République Tunisienne
Ministère de l'Equipement & de l'Habitat
Office de la Topographie & de la Cartographie
Direction de la Cartographie
Division de la Mise à Niveau de la Géodésie

LES TRANSFORMATIONS POLYNOMIALES

Abdelmajid BEN HADJ SALEM
Ingénieur en Chef Géographe
Juin -2001

LES TRANSFORMATIONS POLYNOMIALES

Lors de l'étude de passage d'un système de coordonnées, noté $S_1\{(x_{1i},y_{1i})_{i=1,\dots,n}\}$, à un système de coordonnées noté $S_2\{(x_{2i},y_{2j})_{j=1,\dots,m}\}$, on est amené à trouver une formule de passage du système S_1 au système S_2 et vice-versa. Parmi les modèles de passage on cite les transformations polynomiales.

I - Les Transformations Polynomiales Conformes :

Posons : $z=x_1+iy_1$ et $Z=x_2+iy_2$

Une transformation polynomiale conforme est du type :

$$Z=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots+a_kz^k \tag{1}$$

ou encore : $Z=\sum_{i=0}^{i=k} a_i z^i$ où les a_i sont des nombres complexes non tous nuls.

Dans la suite, nous allons déterminer ces polynômes.

I.1 - Polynômes d'ordre 1 :

C'est la transformation du type :

$$Z = a_0 + a_1z \tag{2}$$

Ce qui donne en posant : $a_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ et $a_1= \alpha_1+ i\beta_1$ (3)

$$x_2+iy_2 = \alpha_0+ i\beta_0 + (\alpha_1+ i\beta_1)(x_1 + iy_1) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} x_2 + iy_2 &= \alpha_0 + i\beta_0 + \alpha_1x_1 -\beta_1y_1 + i(\alpha_1y_1+\beta_1x_1) \\ x_2 + iy_2 &= \alpha_0 + \alpha_1x_1 -\beta_1y_1 + i(\beta_0 + \alpha_1y_1+\beta_1x_1) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = \alpha_0 + \alpha_1x_1 -\beta_1y_1 \quad \text{et} \quad y_2 = \beta_0 +\beta_1x_1+ \alpha_1y_1 \tag{6}$$

Ce qui s'écrit matriciellement sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

C'est un système à 4 inconnues : α_0, β_0, α_1 et β_1. Le modèle (7) est connu sous le nom de « la transformation de Helmert ».

Posons :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= s.\cos\theta \\ \beta_1 &= s.\sin\theta \end{aligned} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{tg}\ \theta = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \theta = Arctg\left(\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\right) & (9) \\ s = \sqrt{\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2} & (10) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

la résolution de (7) nécessite la connaissance d'au moins 3 points communs dans les deux systèmes.

I.2 - Polynôme d'ordre 2 :

C'est la transformation du type :

$$Z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 \quad (12)$$

En posant $a_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} Z &= a_0 + a_1 z + (\alpha_2 + i\beta_2)(x_1 + iy_1)^2 \\ &= a_0 + a_1 z + (\alpha_2 + i\beta_2)(x_1^2 - y_1^2 + 2ix_1y_1) \\ &= a_0 + a_1 z + \alpha_2(x_1^2 - y_1^2) - 2\beta_1 x_1 y_1 + i[2\alpha_2 x_1 y_1 + \beta_2(x_1^2 - y_1^2)] \quad (13) \end{aligned}$$

soit :

$$x_2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 - \beta_1 y_1 + \alpha_2(x_1^2 - y_1^2) - 2\beta_1 x_1 y_1$$

et (14)

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \alpha_1 y_1 + 2\alpha_2 x_1 y_1 + \beta_2(x_1^2 - y_1^2)$$

ou encore :

$$x_2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 - \beta_1 y_1 + \alpha_2 x_1^2 - 2\beta_1 x_1 y_1 - \alpha_2 y_1^2$$

et

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \alpha_1 y_1 + \beta_2 x_1^2 + 2\alpha_2 x_1 y_1 - \beta_2 y_1^2 \quad (15)$$

C'est un système à 6 inconnues : α_0, β_0, α_1, β_1, α_2 et β_2, dont la résolution nécessite la connaissance d'au moins 4 points communs dans les 2 systèmes.

