

A photograph of a GPS satellite in orbit above Earth. The satellite is a rectangular box with a gold-colored top and a white bottom, with two large solar panel arrays extending from its sides. The Earth's surface is visible below, showing blue oceans and white clouds. The background is the blackness of space.

Cours d'Initiation au GPS

Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Ingénieur Géographe Général

Décembre 2015 – v3.0

Plan du Cours

1. Introduction
2. Définitions
3. Les Signaux GPS
4. Le Mode Naturel ou Positionnement Absolu
5. Le Mode Différentiel ou Positionnement Relatif
6. Les Différentes Techniques de mesure en mode différentiel
7. Passage du Système international au Système national

1. Introduction

Dans les années 80, C'était le système Doppler (ou Transit) qui était utilisé en géodésie spatiale. Il présentait deux défauts importants :

- une couverture satellitaire insuffisante,
- une faible précision en navigation.

Le Département de la Défense des USA (DoD) a préconisé la mise en place d'un système de navigation plus précis et qui couvre toute la terre globale: c'est le système de positionnement global ou Global Positioning System (GPS).

2. Définitions

2.1. Le Système GPS

Il est aussi appelé NAVSTAR/GPS (Navigation System by Timing and Ranging) soit un système de navigation par repérage du temps et mesures des distances.

Il détermine la position de points au sol équipés de récepteurs enregistrant des mesures d'origine satellitaire.

Les spécifications initiales sont d'avoir accès à une position absolue dans un système de référence mondial avec une précision métrique et du temps avec la précision de la microseconde.

L'objectif de ce système c'est qu'il permet la détermination la position de tout point (sol, mer, air) en tout lieu et à tout instant ainsi que sa vitesse.

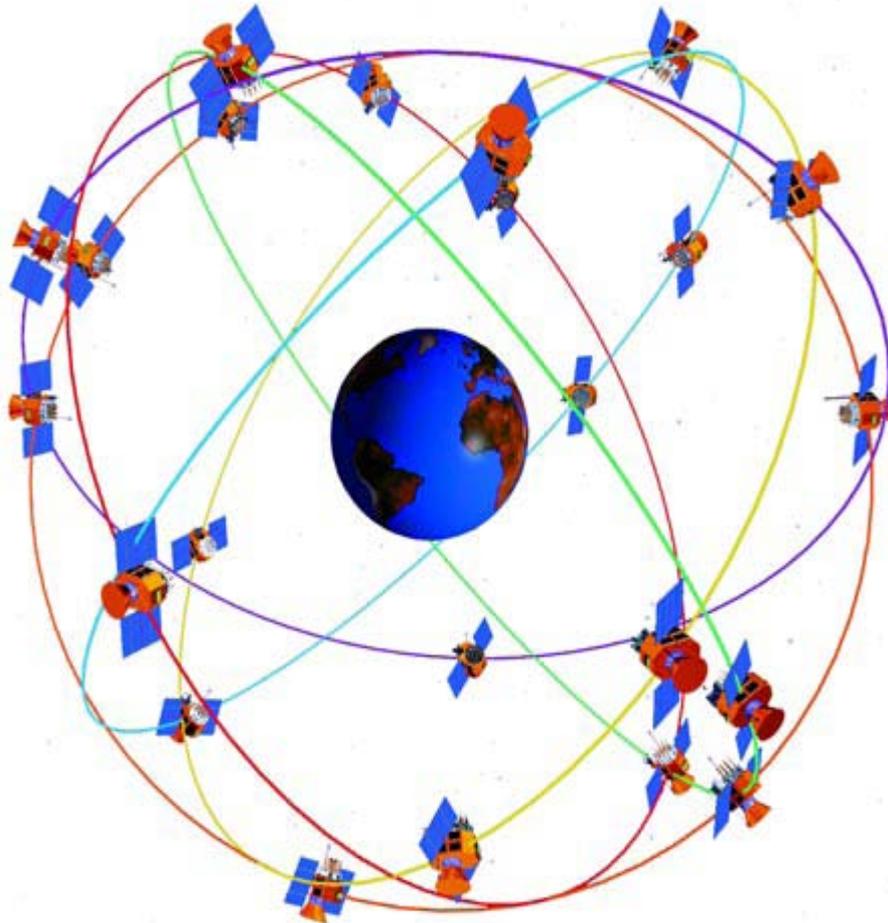
Le développement du système GPS a commencé dans les années 70, la mise en place démarrant en 1978 par le lancement du premier satellite. Le système a été déclaré opérationnel par le DoD début février 1994.

2.2. Les Principales Dates du Développement du GPS

- **Fin des années 1960**: le développement du concept du GPS.
- **Début des années 1970**: La mise en place du programme GPS par le ministère de la Défense Américaine.
- **Décembre 1973**: Le système GPS est approuvé.
- **Milieu des années 1970**: Exécution des tests au sol.
- **22 Février 1978**: Lancement du premier satellite GPS.
- **1986-1989**: Suspension du programme GPS suite au désastre du Challenger space shuttle.
- **1989**: Reprise du programme avec des changements dans la constellation.
- **1989**: The Magellan Corporation introduit le premier récepteur GPS portatif.
- **2 mai 2000**: levé de la Selective Availability par une décision présidentielle. La précision horizontale des récepteurs civils passe de 100 mètres à 15-25 mètres.

2.3. Les Aspects Généraux du GPS

- Le système complet comporte 31 satellites répartis de façon à assurer en tout lieu une visibilité simultanée de 4 à 8 satellites avec une élévation d'au moins 15° au dessus de l'horizon.
- Les satellites sont répartis sur 6 plans orbitaux. L'orbite des satellites est quasi-circulaire, leur altitude est d'environ 20 200 km et leur période d'environ 12 heures.



La constellation des satellites GPS

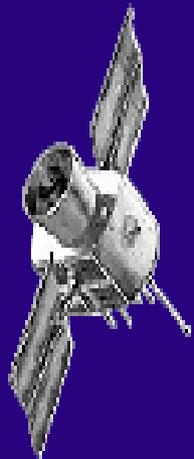
Cours d'Initiation au GPS - A. Ben Hadj
Salem – 2015 v3.

- Chaque satellite est muni d'un émetteur-récepteur, d'ordinateurs, d'une horloge de haute précision et d'équipements auxiliaires destinés au fonctionnement du système.
- On distingue différentes classes de satellites qui correspondent chacune à une étape dans la constitution du système :
 - Le Bloc I : 11 satellites lancés entre 1978 et 1985. Ce bloc a constitué la phase initiale de test du système. Aucun satellite de ce bloc n'est utilisé actuellement.

- Le Bloc IIA : le premier satellite a été lancé en avril 1989, un seul est en activité.
- Le Bloc IIR : comprenant 11 satellites lancés entre 1997 et 2004 munis d'horloges en rubidium. Ils sont en activité.
- Le bloc IIR-M est constitué de 7 satellites lancés entre septembre 1997 et 2009. Ils sont en activité. Les derniers satellites émettent la nouvelle fréquence civile L2C sur L2.
- Le bloc IIF est constitué de 12 satellites dont le premier a été lancé en 2010. Ils émettent une troisième fréquence civile L5.
- Le bloc III : le premier satellite sera lancé en 2016.

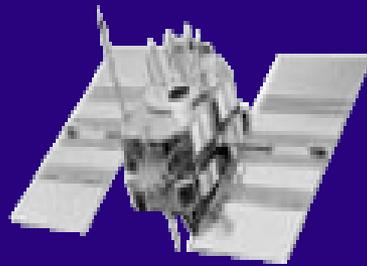
- La durée de vie nominale des satellites est de 10 ans. Ces satellites possèdent un système de communication inter satellite, ce qui permettra d'intervenir sur un satellite qui n'est pas en visibilité d'une station de contrôle via un autre satellite.

