

Второе решение уравнений Максвелла

Аннотация

Предлагается новое решение уравнений Максвелла для вакуума. Предварительно отмечается, что доказательство единственности известного решения основано на законе сохранения энергии, который не соблюдается (для мгновенных значений) в известном решении. Предлагаемое решение не нарушает закон сохранения энергии. Кроме того, в этом решении электрическая и магнитная компоненты напряженностей в электромагнитной волне сдвинуты по фазе.

Приводится подробное доказательство для заинтересованного читателя.

Оглавление

1. Введение
 2. Решение уравнений Максвелла
 3. Напряженности
 4. Потoki энергии
 5. Обсуждение
- Приложение 1
Приложение 2
Литература

1. Введение

В последнее время критика справедливости уравнений Максвелла слышится со всех сторон. Уверенность критиков создается, прежде всего, нарушением закона сохранения энергии. И, действительно, "плотность потока электромагнитной энергии (модуль вектора Умова-Пойнтинга) «пульсирует» по гармоническому закону. Не нарушается ли здесь закон сохранения энергии?" [1]. Безусловно, нарушается, если электромагнитная волна удовлетворяет известному решению уравнений Максвелла. Но ведь другого решения нет: "Доказательство единственности решения в общих чертах сводится к следующему. Если имеется два различных решения, то их разность вследствие линейности системы тоже является решением, но при нулевых зарядах и токах и нулевых начальных и граничных условиях. Отсюда, пользуясь

выражением для энергии электромагнитного поля и законом сохранения энергии заключаем, что разность решений тождественно равна нулю, т. е. решения одинаковы. Тем самым единственность решения уравнений Максвелла доказана" [2]. Таким образом, единственность решения доказывается на основе применения того закона, который нарушается в этом решении.

Другим результатом, следующим из существующего решения, является синфазность электрической и магнитной компонент напряженностей в электромагнитной волне. Это противоречит представлению о непрерывном преобразовании электрической и магнитной компонент энергии в электромагнитной волне. В [1], например, этот факт относится к "порокам современной классической электродинамики".

Такие результаты, следующие из известного решения уравнений Максвелла, позволяют усомниться в достоверности уравнений Максвелла. Подчеркнем, однако, что эти результаты следуют только из найденного решения. Но это решение, как указано выше, может быть иным.

Ниже выводится другое решение уравнений Максвелла, в котором плотность потока электромагнитной энергии остается постоянной во времени, а электрическая и магнитная компоненты напряженностей в электромагнитной волне сдвинуты по фазе.

2. Решение уравнений Максвелла

Вначале рассмотрим решение уравнений Максвелла для вакуума. Эти уравнения в системе СГС имеют вид [3]:

$$\operatorname{rot}(E) + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{rot}(H) - \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{div}(E) = 0,$$

$$\operatorname{div}(H) = 0.$$

В системе цилиндрических координат r , φ , z эти уравнения имеют вид:

$$\frac{E_r}{r} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = M_r, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = M_\varphi, \quad (3)$$

$$\frac{E_\varphi}{r} + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = M_z, \quad (4)$$

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = J_r, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \quad (7)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z, \quad (8)$$

$$J = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (9)$$

$$M = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (10)$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем применять следующие обозначения:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (11)$$

$$si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad (12)$$

где α , χ , ω – некоторые константы. Представим неизвестные функции в следующем виде:

$$J_r = j_r(r)co, \quad (13)$$

$$J_\varphi = j_\varphi(r)si, \quad (14)$$

$$J_z = j_z(r)si, \quad (15)$$

$$H_r = h_r(r)co, \quad (16)$$

$$H_\varphi = h_\varphi(r)si, \quad (17)$$

$$H_z = h_z(r)si, \quad (18)$$

$$E_r = e_r(r)si, \quad (19)$$

$$E_\varphi = e_\varphi(r)co, \quad (20)$$

$$E_z = e_z(r)co, \quad (21)$$

$$M_r = m_r(r)co, \quad (21)$$

$$M_\varphi = m_\varphi(r)si, \quad (22)$$

$$M_z = m_z(r)si, \quad (23)$$

где $j(r)$, $h(r)$, $e(r)$, $m(r)$ - некоторые функции координаты r .

