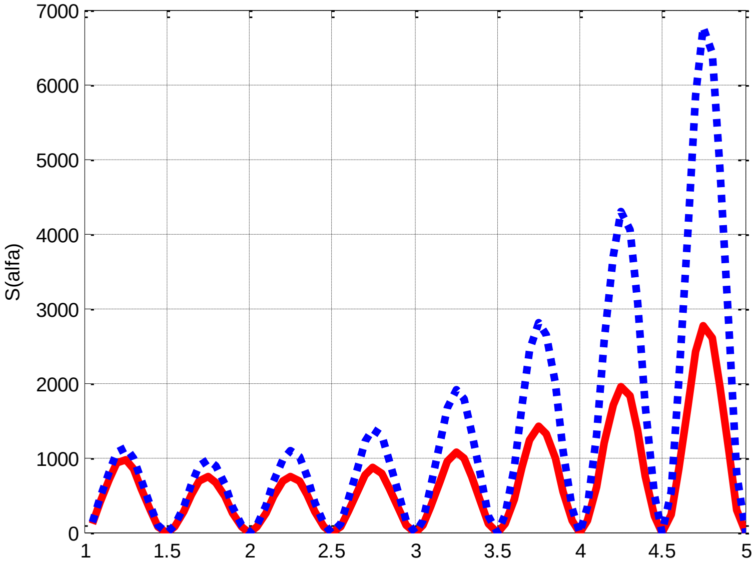

Fig.7. (SSMB)

На рис. 7 показана функция $\overline{S}(\alpha)$ (16) при $A=1,\ M=10\text{^}13,\ \mu=1,\ \varepsilon=1$. На рис. 7 пунктирная и сплошная кривые относятся соответственно к $R=2$ и $R=1.8$.

Поскольку поток энергии и энергия связаны соотношением $S = W \cdot c$, то из (15) можно найти энергию в единице длины провода:

$$\overline{W} = \frac{A}{16\pi} S_{alfa} S_{\text{int}}. \tag{17}$$

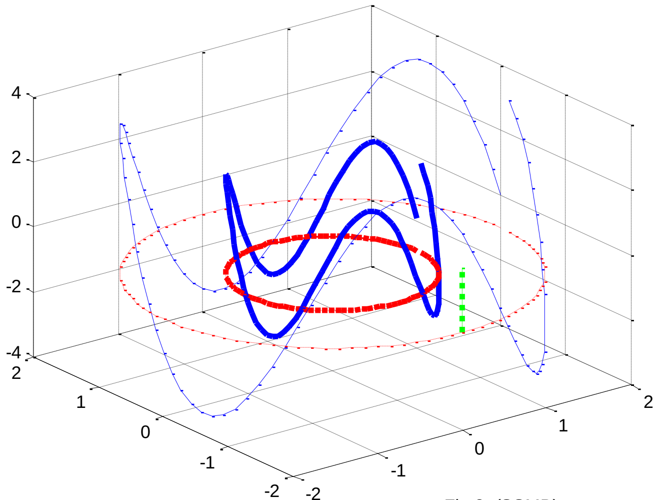

Fig.8. (SSMB)

Как следует из (7, 3.16), плотность потока энергии на окружности данного радиуса определяется функцией вида

$$\overline{S}_{rz} = s_z \sin(2\beta\varphi). \tag{18}$$

На рис. 8 показана функция (18) при $s_z = r^{2\alpha-2}$ - см. (10). Показаны две кривые при $\alpha = 1.4$ и двух значениях радиуса: $r = 1$ (толстая линия) и $r = 2$ (тонкая линия).

На рис. 9 показана функция S (18) на всей плоскости сечения провода при $s_z = r^{2\alpha-2}$ и $\alpha = 1.4$. При этом в верхнем окне показана та часть графика функции S, где $S > 0$ - $Splus$, а в нижнем окне показана та часть графика функции S, где $S < 0$ - $Sminus$, причем эта часть для наглядности показана с обратным знаком. На этом рисунке видно, что

$$S = Splus + Sminus > 0,$$

т.е. суммарный вектор плотности потока направлен в сторону увеличения z - в сторону нагрузки. Однако существуют две составляющие этого вектора: составляющая $Splus$, направленная в сторону нагрузки, и составляющая $Sminus$, направленная в сторону источника тока. Эти составляющие потока переносят активную и реактивную энергию соответственно.

