

REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EQUIPEMENT ET DE
L'ENVIRONNEMENT
OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE

**SELECTED PAPERS
DE L'INGÉNIEUR GÉNÉRAL
ABDELMAJID BEN HADJ SALEM
Tome II**

Octobre 2013

version 5.d

OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE
www.otc.nat.tn

Aux Martyrs et aux Blessés de la Révolution Tunisienne.

Avant-Propos

J'ai le grand plaisir de remettre le tome II de papiers sélectionnés parmi les documents et notes techniques que j'ai rédigés au cours de mes années de travail à l'OTC dont certains sont relatifs aux cours suivis lors de mes années d'études d'ingénieurs à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques de France.

Ces papiers touchent différents thèmes à savoir :

- la théorie des erreurs,
- la géométrie différentielle de l'ellipsoïde de révolution,
- la géodésie et en particulier les systèmes et les réseaux géodésiques,
- les représentations planes,
- la géophysique,
- la géostatistique.

Leurs parutions dans ce document ne suivent pas l'ordre chronologique de leurs rédactions.

Tunis,
Octobre 2013

*Abdelmajid
Ben Hadj Salem, Dipl.-Ing.
Ingénieur Général Géographe
abenhadsalem@gmail.com*

Table des matières

Avant-Propos	iii
35 NOTE SUR LES COODONNÉES SYMÉTRIQUES EN GÉODÉSIE.....	1
35.1 DÉFINITIONS	1
35.2 EXEMPLES	2
35.2.1 Le Plan (X, Y) défini par les coordonnées cartésiennes	3
35.2.2 Le Plan (ρ, θ) défini par les coordonnées polaires	3
35.2.3 La Sphère	3
35.2.4 L'Ellipsoïde de révolution	4
35.2.5 Le Cylindre	4
35.2.6 Le Caténoïde	5
35.2.7 La Surface d'Enneper	5
35.2.8 La Pseudo-sphère de Beltrami	6
35.3 LE THÉORÈME DE KORN-LICHTENSTEIN	7
35.3.1 La Condition de Holder d'ordre λ	7
35.3.2 Le Théorème de Korn-Lichtenstein	7
35.4 L'EQUATION DE BELTRAMI	7
35.4.1 L'Opérateur de Beltrami	10
Littérature	10

36	NOTE SUR LA CORRECTION DES DISTANCES DUES À L'ALTITUDE	11
	36.1 APPLICATION DE LA CORRECTION DES DISTANCES DUES À L'ALTITUDE ..	11
	36.1.1 Exemple.....	13
	Littérature	13
37	A CONTRIBUTION ON THE MATHEMATICAL FOUNDATION OF PHYSICAL GEODESY	15
	37.1 REMERCIEMENTS	15
	37.2 EXPOSITION DES IDÉES	16
	37.3 COVARIANCE ET COLLOCATION	22
	37.4 LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS DANS LES ESPACES DE HILBERT .	34
	37.5 LES ESPACES DE HILBERT AVEC LES FONCTIONS NOYAUX ET LES HARMONIQUES SPHÉRIQUES	46
	37.6 APPLICATION DE LA MÉTHODE	65
	37.7 ANNEXE :DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE RUNGE	72
	Littérature	77
38	NOTE SUR LE CALCUL DES LIGNES GÉODÉSIQUES DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION	79
	38.1 INTRODUCTION ET NOTATIONS.....	79
	38.2 LES EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES LIGNES GÉODÉSIQUES	81
	38.3 DÉTERMINATION DES LIGNES GÉODÉSIQUES DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION	82
	38.4 APPLICATIONS AUX PROBLÈMES DIRECTE ET INVERSE DU CALCUL DES LIGNES GÉODÉSIQUES	86
	38.4.1 Le Problème Direct	86
	38.4.2 Le Problème Inverse.....	87
	38.4.3 Calcul de l'Expression (38.67)	88
	38.4.4 Calcul de l'expression (38.64)	89
	38.5 Traitement d'Un Exemple	90
	38.5.1 Le Problème Direct	90
	Littérature	91