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции (13-23) преобразуют систему уравнений (1-10) с тремя аргументами r , φ , z в систему уравнений с одним аргументом r и неизвестными функциями $j(r)$, $h(r)$, $e(r)$, $m(r)$.

В приложении 1 показано, что у такой системы существует решение, имеющее следующий вид (в приложении 1 см. (24, 27, 18, 31, 33, 34, 32) соответственно):

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (24)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (25)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (26)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (27)$$

$$h_\varphi(r) = e_r(r), \quad (28)$$

$$h_r(r) = -e_\varphi(r), \quad (29)$$

$$\chi = \frac{\omega}{c} \quad (30)$$

Тем самым мы получили монохроматическое решение системы уравнений (1-10). Переход к полихроматическому решению может быть выполнен с помощью преобразования Фурье. Очевидно, если решение существует в цилиндрической системе координат, то оно существует и в любой иной системе координат.

Таким образом, мы получили общее решение уравнений Максвелла в вакууме.

3. Напряженности

Система уравнений (2.24-2.29) определена – имеется 6 уравнений для 4-х функций e_r , e_φ , h_r , h_φ и двух скаляров α , ω . Рассматривая эту систему, можно заметить, что она эквивалентна двум уравнениям (2.24, 2.25) для функций e_r , e_φ . Две другие функции h_r , h_φ определяются по (28, 29) и удовлетворяют уравнениям (26, 27).

Два дифференциальных уравнения (2.24, 2.25) могут быть решены при данных начальных условиях и данном α . Предварительно рассмотрим уравнение вида

$$\frac{ay}{x} + y' = 0, \quad (1)$$

Решения этого уравнения имеют вид:

$$y = x^{-a}, \quad (2)$$

$$y = 0. \quad (2a)$$

Уравнения (2.24, 2.25) могут быть заменены уравнениями вида

$$(e_r + e_\varphi)' + \frac{(e_r + e_\varphi)}{r}(1 - \alpha) = 0, \quad (3)$$

$$(e_r - e_\varphi)' + \frac{(e_r - e_\varphi)}{r}(1 + \alpha) = 0, \quad (4)$$

В соответствии с (1, 2) находим для (3):

$$(e_r + e_\varphi) = Ar^{\alpha-1}, \quad (5)$$

$$(e_r + e_\varphi) = 0. \quad (5a)$$

В соответствии с (1, 2) находим для (4):

$$(e_r - e_\varphi) = Ar^{-\alpha-1}. \quad (6)$$

$$(e_r - e_\varphi) = 0. \quad (6a)$$

Здесь $(A/2)$ – амплитуда напряженности. Таким образом, допустимы несколько решений уравнений (3, 4). В дальнейшем мы рассмотрим решение (5, 6a). Из (5) и (6a) следует:

$$e_r = e_\varphi = 0.5A \cdot r^{\alpha-1}. \quad (7)$$

При этом

$$(e_r^2 + e_\varphi^2) = A \cdot r^{2(\alpha-1)}. \quad (10)$$

На рис. 1 показаны, например, графики функций (7, 10) при $A = -1$, $\alpha = 0.8$.

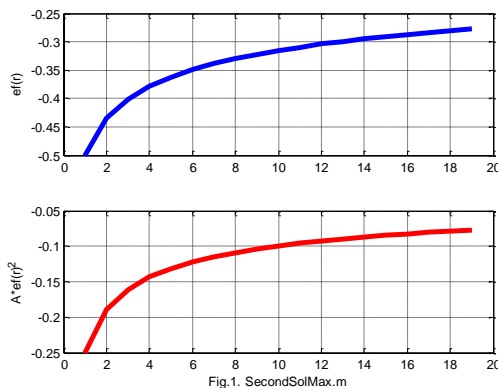


Fig.1. SecondSolMax.m

На рис. 2 показаны векторы напряженностей, исходящие из точки $A(r, \varphi)$. Напомним, что проекции $h_\varphi(r) = e_r(r)$ и $h_r(r) = -e_\varphi(r)$ - см. (2.28, 2.29). Направления векторов $e_r(r)$ и $e_\varphi(r)$ выбраны так: $e_r(r) > 0$, $e_\varphi(r) < 0$. При этом векторы E , H всегда ортогональны. Сумма модулей этих векторов определяется из (2.17, 2.18, 2.20, 2.21, 2.28, 2.29) и равна

$$W = E^2 + H^2 = (e_r(r)si)^2 + (e_\varphi(r)si)^2 + (h_r(r)co)^2 + (h_\varphi(r)co)^2$$

или

$$W = (e_r(r))^2 + (e_\varphi(r))^2 \quad (18)$$

- см. также (10) и рис. 1. Таким образом, плотность энергии электромагнитной волны постоянна на всех точках окружности данного радиуса.