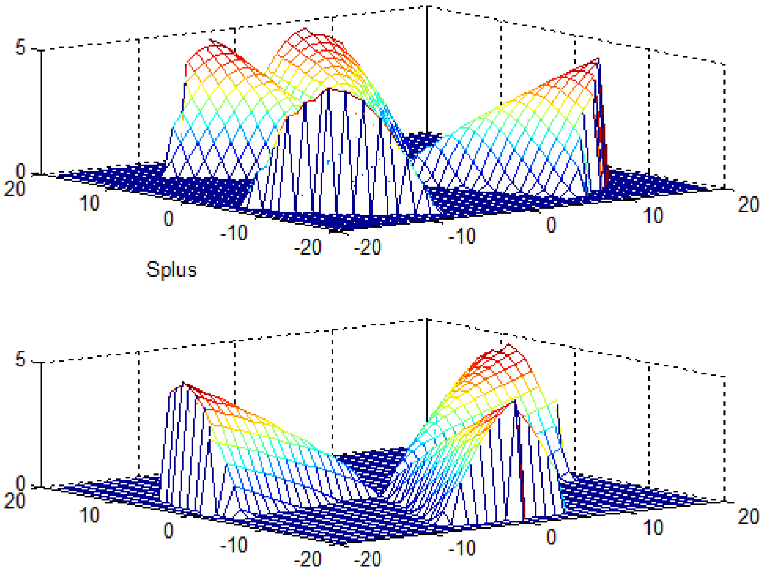

Fig.9. (SSMB)

Итак,

- плотность потока неравномерно распределена по сечению потока – существует картина распределения плотности потока по сечению провода;
- эта картина сохраняется при перемещении по оси oz;
- поток энергии (15), проходящий через площадь сечения, не зависит от t, z и это соответствует закону сохранения энергии,
- поток энергии имеет две противоположно направленные составляющие, которые переносят активную и реактивную энергии; таким образом, отсутствует необходимость в представлении мнимого вектора Пойнтинга.

5. Ток и поток энергии в проводе

Можно сказать, что поток массовых частиц (массовый ток) *"несёт"* поток кинетической энергии, которая выделяется при столкновении с преградой. Точно также электрический ток *"несёт"* поток электромагнитной энергии, которая выделяется в нагрузке. Это утверждение обсуждается и обосновывается в [4-9]. Отличие между этими двумя случаями состоит в том, что величина массового тока полностью определяет величину кинетической энергии. Однако во втором случае величина электрического тока НЕ определяет величину электромагнитной энергии, которая выделяется в нагрузке. Следовательно, переносимая величина электромагнитной энергии – поток энергии определяется структурой тока. Покажем это.

Как следует из (3.10), среднее значение плотности амплитуды тока $\overline{J_z}$ в проводе с данным радиусом R зависит от двух параметров: α и A. При данной плотности можно найти зависимость между этими параметрами, которая следует из (3.10):

$$A=\frac{2\pi\alpha(\alpha+1)}{\chi\varepsilon\omega}R^{-\alpha-1}J_{zr}. \tag{1}$$

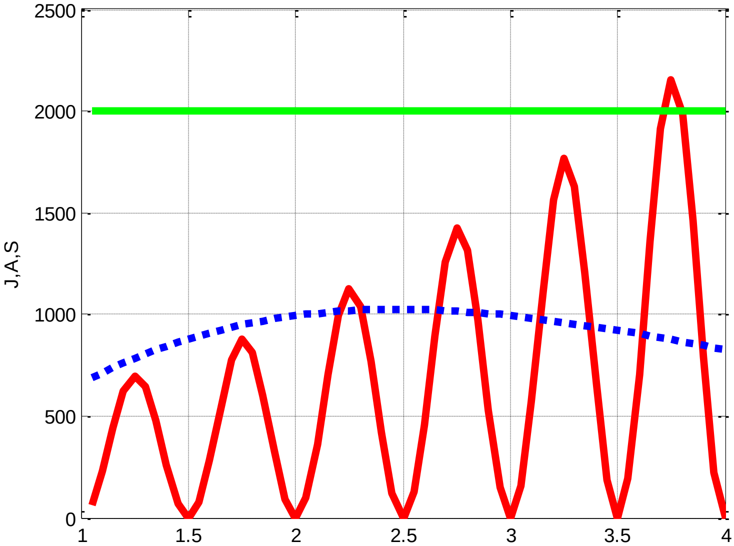

Fig.10. (SSMB)

