Note sur La Résolution Possible des Equations de Navier-Stokes

Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Ingénieur Géographe Général

Novembre 2015

Version 4.a

abenhadjsalem@gmail.com

Table des matières

Note sur La Résolution Possible des Equations de Navier-Stokes

Abdelmajid BEN HADJ SALEM, Ing. Géographe Général [1]

Résumé

Ce papier représente un essai de la résolution des équations de Navier-Stokes sous les hypothèses (A) du problème posé par Clay Institute (C.L. Fefferman, 2006).

1 Introduction

Comme elles sont décrites dans l'article cité ci-dessus, les équations d'Euler et de Navier-Stokes décrivent le mouvement d'un fluide dans $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3). Ces équations doivent être résolues par rapport au vecteur vitesse inconnu $u(x,t) = (u_i(x,t))_{i=1,n} \in \mathbb{R}^n$ et la pression $p(x,t) \in \mathbb{R}$, définies par la position $x \in \mathbb{R}^n$ et le temps $t \geq 0$.

On considère ici les fluides incompressibles dans $\mathbb{R}^n$. Les équations de Navier-Stokes sont données par :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t) \quad i \in \{1,.,n\} \ (x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0) \tag{1}$$

$$divu = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \ \ (x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0) \tag{2}$$

avec les conditions initiales :

$$u(x,0) = u^o(x) \ \ (x \in \mathbb{R}^n) \tag{3}$$

où $u^o(x)$ une fonction vectorielle donnée de classe C^∞, $f_i(x,t)$ sont les composantes d'une force extérieure (e.g. la pesanteur), ν est un coefficient positif (la viscosité), et Δ le laplacien en variables d'espace. Les équations d'Euler sont les équations (1), (2), (3) avec ν est égal à zéro.

L'équation (1) c'est justement la loi de Newton $f = ma$ pour un élément d'un fluide objet à une force extérieure $f = (f_i(x,t))_{i=1,n}$ et des forces dues à la pression et la friction.

L'équation (2) c'est dire que le fluide est incompressible.

1. 6, rue du Nil, Cité Soliman Er-Riadh, 8020 Soliman, Tunisia.

2 Les Equations de Navier-Stokes

Nous essayons de présenter une solution aux équations de Navier-Stokes suivant les hypothèses (A) décrites dans (C.L. Ferreman, 2006) qu'on résume ici :

* (A) **Existence et solutions lisses sur $\mathbb{R}^3$ des équations de Navier-Stokes :**

- Prendre $\nu > 0$. Soit $u^0(x)$ une fonction lisse telle que $div(u^0(x) = 0$ et vérifiant :

$$||\partial_{x_j}^{\delta} u^0(x)|| \leq C_{\delta K}(1 + ||x||)^{-K} \; sur \; \mathbb{R}^3 \quad \forall \delta, \, K \tag{4}$$

- Prendre $f \equiv 0$. Alors montrer qu'il existe des fonctions $p(x,t), u(x,t)$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3 \times [0, +\infty)$ vérifiant (1),(2),(3),(4) et :

$$\int_{\mathbb{R}^3} ||u(x,t)||^2 dx < C \; \forall t \geq 0 \tag{5}$$

On considère donc les équations de Navier-Stokes. On prend $\nu > 0$ et les $f_i \equiv 0$, alors les équations (1) s'écrivent :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nu \Delta u_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{6}$$

Soit en détaillant en considérant le cas n=3 :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} - \nu \Delta u_1 = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} - \nu \Delta u_2 = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{8}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} - \nu \Delta u_3 = -\frac{\partial p}{\partial z} \tag{9}$$

Comme :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz + \frac{\partial p}{\partial t} dt \tag{10}$$

En utilisant les équations (7-8-9), on obtient :

$$\begin{aligned} dp = &-\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \Delta u_1 + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) dx \\ &- \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \Delta u_2 + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) dy \\ &- \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} - \nu \Delta u_3 + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) dz + \frac{\partial p}{\partial t} dt \end{aligned} \tag{11}$$

