Black Holes Merging: A Heuristic Approach

P. R. Silva – Retired associate professor – Departamento de Física – ICEx – Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) – email: prsilvafis@gmail.com

Fusão de dois buracos negros de massas iguais.

01/11/2011.

Em 2005, Frans Pretorious [1,2] demonstrou através de estudos numéricos, que a fusão de dois buracos negros de massas iguais a M_0 e não-girantes, resulta em um novo buraco negro de massa final $M_f = 1.9\ M_0$ e momento angular $J = .70\ M_0^2$. Em seguida tentaremos reproduzir estes resultados de uma maneira simples.

Inicialmente vamos pensar em termos de uma constante de acoplamento gravitacional α_g, definida através da seguinte equação

$$(\alpha_g \hbar c)/R_S = M c^2, \qquad (1)$$

onde

$$R_S = 2GM/c^2. \qquad (2)$$

Equações (1) e (2) implicam em:

$$\alpha_g \hbar c = 2GM^2. \qquad (3)$$

Imaginemos então uma esfera com distribuição homogênea de massa M e de raio igual ao raio de Schwarzschild, R_S, (veja eq. (2)). Além disso, suponhamos que o campo gravitacional desta esfera seja blindado em regiões exteriores à mesma por uma casca esférica que gere uma anti-gravidade.

A energia de interação gravitacional desta esfera homogênea será dada por

$$E_{grav} = -(1/10)(\alpha_g \hbar c)/R_S = -(1/10)\, M c^2 = -(1/10)\, 2M_0 c^2. \qquad (4)$$

A equação (4) envolve a soma algébrica de uma energia atrativa da esfera homogênea, mais a energia repulsiva da casca esférica, ou seja:

$$E_{grav} = -(3/5)(\alpha_g \hbar c)/R_S + (1/2)(\alpha_g \hbar c)/R_S. \qquad (4\text{-a})$$

Além da energia gravitacional, devemos também levar em conta a energia rotacional, a saber:

$$E_{rot} = J^2/(2I), \qquad (5)$$

onde I é o momento de inércia dado por (M $2M_0$)

$$I = 2M_0 R_S^2 = 32\, M_0^3. \qquad (6)$$

Consideramos em (6): $G = c = 1$.

Logo a massa final será dada por

$$M_{final} = 2M_0 - (1/10)\, 2M_0 c^2 + J^2/(2I). \qquad (7)$$

Mas o teorema do virial implica em

$$-(1/20)\, 2M_0 c^2 + J^2/(2I) = 0. \qquad (8)$$

Logo

$$M_{final} = 2M_0 – (2M_0 ⁄ 20) = 1.9\ M_0. \qquad (9)$$

CÁLCULO DO MOMENTO ANGULAR RESULTANTE (J)

Escrevamos uma interação efetiva dada por:

$$E_{efetiva} = – (2M_0 ⁄ 20) + J^2 ⁄ (2I). \qquad (10)$$

Impondo-se a nulidade da interação efetiva (10), imposta pelo teorema do virial e levando-se em conta (6), obtemos

$$J^2 = (8 ⁄ 20)\ (2M_0)^4. \qquad (11)$$

Ou finalmente

$$J = (\surd.4)(2M_0)^2 = \{(\surd.4) ⁄ [(.95)^2]\}(1.9\ M_0)^2 = .701\ (M_{final})^2. \qquad (12)$$

Portanto parece que é possível reproduzir parcialmente os resultados obtidos por Pretorius, através de cálculos simples.

NOVAS CONSIDERAÇÕES A RESPEITO DO PROBLEMA -26/02/2012

Um dos resultados da simulação da coalescência de dois buracos negros obtidos por Pretorius [1,2], é que a evolução da massa do sistema se dá através de uma variação brusca, que poderia ser descrita por uma função degrau. O tratamento fenomenológico desta evolução pode ser trabalhado em analogia com aquele usado na descrição das reações químicas. Assim escrevemos:

$$M(t) - 1.95\ M_0 = \pm\ \delta M(t) \equiv \pm u(t) \qquad (13)$$

Tendo em vista analogia acima citada, a equação para a evolução da variável u toma a forma:

$$du/dt = -(a - bu^2). \qquad (14)$$

Em (14), a representa um "campo uniforme" e b a taxa de reação. A solução de (14) é dada por:

$$u = (a/b)^{1/2} \tanh[(ab)^{1/2}(t - t_0)]. \qquad (15)$$

A solução estacionária de (14), $du/dt = 0$, se dá em $(t - t_0) \rightarrow \pm\ \infty$, a saber

$$u\ [(t - t_0) \rightarrow \pm\ \infty] = \pm\ (a/b)^{1/2}. \qquad (16)$$

Impondo-se as condições de contorno,

$M[(t - t_0) \rightarrow -\ \infty] = 2M_0$ e $M[(t - t_0) \rightarrow +\ \infty] = 1.9M_0$, obtemos:

$$(a/b)^{1/2} = .05M_0. \qquad (17)$$

Para determinar o tempo característico τ, podemos pensar em termos de uma função degrau. Este tempo pode ser determinado escrevendo-se uma equação do tipo relação de incerteza, a saber:

$$[(1/10)\ M_0]\ \tau = h^*. \qquad (18)$$

Em (18), com c = 1, h^* é uma "constante" de Planck modificada, a ser determinada posteriormente. Por outro lado, a função tangente hiperbólica dada por (15), consiste em uma representação contínua para a função M(t), que só se aproxima assintoticamente dos limites $M = 1.9M_0$ e $M = 2M_0$ nos tempos $(t - t_0) \rightarrow \pm \infty$. No entanto, quando o argumento x da função tanh(x) é tomado igual a 4, o valor desta função difere da unidade cerca de uma parte em mil. Assim propomos a seguinte identificação:

$$(a\,b)^{1/2}\, 2\, |t^* - t_0| = (a\,b)^{1/2}\, \tau = 8. \qquad (19)$$

Na expressão (19), levamos em conta os dois ramos da função tanh(x).

Inserindo-se (19) em (18), obtemos

$$[(1/10)\, M_0]\, 8\, (a\,b)^{-1/2} = h^*. \qquad (20)$$

Por outro lado, é possível pensar em termos de um momento angular quantizado em unidades de $h^*/(2\pi)$,

$$J = [l\,(\,l + 1)]^{1/2}\;\; h^*/(2\pi). \qquad (21)$$

O estado fundamental de (21) (l = 1) deve então ser identificado com (12):

$$J(l = 1) = \sqrt{2}\; h^*/(2\pi) = \sqrt{}.4\; (4\, M_0^2). \qquad (22)$$

Resolvendo-se para h^*, encontramos:

$$h^* = \sqrt{}.2(8\pi)\, M_0^2. \qquad (23)$$

Finalmente comparando-se (23) com (20), encontramos

$$(a\,b)^{-1/2} = \sqrt{20}\,(\pi\, M_0). \qquad (24)$$

Usando-se (19) chegamos a

$$\tau = \sqrt{20}\,(8\pi\, M_0). \qquad (25)$$

ou

$$\tau \approx 112.4\, M_0. \qquad (25A)$$

Como podemos observar olhando para a figura 3 do artigo de Pretorius [1], o intervalo de tempo dado por (25A) é compatível com aquele no qual o sistema irradia ondas gravitacionais com uma intensidade apreciável. Também verificamos de (23), que a "constante" de Planck modificada, varia com o quadrado da massa dos buracos negros que se fundiram. Podemos interpretar este fato, levando em conta que ao aplicar as ferramentas da Mecânica Quântica (que é uma teoria essencialmente linear), a um problema tão longe da linearidade quanto o aqui descrito, talvez tenha algum significado considerar uma "constante" de Planck dependente da massa.

A potência média irradiada pela onda gravitacional também pode ser estimada. Ela é dada pela expressão:

$$P_{med} = (.10/112.4)\, c^5/G. \qquad (26)$$

Na expressão acima recuperamos as constantes c e G, que haviam sido tomados anteriormente iguais a unidade.

