MINISTERE DU TRANSPORT ET DE L'EQUIPEMENT
OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE

LA GÉOMÉTRIE DE COMPENSATION NON-LINÉAIRE - LE PROBLÈME SPATIAL D'INTERSECTION -

Par
Abdelmajid BEN HADJ SALEM

INGÉNIEUR GÉNÉRAL À L'OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE

AVRIL 2011

VERSION 1.

OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE

Table des matières

La Géométrie de Compensation Non-Linéaire
- Le Problème Spatial d'Intersection -

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM

1 Introduction

Dans un article [1] E. Grafarend et B. Schaffrin ont étudié la géométrie de la compensation ou ajustement non-linéaire pour le cas du problème d'intersection plane en utilisant le modèle de Gauss Markov, par les moindres carrés.Le présent papier développe la même méthode en travaillant sur un exemple de la détermination d'un point par trilatération dans l'option de la géodésie tridimensionnelle pour la détermination des coordonnées (x, y, z) d'un point inconnu à partir des mesures des distances vers n points connus.

2 La Géométrie Non Linéaire du Modèle de Gauss-Markov

Le modèle non linéaire de Gauss-Markov est défini par :

$$\zeta(X) = L - e; \quad e \in \mathcal{N}(0, \Gamma) \tag{1}$$

avec :

- L : le vecteur des observations $(n \times 1) = (L_1, L_2, .., L_n)^T$,

- X : le vecteur des inconnues $(m \times 1) = (X_1, X_2, .., X_m)^T$,

- e : le vecteur des erreurs $(n \times 1) = (e_1, e_2, .., e_n)^T$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec $E(e) = 0$ et $\Gamma = E(ee^T)$ la matrice de dispersion ou variance, on prendra $\Gamma = \sigma_0^2.P^{-1}$. P est la matrice des poids et σ_0 une constante positive.

- ζ : est une fonction donnée injective d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $m < n$.

Remarque : dans le cas d'un modèle linéaire, la fonction $\zeta = A.X$ où A est une matrice $m \times n$.

On note $Im\zeta = \{\zeta(X)/X \in U\}$ l'image de U par la fonction ζ. $Im\zeta$ est une variété de dimension m vérifiant les conditions :

(i) : les vecteurs $\dfrac{\partial\zeta}{\partial X_1}, \dfrac{\partial\zeta}{\partial X_2}, ..., \dfrac{\partial\zeta}{\partial X_m}$ sont linéairement indépendants en chaque point $X \in U$,

(ii) : les fonctions $\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial X_i \partial X_j}$ sont continues sur U pour $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$.

On introduit un produit scalaire :

$$< \zeta_1, \zeta_2 >= \zeta_1^T.P.\zeta_2 \tag{2}$$

D'où la norme du vecteur $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)^T$:

$$\|\zeta\|^2 =< \zeta, \zeta >= \zeta^T.P.\zeta = \sum_{i=1}^{n} p_i.\zeta_i^2 \tag{3}$$

dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ en prenant la matrice de poids P une matrice diagonale .

Alors la solution par les moindres carrés $\bar{X}$ sera définie par :

$$\|L - \bar{\zeta}(\bar{X})\| = min\,\{\|L - \zeta(X)\| \,/\, X \in U\} \tag{4}$$

Cette condition est exprimée par les équations de Lagrange-Euler soit :

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\|L - \zeta(X)\|^2 = 0 \quad \text{pour}\, i \in \{1, 2, ..., m\} \tag{5}$$

En effet, on veut minimiser la fonction :

$$F(X) = F(X_1, X_2, .., X_m) = \|L - \zeta(X)\| = \|L - \zeta(X_1, X_2, ..., X_m)\| \tag{6}$$

Comme F est une fonction positive, minimiser F c'est aussi minimiser F^2, soit $G(X) = F^2(X)$. En appliquant les équations de Lagrange-Euler, on obtient :

$$-\frac{\partial G(X)}{\partial X_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial G(X)}{\partial X_i} = 0$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\|L - \zeta(X_1, X_2, ..., X_m)\|^2 = 0 \quad \text{pour}\, i \in \{1, 2, ..., m\} \tag{7}$$

or :

$$\|L - \zeta(X_1, X_2, ..., X_m)\|^2 = (L - \zeta(X_1, X_2, ..., X_m))^T.P.(L - \zeta(X_1, X_2, ..., X_m)) = \zeta(X)^T.P.\zeta(X) - 2L^T.P.\zeta(X) + L^T.P.L \tag{8}$$