Решение существует и при измененных знаках функций (2.11, 2.21). Этому случаю соответствует рис. 3. Рис. 2 и рис. 3 иллюстрируют то, что возможны два вида циркулярной поляризации электромагнитной волны.

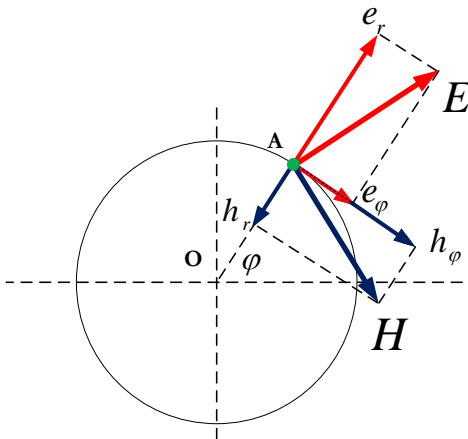


Рис. 2.

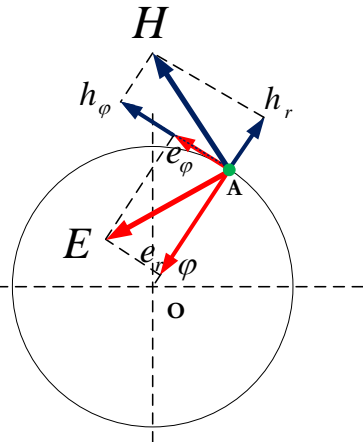


Рис. 3.

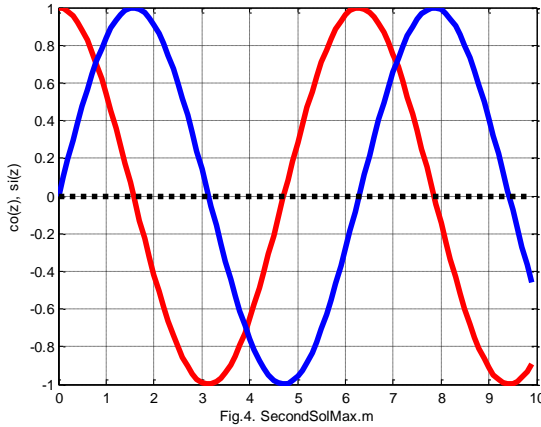
На рис. 4 для демонстрации сдвига фаз между компонентами волны (2.13-2.23) показаны функции

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \omega t), \quad si = \sin(\alpha\varphi + \chi z + \omega t)$$

или эквивалентные им при $z = ct$ функции

$$co = \cos\left(\alpha\varphi + \frac{2\omega}{c} z\right), \quad si = \sin\left(\alpha\varphi + \frac{2\omega}{c} z\right).$$

При $\varphi = 0$, $2\omega/c = 0.1$ эти функции принимают вид $co = \cos(z)$, $si = \sin(z)$ и показаны на рис. 4.



4. Поток энергии

Плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \eta \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В цилиндрических координатах r , φ , z плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты S_r , S_φ , S_z , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_r \\ S_\varphi \\ S_z \end{bmatrix} = \eta (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \eta \begin{bmatrix} E_\varphi H_z - E_z H_\varphi \\ E_z H_r - E_r H_z \\ E_r H_\varphi - E_\varphi H_r \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Из (2.12-2.17, 3.4) следует, что поток, проходящий через данное сечение волны в данный момент времени,

$$\bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \bar{S}_r \\ \bar{S}_\varphi \\ \bar{S}_z \end{bmatrix} = \eta \iint_{r,\varphi} \begin{bmatrix} s_r \cdot si^2 \\ s_\varphi \cdot si \cdot co \\ s_z \cdot si \cdot co \end{bmatrix} dr \cdot d\varphi. \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}
s_r &= (e_\phi h_z - e_z h_\phi) \\
s_\phi &= (e_z h_r - e_r h_z). \\
s_z &= (e_r h_\phi - e_\phi h_r)
\end{aligned} \tag{6}$$