Как следует из (4.16), плотность потока энергии S вдоль провода также зависит от двух параметров: α и A. На рис. 10 показаны зависимости (1) и (4.16) при данных $\overline{J_z}=2$, $R=2$. При этом прямая линия изображает постоянную плотность тока (в масштабе 1000), сплошная линия – плотность потока, пунктирная линия – параметр A (в масштабе 1000). Здесь A вычисляется по (1), плотность потока энергии S по (4.16) при данном A. Видно, что при одной и той же плотности тока плотность потока может принимать совершенно различные значения.

6. Обсуждение

Показано, что в проводе переменного тока распространяется электромагнитная волна, а математическое описание этой волны является решение уравнений Максвелла.

Это решение во многом совпадает с тем, которое ранее найдено для электромагнитной волны, распространяющейся в вакууме [1].

Оказалось, что ток распространяется в проводе по спиральной траектории, а плотность спирали зависит от плотности потока электромагнитной энергии, передаваемой по проводу в нагрузку, т.е. от передаваемой мощности. При этом основной поток энергии распространяется вдоль и внутри провода.

Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.1-2.8) в виде функций (2.13-2.18). Далее производные по r будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.1-2.8) с учетом (2.11, 2.12) в виде

$$\frac{e_r(r)}{r}+e_r'(r)-\frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha-\chi\cdot e_z(r)=0\,, \tag{1}$$

$$-\frac{1}{r}\cdot e_z(r)\alpha+e_\varphi(r)\chi-\frac{\mu\omega}{c}h_r=0, \tag{2}$$

$$e_r(r)\chi-e_z'(r)+\frac{\mu\omega}{c}h_\varphi=0, \tag{3}$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r}+e_\varphi'(r)-\frac{e_r(r)}{r}\cdot\alpha+\frac{\mu\omega}{c}h_z=0, \tag{4}$$

$$\frac{h_r(r)}{r}+h_r'(r)+\frac{h_\varphi(r)}{r}\alpha+\chi\cdot h_z(r)=0\,, \tag{5}$$

$$\frac{1}{r}\cdot h_z(r)\alpha-h_\varphi(r)\chi-\frac{\varepsilon\omega}{c}e_r=0, \tag{6}$$

$$-h_r(r)\chi-h_z'(r)+\frac{\varepsilon\omega}{c}e_\varphi=0, \tag{7}$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r}+h_\varphi'(r)+\frac{h_r(r)}{r}\cdot\alpha+\frac{\varepsilon\omega}{c}e_z(r)=\frac{4\pi}{c}j_z(r), \tag{8}$$

Умножим (5) на $\left(-\frac{\mu\omega}{c\chi}\right)$. Тогда получим:

$$-\frac{\mu\omega}{c\chi}\frac{h_r(r)}{r}-\frac{\mu\omega}{c\chi}h_r'(r)-\frac{\mu\omega}{c\chi}\frac{h_\varphi(r)}{r}\alpha-\frac{\mu\omega}{c}h_z(r)=0\,. \tag{9}$$

Сравнивая (4) и (9), замечаем, что они совпадают, если

$$\left\{\begin{array}{l} h_z \neq 0 \\ -\dfrac{\mu\cdot\omega}{c\chi} h_\varphi(r) = e_r(r), \\ \dfrac{\mu\cdot\omega}{c\chi} h_r(r) = e_\varphi(r), \end{array}\right\} \tag{9a}$$

или, если

$$\left\{\begin{array}{l} h_z = 0, \\ -M\dfrac{\mu\cdot\omega}{c\chi} h_\varphi(r) = e_r(r), \\ M\dfrac{\mu\cdot\omega}{c\chi} h_r(r) = e_\varphi(r), \end{array}\right\} \tag{9в}$$