Les différentes classes de satellites



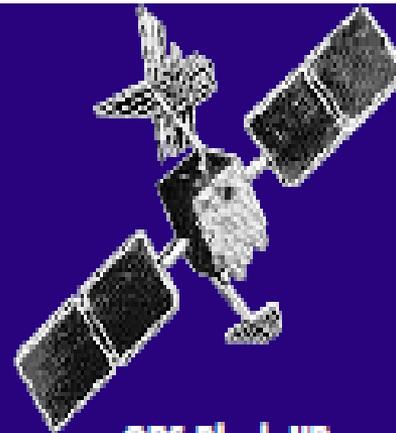
GPS Block I

First launched in 1978



GPS Block II/IIA

First launched in 1989



GPS Block IIR

First launched in 1997

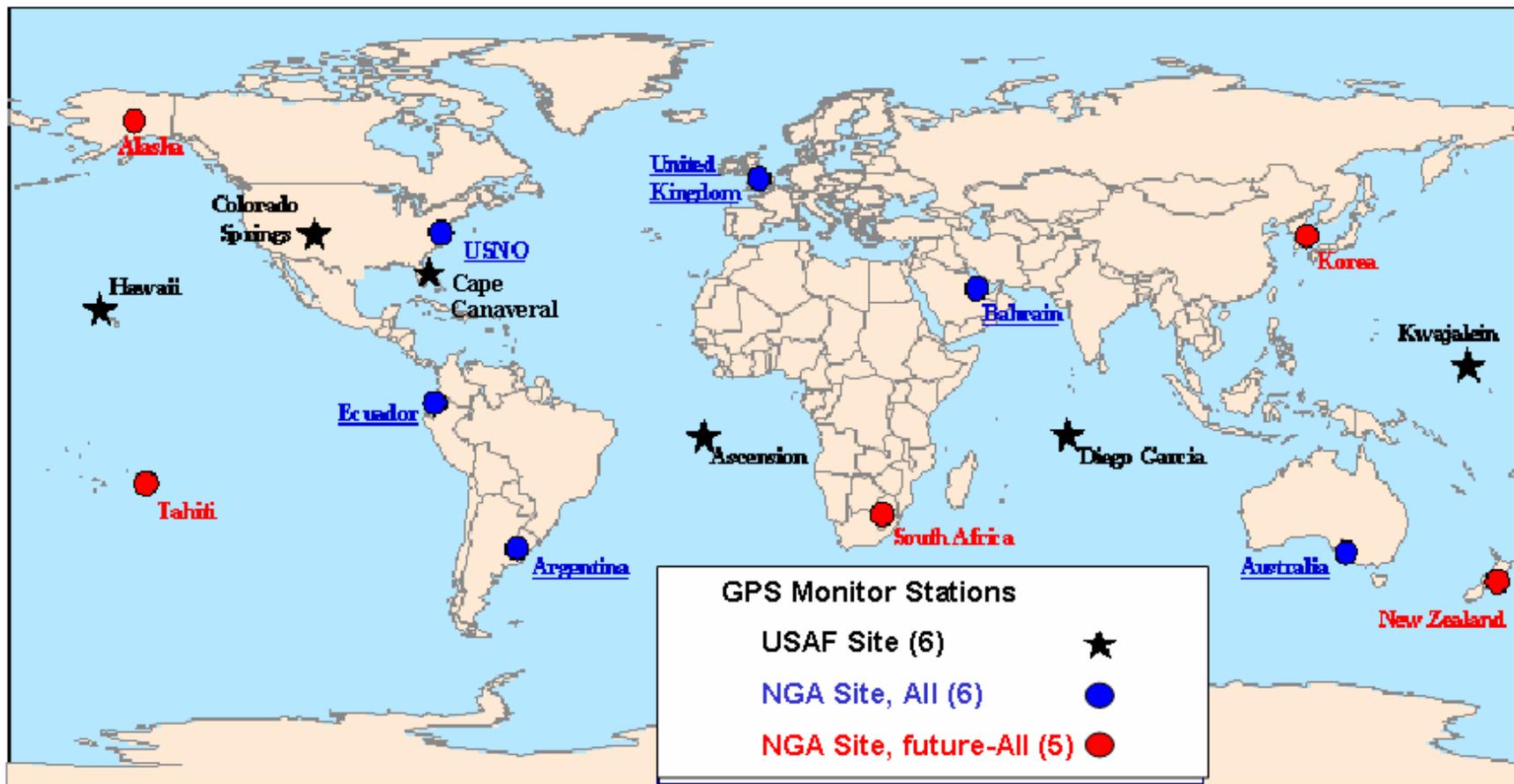


GPS Block IIF

Scheduled to be
launched in late 2005

Un secteur de contrôle

- Un secteur de contrôle est composé de 5 stations au sol (Hawaii, Colorado Springs, Ascencion, Diago Garcia et Kwajalein) qui enregistrent en continu les signaux GPS sur deux fréquences L1, L2 et la fréquence L5 (pour les satellites du bloc IIR-M). Les tâches de segment de contrôle sont:
 - Capter les satellites GPS,
 - Analyse d'orbite et prédiction,
 - Mise à jour des messages de navigation.



Les stations de contrôle (étoile en noir)

* Le segment se compose de :

- **Monitor station (MS)** : il observe les éphémérides et l'horloge.
- **Master control station (MCS)** : c'est à Colorado Springs qu'il effectue les opérations suivantes :
 - Calcule les erreurs.
 - Corrige l'orbite et la fréquence d'horloge.
 - Crée de nouveaux messages de navigation.
- **Upload station** (antennes sur terre) : il envoie les messages de navigation.

Le Message GPS

Les satellites émettent en permanence deux signaux ultra-stables sur les deux fréquences spécifiques du système L1 et L2. Sur ces deux fréquences, est modulé un code particulier dont le décodage fournit le message GPS.

Ce message se compose des éléments suivants :

- Prévise l'orbite des satellites, provenant des stations de contrôle, afin de permettre aux utilisateurs d'effectuer des calculs de navigation en temps réel.
- Information concernant la qualité des horloges des différents satellites et le modèle de développement polynomial du comportement de ces horloges.
- Information d'ordre général sur le système.

Protection du système GPS

Le système GPS est pourvu de deux processus qui permettent de limiter son utilisation civile et de protéger son utilisation militaire :

- L'accès sélectif (SA : Selective Availability) comporte deux dégradations :
 - dégradation de la fréquence de l'horloge des satellites par ajout d'un déphasage,
 - dégradation des éléments du message radiodiffusé (éphémérides des satellites, paramètres d'horloge des satellites).

Ces dégradations ont été levées par décision présidentielle en 2000.

- L'antibrouillage (AS : Anti-Spoofing) est une protection destinée à éviter le brouillage volontaire du système GPS par un utilisateur qui enverrait un signal proche de celui de GPS, créant ainsi la confusion et des erreurs de positionnement pour les autres utilisateurs.

Les Récepteurs GPS

Les récepteurs géodésiques GPS sont des appareils qui enregistrent le message des satellites par l'intermédiaire d'une antenne stationnée sur un point dont on veut connaître la position.

Par un processus basé essentiellement sur la connaissance du code qui module le signal reçu, les récepteurs effectuent les mesures GPS. Ils décodent par eux-mêmes les messages provenant des satellites.

Il existe essentiellement deux types de récepteurs:

- Les récepteurs mono fréquences qui n'enregistrent que les signaux de la fréquence L1.
- Les récepteurs bi-fréquences qui enregistrent les signaux des deux fréquences L1 et L2.

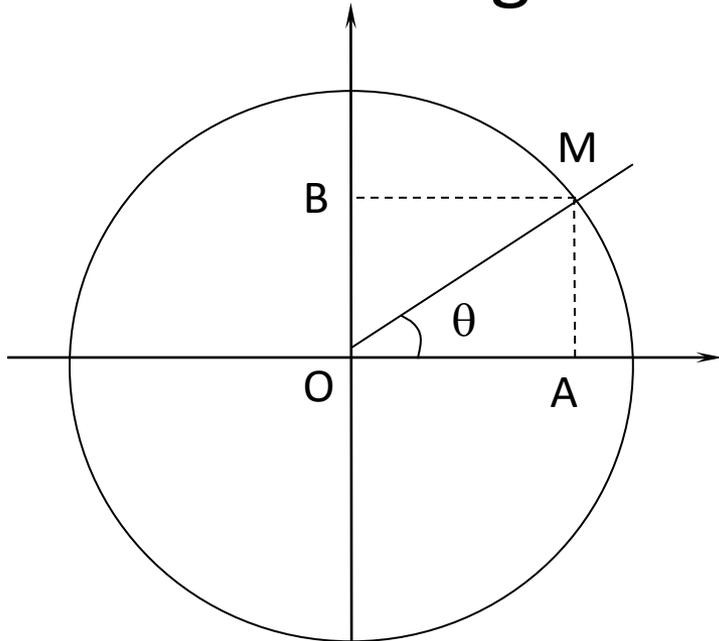


3. Les Signaux GPS

3.1. Rappels Mathématiques et Physiques

A – Fonctions périodiques trigonométriques

Parmi les fonctions périodiques, on considère les fonctions trigonométriques sin et cos:



$$\sin \theta = \frac{AM}{OM}$$

$$\cos \theta = \frac{OA}{OM}$$

Ces fonctions ont une période de 2π . En effet, on a :

$$\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta\cos2\pi-\sin\theta\sin2\pi=\cos\theta\cos2\pi=1.\cos\theta=\cos\theta$$

$$\cos(\theta+2\pi)=\cos\theta;$$

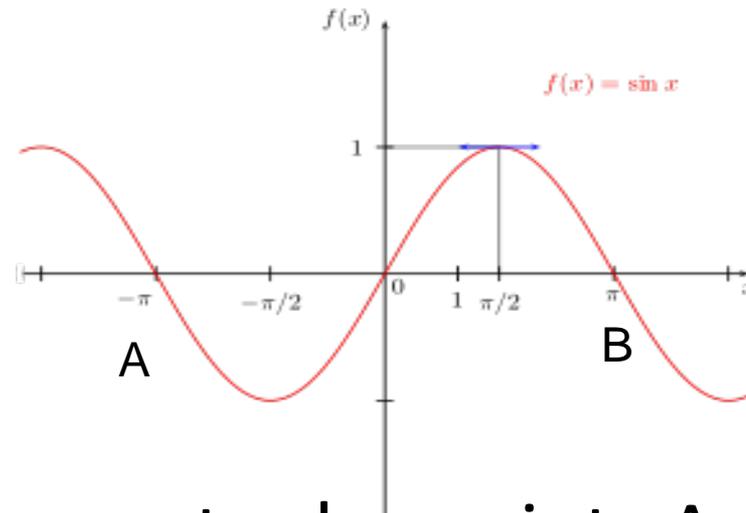
De même:

$$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta\cos2\pi+\cos\theta\sin2\pi=\sin\theta\cos2\pi=1.\sin\theta=\sin\theta$$

$$\sin(\theta+2\pi)=\sin\theta;$$

On note la période par T .

Soit la fonction $y=\sin x$, comme $\sin(-x)=-\sin x$ c'est-à-dire que la fonction sin est une fonction impaire, on a alors son graphique:



- Le graphique entre les points A et B s'appelle un cycle de la fonction.
- On appelle fréquence :

$$f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ cycle/s} = 1 \text{ Hz}$$

Soit la fonction $y=\sin\omega x$. Cherchons sa période telle que:

$$\sin(\omega(x+T)) = \sin\omega x$$

D'où : $\sin(\omega x+\omega T)=\sin\omega x\cos\omega T+\cos\omega x\sin\omega T=\sin\omega x$

Soit : $\cos\omega T=1$

Donc :

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Et la fréquence vaut:

$$f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \cdot \omega}{2\pi} = \omega$$

B- Propagation des ondes électromagnétiques

Un signal du GPS consiste une onde électromagnétique.