В приложении 1 показано, что $h_z(r) = 0$, $e_z(r) = 0$. Следовательно, $s_r = 0$, $s_\phi = 0$, т.е. поток энергии распространяется только вдоль оси OZ и равен

$$\bar{S} = \bar{S}_z = \eta \iint_{r, \phi} [s_z \cdot si \cdot co] dr \cdot d\phi. \tag{7}$$

Отсутствие потока энергии по радиусу означает, что область существования волны **НЕ расширяется**. Подтверждением этому является существование лазера.

Найдем s_z . Из (2.28, 2.29) получаем:

$$e_r h_\phi = e_r^2, \tag{8}$$

$$e_\phi h_r = -e_\phi^2. \tag{9}$$

Из (7, 8, 9) получаем:

$$s_z = (e_r^2 + e_\phi^2). \tag{10}$$

Таким образом,

$$\bar{S} = \eta \iint_{r, \phi} [(e_r^2 + e_\phi^2) \cdot si \cdot co] dr \cdot d\phi. \tag{11}$$

Отсюда, как показано в приложении 2, следует, что

$$\bar{S} = \frac{c}{16\alpha\pi} (\cos(4\alpha\pi) - 1) \int_r ((e_r^2 + e_\phi^2) dr). \tag{12}$$

Из (10, 3.12) находим:

$$\bar{S} = \frac{cA}{16\alpha\pi} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r (r^{2(\alpha-1)}) dr. \tag{12a}$$

Пусть R – радиус крутового фронта волны. Тогда

$$S_{\text{int}} = \int_{r=0}^R (r^{2(\alpha-1)}) dr = \frac{R^{(2\alpha-1)}}{(2\alpha-1)}, \tag{13}$$

$$S_{\text{alfa}} = \frac{1}{\alpha} (1 - \cos(4\alpha\pi)), \tag{14}$$

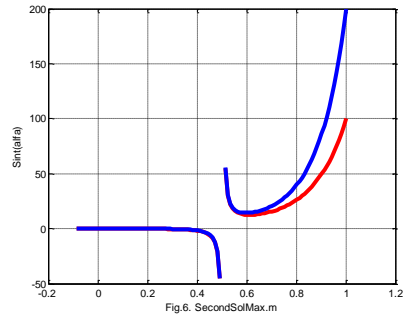
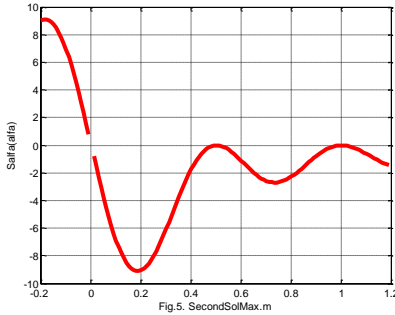
$$\bar{S} = \frac{cA}{16\pi} S_{\text{alfa}} S_{\text{int}}. \tag{15}$$

На рис. 5 показана функция $S_{\text{alfa}}(\alpha)$ (13), а на рис. 6 показана функция $S_{\text{int}}(\alpha)$. На рис. 6 верхняя и нижняя кривые относятся

соответственно к $R = 200$ и $R = 100$. Из формулы (15), рис. 5 и рис 6 видно, что поток энергии является положительным, например, при $A = -1$, $\alpha = 0.8$.

