Collatz problem

Hajime Mashima

February 22, 2021

Abstract

"It multiplies the 1/2 when the number of nature is even. It is multiplied by 3 in the case of an odd number. Furthermore it adds 1. By repeating this calculation, it leads always to 1."

This is referred to as the Collatz problem(Collatz Conjecture).

Contents

1 introduction

Collatz problem は「経路は loop しないか?」、「任意の自然数から始めて必ず 1 になるか?」を真偽の判定とする問題である。

1.1 Collatz tree Table の特徴

Table 1 の説明

Definition 1

- Collatz 経路を木に例え Collatz tree と呼ぶ。
- $3(odd)+1$ の列を $node+$ とする。
- 2^n の行を trunk とする。(※ただし 1、2、4 は root とする。)
- $2^n \cdot 3(odd)$ の行を leef とする。
- trunk と leef 以外の行は branch とする。
- trunk、leef、branch の $node+$ に対応する cell を $node-$ とする。

Table 1:

※ root	$node-(Colored)$							odd	$node+$
trunk	$\cdots$	64	32	16	8	※ 4	※ 2	※ 1	※ 4
leef	$\cdots$	192	96	48	24	12	6	**3**	10
branch	$\cdots$	320	160	80	40	20	10	5	16
branch	$\cdots$	448	224	112	56	28	14	7	22
leef	$\cdots$	576	288	144	72	36	18	**9**	28
branch	$\cdots$	704	352	176	88	44	22	11	34
branch	$\cdots$	832	416	208	104	52	26	13	40
leef	$\cdots$	960	480	240	120	60	30	**15**	46
branch	$\cdots$	1088	544	272	136	68	34	17	52

- $node+$ の列には $node-$ の値が存在し、それを色別した。これは tree の分岐部に対応する。
  yellow cell は 2 周期、magenta cell は 4 周期、cyan cell は 8 周期、green cell は 16 周期、red cell は 32 周期、blue cell は 64 周期⋯と 2^n 周期と規則的に $node+$ の列に分布している。
- leef は 3 の倍数のため $node-$ を有さない。よって Collatz 経路における逆路の端である。
- $2(odd) < 3(odd)+1$ より、yellow cell のみ $node-$ よりも上方に対応する $node+$ が位置している。
- 色付でない cell は分岐部でないため以降、省略する。

【Collatz tree の組立て方】

1. Table の各行 trunk、leef、branch を切り分ける。
2. $node+$ の裏部分に接着剤をつけ $node-$ 同じ値の部分に貼り付ける。

1.2 loop の有無に関して

Proposition 2 Collatz tree には root を除き loop は存在しない。

Proof 3 $x_n \neq 3(3m)+1$ とする。

Table 2:

	node−							*odd*	*node+*
branch	$\cdots$	x_{n+2}		x_{n+1}		x_n	$\cdots$		

Theorem 4 (Fermat's little theorem) $n \perp 3$ のとき

$$n^2 - 1 \equiv 0 \mod 3$$

$x_n = 3\left(3m+1\right)+1$ のとき

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2^2 x_n \\ x_{n+1} &= 2^2\left(3\left(3m+1\right)+1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} odd &= \frac{1}{3}\left(2^2\left(3\left(3m+1\right)+1\right)-1\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2^2 \cdot 3\left(3m+1\right)+2^2-1\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2^2 \cdot 3\left(3m+1\right)+3\right) \\ &= 2^2\left(3m+1\right)+1 \\ &= 2^2 \cdot 3m + 2^2 - 1 + 2 \equiv 2 \mod 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 2^4 x_n \\ x_{n+2} &= 2^4\left(3\left(3m+1\right)+1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} odd &= \frac{1}{3}\left(2^4\left(3\left(3m+1\right)+1\right)-1\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2^4 \cdot 3\left(3m+1\right)+2^4-1\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2^4 \cdot 3\left(3m+1\right)+15\right) \\ &= 2^4\left(3m+1\right)+5 \\ &= 2^4 \cdot 3m + 2^4 - 1 + 6 \\ &= 2^4 \cdot 3m + 4^2 - 1 + 3 \cdot 2 \equiv 0 \mod 3 \end{aligned}$$