Or :

$$\frac{du^2}{2} = \frac{d(u_1^2 + u_2^2 + u_3^3)}{2} = \sum_i u_i du_i = \sum_i u_i (\partial_x u_i dx + \partial_y u_i dy + \partial_z u_i dz + \partial_t u_i dt) \tag{12}$$

en notant $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$. Alors l'équation (11) devient :

$$
\begin{aligned}
-dp + \partial_t p.dt = & \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu\Delta u_1 + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3\frac{\partial u_1}{\partial z} - u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} - u_3\frac{\partial u_3}{\partial x}\right) dx \\
& + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu\Delta u_2 + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_3\frac{\partial u_2}{\partial z} - u_1\frac{\partial u_1}{\partial y} - u_3\frac{\partial u_3}{\partial y}\right) dy \\
& + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} - \nu\Delta u_3 + u_1\frac{\partial u_3}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_3}{\partial y} - u_1\frac{\partial u_1}{\partial z} - u_2\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) dz \\
& - \left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_3\frac{\partial u_3}{\partial t}\right) dt + d\left(\frac{u^2}{2}\right) \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Soit Ω le vecteur $rot(u)$, on a alors :

$$
\Omega = \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \omega_3\end{pmatrix} = \left|\begin{array}{l}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l}u_1\\ u_2\\ u_3\end{array}\right. = \begin{pmatrix}\partial_y u_3 - \partial_z u_2\\ \partial_z u_1 - \partial_x u_3\\ \partial_x u_2 - \partial_y u_1\end{pmatrix} \qquad (14)
$$

Alors l'équation (13) s'écrit comme suit :

$$
\begin{aligned}
-d\left(p + \frac{u^2}{2}\right) = -\partial_t(p + \frac{1}{2}u^2)dt + \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu\Delta u_1 - u_2\omega_3 + u_3\omega_2\right) dx + \\
\left(\frac{\partial u_2}{\partial t} - \nu\Delta u_2 + u_1\omega_3 - u_3\omega_1\right) dy + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} - \nu\Delta u_3 - u_1\omega_2 + u_2\omega_1\right) dz \qquad (15)
\end{aligned}
$$

On écrit l'équation précédente sous la forme :

$$
\begin{aligned}
d\left(p + \frac{u^2}{2}\right) = \partial_t(p + \frac{1}{2}u^2)dt + & \left(-\frac{\partial u_1}{\partial t} + \nu\Delta u_1 + u_2\omega_3 - u_3\omega_2\right) dx + \\
& \left(-\frac{\partial u_2}{\partial t} + \nu\Delta u_2 - u_1\omega_3 + u_3\omega_1\right) dy \\
& + \left(-\frac{\partial u_3}{\partial t} + \nu\Delta u_3 + u_1\omega_2 - u_2\omega_1\right) dz \qquad (16)
\end{aligned}
$$

ou encore :

$$
d\left(p + \frac{u^2}{2}\right) = \partial_t(p + \frac{1}{2}u^2)dt + A.dx + B.dy + C.dz \qquad (17)
$$

avec :

$$
A = u_2\omega_3 - u_3\omega_2 - \frac{\partial u_1}{\partial t} + \nu\Delta u_1 \qquad (18)
$$

$$
B = u_3\omega_1 - u_1\omega_3 - \frac{\partial u_2}{\partial t} + \nu\Delta u_2 \qquad (19)
$$

$$
C = u_1\omega_2 - u_2\omega_1 - \frac{\partial u_3}{\partial t} + \nu\Delta u_3 \qquad (20)
$$

Notons h le vecteur :

$$h = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \tag{21}$$

Le membre à gauche de l'équation (17) est une différentielle totale, on peut écrire les conditions :

$$\partial_y A = \partial_x B \tag{22}$$
$$\partial_z A = \partial_x C \tag{23}$$
$$\partial_z B = \partial_y C \tag{24}$$

Ce qui donne :

$$rot(h) = \begin{pmatrix} \partial_y C - \partial_z B \\ \partial_z A - \partial_x C \\ \partial_x B - \partial_y A \end{pmatrix} = 0 \tag{25}$$