L'onde électromagnétique est composée de 2 composantes:

- Le champ électrique E .
- Le champ magnétique H .
- L'expression du champ électrique d'une onde plane s'écrit sous la forme:

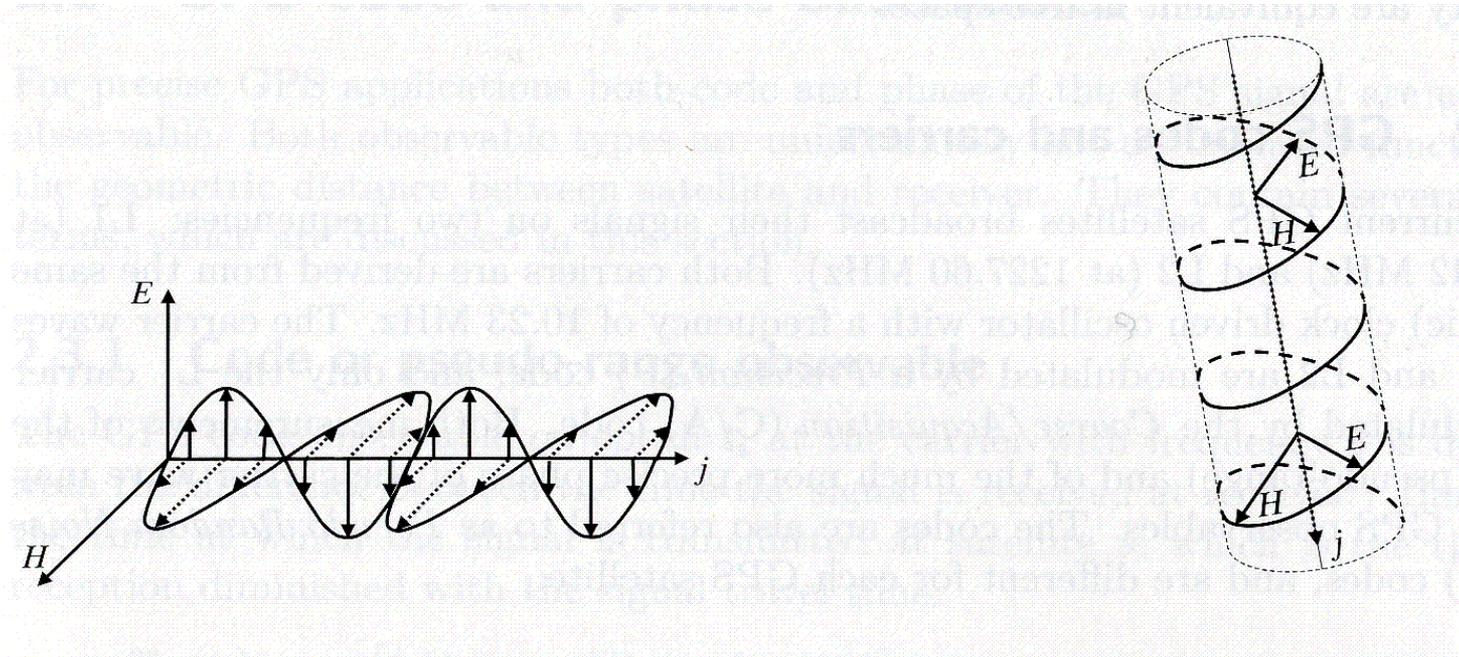
$$E(r, t) = E_0 \cos 2\pi\varphi(t, r)$$

r : position (m)

t : temps (s)

E_0 : Amplitude (V/m)

$\varphi(t, r)$: la phase (cycle)



Onde polarisée linéairement

Onde polarisée
circulairement
cas ondes GPS

Si la phase est de la forme :

$$\varphi = \omega t \Rightarrow d\varphi = \omega dt \Rightarrow \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Or pour une fonction circulaire $y = a \cos \omega t$, la fréquence est ω .
Donc, on a :

$$f = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \varphi = \int_{t_0}^t f dt$$

3.2. Les Signaux GPS

A bord des satellites GPS, les oscillateurs génèrent une

fréquence fondamentale: f_0

avec une stabilité de : $10^{-13} / j$ pour les satellites du block II.

- Chaque satellite (ou SV: *spatial vehicle*) émet en permanence sur deux fréquences différentes L1 et L2.

- $f_1 = 1575.42 \text{ MHz} = 150 \times f_0$

- $f_2 = 1227.60 \text{ MHz} = 120 \times f_0$

On sait que: $\lambda = \frac{c}{f}$

D'où: $\lambda_1 = 19.03 \text{ cm}$ et $\lambda_2 = 24.42 \text{ cm}$

La troisième fréquence L5 (block IIF) ayant f_3 égale à:

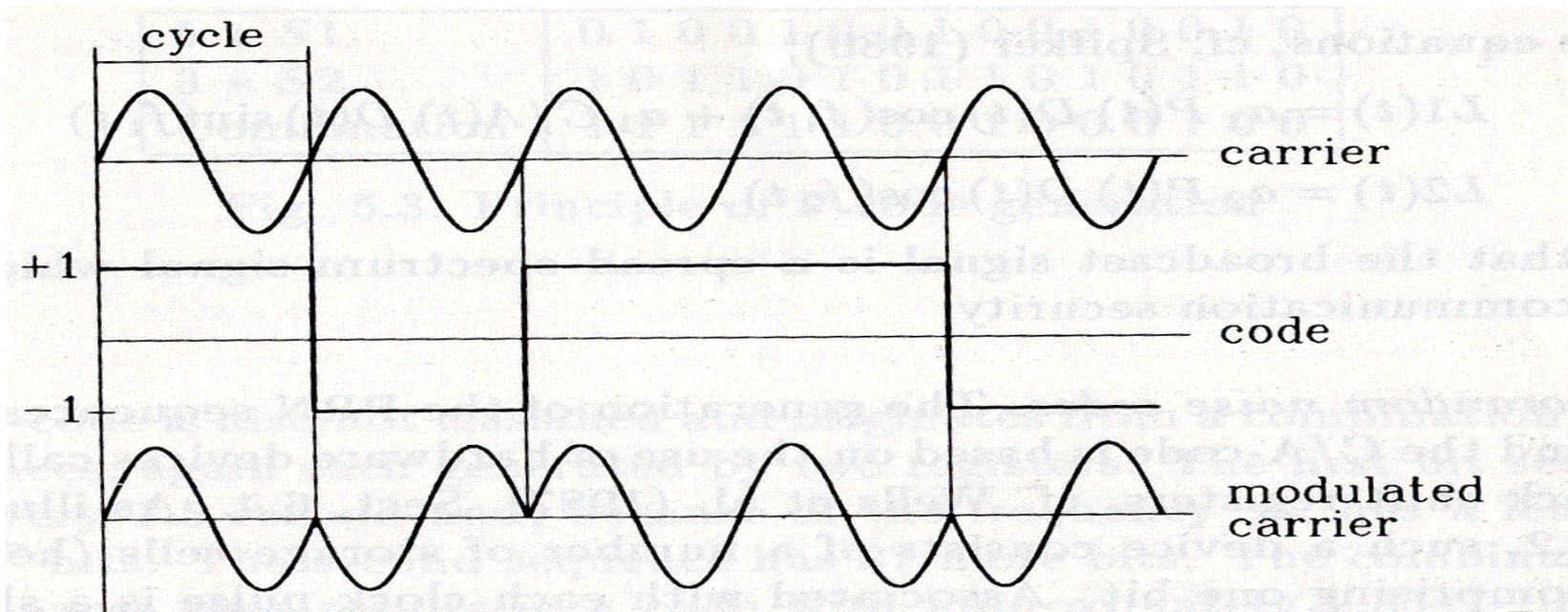
- $f_3 = 1176.45 \text{ MHz} = 115 \times f_0$

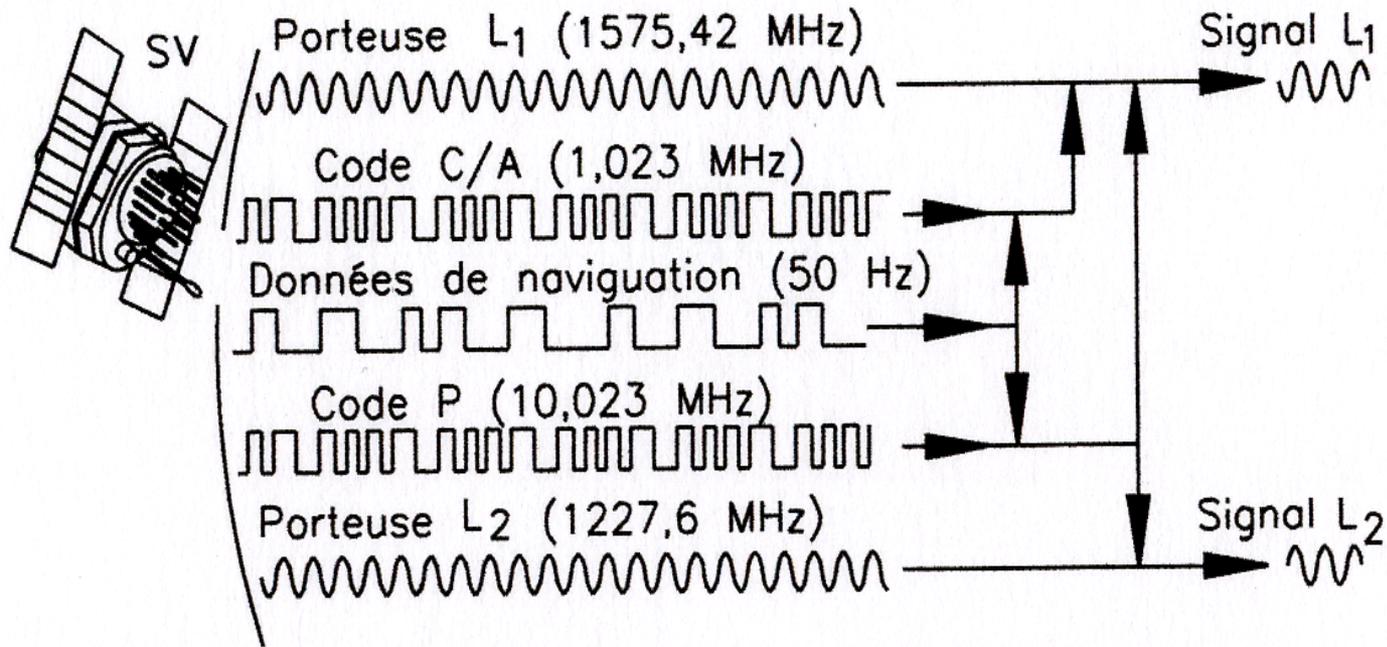
Soit: $\lambda_3 = 25.48 \text{ cm}$

La fréquence L1 porte deux codes:

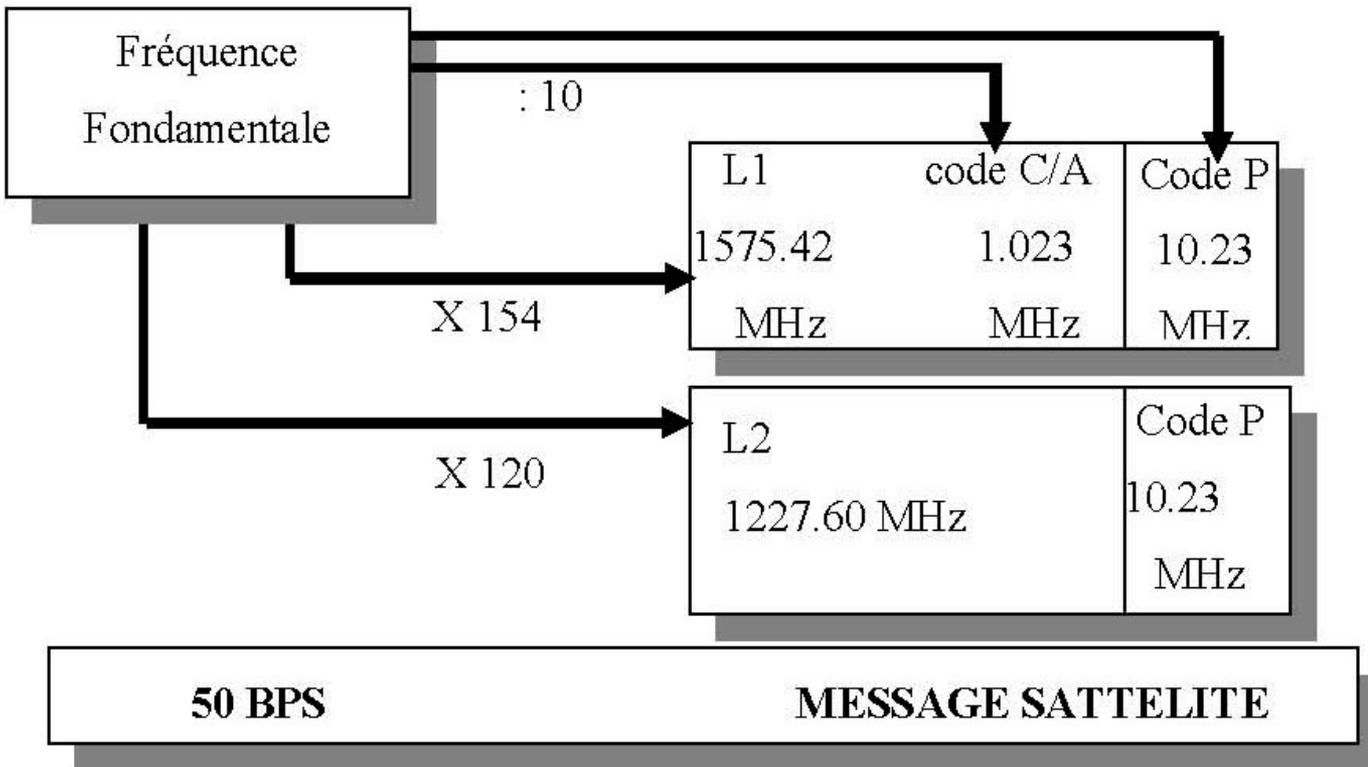
- Le code C/A: acquisition grossière,
- Le code P: acquisition précise.

La fréquence L2 porte seulement le code P.





Les signaux émis par le satellite GPS. Le code P est répété tous les 266.4 j et le code C/A est répété tous les 1/1000 s. Le code P est précis. Son décryptage est réservé aux militaires.

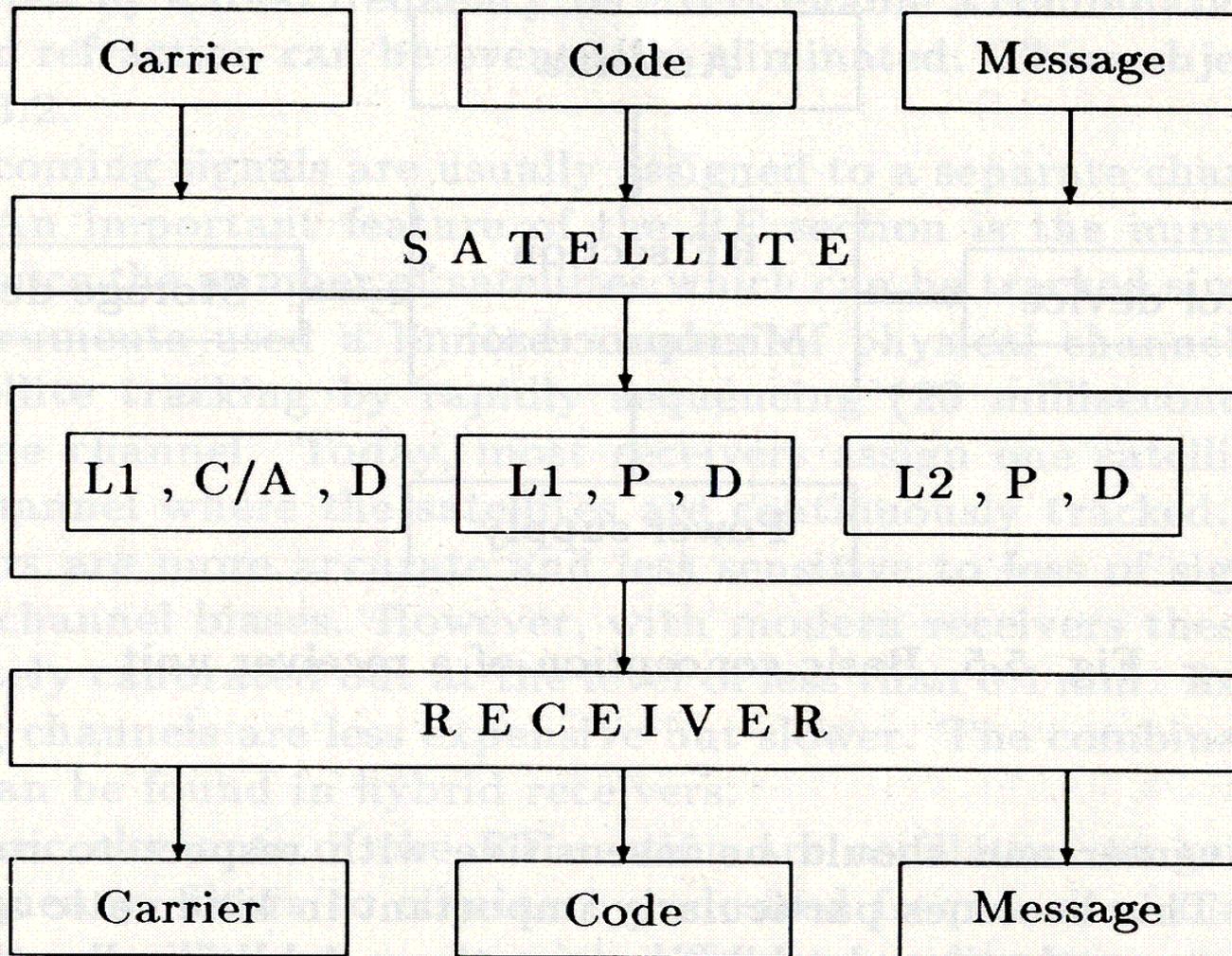


Les porteuses sont modulées respectivement sous la formes:

$$L_1(t) = a_1 P(t) D(t) \cos f_1 t + a_1 C / A(t) D(t) \sin f_1 t$$

$$L_2(t) = a_1 P(t) D(t) \cos f_2 t$$

Component	Frequency (MHz)	
Fundamental frequency	f_0	= 10.23
Carrier $L1$	$154 f_0$	= 1 575.42 ($\hat{=}$ 19.0 cm)
Carrier $L2$	$120 f_0$	= 1 227.60 ($\hat{=}$ 24.4 cm)
P-code	f_0	= 10.23
C/A-code	$f_0/10$	= 1.023
Navigation message	$f_0/204\,600$	= $50 \cdot 10^{-6}$