Soit :

$$\frac{\partial G(X)}{\partial X_i} = 2\zeta(X)^T.P.\frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} - 2L^T.P.\frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} \quad \text{pour}\, i \in \{1, 2, ..., m\} \tag{9}$$

ou encore :

$$\frac{\partial G(X)}{\partial X_i} = 2(\zeta(X) - L)^T.P.\frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} \quad \text{pour}\, i \in \{1, 2, ..., m\}$$

ce qui donne en utilisant(5) :

$$< L - \zeta(X), \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} >= 0 \quad \text{pour}\, i \in \{1, 2, ..., m\} \tag{10}$$

$$\text{ou} \quad < e, \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} >= 0 \quad \text{pour}\, i \in \{1, 2, ..., m\} \tag{11}$$

Géométriquement, cela veut dire que le vecteur erreur $e = L - \zeta(X)$ est perpendiculaire (produit scalaire nul) au plan tangent de la variété $Im\zeta$ au point $\bar{\zeta}(\bar{X})$ (s'il existe).

Pour le cas non-linéaire, la condition (11) est nécessaire mais non suffisante. Pour obtenir le minimum, il faut que la matrice $(\dfrac{\partial^2 G}{\partial X_i \partial X_j}), i, j \in \{1, 2, ..., m\}$ soit définie positive.

3 Etude d'un cas pratique

On considère la détermination d'un point par trilatération dans l'option de la géodésie tridimensionnelle pour la détermination des coordonnées (x, y, z) d'un point M inconnu à partir des mesures des distances vers 4 points connus $M_k(u_k, v_k, w_k)_{k=1,2,3,4}$.

Pour faciliter les calculs, on prendra $P = I$, $\sigma_0 = 1$ et nous adoptons la fonction $\zeta(X)$ comme suit :

$$\zeta(X) = \left| \begin{array}{l} \zeta_1 = (x-u_1)^2 + (y-v_1)^2 + (z-w_1)^2 \\ \zeta_2 = (x-u_2)^2 + (y-v_2)^2 + (z-w_2)^2 \\ \zeta_3 = (x-u_3)^2 + (y-v_3)^2 + (z-w_3)^2 \\ \zeta_4 = (x-u_4)^2 + (y-v_4)^2 + (z-w_4)^2 \end{array} \right. \tag{12}$$

$$\text{avec} \quad X_1 = x, \quad X_2 = y, \quad X_3 = z \tag{13}$$

et D'après (12), la fonction ζ n'est une fonction linéaire des variables X_i. ζ est une fonction de $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ qui s'écrit :

$$\zeta(X) = \zeta_k e_k$$

où e_k est la base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Voyons qu'elle vérifie les deux conditions (i) et (ii) cités ci-dessus.

Calculons $\dfrac{\partial \zeta}{\partial X_i}$, on a alors :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial X_1} = \left| \begin{array}{l} 2(x-u_1) \\ 2(x-u_2) \\ 2(x-u_3) \\ 2(x-u_4) \end{array} \right. , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial X_2} = \left| \begin{array}{l} 2(y-v_1) \\ 2(y-v_2) \\ 2(y-v_3) \\ 2(y-v_4) \end{array} \right. , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial X_3} = \left| \begin{array}{l} 2(z-w_1) \\ 2(z-w_2) \\ 2(z-w_3) \\ 2(z-w_4) \end{array} \right. , \tag{14}$$

Pourque les 3 vecteurs soient linéairement indépendants, il faut que les points M, M_i, M_j, M_k ne soient pas alignés. Pour la condition (ii), on a facilement :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_1^2} = \left| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right. , \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_2^2} = \left| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right. , \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_3^2} = \left| \begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right. \tag{15}$$

et pour $i \neq j$, on a :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial X_i \partial X_j} = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \tag{16}$$

Donc les quantités $\dfrac{\partial^2 \zeta(X)}{\partial X_i \partial X_j}$ sont continues et la condition (ii) est vérifiée.