$x_n = 3\left(3m+2\right)+1$ の時

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2^2 x_n \\ x_{n+1} &= 2^2\left(3\left(3m+2\right)+1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} odd &= \frac{1}{3}\left(2^2\left(3\left(3m+2\right)+1\right)-1\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2^2\cdot 3\left(3m+2\right)+2^2-1\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2^2\cdot 3\left(3m+2\right)+3\right) \\ &= 2^2\left(3m+2\right)+1 \\ &= 2^2\cdot 3m+2^3-2+3 \\ &= 2^2\cdot 3m+2\left(2^2-1\right)+3 \equiv 0 \mod 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 2^4 x_n \\ x_{n+2} &= 2^4\left(3\left(3m+2\right)+1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} odd &= \frac{1}{3}\left(2^4\left(3\left(3m+2\right)+1\right)-1\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2^4\cdot 3\left(3m+2\right)+2^4-1\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2^4\cdot 3\left(3m+2\right)+15\right) \\ &= 2^4\left(3m+2\right)+5 \\ &= 2^4\cdot 3m+2^5+2^2+1 \\ &= 2^4\cdot 3m+2^2\left(2^3+1\right)+1 \\ &= 2^4\cdot 3m+2^2\cdot 3^2+1 \equiv 1 \mod 3 \end{aligned}$$

よって $x_n \neq 3(3m)+1$ ならば、x_{n+1} または x_{n+2} が leef の分岐部である。

また、x_n が leef の分岐部ならば x_{n+3} も leef の分岐部である。

x_n が leef の分岐部なので $x_n = 3^2 m_1 + 1$ と置ける。

$$
\begin{aligned}
x_{n+3} &= 2^6 x_n \\
x_{n+3} &= 2^6(3^2 m_1 + 1) \\
&= 2^6 \cdot 3^2 m_1 + 2^6 \\
&= 2^6 \cdot 3^2 m_1 + 3^2 \cdot 7 + 1 \\
&= 3^2 m_2 + 1 \qquad (m_2 = 2^6 m_1 + 7)
\end{aligned}
$$

よって

$$3n \text{ でない自然数から Collatz 経路を逆に進むと leef が必ず存在する。} \tag{1}$$

Table 3: leef を初期値とした場合

leef	$node + A$					
branch	$node - A$	$node + B$				
	branch	$node - B$	$node + C$			
		branch	$node - C$	$node + D$		
			branch	$node - D$	$node + E$	
					$\vdots$	$\ldots$

Table 1 より $node-$ と $node+$ は一対一の関係にある。

Table 3 より leef を初期値とした場合、leef は $node-$ を有さないため loop にならない。

(1) より任意の $3n$ でない自然数は特定の leef を初期値として得られる。

以上より

$$\text{root を除き loop は存在しない。} \tag{2}$$

□

1.3 yellow cell の連鎖に関して

Proposition 5 yellow cell の $node(+ \to -)$ 連鎖は有限回で停止する。

Example 6 p.9 参照

$$
\begin{aligned}
15(\text{odd cell}) &= 2n_1 + 1 (n_1 = 7) \\
\\
46(\text{yellow cell}) &= 3\left(2n_1 + 1\right) + 1 \\
&= \frac{3 \cdot 2\left(2n_1 + 1\right)}{2} + 1 \\
\\
70(\text{yellow cell}) &= \frac{3}{2}\left(3\left(2n_1 + 1\right) + 1\right) + 1 \\
&= \frac{3^2 \cdot 2\left(2n_1 + 1\right)}{2^2} + \frac{3}{2} + 1 \\
\\
70 - 46 &= \frac{3\left(3 - 2\right)\left(2n_1 + 1\right)}{2} + \frac{3}{2} \\
&= \frac{6n_1 + 3}{2} + \frac{3}{2} \\
&= 3\left(n_1 + 1\right) \\
\frac{70 - 46}{6}(\text{interval of row}) &= \frac{\left(n_1 + 1\right)}{2} = \text{even steps} \\
\\
106(\text{yellow cell}) &= \frac{3}{2}\left(\frac{3^2\left(2n_1 + 1\right)}{2} + \frac{3}{2} + 1\right) + 1 \\
&= \frac{3^3 \cdot 2\left(2n_1 + 1\right)}{2^3} + \frac{3^2}{2^2} + \frac{3}{2} + 1 \\
106 - 70 &= \frac{3^2\left(3 - 2\right)\left(2n_1 + 1\right)}{2^2} + \frac{3^2}{2^2} \\
&= \frac{3^2\left(2n_1 + 2\right)}{2^2} \\
&= \frac{3^2\left(n_1 + 1\right)}{2} \\
\frac{106 - 70}{6}(\text{interval of row}) &= \frac{3\left(n_1 + 1\right)}{2^2} = \text{even steps}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
160(\text{red cell}) &= \frac{3}{2}\left(\frac{3^3\left(2n_1+1\right)}{2^2}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3}{2}+1\right)+1 \\
&= \frac{3^4\cdot 2\left(2n_1+1\right)}{2^4}+\frac{3^3}{2^3}+\frac{3^2}{2^2}+\frac{3}{2}+1 \\
160-106 &= \frac{3^3\left(3-2\right)\left(2n_1+1\right)}{2^3}+\frac{3^3}{2^3} \\
&= \frac{3^3\left(2n_1+1\right)}{2^3}+\frac{3^3}{2^3} \\
&= \frac{3^3\left(2n_1+2\right)}{2^3} \\
&= \frac{3^3\left(n_1+1\right)}{2^2} \\
\frac{160-106}{6}(\text{interval of row}) &= \frac{3^2\left(n_1+1\right)}{2^3} = \text{odd steps}
\end{aligned}
$$