39	ETUDE DES ERREURS SYSTÉMATIQUES DANS LA COMBINAISON DES DONNÉES DOPPLER ET DES OBSERVATIONS TERRESTRES	93
39.1	INTRODUCTION	93
39.2	ORIGINES DES ERREURS SYSTÉMATIQUES	94
39.3	DÉFINITIONS	94
39.4	ANALYSE DES ERREURS SYSTÉMATIQUES DANS LES RÉSEAUX GÉODÉSIQUES TERRESTRES	95
39.4.1	Sur L'Orientation du Réseau Géodésique Terrestre	96
39.4.2	Sur la mise à l'échelle d'un réseau géodésique	110
39.5	LES ERREURS SYSTÉMATIQUES DANS LA COMBINAISON DES DONNÉES DOPPLER AVEC LES OBSERVATIONS TERRESTRES CLASSIQUES	114
39.5.1	Orientation du référentiel géodésique	115
39.5.2	Orientation du référentiel géodésique et mise en place du réseau géodésique	116
	Littérature	119
40	MÉMOIRE DE GÉODÉSIE PHYSIQUE	123
40.1	INTRODUCTION	123
40.2	LA FORMULATION DU P.G.V.F EN COORDONNÉES GÉNÉRALES	124
40.3	L'APPROCHE DE L'ESPACE DE PESANTEUR	126
40.4	L'APPROCHE MARUSSI-CARTÉSIENNE	129
40.5	L'APPROCHE MARUSSI-CARTÉSIENNES EN APPROXIMATION SPHÉRIQUE ..	134
40.6	CONCLUSION	136
	Littérature	137
41	THÉORIE ELÉMENTAIRE DE L'APPROXIMATION	139
41.1	INTRODUCTION	139
41.2	NOTIONS D'APPROXIMATION	140
41.3	MEILLEURE APPROXIMATION DANS UN ESPACE MÉTRIQUE	140
41.4	APPROXIMATION UNIFORME	141
41.5	POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV	142
41.6	LES PROPRIÉTÉS DE $T_n(x)$	142

41.7	MEILLEURE APPROXIMATION UNIFORME	144
41.8	APPROXIMATION UNIFORME POLYNÔMIALE D'UNE FONCTION CONTINUE	145
41.8.1	Calcul de p_n^*	146
41.9	MEILLEURE APPROXIMATION EN QUADRATIQUE	147
41.10	MEILLEURE APPROXIMATION DANS UN ESPACE HILBERTIEN	148
41.10.1	Procédé de calcul de Φ^*	149
41.11	EVALUATION DE $\ f - \Phi^*\ $	150
41.11.1	Les Polynômes de Tchybechev	150
41.11.2	Polynômes de Hermite	151
41.11.3	Relations d'orthogonalité	151
42	NOTE SUR LA DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE BURSA-WOLF	153
42.1	INTRODUCTION	153
42.2	LE MODÈLE DE BURSA - WOLF	153
42.3	DÉTERMINATION DE L'ÉCHELLE $1 + m$	154
42.4	DÉTERMINATION DES ROTATIONS (rx, ry, rz)	155
42.5	DÉTERMINATION DES COMPOSANTES DE LA TRANSLATION T	156
	Littérature	156
43	APPLICATION DE LA MÉTHODE DU REPÈRE MOBILE À L'ELLIPSOÏDE DE RÉFÉRENCE	157
43.1	LE REPÈRE MOBILE	157
43.1.1	INTRODUCTION	157
43.2	ÉCRITURE DIFFÉRENTIELLE DE dA ET de_i	158
43.3	LES RELATIONS SATISFAITES PAR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES ω_i ET ω_j	159
43.3.1	CAS DE REPÈRE MOBILE ORTHONORMÉ	160
43.4	APPLICATION À L'ELLIPSOÏDE DE RÉFÉRENCE	161
43.4.1	CALCUL DES ω_i	161
43.4.2	Calcul des ω_j	161
43.4.3	VÉRIFICATION DES FORMULES $d\omega_i$ ET $d\omega_j$	162