Поскольку поток энергии и энергия связаны соотношением $S = W \cdot c$, то из (15) можно найти энергию единицы длины волны:

$$\bar{W} = \frac{A}{16\pi} S_{alfa} S_{int}. \quad (17)$$



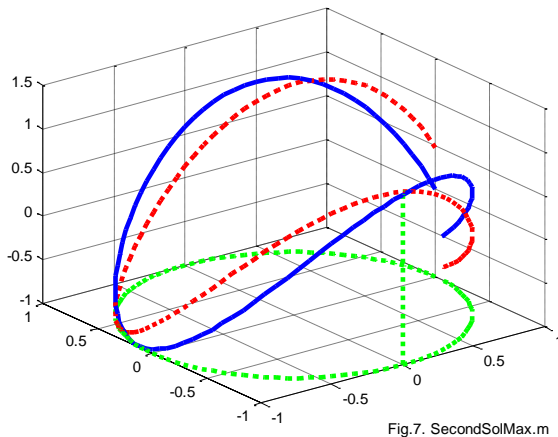
В приложении 2 показано также, что плотность потока энергии на окружности данного радиуса определяется функцией вида

$$\bar{S}_{rz} = (e_r^2 + e_\varphi^2) \sin(2\alpha\varphi + 4\alpha z/c). \quad (18)$$

Отсюда и из (3.10) следует:

$$\bar{S}_{rz} = A \cdot r^{2(\alpha-1)} \sin(2\alpha\varphi + 4\alpha z/c). \quad (19)$$

На рис. 7 показаны эти функции при $A = 1$, $\alpha = 0.8$, $r = 1$ и двух значениях второго слагаемого: 0, 0.5 – см. сплошную и пунктирную линии соответственно.



Отсюда следует, что

- плотность потока неравномерно распределена по сечению потока – существует картина распределения плотности потока по сечению волны;
- эта картина вращается при перемещении по оси OZ;
- поток энергии (15), проходящий через площадь сечения, не зависит от t , φ , z ; главное, что эта величина не изменяется во времени, и это соответствует закону сохранения энергии.

5. Обсуждение

Полученное решение описывает волну. Его основные отличия от известного решения состоят в следующем:

1. Мгновенный (а не средний по некоторому периоду) поток энергии **не** изменяется во времени, что соответствует закону сохранения энергии.
2. Поток энергии имеет положительное значение.
3. Поток энергии распространяется вдоль волны
4. Магнитная и электрическая напряженности на некоторой оси координат r , φ , z сдвинуты по фазе на четверть периода.
5. Решение для магнитных и электрических напряженностей является вещественным.
6. Решение существует при постоянной скорости распространения волны.
7. Область существования волны **не** расширяется, что подтверждается существованием лазера.
8. Векторы электрической и магнитной напряженностей ортогональны.
9. Возможны два вида циркулярной поляризации электромагнитной волны
10. Волна и ее энергия определены, если заданы параметры A , ω , R , α . При данных R , \bar{S} может быть найден параметр α .

Приложение 1.

Рассматривается решение уравнений (2.1-2.10) в виде функций (2.13-2.23). Далее производные по r будем обозначать штрихами. Перепишем уравнения (2.1-2.10) с учетом (2.11, 2.12) в виде

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{r} \cdot e_z(r) \alpha + e_\varphi(r) \chi = m_r(r), \quad (2)$$

$$e_r(r) \chi - e'_z(r) = m_\varphi(r), \quad (3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = m_z(r), \quad (4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (6)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) = j_\varphi(r), \quad (7)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha - j_z(r) = 0, \quad (8)$$

$$j_r = \frac{\omega}{c} e_r, \quad j_\varphi = -\frac{\omega}{c} e_\varphi, \quad j_z = -\frac{\omega}{c} e_z, \quad (9)$$

$$m_r = \frac{\omega}{c} h_r, \quad m_\varphi = -\frac{\omega}{c} h_\varphi, \quad m_z = -\frac{\omega}{c} h_z, \quad (10)$$

Умножим (8) на $(-\chi)$ и учтем (9). Тогда получим:

$$-\frac{\chi \cdot h_\varphi(r)}{r} - \chi \cdot h'_\varphi(r) - \frac{\chi \cdot h_r(r)}{r} \cdot \alpha + \frac{\chi \omega}{c} \cdot e_z(r) = 0, \quad (11)$$

или

$$\frac{c\chi}{\omega} \frac{h_\varphi(r)}{r} + \frac{c\chi}{\omega} h'_\varphi(r) + \frac{c\chi}{\omega} \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha - \chi \cdot e_z(r) = 0, \quad (12)$$

Сравнивая (1) и (12), замечаем, что они совпадают, если

$$\frac{c\chi}{\omega} h_\varphi(r) = e_r(r), \quad (13)$$

$$-\frac{c\chi}{\omega} h_r(r) = e_\varphi(r). \quad (14)$$

Важно отметить, что такое сравнение справедливо только при $e_z(r) \neq 0$. При этом в соответствии с (9) и $j_z(r) \neq 0$.