Or h s'écrit aussi :

$$h = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = u \wedge \Omega - \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2 \end{pmatrix} + \nu\Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = u \wedge \Omega - \frac{\partial u}{\partial t} + \nu\Delta u \tag{26}$$

Les conditions (22 -23- 24) se résument à $rot(h) = 0$ soit :

$$\boxed{rot(u \wedge \Omega) = \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \nu\Delta\Omega} \tag{27}$$

car $\Omega = rot(u)$. Rappelons maintenant la formule suivante (Landau et Lifshitz, 1970) :

$$rot(a \wedge b) = (b.\nabla).a - (a.\nabla).b + a.divb - b.diva \tag{28}$$

Dans notre étude, on a $a = u \implies diva = divu = \partial_x u_1 + \partial_y u_2 + \partial_z u_3 = 0$ et $b = \Omega = rot(u)$ donc $divb = div\Omega = div(rotu) = 0$. Par suite :

$$(\Omega.\nabla).u - (u.\nabla).\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \nu\Delta\Omega \tag{29}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial x} & \frac{\partial \omega_1}{\partial y} & \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial x} & \frac{\partial \omega_2}{\partial y} & \frac{\partial \omega_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial x} & \frac{\partial \omega_3}{\partial y} & \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} \Delta\omega_1 \\ \Delta\omega_2 \\ \Delta\omega_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \omega_3}{\partial t} \end{pmatrix} \tag{30}$$

Posons :

$$A(u) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} & \dfrac{\partial u_2}{\partial y} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x} & \dfrac{\partial u_3}{\partial y} & \dfrac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$A(\Omega) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \omega_1}{\partial y} & \dfrac{\partial \omega_1}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial \omega_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \omega_2}{\partial y} & \dfrac{\partial \omega_2}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial \omega_3}{\partial x} & \dfrac{\partial \omega_3}{\partial y} & \dfrac{\partial \omega_3}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{32}$$

Dans ce cas, l'équation (30) devient :

$$\boxed{A(u).\Omega - A(\Omega).u = \nu \Delta \Omega - \frac{\partial \Omega}{\partial t}} \tag{33}$$

Les équations (33) constituent les équations fondamentales de cette étude. Ce sont des équations aux dérivées partielles non linéaires du troisème ordre. Leurs résolutions représentent les solutions des équations de Navier-Stokes.

3 Etude des Equations Fondamentales (33)

3.1 Préliminaires

Appelons respectivement :

$$F(u, \Omega) = A(u).\Omega - A(\Omega).u \tag{34}$$

$$G(\Omega) = \nu \Delta \Omega - \frac{\partial \Omega}{\partial t} \tag{35}$$

Si on change u, Ω en $-u, -\Omega$, on obtient :

$$F(-u, -\Omega) = F(u, \Omega) \tag{36}$$

$$G(-\Omega) = -G(\Omega) \tag{37}$$

En vertu de l'équation (33), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(u, \Omega) = G(\Omega) \\ \\ F(-u, -\Omega) = G(-\Omega) = -G(\Omega) = F(u, \Omega) \end{array} \right. \Longrightarrow G(\Omega) = 0 \Longrightarrow F(u, \Omega) = 0 \tag{38}$$

On a donc le système différentiel :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial t} - \nu \Delta \Omega = 0 \\ \\ A(u).\Omega - A(\Omega).u = 0 \\ avec\ \Omega = rot(u) \\ et\ rot(u \wedge \Omega) = \dfrac{\partial \Omega}{\partial t} - \nu \Delta \Omega \Longrightarrow rot(u \wedge \Omega) = 0 \end{cases}} \tag{39}$$

en vertu de l'équation (27).