node+ の yellow cell は 2 周期なので連鎖が停止する時、interval of row は odd steps となる。

一般式は r を自然数として以下となる。

$$
\text{interval of row} = \frac{3^{r-1}\left(n+1\right)}{2^r}\ \text{steps}
$$

$(n+1)$ は有限値なので yellow cell の $node(+\to-)$ 連鎖は有限回で停止する。 (3)

□

Example 7

$$
\begin{aligned}
10 &= 3(2n+1)+1 \\
n+1 &= 2 \mid 2^1 \to \quad 1\ \textit{chain}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
22 &= 3(2n+1)+1 \\
n+1 &= 4 \mid 2^2 \to \quad 2\ \textit{chain}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
34 &= 3(2n+1)+1 \\
n+1 &= 6 \mid 2^1 \to \quad 1\ \textit{chain}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
46 &= 3(2n+1)+1 \\
n+1 &= 8 \mid 2^3 \to \quad 3\ \textit{chain}
\end{aligned}
$$

1.4 増加率と減少率

初項 a が十分大きな値のとき

$$3a + 1 \simeq 3'a$$

$a = odd$ なので $3'a = even$

よって次の step は

$$3'\left(\frac{1}{2}\right)a = \frac{3'}{2}a$$
$$1 < \frac{3'}{2}$$

これは増加率に相当する。

$$3'\left(\frac{1}{2}\right)^n a = \frac{3'}{2^n}a$$
$$1 > \frac{3'}{2^n}(n \geqq 2)$$

これは減少率に相当する。

一般的な表現は

$$3'^m\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Yellow Chain は $m = n$ である。

$3'$ の積は単独では存在せず、$3'\left(\frac{1}{2}\right)$ で一対であるため $m \not> n$

$$1 \geqq \frac{m}{n}$$

(3) より Collatz 経路を進むと増加率は小さくなり、やがて減少率へ転じて数は小さくなり続ける。しかし自然数は 1 より小さく成り得ない。

これは数が十分大きいとき $3a + 1$ の $+1$ は無視できるが、数が小さいときは無視できない増加率である。よって loop の増加率 $=$ 減少率になる。

(2) より Collatz 経路は、$4 \to 2 \to 1 \to 4$ の loop に収束する。

Table 4:

※ root	*node−*							*odd*	*node+*
trunk	⋯	64		16		※ 4	※ 2	※ 1	※ 4
leef	⋯							**3**	10
branch	⋯		160		40		10	5	16
branch	⋯	448		112		28		7	22
leef	⋯							**9**	28
branch	⋯		352		88		22	11	34
branch	⋯	832		208		52		13	40
leef	⋯							**15**	46
branch	⋯		544		136		34	17	52
branch	⋯	1216		304		76		19	58
leef	⋯							**21**	64
branch	⋯		736		184		46	23	70
branch	⋯	1600		400		100		25	76
leef	⋯							**27**	82
branch	⋯		928		232		58	29	88
branch	⋯	1984		496		124		31	94
leef	⋯							**33**	100
branch	⋯		1120		280		70	35	106
branch	⋯	2368		592		148		37	112
leef	⋯							**39**	118
branch	⋯		1312		328		82	41	124
branch	⋯	2752		688		172		43	130
leef	⋯							**45**	136
branch	⋯		1504		376		94	47	142
branch	⋯	3136		784		196		49	148
leef	⋯							**51**	154
branch	⋯		1696		424		106	53	160
branch	⋯	3520		880		220		55	166
leef	⋯							**57**	172
branch	⋯		1888		472		118	59	178
branch	⋯	3904		976		244		61	184
leef	⋯							**63**	190
branch	⋯		2080		520		130	65	196
branch	⋯	4288		1072		268		67	202
leef	⋯							**69**	208
branch	⋯		2272		568		142	71	214
branch	⋯	4672		1168		292		73	220
leef	⋯							**75**	226
branch	⋯		2464		616		154	77	232
branch	⋯	5056		1264		316		79	238
leef	⋯							**81**	244
branch	⋯		2656		664		166	83	250
branch	⋯	5440		1360		340		85	256