43.5	ETUDE DU CAS $h = 0$	163
	Littérature	164
44	NOTE SUR LA FORMULE DE DUFOUR-FEZZANI	165
44.1	INTRODUCTION	165
44.2	COMPARAISON EN COORDONNÉES MERCATOR	166
44.2.1	L'effet d'une rotation pure	166
44.2.2	L'effet d'une translation tridimensionnelle	167
44.3	COMPARAISON EN COORDONNÉES UTM	169
44.3.1	L'Effet d'Une Translation Tridimensionnelle	169
	Littérature	172
45	NOTE SUR LES REPRÉSENTATIONS CONFORMES DE GAUSS	173
45.1	INTRODUCTION	173
45.2	EXPRESSION DU MODULE LINÉAIRE	173
45.3	EXPRESSION DE LA TRANSFORMATION CONFORME DE GAUSS	174
45.4	LE PROBLÈME POSÉ	175
45.5	RECHERCHES DES SOLUTIONS	176
45.5.1	La 1ère condition	176
45.5.2	La 2ème condition	176
45.5.3	La 3ème Condition	177
45.5.4	Calcul du coefficient b	179
45.6	EXPRESSION DE $m(\varphi)$ DE PART ET D'AUTRE DU PARALLÈLE φ_0	179
	Littérature	180
46	NOTE SUR LA REPRÉSENTATION STÉRÉOGRAPHIQUE CONFORME	181
46.1	INTRODUCTION ET RAPPELS HISTORIQUES	181
46.2	PRÉSENTATION	182
46.2.1	Le calcul inverse	182
46.3	APPLICATION DES COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES	184
46.4	PROPRIÉTÉS	185
	Littérature	188

47	NOTE SUR LA MÉTHODE DES RÉFÉRENTIELS INVERSES RÉGIONAUX EN GÉODÉSIE	191
47.1	EXPRESSION DES COORDONNÉES DANS LES RÉFÉRENTIELS RÉGIONAUX INVERSES	192
47.1.1	Le premier référentiel	192
47.1.2	Le deuxième référentiel	193
47.1.3	Le troisième référentiel	193
47.2	FORMULES DIFFÉRENTIELLES	195
47.3	DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DE LA TRANSFORMATION PAR LA MÉTHODE DES RÉFÉRENTIELS RÉGIONAUX INVERSES	196
47.3.1	Calcul des paramètres de la transformation	196
47.3.2	Exemple numérique	197
	Littérature	200
48	LES LIGNES GÉODÉSIQUES D'UN TORE	201
48.1	INTRODUCTION	201
48.2	Les Equations différentielles des lignes géodésiques	202
48.3	RÉSOLUTION DU PROBLÈME DANS LE CAS GÉNÉRAL	204
	Littérature	205
49	NOTE SUR LES SURFACES ISOTHERMES DISCRÈTES	207
49.1	INTRODUCTION	207
49.2	PRÉSENTATION DES SURFACES ISOTHERMES	208
49.3	LES EQUATIONS DE GAUSS-WEINGARTEN ET GAUSS-CODAZZI	210
49.3.1	Les équations de Gauss-Weingarten	210
49.3.2	Les équations de Gauss-Codazzi	213
49.4	LES SURFACES ISOTHERMES DISCRÈTES	215
49.4.1	Equation du plan passant par \mathcal{Q}_{ij}	216
49.4.2	Recherches de la distance maximale	217
	Littérature	218

50	UNIFICATION DES SYSTÈMES GÉODÉSIQUES TERRESTRES PAR LE GPS	219
50.1	INTRODUCTION	219
50.2	LE MODÈLE DE BURSA - WOLF	220
50.3	CALCUL DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE BURSA-WOLF PAR LES MOINDRES CARRÉS	221
50.4	UNIFICATION DES SYSTÈMES GÉODÉSIQUES TERRESTRES	224
	Littérature	224
51	LA DÉTERMINATION D'UN GÉOÏDE DE HAUTE PRÉCISION PAR L'APPROCHE D'A. ARDALAN :	
	I. RAPPELS DE LA THÉORIE DE PIZZETTI-SOMIGLIANA	225
51.1	INTRODUCTION	225
51.2	RAPPELS ET NOTATIONS	226
51.2.1	Présentation des Coordonnées Ellipsoïdiques ou de Jacobi	226
51.2.2	Passage des coordonnées (u, ϕ, λ) aux coordonnées (x, y, z)	227
51.2.3	Le Repère Mobile (E_u, E_ϕ, E_{lm})	228
51.2.4	L'expression de la métrique $g = ds^2$ en coordonnées de Jacobi	229
51.2.5	L'expression du Laplacien Δ en Coordonnées Ellipsoïdiques	229
51.3	RÉSOLUTION DU LAPLACIEN EN COORDONNÉES ELLIPSOÏDIQUES	229
51.4	LA THÉORIE DE PIZZETTI-SOMIGLIANA	232
51.4.1	Le potentiel de la pesanteur en coordonnées sphériques	232
51.4.2	Le Potentiel de la pesanteur en coordonnées ellipsoïdiques	233
	Littérature	237
52	LE KRIGEAGE	239
52.1	LE KRIGEAGE ORDINAIRE	239
52.2	LE KRIGEAGE SIMPLE	241
52.3	EXEMPLE NUMÉRIQUE DE KRIGEAGE	242
	Littérature	245
	LISTE DES FIGURES	245
	LISTE DES TABLES	247