3.2 Cas $\Omega \equiv 0$

Dans ce cas, on a évidemment :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \nu \Delta \Omega = 0$$
$$A(u).\Omega - A(\Omega).u = 0$$

Alors :

$$\Omega = rot(u) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} u \equiv 0 \quad ce\ qui\ est\ contradictoire, \\ u = vecteur\ constant \quad ce\ qui\ est\ contradictoire, \\ \exists\ une\ fonction\ scalaire\ \Phi\ /\ u = grad\Phi \end{cases} \tag{40}$$

Dans ce dernier cas, comme $\Omega = rot(u) \Longrightarrow rot(u) = 0$ d'où :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial z} = \dfrac{\partial u_3}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x} = \dfrac{\partial u_1}{\partial z} \end{cases} \tag{41}$$

et comme $div(u) = 0$, on obtient facilement :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = \Delta u_1 = 0 \tag{42}$$

De même, on a aussi :

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 \\ \Delta u_3 = 0 \end{cases} \tag{43}$$

En utilisant $div(u) = 0$, on a aussi :

$$\Delta \Phi = 0 \tag{44}$$

Donc $\Phi = \Phi(x,y,z,t)$ est une fonction harmonique en (x,y,z).

L'équation (7) devient :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} = \nu\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right] - \frac{\partial p}{\partial x} \tag{45}$$

Or $\Delta\Phi = 0$ d'où :

$$\frac{\partial}{2\partial x}\left[\frac{2\partial\Phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{46}$$

Et en intégrant par rapport à x, soit :

$$p = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}u^2 + \psi_1(y,z,t) \tag{47}$$

De la même manière, on obtient aussi :

$$p = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}u^2 + \psi_2(x,z,t) \tag{48}$$

$$p = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}u^2 + \psi_3(x,y,t) \tag{49}$$

Par suite :

$$p + \frac{1}{2}u^2 - \psi_1(y,z,t) = p + \frac{1}{2}u^2 - \psi_2(x,z,t) = p + \frac{1}{2}u^2 - \psi_3(x,y,t) \tag{50}$$

Ce qui donne :

$$\psi_1(t) = \psi_2(t) = \psi_3(t) = \psi(t) \tag{51}$$

une fonction que l'on intègre dans la fonction Φ, d'où le résultat :

$$\Delta\Phi = 0 \tag{52}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial x}\right|_{t=0} = u_1^0(x,y,z); \quad \left.\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial y}\right|_{t=0} = u_2^0(x,y,z) \tag{53}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi(x,y,z,t)}{\partial z}\right|_{t=0} = u_3^0(x,y,z) \tag{54}$$

$$p(x,y,z,t) = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}u^2 = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}||grad\Phi||^2 \tag{55}$$

3.3 Cas Ω n'est pas la fonction nulle

On récrit le système différentiel (39) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial t} - \nu \Delta \Omega = 0 \\ \\ A(u).\Omega - A(\Omega).u = 0 \\ avec\ \Omega = rot(u) \\ et\ rot(u \wedge \Omega) = \dfrac{\partial \Omega}{\partial t} - \nu \Delta \Omega \Longrightarrow rot(u \wedge \Omega) = 0 \end{cases}$$

De $rot(u \wedge \Omega) = 0$, on déduit que :

1. Il existe une fonction scalaire $\varphi(x, y, z)$ telle que $u \wedge \Omega = grad\varphi$.
2. $u \wedge \Omega = C$ où $C = (c_1, c_2, c_3)^T$ est un vecteur constant non nul ou une fonction vectorielle de t de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$.
3. $u \wedge \Omega = 0 \Longrightarrow$ comme u et ω ne sont pas nuls, on a u et ω colinéaires.

3.3.1 Cas 2 :

Comme $C = u \wedge \Omega$, on peut écrire :

$$c_1.u_1 + c_2.u_2 + c_3.u_3 = 0 \tag{56}$$

vu que C est orthogonal à u. Différentions l'équation précédente respectivement par rapport à x, y et z, on obtient :

$$\begin{cases} c_1.\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + c_2.\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + c_3.\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \\ \\ c_1.\dfrac{\partial u_1}{\partial y} + c_2.\dfrac{\partial u_2}{\partial y} + c_3.\dfrac{\partial u_3}{\partial y} = 0 \\ \\ c_1.\dfrac{\partial u_1}{\partial z} + c_2.\dfrac{\partial u_2}{\partial z} + c_3.\dfrac{\partial u_3}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{57}$$

ou sous forme matricielle :

$$A^T(u).C = 0 \tag{58}$$

où $A(u)$ la matrice donnée par (31). Or, la matrice $A(u)$ est la matrice jacobienne de fonction $(x, y, z) \longrightarrow u(x, y, z, t)$ donc son déterminant est non nul. Par suite, on déduit de (58) que le vecteur C est nécessairement nul, soit $C = 0$. On se retrouve dans le cas 3.