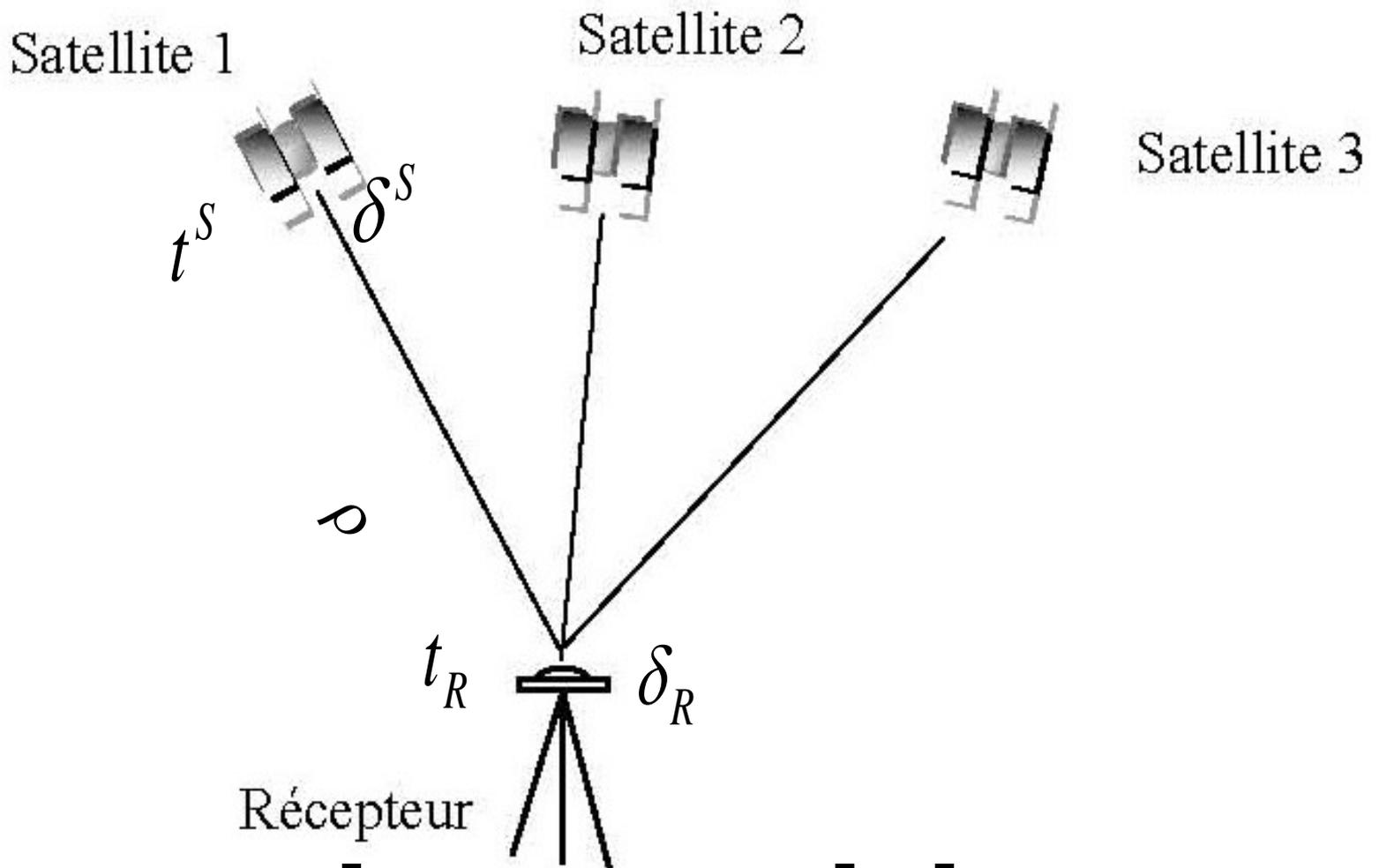
3.3. Les Equations d'observations

3.3. 1. Les Equations d'observations Code ou pseudo-distances:

On pose:

δ^S : correction horloge satellite connue

δ_R : correction horloge récepteur inconnue



$$\Delta t = t_R - t^S = [t_R(GPS) - \delta_R] - [t_R(GPS) - \delta_R]$$

$$\Delta t = \Delta t(GPS) + \Delta \delta$$

La distance:

$$R = c.\Delta t = c\Delta t(GPS) + c\Delta\delta = \rho + c\Delta\delta$$

$$\rho = \rho(x_r, y_r, z_r) = \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (y_s - y_r)^2 + (z_s - z_r)^2}$$

L'équation d'observation sera:

$$\alpha dx_r + \beta dy_r + \gamma dz_r + \rho_0 - \rho - c\Delta\delta = v$$

Les inconnues sont:

$$(dx_r, dy_r, dz_r), \Delta\delta$$

Soient la position de l'antenne et la correction de l'horloge du récepteur.

3.3.2. Les Equations d'observations de la phase

Notons $\varphi^S(t)$ la phase de l'onde reçue avec la fréquence f^S et $\varphi_R(t)$ la phase générée par le récepteur avec la fréquence f_R . Ici le temps t est une époque dans le temps GPS compté à partir d'un instant initial $t_0 = 0$, alors on peut écrire que :

$$\varphi^S(t) = f^S(t - \rho/c) - \varphi^S_0$$

$$\varphi_R(t) = f_R \cdot t - \varphi_{OR}$$

En rappelant :

δ_S : correction horloge satellite connue

δ_R : correction horloge récepteur inconnue

Les phases initiales φ^S_0 et φ_{0R} sont causées par les erreurs des horloges du satellite et du récepteur et elles sont égales à :

$$\begin{aligned}\varphi^S_0 &= f^S \delta^S \\ \varphi_{R0} &= f_R \delta_R\end{aligned}$$

Par suite, la phase de battement est égale à :

$$\varphi_R^S(t) = \varphi^S(t) - \varphi_R(t) = -f^S \cdot \rho/c - f^S \cdot \delta^S + f_R \cdot \delta_R + (f^S - f_R) t$$

Comme les fréquences $f^S \cong f_R$ l'équation précédente peut s'écrire :

$$\varphi_R^S(t) = -f \cdot \rho/c - f \cdot \Delta\delta \quad (1)$$

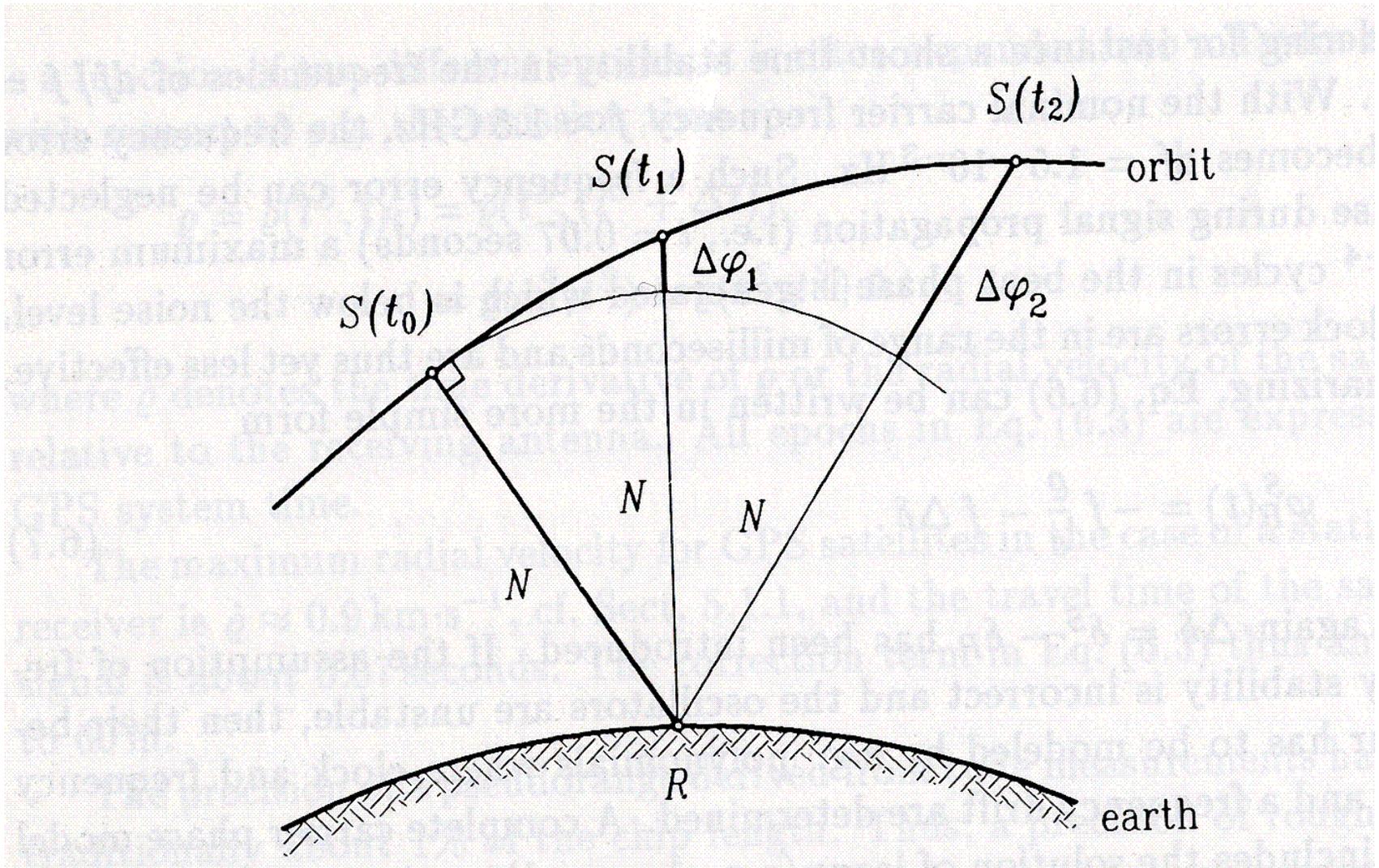
$$\text{Avec : } \Delta\delta = \delta^S - \delta_R$$

A l'époque t , la phase de battement est :

$$\varphi_R^S(t) = [\Delta\varphi_R^S(t)]_{t_0}^t + N = \Delta\varphi_R^S(t) + N$$

N désigne le nombre de cycles entre le satellite et le récepteur. **N** est appelé aussi **ambiguïté entière**.

Tant que le récepteur reçoit le signal du satellite **N** reste le même et $\Delta\varphi_R^S(t)$ est la fraction de phase mesurée depuis le début de la réception du signal.



Posons: $\Phi = - \Delta\varphi_R^S(t)$

Alors l'équation (I) devient :

$$\Phi = f \cdot \rho / c + f \cdot \Delta\delta + N$$

En introduisant la longueur d'onde λ , l'équation précédente devient :

$$\Phi = \rho / \lambda + c \cdot \Delta\delta / \lambda + N$$

Ou :

$$\lambda\Phi = \rho + c \cdot \Delta\delta + \lambda N$$

Par suite: $d\rho + c \cdot \Delta\delta + \lambda dN + \lambda\Phi_0 - \lambda\Phi = v = \text{résidu}$

Cette équation représente **l'équation d'observation de phases**.