В уравнениях (13, 14) сделаем замену в соответствии с (9):

$$\chi h_\varphi(r) = -j_r(r), \quad (15)$$

$$-\chi h_r(r) = j_\varphi(r). \quad (16)$$

Уравнения (15, 16) совпадают с (6, 7) при $h_z(r) = 0$. Отсюда следует

Лемма 1. При $e_z(r) \neq 0$ система уравнений (1, 5-9) совместима только в том случае, когда $h_z(r) = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $e_z(r) = 0$. При этом в соответствии с (9) получим $j_z(r) = 0$. Тогда исходная система (1, 5-8) примет вид:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (17)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha + \chi \cdot h_z(r) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{r} \cdot h_z(r) \alpha - h_\varphi(r) \chi = j_r(r), \quad (19)$$

$$-h_r(r) \chi - h'_z(r) = j_\varphi(r), \quad (20)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (21)$$

Подставим (9) в (17). Тогда получим:

$$\frac{j_r(r)}{r} + j'_r(r) + \frac{j_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (22)$$

Подставим (19, 20) в (22). Тогда получим:

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi + \frac{1}{r} \cdot h'_z(r) \alpha - h'_\varphi(r) \chi + (-h_r(r) \chi - h'_z(r)) \frac{\alpha}{r} = 0$$

или

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi - h'_\varphi(r) \chi - h_r(r) \frac{\chi \alpha}{r} = 0 \quad (23)$$

При этом для вычисления трех напряженностей получим три уравнения (19, 21, 23). Исключим $h'_\varphi(r)$ из (21, 23):

$$\frac{1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha - \frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) \chi + \left(\frac{1}{r} \cdot h_\varphi(r) + h_r(r) \frac{\alpha}{r} \right) \chi - h_r(r) \frac{\chi \alpha}{r} = 0$$

или $\frac{-1}{r^2} \cdot h_z(r) \alpha = 0$ или $h_z(r) = 0$. Таким образом, и при $e_z(r) = 0$

должно соблюдаться условие $h_z(r) = 0$. Отсюда следует

Лемма 2. При $e_z(r) = 0$ система уравнений (1, 5-9) совместима только в том случае, когда $h_z(r) = 0$.

Из леммы 1 и леммы 2 следует

Лемма 3. Система уравнений (1, 5-9) совместима только при $h_z(r) = 0$ и, в соответствии с (10), $m_z(r) = 0$. Однако допустим случай, когда $e_z(r) \neq 0$ и $j_z(r) \neq 0$.

При $e_z(r)=0$ и $h_z(r)=0$ уравнения (1, 5-9) принимают следующий вид - уравнения (1, 5, 8) упрощаются, а уравнения (6, 7) заменяются уравнениями (13, 14):

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{c\chi}{\omega} h_\varphi(r) = e_r(r), \quad (3.3)$$

$$-\frac{c\chi}{\omega} h_r(r) = e_\varphi(r), \quad (3.4)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (3.5)$$

Аналогично доказывается

Лемма 4. Система уравнений (1-5, 10) совместима только при $e_z(r)=0$ и, в соответствии с (9), $j_z(r)=0$. При этом аналогично формулам (24, 28) получаем формулы

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (4.1)$$

$$e_\varphi(r)\chi = -\frac{\omega}{c} h_r(r), \quad (4.2)$$

$$e_r(r)\chi = \frac{\omega}{c} h_\varphi(r), \quad (4.3)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0. \quad (4.5)$$

Из леммы 3 и леммы 4 следует

Лемма 5. Система уравнений (1-10) совместима только при $h_z(r)=0$, $e_z(r)=0$, $m_z(r)=0$, $j_z(r)=0$.

