République Tunisienne
Ministère de l'Equipement et de l'Habitat
Office de la Topographie et de la Cartographie
Direction de la Cartographie

# NOTE

# SUR LE CALCUL DES ERREURS

# DANS LES REDUCTIONS DES DISTANCES

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM**
**Ingénieur en Chef**
**Mai 2002**

# NOTE SUR LE CALCUL DES ERREURS DANS LES REDUCTIONS DES DISTANCES

## A – SUR LA VALEUR DU RAYON TERRESTRE

### 1. Introduction

Lors de la réduction des distances à la surface de l'ellipsoïde de référence, on utilise une valeur moyenne R du rayon terrestre dans la formule passant de $D_P$ la distance suivant la pente à $D_0$ la distance corde au niveau zéro. Dans cette note, on évalue l'erreur sur la distance en utilisant le rayon terrestre défini par la formule d'Euler en tenant compte de l'azimut de la direction de la distance.

### 2. Le Rayon Théorique

la formule rigoureuse de passage de $D_P$ à $D_0$ est comme suit :

$$D_0 = D_P.\sqrt{\frac{1-\frac{\Delta H^2}{D_P{}^2}}{(1+\frac{H_A}{R})(1+\frac{H_B}{R}}} \qquad (1)$$

avec $H_A$ et $H_B$ les altitudes des 2 extrémités et $\Delta H = H_B - H_A$ . $R$ désigne le rayon moyen de la Terre soit $R$ = 6378 km. On obtient la distance $D_e$ suivant l'ellipsoïde par :

$$D_e = D_0 + \frac{D_0{}^3}{24R^2} \qquad (2)$$

Le rayon théorique $R$ dans la direction d'azimut géodésique Az est donné par la formule d'Euler :

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 Az}{\rho} + \frac{\sin^2 Az}{N} \qquad (3)$$

où :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \quad ; \quad \rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \qquad (4)$$

sont les rayons de courbure de l'ellipsoïde de révolution, avec $a$ et $e$ sont respectivement le demi grand axe et la première excentricité de l'ellipsoïde, $\varphi$ est la latitude géodésique du point de calcul.

En appelant $e'$ la deuxième excentricité définie par :

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \qquad (5)$$

et après un calcul facile, on obtient l'expression de $R$ :

$$R = N.(1 + e'^2\cos^2\varphi.\cos^2 Az) = a(1 - e^2.\sin^2\varphi)^{-1/2}\,(1 + e'^2\cos^2\varphi.\cos^2 Az) \qquad (6)$$

**3. Application numérique**:

| Nom de La base | Latitude géodésique (gr) | Azimut géodésique (gr) | Valeur du rayon terrestre (m) |
|---|---|---|---|
| B1 | 40.4490318 | 199.4535571 | 6413909.941 |
| B2 | 40.9139532 | 161.2461654 | 6404922.574 |
| B3 | 38.0626754 | 374.61447 | 6410510.599 |
| B4 | 37.4475009 | 112.55674 | 6386102.661 |
| B5 | 38.6859678 | 286.21574 | 6386694.888 |
| B6 | 39.6865563 | 1.22977 | 6414480.308 |
| B7 | 40.4549830 | 249.310168 | 6400380.379 |
| B8 | 39.2580649 | 399.08090 | 6414624.227 |

Tableau n°1

D'après le tableau n°1, la valeur moyenne du rayon terrestre est $R_m$ = 6403953.197 m. Il diffère de la valeur R= 6378000 m utilisé usuellement de 25.953 km. On verra dans le paragraphe B si cette différence a une incidence sur la réduction des distances spatiales au niveau zéro ou à l'ellipsoïde de révolution.

## B – CALCUL D'ERREURS SUR LA FORMULE DE LA DISTANCE

La distance suivant la corde est donnée par (1) soit :

$$D_0 = D_P.\sqrt{\frac{1-\frac{\Delta H^2}{D_P{}^2}}{(1+\frac{H_A}{R})(1+\frac{H_B}{R}}}$$

### 1. Calcul des écarts-types

Le logarithme népérien de l'équation précédente donne : (7)

$$LogD_0 = LogD_P + \frac{1}{2}Log\left(1-\frac{\Delta H^2}{D_P{}^2}\right) - \frac{1}{2}Log\left(1+\frac{H_A}{R}\right) - \frac{1}{2}Log\left(1-\frac{H_B}{R}\right)$$

Différentions la formule ci-dessus, d'où : (8)

$$\frac{dD_0}{D_0} = \frac{dD_P}{D_P} - \frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{\Delta H}{D_P}\right)^2}{1-\left(\frac{\Delta H}{D_P}\right)^2} - \frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{H_A}{R}\right)}{1+\frac{H_A}{R}} - \frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{H_B}{R}\right)}{1+\frac{H_B}{R}}$$