La phase peut être mesurée mieux que 0.01 cycles ce qui correspond à une précision millimétrique. En effet:

$$\lambda d\Phi = 24 \text{ cm} \times 0.01 = 0.24 \text{ cm} = 2.4 \text{ mm}$$

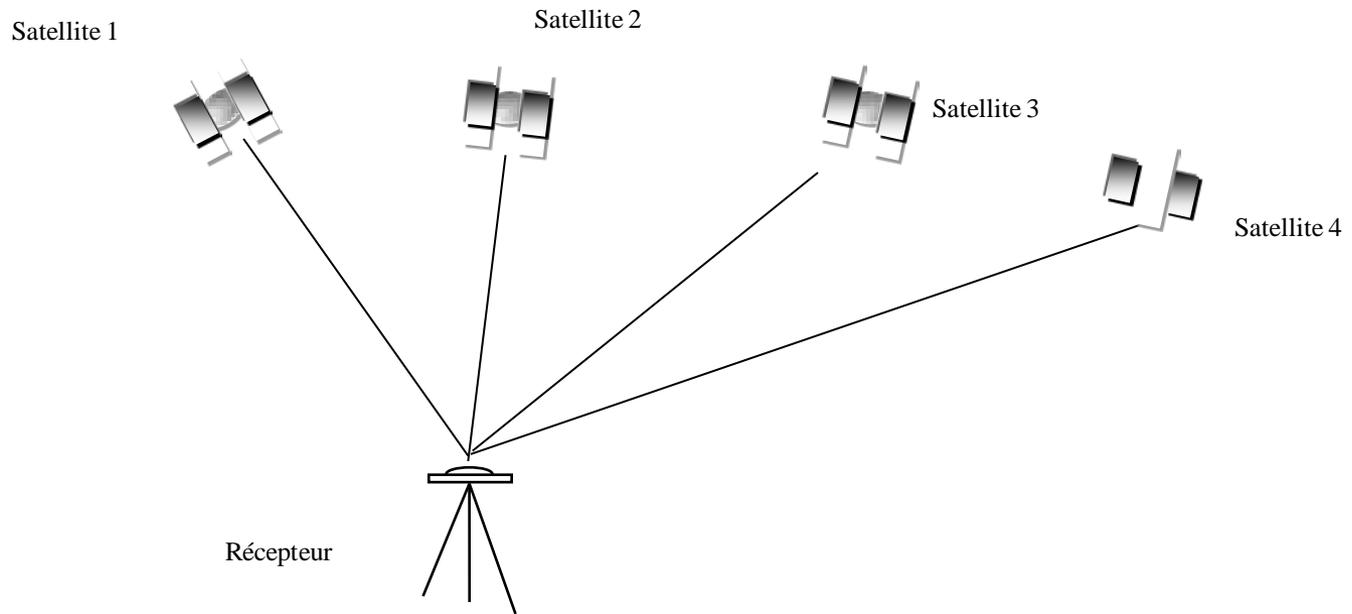
4. Le Mode Naturel ou le Positionnement Absolu

Le positionnement d'un point absolu est le processus de collection de données à partir de plusieurs satellites en un endroit donné, constamment avec une éphéméride, pour déterminer la position d'une station indépendante.

La Navigation absolue

La navigation est le but initial du système GPS. Elle consiste à localiser des véhicules sur terre, sur mer ou en air.

La première technique consiste à mesurer au moins 4 pseudo-distances sur 4 satellites à partir d'un seul récepteur. La durée d'observation est de quelques secondes.



L'utilisateur muni d'un récepteur mesure la distance entre sa station et plusieurs satellites à l'aide des codes C/A ou P. L'intérêt de cette méthode est l'obtention d'une position instantanée en temps réel.

Précision :

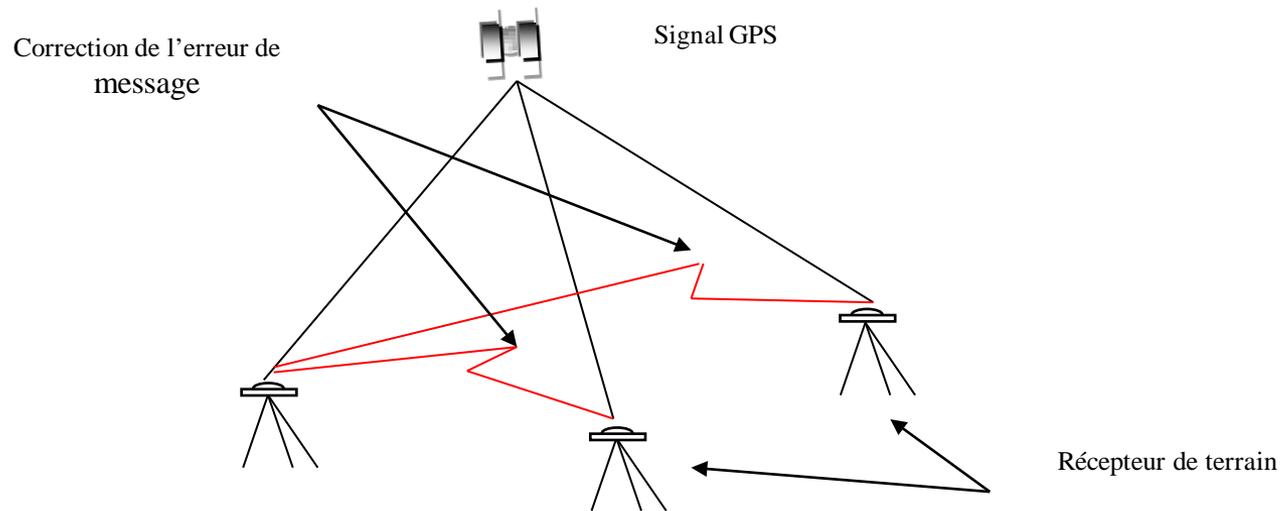
- 8 mètres avec code C/A et S/A inactivé (théoriquement).
- 40 mètres avec code C/A et S/A activé.
- 8 mètres avec code P.

5. Le Mode Différentiel ou Positionnement Relatif

C'est un processus de collection de données simultanément en deux ou plusieurs stations, à partir d'au moins quatre satellites, pour déterminer les positions des points relativement à d'autres points connus. Le positionnement des points est relatif d'un point à un autre.

La distance est calculée soit à partir des codes P ou C/A, soit à partir de mesures de phase. Ce positionnement permet de diminuer l'influence des erreurs d'orbites, des corrections de propagation, des décalages des horloges satellites et récepteurs.

Le positionnement peut être statique ou dynamique (en général un poste fixe, un mobile). Le temps réel peut être réalisé par ajout d'un équipement de transmission radio qui permet à un poste d'envoyer ses observations à l'autre qui peut alors calculer la position et la vitesse du mobile.

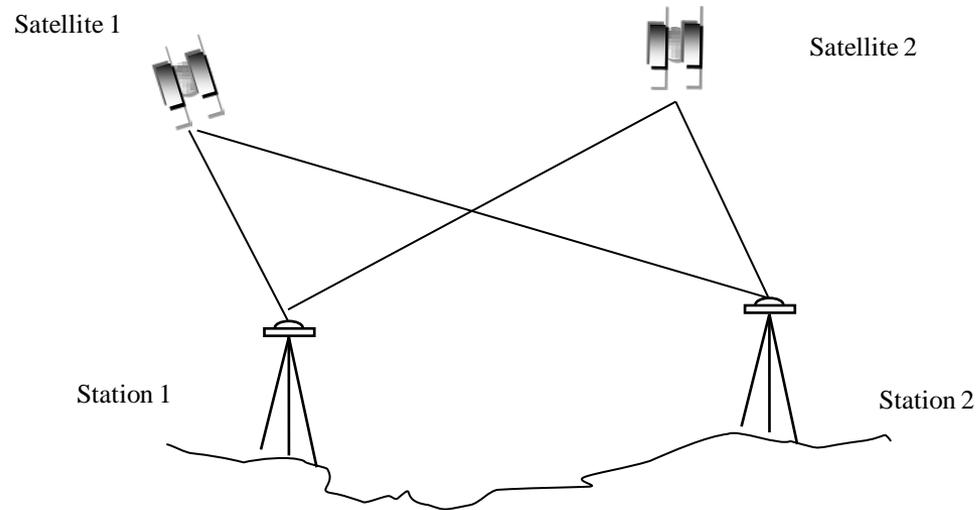


Le champ d'utilisation est vaste allant de la navigation à l'établissement de réseaux de précision (géodésie, topographie, etc.).

6. Les Différentes Techniques de mesure en mode Différentiel

6.1. Positionnement relatif (double différence)

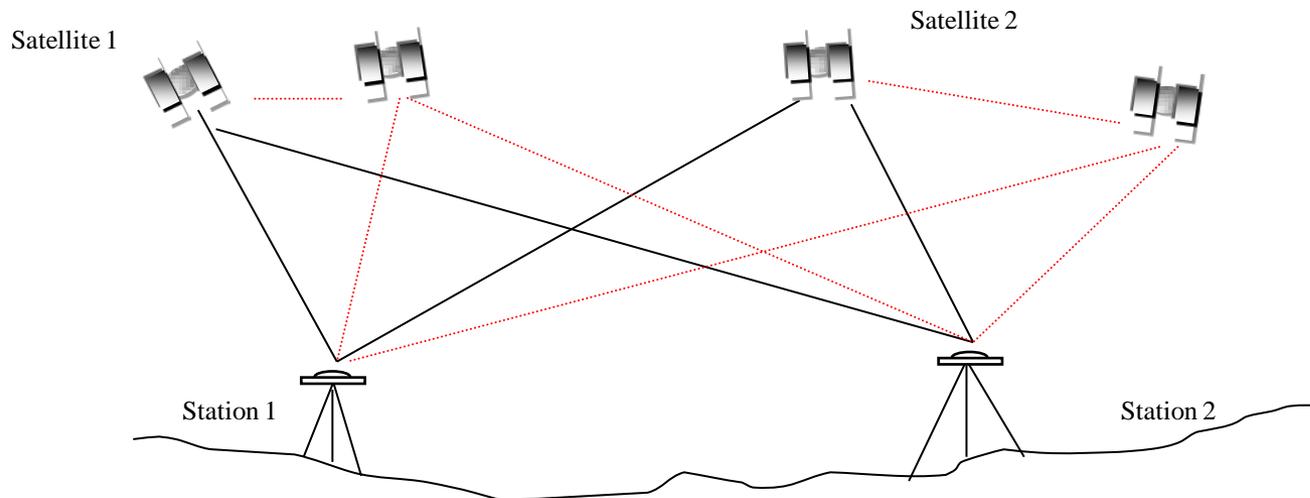
Les stations observent les satellites simultanément à un instant t .