PROPOSTA PARA DELINEAR O PADRÃO DE UMA ONDA GRAVITACIONAL – 02/3/2012

Consideremos a função u(t) dada pela equação (15)

$$u = (a/b)^{1/2} \tanh[\sqrt{ab}(t - t_0)] \qquad (27)$$

Também podemos escrever, usando-se (19)

$$u = (a/b)^{1/2} \tanh[8(t - t_0)/\tau]. \qquad (28)$$

Propomos que o que a forma da onda seja obtida através da derivada de M(t) considerando-se o avanço e o retardo no tempo, dos dois ramos da derivada, a saber;

$$\Psi = dM/dt|_{av,\, ret} = d/dt\{\pm (a/b)^{1/2} \tanh [8(t - t_0)/\tau]\}|_{av,\, ret} \qquad (29)$$

Portanto temos os dois ramos (avançado e retardado)

$$\Psi(t - t_0 \pm \tau/4) = \pm(8/\tau)\,(a/b)^{1/2}\, \mathrm{sech}^2[(8/\tau)(t - t_0 \pm \tau/4)] \qquad (30)$$

No entanto, observamos que podemos considerar na quantização do momento linear, a contribuição do primeiro estado excitado além do estado fundamental. Isto leva a se considerar dois tempos característicos, que por analogia com os sistemas lineares trataremos como dois modos de "vibração".

Assim escrevemos (levando-se em conta (21)):

$$\tau_1 = \sqrt{3}\, \tau_2. \qquad (31)$$

Além disso, consideramos a superposição dos dois modos em oposição de fase e escrevemos:

$$\Psi = \Psi^+_{\tau 1} + \Psi^-_{\tau 1} - \Psi^+_{\tau 2} - \Psi^-_{\tau 2}\ . \qquad (32)$$

Escolhendo-se unidades arbitrárias para as amplitudes, $t_0 = 0$, e $\tau_1 = 8$, finalmente obtemos:

$$\Psi = \mathrm{sech}^2(t + 2) - \mathrm{sech}^2(t - 2) - \sqrt{3}[\mathrm{sech}^2\sqrt{3}(t + 2/\sqrt{3}) - \mathrm{sech}^2\sqrt{3}(t - 2/\sqrt{3}). \qquad (33)$$

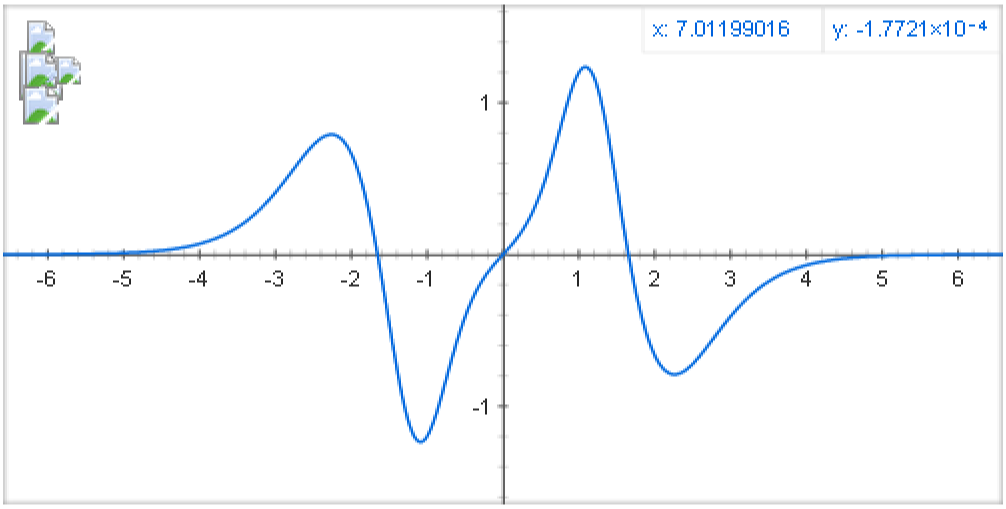

Figura 1- Padrão de ondas gravitacionais, de acordo com a equação (33). Qualitativamente , ela pode ser comparada com a figura 3 doartigo de Pretorius , ver referência[1].

REFERÊNCIAS

[1] Frans Pretorius, em: “Evolution of Binary Black Hole Spacetimes”, arXiv:gr-qc/0507014v1; Phys. Rev. Lett. **95**, 121101(2005)

[2] Relativity's new revolution - physicsworld.comhttp://physicsworld.com/cws/article/indepth/47344