I.3 - Polynôme d'ordre 3 :

C'est la transformation du type :

$$Z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \quad (16)$$

En posant : $a_3 = \alpha_3 + i\beta_3$, on obtient :

$$\begin{aligned} Z &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + (\alpha_3 + i\beta_3)(x_1 + iy_1)^3 \\ &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + (\alpha_3 + i\beta_3)(x_1^3 - 3x_1 y_1^2 + 3ix_1^2 y_1 - iy_1^3) \\ &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \alpha_3(x_1^3 - 3x_1 y_1^2) + \beta_3(y_1^3 - 3x_1^2 y_1) \\ &\quad + i(3\alpha_3 x_1^2 y_1 - \alpha_3 y_1^3 + \beta_3 x_1^3 - 3\beta_3 x_1 y_1^2) \quad (17) \end{aligned}$$

d'où :

$$x_2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 - \beta_1 y_1 + \alpha_2 x_1^2 - 2\beta_1 x_1 y_1 - \alpha_2 y_1^2 + \alpha_3 x_1^3 - 3\beta_3 x_1^2 y_1 - 3\alpha_3 x_1 y_1^2 + \beta_3 y_1^3$$
$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \alpha_1 y_1 + \beta_2 x_1^2 + 2\alpha_2 x_1 y_1 - \beta_2 y_1^2 + \beta_3 x_1^3 + 3\alpha_3 x_1^2 y_1 - 3\beta_3 x_1 y_1^2 - \alpha_3 y_1^3$$

Ce système est à 8 inconnues : α_0, β_0, α_1, β_1, α_2, β_2, α_3 et β_3 ; et sa résolution nécessite la connaissance de 5 points communs dans les 2 systèmes.

II - Détermination des Coefficients :

II.1 - Cas $Z=a_0 + a_1 z$:

Ecrivons (6) pour deux points 1 et 2 dont les coordonnées dans les deux systèmes sont respectivement $(x_1,y_1)_S$, $(x_1',y_1')_{S'}$ et $(x_2,y_2)_S$, $(x_2',y_2')_{S'}$:

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 x_1 - \beta_1 y_1 &= x_2 \\ \beta_0 + \beta_1 x_1 + \alpha_1 y_1 &= y_2 \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_1 - \beta_1 y_1 &= x_2 \\ \beta_0 + \beta_1 x_1 + \alpha_1 y_1 &= y_2 \end{aligned} \qquad (19)$$

ce qui peut être traduit matriciellement sous la forme :

$$\mathbf{A}.\mathbf{X} = \mathbf{B} \qquad (20)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & -y_1 \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 \\ 1 & 0 & x'_1 & -y'_1 \\ 0 & 1 & y'_1 & x'_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix} \qquad (21)$$

Calculons le déterminant du système (21), on obtient :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 & -y_1 \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 \\ 1 & 0 & x'_1 & -y'_1 \\ 0 & 1 & y'_1 & x'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & x_1 \\ 0 & x'_1 & -y'_1 \\ 1 & y'_1 & x'_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x_1 & -y_1 \\ 1 & y_1 & x_1 \\ 1 & y'_1 & x'_1 \end{vmatrix} \qquad (22)$$

$\Rightarrow D = x_1'^2 + y_1'^2 - y_1 y'_1 - x_1 x'_1 - (x_1 x'_1 + y'_1 y_1) + x_1^2 + y_1^2$

$= x_1'^2 + y_1'^2 + x_1^2 + y_1^2 \; -2\, x_1 x'_1 \; -2\, y_1 y'_1 \; = \; (x_1 - x_1')^2 + (y_1 - y_1')^2$ (23)

$\neq 0$

car $x_1 \neq x_1'$ et $y_1 \neq y_1'$

donc le système est inversible, ce qui permettra de calculer les valeurs approchées de α_0, β_0, α_1 et β_1 qu'on notera ultérieurement $\overline{\alpha_0}$, $\overline{\beta_0}$, $\overline{\alpha_1}$, $\overline{\beta_1}$.

Pour déterminer les valeurs définitives $\overline{\overline{\alpha_0}}$, $\overline{\overline{\beta_0}}$, $\overline{\overline{\alpha_1}}$, $\overline{\overline{\beta_1}}$, on utilise la méthode des moindres carrés. On pose :

$$\overline{\overline{\alpha_0}} = \overline{\alpha_0} + d\alpha_0 \qquad \overline{\overline{\alpha_1}} = \overline{\alpha_1} + d\alpha_1 \qquad (24)$$

$$\overline{\overline{\beta_0}} = \overline{\beta_0} + d\beta_0 \qquad \overline{\overline{\beta_1}} = \overline{\beta_1} + d\beta_1 \qquad (25)$$

et on les remplace dans (6), on aura pour un point :

$$\begin{aligned} x_2 &= \overline{\alpha_0} + d\alpha_0 + (\overline{\alpha_1} + d\alpha_1)x_1 - (\overline{\beta_1} + d\beta_1)y_1 \\ y_2 &= (\overline{\beta_0} + d\beta_0) + (\overline{\beta_1} + d\beta_1)x_1 + (\overline{\alpha_1} + d\alpha_1)y_1 \end{aligned} \qquad (26)$$