6.2. Positionnement relatif (triple différence)

C'est la méthode triple différence (2 x double différence). Les stations observent les satellites à un instant t puis à un instant $t+1$.

- Précision : - observation en mode statique 2 à 3 mm,
- observation en mode cinématique 2 à 3 cm.



6.3 Différents types d'utilisation de GPS pour la localisation

La navigation différentielle (DGPS)

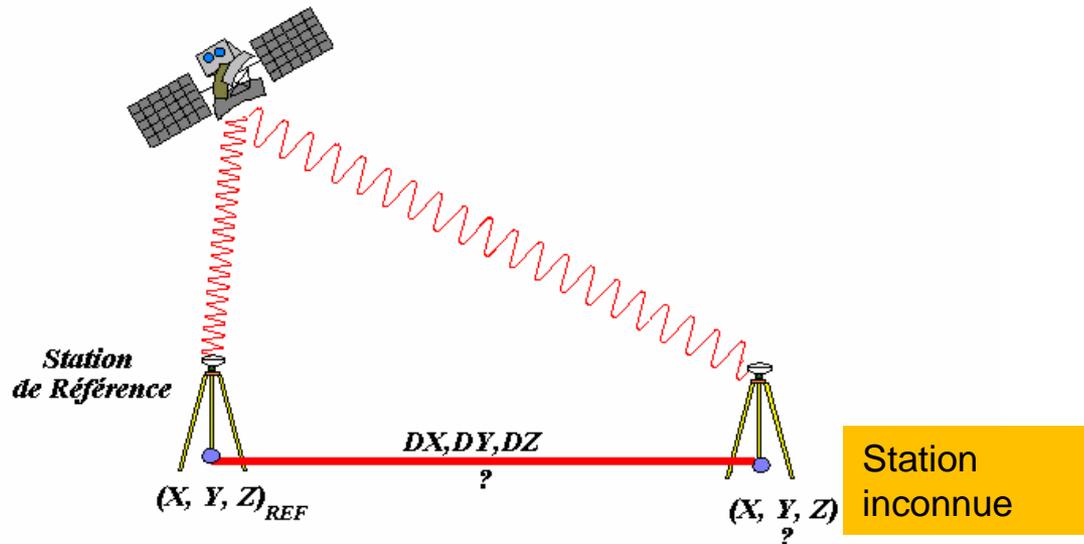
La navigation différentielle ou le GPS différentiel (DGPS) consiste à faire des observations de pseudo distances en plusieurs stations simultanément.

Le premier type d'application du DGPS est dynamique, c'est à dire une station fixe appelée station de référence et l'autre est mobile. La station fixe dont les coordonnées sont connues envoie, à l'aide d'un équipement radio (UHF, VHF, HF, MF), des corrections à la station mobile qui calcule alors sa position. Ce type de positionnement est très utilisé en navigation maritime à l'approche des côtes ainsi que pour l'hydrographie.

Le deuxième type d'application est statique et profite de la bonne précision du DGPS pour l'établissement de réseaux de points dont la précision est meilleure qu'un mètre.

Le mode statique géodésique

Le statique est le mode le plus utilisé par la technique GPS pour l'établissement de canevas ou réseaux en géodésie, topométrie, photogrammétrie. Il s'agit d'observer sur chaque station les phases sur au moins 4 satellites, le résultat est un positionnement relatif c'est à dire, un positionnement par rapport à une station de référence en connaissant $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$.



Le temps d'observation doit être suffisant pour résoudre les ambiguïtés et dépend de la longueur de la ligne de base, de la géométrie de la constellation des satellites et des conditions atmosphériques. Par expérience, la durée d'observation est d'au moins une heure pour des lignes de bases courtes (< 15 km) et elle est de plusieurs heures pour les lignes de base longues.

La précision dépend du type de récepteurs (mono ou bi fréquence), du nombre de récepteurs et du type d'orbites utilisées :

- GPS statique mono fréquence :
 - mesures de phases sur L1
 - durée d'observation : une heure
 - distances jusqu'à 20 km en zone tempérée, 10 km en zone équatoriale
 - orbites radio- diffusées
 - précision : $2\text{mm} + 2 \cdot 10^{-6} D^{(\text{km})}$

où D représente la distance entre les points

- GPS statique bi-fréquence :
 - mesures de phases sur L1 et L2
 - durée d'observation : de 1 à 4 heures
 - distances : jusqu'à 300 km
 - orbite radio diffusée
 - précision : $2 \text{ mm} + 10^{-6} D^{(\text{km})}$.

- **Le statique rapide**

On choisit une station de référence sur laquelle un récepteur mesure en continu, tandis que des récepteurs mobiles se déplacent sur les autres stations en observant quelques minutes sur chacune d'elles.

Cette technique très productive convient aux petits réseaux pour le cadastre, la topométrie, la densification de réseaux géodésiques et l'équipement photogrammétrique.

Mode	Statique	Statique rapide	Cinématique	En vol
Cas d'emploi	Pour les grandes lignes de base (> 10 km avec récepteur bifréquences).	Bases courtes : < 20 km (bifréquence) < 10 km (monofréquence).	Grand nombre de points à observer dans une zone réduite et dégagée.	Positionnement précis d'objet en mouvements (avions, bateaux, etc.).
Précision : monofréquence bifréquence	5 mm + 1 ppm	5 à 10 mm + 1 ppm 5 à 10 mm + 1 ppm	1 à 2 cm + 1 ppm 1 à 2 cm + 1 ppm	1 à 2 cm + 2 ppm
Temps d'observation	30 mn à 1 heure	2 à 20 mn selon les cas.	Quelques minutes d'initialisation puis quelques secondes sur chaque point.	Temps réel en mouvement.
Applications	Réseaux géodésiques sur de grandes étendues.	Canevas polygonaux. Canevas d'ensemble : remplace la triangulation et la polygonation.	Levers de détails en zone dégagée.	Photogrammétrie, bathymétrie.
Avantages	Précis, plus efficace et plus économique que les méthodes traditionnelles.	Rapide, efficace. Nul besoin de garder le contact avec le satellite.	La plus rapide des méthodes de lever de détails par GPS.	Pas d'initialisation statique.
Inconvénients	Temps d'observation plus long que par les autres méthodes. Réservé aux récepteurs bifréquence.	Limitation en portée.	Une interruption de la réception nécessite une nouvelle initialisation.	Méthode GPS la plus onéreuse.

Cours d'Initiation au GPS - A. Ben Hadj
Salémi - 2015 v6.

Les Différentes Méthodes d'observation

L'ordre de grandeur des erreurs

Type d'erreurs	Ordre de grandeur
Horloge du satellite	10 m
L'orbite	5 à 25 m
La couche ionosphérique	50 m au zénith
La couche troposphérique	2 m au zénith
Horloge du récepteur	10 à 100 m
Multi-chemin Code C/A	50 cm à 20 m (dépend du récepteur GPS et du site)
La phase	qq cm (idem)
Bruit du récepteur Code C/A	10 cm à 2-3 m (dépend du récepteur GPS)
La phase	0,5 à 5mm (idem)

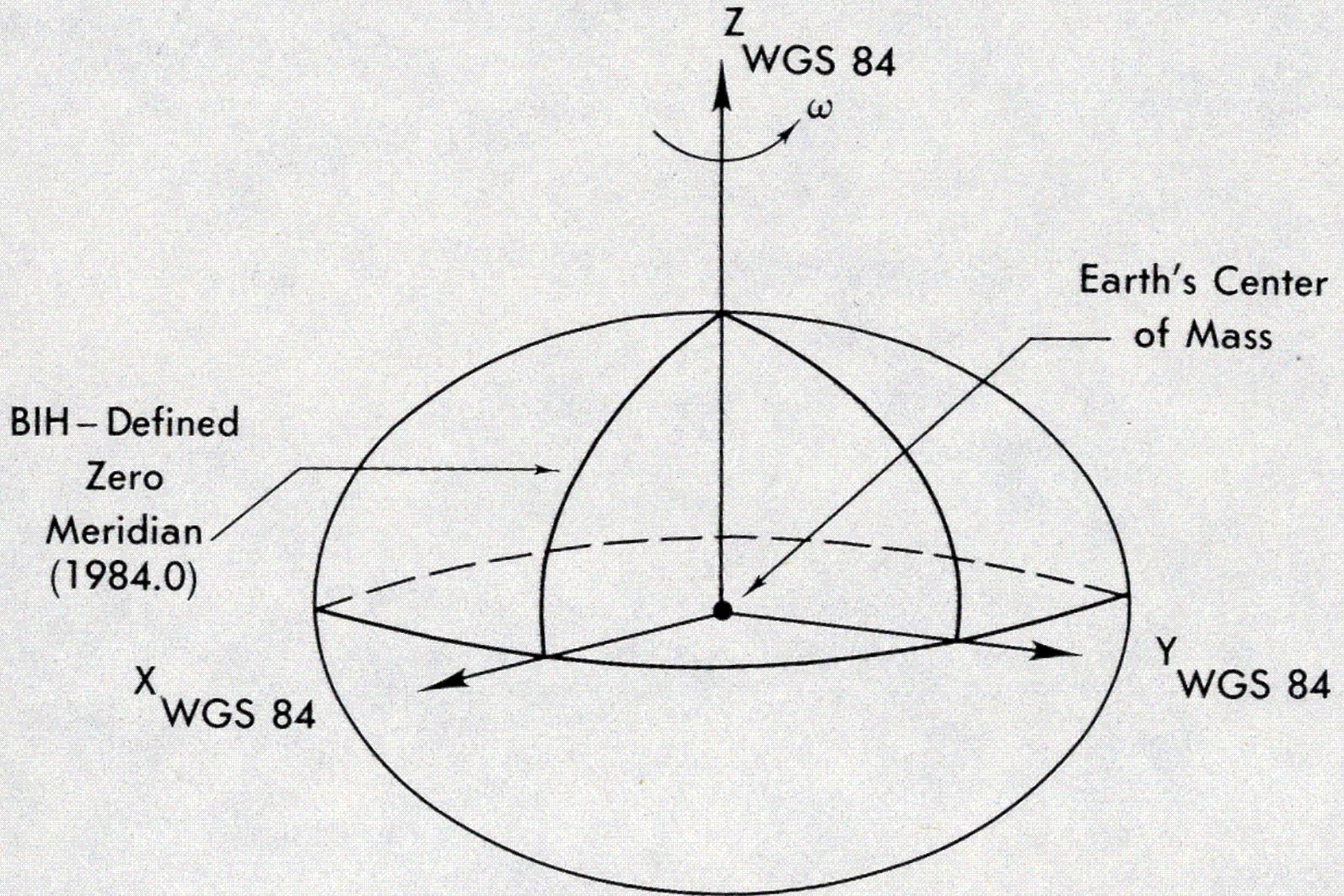
7. Passage du Système international au Système national