3.1 Ecriture des Equations de Lagrange-Euler

Pour déterminer la solution par les moindres carrés du modèle non-linéaire, on écrit les conditions (10). Le vecteur $L = (L_1, L_2, L_3, L_4)^T$ telque chacun des L_i représente le carré de la distance spatiale mesurée. On a alors en utilisant (14) :

$$< L - \zeta(X), \frac{\partial \zeta(X)}{\partial X_i} >= 0; \quad i = 1, 2, 3$$

soit :

$$\begin{aligned} (x-u_1)(L_1-\zeta_1) + (x-u_2)(L_2-\zeta_2) + (x-u_3)(L_3-\zeta_3) + (x-u_4)(L_4-\zeta_4) = 0 \\ (y-v_1)(L_1-\zeta_1) + (y-v_2)(L_2-\zeta_2) + (y-v_3)(L_3-\zeta_3) + (y-v_4)(L_4-\zeta_4) = 0 \\ (z-w_1)(L_1-\zeta_1) + (z-w_2)(L_2-\zeta_2) + (z-w_3)(L_3-\zeta_3) + (z-w_4)(L_4-\zeta_4) = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Les équations (17) représente un système de trois équations non linéaires de trois inconnues (x, y, z) dont la solution est un peu compliquée.

Pour faciliter encore la résolution du système précédent, on va supposer que la variable z est connue égale à z_0, dans ce cas, on se limite à trois distances mesurées L_1, L_2 et L_2. Alors (17) s'écrit :

$$\begin{aligned} (x-u_1)(L_1-\zeta_1) + (x-u_2)(L_2-\zeta_2) + (x-u_3)(L_3-\zeta_3) = 0 \\ (y-v_1)(L_1-\zeta_1) + (y-v_2)(L_2-\zeta_2) + (y-v_3)(L_3-\zeta_3) = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

avec :

$$\zeta_1 = (x-u_1)^2 + (y-v_1)^2 + (z_0-w_1)^2$$

$$\zeta_2 = (x-u_2)^2 + (y-v_2)^2 + (z_0-w_2)^2$$

$$\zeta_3 = (x-u_3)^2 + (y-v_3)^2 + (z_0-w_3)^2$$

Les expressions $\zeta_i - L_i$ s'écrivent sous la forme :

$$\zeta_i - L_i = x^2 + y^2 - 2xu_i - 2yv_i + a_i \tag{19}$$

$$\text{avec} \quad a_i = constante \tag{20}$$

Le système (18) devient :

$$(x-u_1)(x^2+y^2-2xu_1-2yv_1+a_1)+(x-u_2)(x^2+y^2-2xu_2-2yv_2+a_2) \\ +(x-u_3)(x^2+y^2-2xu_3-2yv_3+a_3)=0 \tag{21}$$

$$(y-v_1)(x^2+y^2-2xu_1-2yv_1+a_1)+(y-v_2)(x^2+y^2-2xu_2-2yv_2+a_2) \\ +(y-v_3)(x^2+y^2-2xu_3-2yv_3+a_3)=0 \tag{22}$$

En développant les équations (21) et(22), on obtient :

$$3x^3+3xy^2-3x^2(u_1+u_2+u_3)-y^2(u_1+u_2+u_3)-2xy(v_1+v_2+v_3)+ \\ x(a_1+a_2+a_3+2u_1^2+2u_2^2+2u_3^2)+2y(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)-(a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3)=0 \tag{23}$$

$$3y^3+3yx^2-3y^2(v_1+v_2+v_3)-x^2(v_1+v_2+v_3)-2xy(u_1+u_2+u_3)+ \\ y(a_1+a_2+a_3+2v_1^2+2v_2^2+2v_3^2)+2x(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)-(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3)=0 \tag{24}$$