3.3.2 Etude du cas $u//\Omega$

On suppose maintenant que u et ω sont colinéaires. Soit $u//\Omega$.

Cas $u = \lambda\Omega$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ Donc il existe un coefficient $\lambda \neq 0$ tel que :

$$u = \lambda\Omega \tag{59}$$

Utilisons l'équation :

$$A(u).\Omega - A(\Omega).u = 0$$

elle est vérifiée. On a alors le système :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} - \nu\Delta\Omega = 0$$

Or l'équation précédente est à une constante près l'équation de chaleur. Faisons le changement de variables :

$$x = \nu X \quad (60)$$
$$y = \nu Y \quad (61)$$
$$z = \nu Z \quad (62)$$
$$t = \nu T \quad (63)$$
$$u(x,y,z,t) = U(X,Y,Z,T) \quad (64)$$
$$p(x,y,z,t) = P(X,Y,Z,T) \quad (65)$$
$$\Omega(x,y,z,t) = \overline{\Omega}(X,Y,Z,T) \quad (66)$$

On a alors :

$$\partial_x u dx + \partial_y u dy + \partial_z u dz + \partial_t u dt = \partial_X U dX + \partial_X U dX + \partial_X U dX + \partial_X U dX$$
$$\nu(\partial_x u dX + \partial_y u dY + \partial_z u dZ + \partial_t u dT) = \partial_X U dX + \partial_X U dX + \partial_X U dX + \partial_X U dX$$
$$\partial_x u = \frac{1}{\nu}\partial_X U,\ \partial_y u = \frac{1}{\nu}\partial_Y U,\ \partial_z u = \frac{1}{\nu}\partial_Z U,\ \partial_t u = \frac{1}{\nu}\partial_T U \quad (67)$$

Par suite l'équation :

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} - \nu\Delta\Omega = 0$$

devient :

$$\boxed{\frac{\partial\overline{\Omega}}{\partial T} - \Delta\overline{\Omega} = 0} \quad (68)$$

C'est l'équation de la chaleur !

4 Résolution de l'Equation (68)

Notons $U^0(X,Y,Z) = U^0(\boldsymbol{X}) = U(X,Y,Z,0 = u(x,y,z,0) = u^0(x,y,z)$ et $\overline{\Omega}^0 = rotU^0(\boldsymbol{X})$. Alors la solution de (68), définie pour $T \geq 0$ vérifiant :

$$\overline{\Omega} \in \mathbb{R}^3 \text{ et de classe } C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0,+\infty)) \quad (69)$$
$$\overline{\Omega}(\boldsymbol{X},0) = \overline{\Omega}^0(\boldsymbol{X}) \quad (70)$$

est donnée par (S. Godounov, 1973) :

$$\overline{\Omega}(\boldsymbol{X},T) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\overline{\Omega}^0(\alpha,\beta,\gamma)}{\sqrt{T}} e^{-\dfrac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{4T}} dV \quad (71)$$

où $dV = d\alpha d\beta d\gamma$.