Следовательно, исходная система уравнений (1-10) принимает вид уравнений, перечисленных в леммах 3 и 4. Объединим их для удобства читателя:

$$\frac{e_r(r)}{r} + e'_r(r) - \frac{e_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (24)$$

$$e_\varphi(r)\chi = -\frac{\omega}{c} h_r(r), \quad (25)$$

$$e_r(r)\chi = \frac{\omega}{c} h_\varphi(r), \quad (26)$$

$$\frac{e_\varphi(r)}{r} + e'_\varphi(r) - \frac{e_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0, \quad (27)$$

$$\frac{h_r(r)}{r} + h'_r(r) + \frac{h_\varphi(r)}{r} \alpha = 0, \quad (28)$$

$$h_\varphi(r)\chi = \frac{\omega}{c} e_r(r), \quad (29)$$

$$-h_r(r)\chi = \frac{\omega}{c} e_\varphi(r), \quad (30)$$

$$\frac{h_\varphi(r)}{r} + h'_\varphi(r) + \frac{h_r(r)}{r} \cdot \alpha = 0. \quad (31)$$

Умножим уравнения (26, 29). Тогда получим:

$$-e_r(r)h_\varphi(r)\chi^2 = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 e_r(r)h_\varphi(r)$$

или

$$\chi = \omega/c. \quad (32)$$

Подставляя (32) в (26, 29), получаем:

$$h_\varphi(r) = e_r(r). \quad (33)$$

Таким образом, при условии (32) уравнения (26, 29) эквивалентны одному уравнению (33). Аналогичное соотношение следует из (25, 30):

$$h_r(r) = -e_\varphi(r), \quad (34)$$

Итак, система уравнений (24-31) эквивалентна системе уравнений (24, 27, 28, 31-34).

Приложение 2.

В (3.11) показано, что поток энергии, проходящий через сечение волны,

$$\bar{S} = \eta \iint_{r,\varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \cdot si \cdot co] dr \cdot d\varphi. \quad (1)$$

Пусть скорость распространения волны постоянна и равна c . Тогда

$$z = ct. \quad (2)$$

Тогда из (2, 2.11, 2.12, 2.30) получаем:

$$co = \cos(\alpha\varphi + \chi z + \alpha t) = \cos(\alpha\varphi + (2\omega/c)z) \quad (3)$$

и, аналогично,

$$si = \sin(\alpha\varphi + (2\omega/c)z). \quad (4)$$

Имея в виду (3, 4), перепишем (1) в виде:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \eta \iint_{r, \varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \sin(2(\alpha\varphi + (2\omega/c)z))] dr d\varphi. \quad (5)$$

Таким образом, плотность потока энергии на окружности данного радиуса определяется функцией вида

$$\bar{S}_{rz} = (e_r^2 + e_\varphi^2) \sin(2\alpha\varphi + 4\omega z/c). \quad (5a)$$

При $z=0$ на оси OZ имеем:

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \eta \iint_{r, \varphi} [(e_r^2 + e_\varphi^2) \sin(2\alpha\varphi)] dr d\varphi. \quad (6)$$

Далее из (6) находим:

$$\bar{S} = \frac{\eta}{2} \int_r \left((e_r^2 + e_\varphi^2) \left(\int_\varphi \sin(2\alpha\varphi) d\varphi \right) dr \right). \quad (7)$$

Имеем:

$$\int_\varphi \sin(2\alpha\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin(2\alpha\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\alpha} (1 - \cos(4\pi\alpha)). \quad (8)$$

Из (7, 8) получаем:

$$\bar{S} = \frac{\eta}{4\alpha} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r ((e_r^2 + e_\varphi^2) dr). \quad (9)$$

Подставляя сюда (3.2), окончательно получаем:

$$\bar{S} = \frac{c}{16\alpha\pi} (1 - \cos(4\alpha\pi)) \int_r ((e_r^2 + e_\varphi^2) dr). \quad (10)$$

Очевидно, при любом выборе точки $z=0$ на оси OZ последнее соотношение сохраняется.

Литература

1. Канн К.Б. Электродинамика. Электромагнитные волны, <http://electrodynamics.narod.ru/em-waves.html>
2. Ток смещения и система уравнений Максвелла, <http://www.webpoliteh.ru/subj/dinamo/767-25-tok-smeshheniya-i-sistema-uravnenij-maksvell.html>
3. Розанов Н.Н. Специальные разделы математической физики. Часть 3. Электромагнитные волны в вакууме. ИТМО. Санкт-Петербург, 2005.