Supposons qu'on se limite à deux distances L_1 et L_2, alors on a à résoudre :

$$2x^3+2xy^2-2x^2(u_1+u_2)-y^2(u_1+u_2)-2xy(v_1+v_2)+ \\ x(a_1+a_2+2u_1^2+2u_2^2)+2y(u_1v_1+u_2v_2)-(a_1u_1+a_2u_2)=0 \tag{25}$$

$$2y^3+2yx^2-2y^2(v_1+v_2)-x^2(v_1+v_2)-2xy(u_1+u_2)+ \\ y(a_1+a_2+2v_1^2+2v_2^2)+2x(u_1v_1+u_2v_2)-(a_1v_1+a_2v_2)=0 \tag{26}$$

3.2 Réduction des Equations de Lagrange-Euler

Dans ce paragraphe, on essaye de présenter de réduire l'écrirure du système (25) - (26). A cet effet posons :

$$z=x+iy, \quad \bar{z}=x-iy \quad \text{avec} \quad i=\sqrt{-1} \\ s=u_1+u_2, \quad t=v_1+v_2, \quad p=u_1^2+u_2^2, \quad q=v_1^2+v_2^2 \\ a=a_1+a_2, \quad r=u_1v_1+u_2v_2, \quad d=a_1u_1+a_2u_2, \quad f=a_1v_1+a_2v_2 \tag{27}$$

ce qui donne :

$$2x=z+\bar{z}, \quad 2iy=z-\bar{z} \tag{28}$$

Alors les expressions (25) - (26) deviennent :

$$4z^2\bar{z}+4z\bar{z}^2+(2it-s)z^2-6sz\bar{z}-(s+2it)\bar{z}^2+2z(a+2p-2ir)+2\bar{z}(a+2p+2ir)-4d=0 \tag{29}$$

$$4z^2\bar{z}-4z\bar{z}^2+(it-2s)z^2-6itz\bar{z}+(2s+it)\bar{z}^2+2z(a+2q+2ir)-2\bar{z}(a+2q-2ir)-4if=0 \tag{30}$$

La résolution des équations précédentes fera l'objet prochainement d'une note technique.

4 Calcul de la Matrice Covariance des inconnues

Comme on a :

$$\zeta = \left(\begin{array}{l} \zeta_1 = (x-u_1)^2 + (y-v_1)^2 + (z_0-w_1)^2 \\ \zeta_2 = (x-u_2)^2 + (y-v_2)^2 + (z_0-w_2)^2 \\ \zeta_3 = (x-u_3)^2 + (y-v_3)^2 + (z_0-w_3)^2 \end{array} \right) \tag{31}$$

Or, on s'est limité à deux inconnues, le vecteur $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)^T$. D'où en différentiant (31) en utilisant les deux premières lignes, on obtient alors :

$$d\zeta = \left(\begin{array}{c} d\zeta_1 \\ d\zeta_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 2(x-u_1) & 2(y-v_1) \\ 2(x-u_2) & 2(y-v_2) \end{array} \right) . \left(\begin{array}{c} dx \\ dy \end{array} \right) = J_X.dX \tag{32}$$

avec :

$$J_X = 2. \left(\begin{array}{cc} x-u_1 & y-v_1 \\ x-u_2 & y-v_2 \end{array} \right) \tag{33}$$

Par suite :

$$dX = \left(\begin{array}{c} dx \\ dy \end{array} \right) = J_X^{-1}. \left(\begin{array}{c} d\zeta_1 \\ d\zeta_2 \end{array} \right) \tag{34}$$

d'où la matrice covariance du vecteur inconnu $X = (x, y)^T$:

$$\sigma_X^2 = J_X^{-1}.\sigma_L^2.J_X^{-1T} \tag{35}$$

Références

[1] E.W. Grafarend et B. Schaffrin. The geometry of non-linear adjustment - the planar trisection problem. *FESTCHRIFT to TORBEN KRARUP* edited by E. Kejlo, K. Poder and C.C. Tscherning. Geodætisk Institut, Meddelelse n° 58. p149-172. København, Danmark. 1989.

[2]P.J.G Teunissen. The Geometry of Geodetic Inverse Linear Mapping and Non-Linear Adjustment. Publications On Geodesy, n°1,Volume 8, Netherlands Geodetic Commission. 1985. 177p.