4.1 Expression de U

On a :

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \lambda.\overline{\Omega} = \lambda. \begin{pmatrix} \overline{\Omega}_1 \\ \overline{\Omega}_2 \\ \overline{\Omega}_3 \end{pmatrix} \tag{72}$$

Soit :

$$U_1 = \lambda.\overline{\Omega}_1 = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\overline{\Omega}_1^0(\alpha,\beta,\gamma)}{\sqrt{T}} e^{-\dfrac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{4T}} dV \tag{73}$$

$$U_2 = \lambda.\overline{\Omega}_2 = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\overline{\Omega}_2^0(\alpha,\beta,\gamma)}{\sqrt{T}} e^{-\dfrac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{4T}} dV \tag{74}$$

$$U_3 = \lambda.\overline{\Omega}_3 = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\overline{\Omega}_3^0(\alpha,\beta,\gamma)}{\sqrt{T}} e^{-\dfrac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{4T}} dV \tag{75}$$

4.2 Vérification de $div(U) = 0$

Calculons $\partial_X U_1$, on obtient :

$$\frac{\partial U_1}{\partial X} = \frac{-\lambda}{4\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(X-\alpha)\overline{\Omega}_1^0(\alpha,\beta,\gamma)}{T\sqrt{T}} e^{-\dfrac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{4T}} dV \tag{76}$$

On peut écrire l'expression ci-dessus comme suit :

$$\frac{\partial U_1}{\partial X} = \frac{-\lambda}{2\sqrt{\pi T}} \int_{\mathbb{R}^2} d\beta d\gamma \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} \overline{\Omega}_1^0(\alpha,\beta,\gamma) \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(e^{-\dfrac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{4T}} \right) d\alpha \tag{77}$$

Faisons maintenant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial X} = \frac{-\lambda}{2\sqrt{\pi T}} \int_{\mathbb{R}^2} d\beta d\gamma \left[\overline{\Omega}_1^0(\alpha,\beta,\gamma).e^{-\frac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{4T}} \right]_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} + \\ \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi T}} \int_{\mathbb{R}^2} d\beta d\gamma \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} e^{-\frac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{4T}} \frac{\partial \overline{\Omega}_1^0(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial\alpha}.d\alpha \end{aligned} \tag{78}$$

En tenant compte de l'hypothèse que :

$$||\partial_{X_j}^{\delta} U^0(\boldsymbol{X})|| \leq \nu C_{\delta K}(1+\nu||\boldsymbol{X}||)^{-K} \; sur \; \mathbb{R}^3 \quad \forall \delta, \, K \tag{79}$$

où X_j désigne l'une des coordonnées X, Y, Z, et en choisissant $K > 1$ le premier terme du membre à droite est nul. On a alors :

$$\frac{\partial U_1}{\partial X} = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi T}} \int_{\mathbb{R}^2} d\beta d\gamma \int_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} e^{-\frac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{4T}} \frac{\partial \overline{\Omega}_1^0(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial \alpha}.d\alpha \tag{80}$$

ou encore :

$$\frac{\partial U_1}{\partial X} = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi T}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{4T}} \frac{\partial \overline{\Omega}_1^0(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial \alpha}.dV \tag{81}$$

Par suite :

$$div(U) = \sum_{X_j} \frac{\partial U_j}{\partial X_j} = \frac{\lambda}{2\sqrt{\pi T}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{4T}} \sum_{\alpha_j} \frac{\partial \overline{\Omega}_j^0(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial \alpha}.dV = 0 \tag{82}$$

car $\overline{\Omega}^0(\alpha,\beta,\gamma)$ vérifie $div(\overline{\Omega}^0) = \sum_{\alpha_j} \frac{\partial \overline{\Omega}_j^0(\alpha,\beta,\gamma)}{\partial \alpha_j} = 0.$

4.3 Estimation de $\int_{\mathbb{R}^3} ||U(\boldsymbol{X},T)||^2 dV$

On a :

$$\begin{aligned} ||U(\boldsymbol{X},T)||^2 = \textstyle\sum_i U_i^2 = \lambda^2 ||\overline{\Omega}(\boldsymbol{X},T)||^2 &= \frac{\lambda^2}{4\pi T} \left\| \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\Omega}^0(\alpha,\beta,\gamma).e^{-\frac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{4T}} dV \right\|^2 \\ &\leq \frac{\lambda^2}{4\pi T} \int_{\mathbb{R}^3} \left\| \overline{\Omega}^0(\alpha,\beta,\gamma) \right\|^2 .e^{-\frac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{2T}} dV \end{aligned} \tag{83}$$