NOTE SUR LES COODONNÉES SYMÉTRIQUES EN GÉODÉSIE

35.1 DÉFINITIONS

Soit une surface (Σ) de \mathbb{R}^3 paramétrée par $M(u, v) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, alors la première forme fondamentale s'écrit :

$$ds^2 = g_\Sigma = E \cdot du^2 + 2F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2 \quad (35.1)$$

avec :

$$E = \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|^2 \quad (35.2)$$

$$F = \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \quad (35.3)$$

$$G = \frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = \left\| \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 \quad (35.4)$$

Les paramètres (u, v) sont dits symétriques si :

$$F = 0 \quad \text{et} \quad E = G \quad (35.5)$$

Alors (35.1) devient :

$$ds^2 = g_1 = E \cdot (du^2 + dv^2) \quad (35.6)$$

Si on note :

$$g_E(u, v) = du^2 + dv^2 \quad (35.7)$$

la métrique euclidienne de \mathbb{R}^2 , nous avons donc :

$$g_1 = E \cdot g_E(u, v) \quad (35.8)$$

Comme $E > 0$, on pose :

$$E = E(u, v) = e^{\varphi(u, v)} \quad (35.9)$$

Par suite :

$$g_1 = g_1(u, v) = e^{\varphi(u, v)} \cdot g_E(u, v) \quad (35.10)$$

Les paramètres (u, v) sont dits orthogonales si :

$$F = 0 \quad (35.11)$$

Dans ce cas, la métrique g_Σ s'écrit :

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 \quad (35.12)$$

On peut aussi arriver à l'écriture (35.8) si la métrique g_Σ s'écrit sous la forme :

$$ds^2 = g_\Sigma = E(u) \cdot du^2 + G(u) \cdot dv^2 = G(u) \left(\frac{E(u)}{G(u)} \cdot du^2 + dv^2 \right) \quad (35.13)$$

On fait un changement de variables comme suit :

$$\begin{cases} dU = \left(\frac{E(u)}{G(u)} \right) \cdot du \Rightarrow U - U_0 = \int_0^u \frac{E(t)}{G(t)} dt = H(u) \\ V = v \end{cases} \quad (35.14)$$

Alors :

$$g_\Sigma(u, v) = \tilde{g}_\Sigma(U, V) \quad (35.15)$$

$$G(u) = \tilde{G}(U) \quad (35.16)$$

d'où :

$$ds^2 = g_\Sigma(u, v) = E(u) \cdot du^2 + G(u) \cdot dv^2 = G(u) \left(\frac{E(u)}{G(u)} \cdot du^2 + dv^2 \right) = \tilde{G}(U)(dU^2 + dV^2) = \tilde{G}(U)g_E(U, V) \quad (35.17)$$

35.2 EXEMPLES

Nous présentons dans cette section quelques exemples.

35.2.1 Le Plan (X, Y) défini par les coordonnées cartésiennes

On a :

$$ds^2 = g_E(X, Y) = dX^2 + dY^2 \quad (35.18)$$

35.2.2 Le Plan (ρ, θ) défini par les coordonnées polaires

On a :

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 = \rho^2 \left(\frac{d\rho^2}{\rho^2} + d\theta^2 \right) \quad (35.19)$$

En posant :

$$d\mathcal{R} = \frac{d\rho}{\rho} \quad (35.20)$$

L'équation précédente devient :

$$ds^2 = e^{\mathcal{R}} (d\mathcal{R}^2 + d\theta^2) \quad (35.21)$$

35.2.3 La Sphère

On considère (Σ) la sphère de rayon R . Elle est paramétrée par :

$$M(\varphi, \lambda) = \begin{cases} X = R \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = R \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = R \sin \varphi \end{cases} \quad (35.22)$$

Par suite :

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 \quad (35.23)$$

Soit :

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d\varphi^2}{\cos^2 \varphi} + d\lambda^2 \right) \quad (35.24)$$