где - M - константа. Далее будем пользоваться формулами

$$-M\frac{\mu\cdot\omega}{c\chi} h_\varphi(r) = e_r(r), \tag{10}$$

$$M\frac{\mu\cdot\omega}{c\chi} h_r(r) = e_\varphi(r), \tag{11}$$

где - $M=1$ для случая (9а). Перепишем (2, 3, 6, 7) в виде:

$$e_z(r) = \frac{\chi r}{\alpha} e_\varphi(r) - \frac{r}{\alpha}\frac{\mu\omega}{c} h_r(r), \tag{12}$$

$$e_z'(r) = e_r(r)\chi + \frac{\mu\omega}{c} h_\varphi(r), \tag{13}$$

$$h_z(r) = \frac{\chi r}{\alpha} h_\varphi(r) + \frac{r}{\alpha}\frac{\varepsilon\cdot\omega}{c} e_r(r), \tag{14}$$

$$h_z'(r) = -h_r(r)\chi + \frac{\varepsilon\cdot\omega}{c} e_\varphi(r), \tag{15}$$

Подставим (10, 11) в уравнения (12, 13). Тогда получим:

$$e_z(r) = \left(\chi - \frac{\chi}{M}\right)\frac{r}{\alpha} e_\varphi(r) = \frac{(M-1)}{M}\frac{\chi r}{\alpha} e_\varphi(r), \tag{16}$$

$$e_z'(r) = \left(\chi - \frac{\chi}{M}\right) e_r(r)\chi = \frac{(M-1)}{M}\chi e_r(r). \tag{17}$$

Подставим (10, 11) в уравнения (14, 15). Тогда получим:

$$h_z(r) = \left(\chi - M\frac{\varepsilon\cdot\omega}{c}\frac{\mu\cdot\omega}{c\chi}\right)\frac{r}{\alpha} h_\varphi(r) = \frac{r}{\alpha c^2\chi}\left(c^2\chi^2 - M\varepsilon\mu\omega^2\right) h_\varphi(r), \tag{18}$$

$$h_z'(r)=\left(-\chi+M\frac{\varepsilon\cdot\omega}{c}\frac{\mu\cdot\omega}{c\chi}\right)h_r(r)=\frac{-1}{c^2\chi}\left(c^2\chi^2-M\varepsilon\mu\omega^2\right)h_r(r). \quad (19)$$

Дифференцируя (16) и сравнивая с (17), находим:

$$\frac{(M-1)}{M}\frac{\chi}{\alpha}\left(re_\varphi(r)\right)'=\frac{(M-1)}{M}\chi e_r(r)$$

или

$$\left(re_\varphi(r)\right)'=\alpha e_r(r)$$

или

$$\left(e_\varphi(r)+r\cdot e_\varphi'(r)\right)=\alpha e_r(r). \quad (20)$$

Из (1, 16) находим:

$$\frac{e_r(r)}{r}+e_r'(r)-\frac{e_\varphi(r)}{r}\alpha-\frac{(M-1)}{M}\chi^2\frac{r}{\alpha}e_\varphi(r)=0 \quad (23)$$

Из физических соображений следует принять, что

$$h_z(r)=0. \quad (24)$$

Тогда из (18) находим:

$$\left(c^2\chi^2-M\varepsilon\mu\omega^2\right)=0$$

или

$$\chi=\hat{\chi}\frac{\omega}{c}\sqrt{M\varepsilon\mu},\ \ \hat{\chi}=\pm1. \quad (25)$$

Из (16, 25) находим:

$$e_z(r)=(M-1)\frac{\chi r}{\alpha}e_\varphi(r)=\frac{(M-1)}{M}\hat{\chi}\frac{\omega}{c}\sqrt{M\varepsilon\mu}\frac{r}{\alpha}e_\varphi(r)$$

или

$$e_z(r)=\hat{\chi}\frac{(M-1)}{\sqrt{M}}\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha c}re_\varphi(r) \quad (25a)$$

При $\omega<<c$ из (25) находим, что

$$|\chi|<<1. \quad (26)$$

Тогда в уравнении (23) величиной χ^2 можно пренебречь и получить уравнение вида

$$\alpha\cdot e_\varphi(r)=e_r(r)+r\cdot e_r'(r). \quad (27)$$

Из (27, 20) в силу симметрии находим:

$$e_r(r)=e_\varphi(r), \quad (28)$$

$$\alpha\cdot e_\varphi(r)=e_\varphi(r)+r\cdot e_\varphi'(r). \quad (29)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$e_\varphi(r)=Ar^{\alpha-1}, \quad (30)$$