Comme :

$$||\overline{\Omega}^0(\alpha,\beta,\gamma)||^2 = (\omega_1^{(0)})^2 + (\omega_2^{(0)})^2 + (\omega_3^{(0)})^2$$

et en tenant compte de l'hypothèse que :

$$|\partial_{x_j}^\delta u_i^0(\boldsymbol{x})| \leq C_{\delta K}(1+||\boldsymbol{x}||)^{-K} \ sur \ \mathbb{R}^3 \quad \forall \delta, \ K \ avec \ ||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

et en passant aux coordonnées (X, Y, Z), on a les inégalités :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^\delta U_i^0(\boldsymbol{X})}{\partial X_j} \right| \leq \nu C_{\delta K}(1+\nu||\boldsymbol{X}||)^{-K} \ sur \ \mathbb{R}^3 \quad \forall \delta, \ K \in \mathbb{R} \\ avec \ ||\boldsymbol{X}|| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \end{aligned} \tag{84}$$

Or :

$$(\omega_i^{(0)})^2 = \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)^2 \leq \left(\left| \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right| + \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right| \right)^2 \leq 4\nu^2 C_K^2 (1+\nu||X||)^{-2K} \tag{85}$$

D'où :

$$||\overline{\Omega}^0(\alpha,\beta,\gamma)||^2 \leq 12\nu^2 C_K^2(1+\nu||X||)^{-2K} = 12\nu^2 C_K^2(1+\nu||\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}||)^{-2K} \tag{86}$$

Par suite :

$$||U(\boldsymbol{X},T)||^2 \leq \frac{3\nu^2\lambda^2 C_K^2}{\pi T}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\frac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{2T}}}{(1+\nu||\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}||)^{2K}}d\alpha d\beta d\gamma \tag{87}$$

Majorons maintenant $\int_{\mathbb{R}3}||u(\boldsymbol{x},t)||^2 dxdydz$:

$$\int_{\mathbb{R}3}||u(\boldsymbol{x},t)||^2 dxdydz = \int_{\mathbb{R}3}||U(\boldsymbol{X},T)||^2 dxdydz = \nu^3\int_{\mathbb{R}3}||U(\boldsymbol{X},T)||^2 dXdYdZ$$

$$\leq \frac{3\nu^5\lambda^2 C_K^2}{\pi T}\int_{\mathbb{R}^3}\left[\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\frac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{2T}}}{(1+\nu||\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}||)^{2K}}d\alpha d\beta d\gamma\right]dXdYdZ \tag{88}$$

Alors vu que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}3} e^{-X^2-Y^2-Z^2}dXdYdZ < +\infty$, on peut permuter les deux intégrales triples de l'équation précédente. Posons :

$$\tau_0 = \frac{3\nu^5\lambda^2 C_K^2}{\pi} \tag{89}$$

on obtient donc :

$$\int_{\mathbb{R}3}||u(\boldsymbol{x},t)||^2 dxdydz \leq \frac{\tau_0}{T}\int_{\mathbb{R}^3}\left[\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{2T}}dXdYdZ\right]. \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{(1+\nu||\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}||)^{2K}} \tag{90}$$

Posons :

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2}{2T}}dXdYdZ \tag{91}$$

et soit le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} \overline{X} = \frac{X-\alpha}{\sqrt{2T}} \Longrightarrow dX = \sqrt{2T}d\overline{X} \quad et\ \overline{X}^2 = \frac{(X-\alpha)^2}{2T} \\ \overline{Y} = \frac{Y-\beta}{\sqrt{2T}} \Longrightarrow dY = \sqrt{2T}d\overline{Y} \quad et\ \overline{Y}^2 = \frac{(Y-\beta)^2}{2T} \\ \overline{Z} = \frac{Z-\gamma}{\sqrt{2T}} \Longrightarrow dZ = \sqrt{2T}d\overline{Z} \quad et\ \overline{Z}^2 = \frac{(Z-\gamma)^2}{2T} \end{cases} \tag{92}$$