En posant :

$$L_M = \int_0^\varphi \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (35.25)$$

la latitude croissante ou de Mercator, on a alors :

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \varphi (dL_M^2 + d\lambda^2) \quad (35.26)$$

ou encore :

$$ds^2 = e^{\psi(L_M, \lambda)} (dL_M^2 + d\lambda^2) \quad (35.27)$$

avec :

$$\psi = 2\text{Log}R + 2\text{Log}(\cos\varphi) \quad (35.28)$$

35.2.4 L'Ellipsoïde de révolution

Elle est paramétrée par :

$$M(\varphi, \lambda) = \begin{cases} X = N\cos\varphi\cos\lambda \\ Y = N\cos\varphi\sin\lambda \\ Z = N(1 - e^2)\sin\varphi \end{cases} \quad (35.29)$$

avec :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}; \quad \rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

a le demi-grand axe et b le demi petit-axe de l'ellipsoïde de révolution, d'où :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2\varphi d\lambda^2 \quad (35.30)$$

Qu'on écrit sous la forme :

$$ds^2 = N^2 \cos^2\varphi \left(\frac{\rho^2 d\varphi^2}{N^2 \cos^2\varphi} + d\lambda^2 \right) \quad (35.31)$$

On pose :

$$\mathcal{L}(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{\rho(\alpha) d\alpha}{N(\alpha) \cos\alpha} = \text{Log}t g \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \left(\frac{1 + e\sin\varphi}{1 - e\sin\varphi} \right) \quad (35.32)$$

la latitude isométrique, on a alors :

$$ds^2 = N^2 \cos^2\varphi (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2) \quad (35.33)$$

ou encore :

$$ds^2 = e^{\psi(\mathcal{L}, \lambda)} (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2) \quad (35.34)$$

avec :

$$\psi(\mathcal{L}) = 2\text{Log}N(\varphi(\mathcal{L})) + 2\text{Log}(\cos\varphi(\mathcal{L})) \quad (35.35)$$

35.2.5 Le Cylindre

(Σ) est paramétrée par :

$$M = \begin{cases} x = R\cos u \\ y = R\sin u \\ z = v \end{cases} \quad R > 0 \quad (35.36)$$

Alors, on a :

$$ds^2 = R^2 du^2 + dv^2 \quad (35.37)$$

En posant :

$$U = Ru \quad V = v$$

on obtient :

$$ds^2 = dU^2 + dV^2 = g_E(U, V) \quad (35.38)$$

35.2.6 Le Caténoïde

Cette variété est paramétrée par :

$$M = \begin{cases} x = chv \cdot \cos u \\ y = chv \cdot \sin u \\ z = v \end{cases} \quad (35.39)$$

Le calcul donne :

$$ds^2 = ch^2 v (du^2 + dv^2) = e^{\varphi(v)} g_E(u, v) \quad (35.40)$$

avec :

$$\varphi(v) = 2 \operatorname{Log}(chv)$$

35.2.7 La Surface d'Enneper

Cette variété [1] est paramétrée par :

$$M = \begin{cases} x = u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \\ y = v - \frac{v^3}{3} + vu^2 \\ z = u^2 - v^2 \end{cases} \quad (35.41)$$

Le calcul donne :

$$ds^2 = (1 + u^2 + v^2)^2 (du^2 + dv^2) = e^{\varphi(u, v)} g_E(u, v) \quad (35.42)$$

avec :

$$\varphi(u, v) = 2 \operatorname{Log}(1 + u^2 + v^2)$$

35.2.8 La Pseudo-sphère de Beltrami

Cette variété est paramétrée par :

$$M = \begin{cases} x = thu.\cos v \\ y = thu.\sin v \\ z = \frac{1}{chu} + \text{Log}\left(th\frac{u}{2}\right) \end{cases} \quad u > 0 \quad (35.43)$$

où :

$$thu = \frac{shu}{chu} \quad \text{avec} \quad shu = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \quad chu = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \quad (35.44)$$

et que :

$$ch^2u - sh^2u = 1 \quad (35.45)$$

$$sh'u = chu \quad (35.46)$$

$$ch'u = shu \quad (35.47)$$

$$th'u = \frac{1}{ch^2u} \quad (35.48)$$

Le calcul donne :

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \begin{cases} \frac{\cos v}{ch^2u} \\ \frac{\sin v}{ch^2u} \\ \frac{1}{shu.ch^2u} \end{cases} ; \quad \frac{\partial M}{\partial v} = \begin{cases} -thu.\sin v \\ thu.\cos v \\ 0 \end{cases} \quad (35.49)$$