7.1. Le Référentiel WGS84

Le GPS fournit les coordonnées géodésiques (φ, λ, H) dans le système géocentrique WGS84 (World Geodetic System 84). Il est défini par :

- origine : centre des masses de la Terre,
- axe Z : parallèle à la direction du Pôle Conventionnel Terrestre (PCT),
- axe X : le plan ZX est parallèle au méridien zéro défini par le Bureau International de l'Heure,
- axe Y : dans l'équateur du PCT et perpendiculaire au plan ZX dans le sens direct.

BIH-Defined CTP (1984.0)



Le Référentiel Spatial WGS84

Cours d'initiation au GPS (A. Ben Madi)

Salem - 2015 v3.

- Au référentiel WGS84, on associe l'ellipsoïde WGS84 dont les paramètres sont :
 - a le demi-grand axe : 6 378 137.00 ±2 m,
 - l'aplatissement $f = 1/298.257\ 223\ 563$.
- Au lieu d'utiliser l'ellipsoïde WGS84, on utilise l'ellipsoïde GRS80 adopté par l'Association Internationale de Géodésie ayant le même demi grand axe que le WGS84 et un aplatissement de $1/298.257\ 222\ 101$.
- Rappel:

$$f = \frac{a - b}{a}$$

7.2. Le Calcul des Coordonnées Tridimensionnelles (X,Y,Z)

Les coordonnées (X,Y,Z) dans un système géodésique donné d'ellipsoïde E(a,e) sont obtenus à partir des coordonnées géodésiques (φ, λ, H) définies dans le même système par:

$$X = (N + H) \cos \varphi \cos \lambda$$

$$Y = (N + H) \cos \varphi \sin \lambda$$

$$Z = (N(1 - e^2) + H) \sin \varphi$$

Avec:
$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

N s'appelle la grande normale, et :

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

le carré de la première excentricité

7.3. Le Modèle de Bursa-Wolf de Passage des Coordonnées Tridimensionnelles $(X,Y,Z)_{GPS}$ aux coordonnées $(X,Y,Z)_{GN}$

On désigne par:

$$X_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{GN} ; \quad X_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{GPS}$$

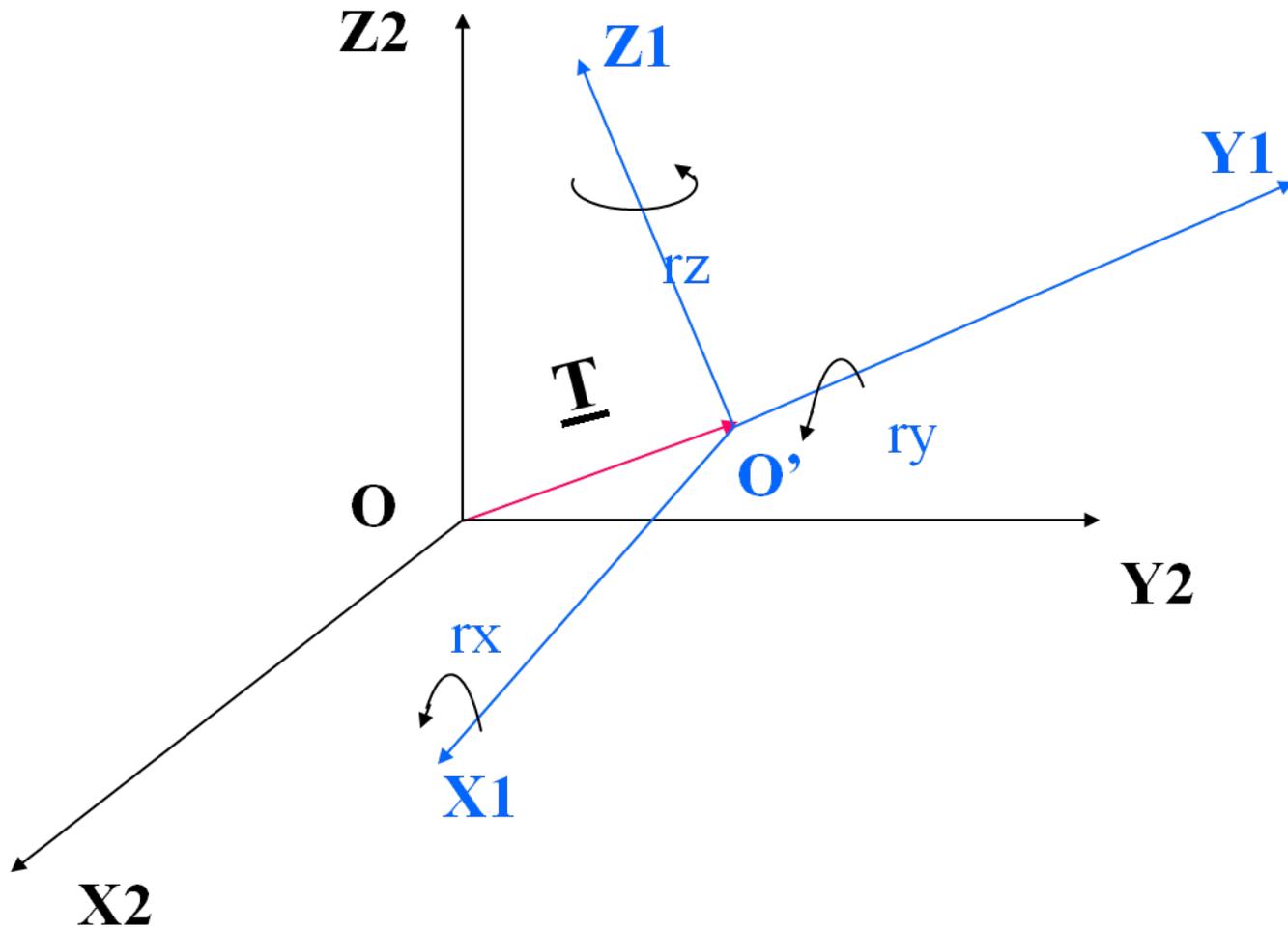
Ce modèle s'écrit sous la forme vectorielle :

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{T} + (1+m) \cdot \mathbf{R}(rx,ry,rz) \cdot \mathbf{X}_1 \quad (1)$$

\mathbf{T} :est le vecteur translation de composantes $(T_x, T_y, T_z)^t$ entre les systèmes 1 et 2,

$1+m$:est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,

$\mathbf{R}(rx,ry,rz)$:est la matrice de rotation (3,3) pour passer du système 1 au système 2.



En développant (1), on obtient:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & -rx & ry \\ rx & 1 & -rz \\ -ry & rz & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Pour déterminer les valeurs numériques des paramètres de l'équation (2), on observe un ensemble de points communs connus dans les deux systèmes géodésique national GN et GPS.

On détermine ces valeurs par la méthode des moindres carrés.

7.4. Le Modèle de Molodensky

Ce modèle compare les coordonnées géodésiques entre les deux systèmes géodésiques . On obtient les formules:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{-\sin \lambda_1}{(N + H) \cos \varphi_1} T_x + \frac{\cos \lambda_1}{(N + H) \cos \varphi_1} T_y + \frac{-(N(1 - e^2) + H) \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \lambda_1}{N + H} r_x + \frac{-(N(1 - e^2) + H) \operatorname{tg} \varphi_1 \sin \lambda_1}{N + H} r_y + r_z$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 = & -\frac{\sin \varphi_1 \cos \lambda_1}{\rho + H} T_x - \frac{\sin \varphi_1 \sin \lambda_1}{\rho + H} T_y + \frac{\cos \varphi_1}{\rho + H} T_z - \frac{e^2 N \cos \varphi_1 \sin \varphi_1}{\rho + H} m \\ & + \frac{(N(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1) + H) \sin \lambda_1}{\rho + H} r_x - \frac{(N(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1) + H) \cos \lambda_1}{\rho + H} r_y \\ & + \frac{w e^2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{\rho + H} \Delta a + \frac{\rho \sin 2\varphi_1 (2 - e^2 \sin^2 \varphi_1)}{2(\rho + H)(1 - f_1)} \Delta f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2 - H_1 = & \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 T_x + \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 T_y + \sin \varphi_1 T_z + (N(1 - e^2 \sin^2 \varphi_1) + H) m + N e^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \sin \lambda_1 r_x - N e^2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 \cos \lambda_1 r_y \\ & - \Delta a / w + N(1 - f_1) \sin^2 \varphi_1 \Delta f \end{aligned}$$

Avec: $\Delta a = a_2 - a_1$; $\Delta f = f_2 - f_1$; $w = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$

$$\rho = a(1 - e^2)w^3$$

A satellite is shown in space against a blue background. It has two large, rectangular solar panels extended to the left. The main body of the satellite is a complex structure with various instruments, including a large antenna array at the top and another at the bottom. The text "Merci de votre attention" is overlaid in the center in a yellow font.

Merci de votre attention