I s'écrit :

$$I = (\sqrt{2T})^3\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\overline{X}^2}d\overline{X}\right]^3 = 2T\sqrt{2T}\left[2\int_0^{+\infty} e^{-\xi^2}d\xi\right]^3 = 2T\sqrt{T}.\pi\sqrt{\pi} = 2\pi T\sqrt{\pi T} \tag{93}$$

en utilisant la formule $2\int_0^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$. Par suite, l'équation (90) devient :

$$\int_{\mathbb{R}3} ||u(\boldsymbol{x},t)||^2 dxdydz \leq 2\tau_0\pi\sqrt{\pi T}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{(1+\nu||\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}||)^{2K}} \tag{94}$$

Posons maintenant :

$$B = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{(1+\nu||\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}||)^{2K}} \tag{95}$$

et utilisons les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} \alpha = rsin\theta cos\varphi \\ \beta = rsin\theta sin\varphi \\ \gamma = rcos\theta \end{cases} \tag{96}$$

la forme du volume $d\alpha d\beta d\gamma = r^2 sin\theta dr d\theta d\varphi$, B devient :

$$B = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} sin\theta d\theta \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int_0^r \frac{r^2 dr}{(1+\nu r)^{2K}} = 4\pi \int_0^r \frac{r^2 dr}{(1+\nu r)^{2K}} \tag{97}$$

Prenons $K = 2$, l'intégrale B est convergente quand $r \to +\infty$. Posons :

$$F = lim_{r\to+\infty}\int_0^r \frac{r^2 dr}{(1+\nu r)^4} = \int_0^{+\infty} \frac{r^2 dr}{(1+\nu r)^4} = \int_0^1 \frac{r^2 dr}{(1+\nu r)^4} + \int_1^{+\infty} \frac{r^2 dr}{(1+\nu r)^4} \tag{98}$$

Or :

$$\int_0^1 \frac{r^2 dr}{(1+\nu r)^4} < \int_0^1 r^2 dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \tag{99}$$

Calculons maintenant l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{r^2 dr}{(1+\nu r)^4}$. Soit le changement de variables :

$$\xi = 1+\nu r \Rightarrow r = \frac{\xi - 1}{\nu} \Rightarrow dr = \frac{d\xi}{\nu} \tag{100}$$

d'où :

$$\int_1^{+\infty} \frac{r^2 dr}{(1+\nu r)^4} = \frac{1}{\nu^3}\int_{1+\nu}^{+\infty} \frac{\xi^2 - 2\xi + 1}{\xi^4} d\xi = l(\nu) \ avec \quad l(\nu) = \frac{3\nu 2 + 9\nu + 5}{\nu^3(1+\nu)^3} \tag{101}$$

Par suite :

$$B < 4\pi(\frac{1}{3} + l(\nu)) \tag{102}$$

D'où le résultat important :

$$\int_{\mathbb{R}3} ||u(\boldsymbol{x},t)||^2 dxdydz < 8\tau_0\pi^2\sqrt{\pi T}\left(\frac{1}{3} + l(\nu)\right) \tag{103}$$

Soit :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}3} ||u(\boldsymbol{x},t)||^2 dxdydz < +\infty \quad \forall t} \tag{104}$$

ou encore :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}3} ||U(\boldsymbol{X},T)||^2 dXdYdZ < +\infty \quad \forall T} \tag{105}$$

car

$$\int_{\mathbb{R}3} ||U(\boldsymbol{X},T)||^2 dXdYdZ = \frac{1}{\nu^3} \int_{\mathbb{R}3} ||u(\boldsymbol{x},t)||^2 dxdydz$$

Références

[1] **C.L. Fefferman**. 2006. Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation, Millennium Prize Problems, Clay Math. Inst., Cambridge, MA, pp57-67.

[2] **L. Landau et E. Lifshitz**. 1970. *Théorie des Champs*. Edition Mir. 350p.

[3] **S. Godounov**. 1973. *Equations de la Physique Mathématique*. Edition Mir. 452p.