что можно проверить подстановкой (30) в (29). Из (11, 25) находим

$$h_r(r) = \hat{\chi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}}e_\varphi(r), \tag{31}$$

а из (10, 28) находим

$$h_\varphi(r) = -h_r(r). \tag{32}$$

Наконец, из (8, 32) находим

$$j_z(r) = \frac{c}{4\pi}\left(-\frac{h_r(r)}{r} - h_r'(r) + \frac{h_r(r)}{r}\cdot\alpha + \frac{\varepsilon\omega}{c}e_z(r)\right) \tag{33}$$

С учетом (30,31) замечаем, что сумма первых трех слагаемых равна нулю, и тогда

$$j_z(r) = \frac{\varepsilon\omega}{4\pi}e_z(r). \tag{34}$$

Итак, окончательно получаем:

$$e_\varphi(r) = Ar^{\alpha-1}, \tag{30}$$

$$e_r(r) = e_\varphi(r), \tag{28}$$

$$e_z(r) = \hat{\chi}\frac{(M-1)}{\sqrt{M}}\frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\alpha c}re_\varphi(r) \tag{25a}$$

$$h_r(r) = \hat{\chi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{M\mu}}e_\varphi(r), \tag{31}$$

$$h_\varphi(r) = -h_r(r), \tag{32}$$

$$h_z(r) = 0, \tag{24}$$

$$j_z(r) = \frac{\varepsilon\omega}{4\pi}e_z(r). \tag{34}$$

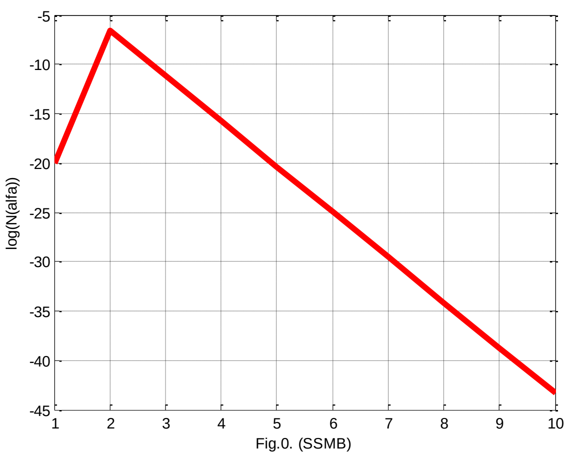

Fig.0. (SSMB)

Точность решения

Для анализа точности решения можно при данных значениях всех констант найти невязки уравнений (1-7). На рис. 0 показана зависимость логарифма среднеквадратичной невязки N от параметра α - $\ln N = f(\alpha)$ при $A=1,\ \omega=300,\ \mu=1,\ \varepsilon=1$.

Литература

Примечание: **Vixra** - viXra Funding, http://vixra.org/funding,
DNA – Доклады независимых авторов,
ISSN 2225-6717, http://dna.izdatelstwo.com/

1. Хмельник С.И. Второе решение уравнений Максвелла, ViXra, 2016-01-26, http://vixra.org/abs/1601.0292; DNA, № 35, 2016 - см. здесь.
2. Розанов Н.Н. Специальные разделы математической физики. Часть 3. Электромагнитные волны в вакууме. ИТМО. Санкт-Петербург, 2005.
3. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров, изд. «Наука», Москва, 1964, 772 с.
4. Хмельник С.И. Математическая модель электрического торнадо, ViXra, 2015-04-11, http://vixra.org/abs/1504.0088; DNA, № 33, 2015, см. здесь.
5. Хмельник С.И. Вторая структура постоянного тока, ViXra, 2015-11-21, http://vixra.org/abs/1511.0206; DNA, № 35, 2016, см. здесь.
6. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводнике с переменным током, ViXra, 2015-03-10, http://vixra.org/abs/1503.0068;
7. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводнике с постоянным током, DNA, № 32, 2015; ViXra, 2015-03-07, http://vixra.org/abs/1503.0048
8. Хмельник С.И. Структура постоянного тока, DNA, № 33, 2015; ViXra, 2015-03-29, http://vixra.org/abs/1503.0241
9. Хмельник С.И. Структура потока электромагнитной энергии в проводе с постоянным током, DNA, № 33, 2015; ViXra, 2015-04-08, http://vixra.org/abs/1504.0061