D'où :

$$E = \frac{1}{sh^2u.ch^2u}; \quad F = 0; \quad G = th^2u = \frac{sh^2u}{ch^2u} \quad (35.50)$$

Par suite :

$$ds^2 = \frac{1}{sh^2u.ch^2u} du^2 + \frac{sh^2u}{ch^2u} dv^2 = \frac{sh^2u}{ch^2u} \left(\frac{du^2}{sh^4u} + dv^2 \right) = th^2u \left(\frac{du^2}{sh^4u} + dv^2 \right) \quad (35.51)$$

Faisons le changement de variables :

$$dU = \frac{du}{sh^2u} \implies U = \int_a^u \frac{dt}{sh^2t} = -\frac{chu}{shu} + k = \frac{-1}{thu} + k$$

$V = v$

d'où :

$$ds^2 = \frac{1}{(k-U)^2} (dU^2 + dV^2) = e^{\phi(U)} g_E(U, V) \quad (35.52)$$

avec :

$$\varphi(U) = -\text{Log}(k - U)^2$$

35.3 LE THÉORÈME DE KORN-LICHTENSTEIN

Quand peut-on écrire l'équation (35.1) sous la forme (35.6) ? Avant de donner une réponse, on donne la définition suivante :

35.3.1 La Condition de Holder d'ordre λ

Une fonction $f(x, y)$ d'un domaine \mathcal{D} du plan (x, y) vérifie la condition de Holder d'ordre λ , $0 < \lambda \leq 1$ si l'inégalité :

$$|f(x, y) - f(x', y')| < Cr^\lambda \quad (35.53)$$

pour tout couple de points $(x, y), (x', y')$ de \mathcal{D} , où C est une constante et r est la distance euclidienne entre ces deux points.

35.3.2 Le Théorème de Korn-Lichtenstein

Soit :

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

Théorème [2] : Supposons que dans un domaine \mathcal{D} du plan (x, y) , les fonctions E, F et G vérifient la condition de Holder d'ordre λ , avec $0 < \lambda < 1$, alors tout point de \mathcal{D} a un voisinage où ds^2 s'écrit :

$$ds^2 = \mu(w, t)(dw^2 + dt^2) \quad (35.54)$$

Les coordonnées (w, t) sont appelées **coordonnées isothermales**.

35.4 L'ÉQUATION DE BELTRAMI

De point de vue pratique, la détermination des coordonnées isothermales de l'équation (35.54) peut être faite à l'aide de l'équation de Beltrami qui sera donnée ci-après. En effet, on cherche les nouvelles coordonnées (w, t) en fonction de u, v de façon que :

$$w = w(u, v), \quad t = t(u, v) \quad (35.55)$$

$$ds^2 = \mu(w, t)(dw^2 + dt^2) \quad (35.56)$$

Comme ds^2 donnée par (35.1) :

$$ds^2 = Edu^2 + 2F dudv + Gdv^2$$

peut s'écrire sous la forme de :

$$ds^2 = \left(\sqrt{E}du + \frac{F + i\sqrt{H}}{\sqrt{E}}dv \right) \left(\sqrt{E}du + \frac{F - i\sqrt{H}}{\sqrt{E}}dv \right) \quad (35.57)$$

avec $i = \sqrt{-1}$ et :

$$H = E.G - F^2 \geq 0 \quad (35.58)$$

et que :

$$dw^2 + dt^2 = (dw + idt)(dw - idt) \quad (35.59)$$

alors pour arriver à l'équation (35.56), il suffit de trouver une fonction à valeurs complexes $\xi = \xi(u, v)$ telle l'identité suivante soit vérifiée :

$$\xi \cdot \left(\sqrt{E}du + \frac{F + i\sqrt{H}}{\sqrt{E}}dv \right) = dw + idt \quad (35.60)$$

et en prenant le conjuguée de cette dernière équation, on a aussi l'identité :

$$\bar{\xi} \cdot \left(\sqrt{E}du + \frac{F - i\sqrt{H}}{\sqrt{E}}dv \right) = dw - idt \quad (35.61)$$