$$d\alpha_0 + x_1 d\alpha_1 - y_1 d\beta_1 = x_2 - \overline{\alpha_0} - \overline{\alpha_1}\, x_1 + \overline{\beta_1}\, y_1$$

$$d\beta_0 + y_1 d\alpha_1 + x_1 d\beta_1 = y_2 - \overline{\beta_0} - \overline{\beta_1}\, x_1 - \overline{\alpha_1}\, y_1 \qquad (27)$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & -y_1 \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\alpha_0 \\ d\beta_0 \\ d\alpha_1 \\ d\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - \overline{\alpha_0} - \overline{\alpha_1} x_1 + \overline{\beta_1} y_1 \\ y_2 - \overline{\beta_0} - \overline{\beta_1} x_1 - \overline{\alpha_1} y_1 \end{pmatrix} \qquad (28)$$

En utilisant les n points communs aux systèmes 1 et 2, on obtient :

$$A_1 . \begin{pmatrix} d\alpha_0 \\ d\beta_0 \\ d\alpha_1 \\ d\beta_1 \end{pmatrix} = B_1 + \nu_1 \quad \text{ou encore} \quad A_1.X = B_1 + \nu_1 \qquad (29)$$

où ν_1 est le vecteur résidu dans la méthode des moindres carrés.

$$\begin{aligned} A_2.X &= B_2 + \nu_2 \\ A_3.X &= B_3 + \nu_3 \\ &\vdots \\ A_n.X &= B_n + \nu_n \end{aligned} \qquad (30)$$

Soit $A_i.X = B_i + \nu_i$ où A_i , B_i et ν_i désignent respectivement les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & -y_1 \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 - \overline{\alpha_0} - \overline{\alpha_1} x_1 + \overline{\beta_1} y_1 \\ y_2 - \overline{\beta_0} - \overline{\beta_1} x_1 - \overline{\alpha_1} y_1 \end{pmatrix}$$

et vecteur résidu pour le point d'ordre i.

La résolution par les moindres carrés donne :

$$\overline{X} = (A^T A)^{-1} A^T B \qquad (31)$$

et

$$\nu = A(A^T A)^{-1} A^T B - B = (A(A^T A)^{-1} A^T - 1).B \qquad (32)$$

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum \upsilon_0^2}{n-4} \qquad (33)$$

$$\sigma_X = (A^T A)^{-1} \sigma_0^2 \qquad (34)$$

II.2 - Cas $Z = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$:

Ecrivons (15) pour 3 points communs M(x,y), M'(x',y') et M''(x'',y'') , ce qui donne :

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1 - \beta_1 y_1 + \alpha_2 (x_1^2 - y_1^2) - 2\beta_1 x_1 y_1 = x_2$$

et pour M, (35-1)

$$\beta_0 + \beta_1 x_1 + \alpha_1 y_1 + 2\alpha_2 x_1 y_1 + \beta_2 (x_1^2 - y_1^2) = y_2$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1' - \beta_1 y_1' + \alpha_2(x_1'^2 - y_1'^2) - 2\beta_1 x_1' y_1' = x_2'$$

et pour M', (35-2)

$$\beta_0 + \beta_1 x_1' + \alpha_1 y_1' + 2\alpha_2 x_1' y_1' + \beta_2(x_1'^2 - y_1'^2) = y_2'$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 x_1'' - \beta_1 y_1'' + \alpha_2(x_1''^2 - y_1''^2) - 2\beta_1 x_1'' y_1'' = x_2''$$

et pour M'' : (35-3)

$$\beta_0 + \beta_1 x_1'' + \alpha_1 y_1'' + 2\alpha_2 x_1'' y_1'' + \beta_2(x_1''^2 - y_1''^2) = y_2''$$

ce qui donne matriciellement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & -y_1 & x_1^2 - y_1^2 & -2x_1 y_1 \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 & 2x_1 y_1 & x_1^2 - y_1^2 \\ 1 & 0 & x'_1 & -y'_1 & x'^2_1 - y'^2_1 & -2x'_1 y'_1 \\ 0 & 1 & y'_1 & x'_1 & 2x'_1 y'_1 & x'^2_1 - y'^2_1 \\ 1 & 0 & x''_1 & -y''_1 & x''^2_1 - y''^2_1 & -2x''_1 y''_1 \\ 0 & 1 & y''_1 & x''_1 & 2x''_1 y''_1 & x''^2_1 - y''^2_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x'_2 \\ y'_2 \\ x''_2 \\ y''_2 \end{pmatrix} \qquad (36)$$