On suppose que $dH_A = dH_B = dH$, alors $d\Delta H = 0$, l'équation (8) s'écrit :

(9)

$$\frac{dD_0}{D_0} = \frac{dD_P}{D_P}\frac{1}{1-\left(\frac{\Delta H}{D_P}\right)^2} - \frac{dH}{R}\frac{1+\frac{H_m}{R}}{\left(1+\frac{H_A}{R}\right)\left(1+\frac{H_B}{R}\right)} + \frac{dR}{R^2}\frac{(H_m + \frac{H_A H_B}{R})}{\left(1+\frac{H_B}{R}\right)\left(1+\frac{H_A}{R}\right)}$$

où : $H_m = (H_A + H_B)/2$.

Calculons l'ordre de grandeur de l'écart type $\sigma_{D_0}$ de la distance suivant la corde sur l'ellipsoïde de révolution suivant :

- la valeur de l'écart type $\sigma_{D_P}$ de la distance mesurée suivant la pente,
- la valeur de l'écart type $\sigma_H$ de la connaissance des altitudes des points,
- la valeur de l'écart type $\sigma_R$ de la valeur du rayon terrestre utilisée.

A partir de (9), on a alors : (10)

$$\sigma_{D_0}^2 = {D_0}^2\left(\frac{\sigma_{D_P}^2}{{D_P}^2}\frac{1}{\left(1-\left(\frac{\Delta H}{D_P}\right)^2\right)^2} + \frac{\sigma_H^2}{R^2}\frac{\left(1+\frac{H_m}{R}\right)^2}{\left(1+\frac{H_A}{R}\right)^2\left(1+\frac{H_B}{R}\right)^2} + \frac{\sigma_R^2}{R^4}\frac{\left(H_m+\frac{H_A H_B}{R}\right)^2}{\left(1+\frac{H_B}{R}\right)^2\left(1+\frac{H_A}{R}\right)^2}\right)$$

Ecrivons (10) comme suit : $\sigma_{D_0}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$

avec

$$\sigma_1^2 = {D_0}^2\left(\frac{\sigma_{D_P}^2}{{D_P}^2}\frac{1}{\left(1-\left(\frac{\Delta H}{D_P}\right)^2\right)^2}\right) \quad ; \quad \sigma_2^2 = {D_0}^2\left(\frac{\sigma_H^2}{R^2}\frac{\left(1+\frac{H_m}{R}\right)^2}{\left(1+\frac{H_A}{R}\right)^2\left(1+\frac{H_B}{R}\right)^2}\right) \qquad (11)$$

$$\sigma_3^2 = {D_0}^2\left(\frac{\sigma_R^2}{R^4}\frac{\left(H_m+\frac{H_A H_B}{R}\right)^2}{\left(1+\frac{H_B}{R}\right)^2\left(1+\frac{H_A}{R}\right)^2}\right)$$

## 2.Tableau des données et des résultats

| Calcul N° | H1 (m) | H2 (m) | $\sigma_H$ (m) | Dp (m) | $\sigma_{DP}$ (m) | R (m) | Do (m) | $\sigma_R$ (km) | $\sigma_{D1}$ (m) | $\sigma_{D2}$ (m) | $\sigma_{D3}$ (m) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1316.940 | 1156.410 | 0.000 | 20146.549 | 0.005 | 6378000 | 20142.004 | 0.0 | 0.005 | 0.000 | 0.000 |
| 2 | 1316.940 | 1156.410 | 5.000 | 20146.549 | 0.005 | 6414624 | 20142.026 | 0.0 | 0.005 | 0.016 | 0.000 |
| 3 | 1316.940 | 1156.410 | 5.000 | 20146.549 | 0.005 | 6414624 | 20142.026 | 40.0 | 0.005 | **0.016** | **0.024** |
| 4 | 1316.940 | 1156.410 | 10.000 | 20146.549 | 0.005 | 6414624 | 20142.026 | 40.0 | 0.005 | 0.032 | 0.024 |
| 5 | 1316.940 | 1156.410 | 5.000 | 1000.549 | 0.005 | 6414624 | 987.390 | 40.0 | 0.005 | **0.001** | **0.000** |

## 3. Conclusions

- L’utilisation de la valeur théorique du rayon terrestre a un effet de 2.4 cm sur la distance réduite à l’ellipsoïde pour une distance de 20 km (calcul n°3), cet effet est nul pour les distances de l’ordre du km (calcul n°5).

- La connaissance des altitudes des points des extrémités de la base avec une précision de 5 m donne un effet de 1.6 cm sur une distance de l’ordre de 20 km réduite à l’ellipsoïde (calcul n°3), cet effet se réduit à 1mm pour une distance de 1km (calcul n°5).