Et en multipliant les deux équations (35.60) et (35.61), on obtient :

$$\begin{aligned} \xi \cdot \bar{\xi} \cdot \left(\sqrt{E}du + \frac{F + i\sqrt{H}}{\sqrt{E}}dv \right) \cdot \left(\sqrt{E}du + \frac{F - i\sqrt{H}}{\sqrt{E}}dv \right) = \\ |\xi|^2 (E \cdot du^2 + 2F du \cdot dv + G \cdot dv^2) = (dw + idt)(dw - idt) \end{aligned}$$

Soit :

$$|\xi|^2 \cdot ds^2 = dw^2 + dt^2 \quad (35.62)$$

De cette dernière équation, on peut écrire :

$$ds^2 = \frac{1}{|\xi|^2} \cdot (dw^2 + dt^2) \quad (35.63)$$

Il suffit de choisir la fonction $\mu(w, t)$ égale à :

$$\mu(w, t) = \frac{1}{|\xi|^2} = \frac{1}{\xi \cdot \bar{\xi}} \quad (35.64)$$

En développant (35.60), on a :

$$\xi \cdot \left(\sqrt{E} du + \frac{F + i\sqrt{H}}{\sqrt{E}} dv \right) = dw + i dt = \left(\frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv \right) + i \left(\frac{\partial t}{\partial u} du + \frac{\partial t}{\partial v} dv \right)$$

En égalisant les termes en du et dv des deux membres de l'équation (35.65), on obtient :

$$\xi \cdot \sqrt{E} = \frac{\partial w}{\partial u} + i \frac{\partial t}{\partial u} \quad (35.65)$$

$$\xi \cdot \left(\frac{F + i\sqrt{H}}{\sqrt{E}} \right) = \frac{\partial w}{\partial v} + i \frac{\partial t}{\partial v} \quad (35.66)$$

De l'équation (35.65), on obtient :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + i \frac{\partial t}{\partial u} \right) \quad (35.67)$$

L'équation (35.66) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + i \frac{\partial t}{\partial u} \right) \cdot \left(\frac{F + i\sqrt{H}}{\sqrt{E}} \right) &= \frac{\partial w}{\partial v} + i \frac{\partial t}{\partial v} \\ \text{ou} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial u} + i \frac{\partial t}{\partial u} \right) \cdot (F + i\sqrt{H}) &= E \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial v} + i \frac{\partial t}{\partial v} \right) \end{aligned} \quad (35.68)$$

En égalisant les parties réelle et imaginaire des deux membres de la dernière équation, on arrive à :

$$F \frac{\partial w}{\partial u} - \sqrt{H} \frac{\partial t}{\partial u} = E \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \quad (35.69)$$

$$F \frac{\partial t}{\partial u} + \sqrt{H} \frac{\partial w}{\partial u} = E \cdot \frac{\partial t}{\partial v} \quad (35.70)$$

De (35.70), on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{E}{\sqrt{H}} \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{F}{\sqrt{H}} \frac{\partial t}{\partial u} \quad (35.71)$$

Et en remplaçant $\frac{\partial w}{\partial u}$ dans (35.69) et utilisant $H = E \cdot G - F^2$, on obtient par simple calcul :

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{-G}{\sqrt{H}} \frac{\partial t}{\partial u} + \frac{F}{\sqrt{H}} \frac{\partial t}{\partial v} \quad (35.72)$$

donc :

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{E}{\sqrt{H}} \frac{\partial t}{\partial v} - \frac{F}{\sqrt{H}} \frac{\partial t}{\partial u} \quad (35.73)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{-G}{\sqrt{H}} \frac{\partial t}{\partial u} + \frac{F}{\sqrt{H}} \frac{\partial t}{\partial v} \quad (35.74)$$

Comme $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2}{\partial v \partial u}$, on déduit :

$$\frac{\partial}{\partial v} [\text{équation (35.73)}] = \frac{\partial}{\partial u} [\text{équation (35.74)}]$$

Qu'on écrit sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{G \cdot \frac{\partial t}{\partial u} - F \cdot \frac{\partial t}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] = \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{F \cdot \frac{\partial t}{\partial u} - E \cdot \frac{\partial t}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] \quad (35.75)$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{G \cdot \frac{\partial t}{\partial u} - F \cdot \frac{\partial t}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] - \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{F \cdot \frac{\partial t}{\partial u} - E \cdot \frac{\partial t}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] = 0 \quad (35.76)$$

35.4.1 L'Opérateur de Beltrami

On appelle opérateur de Beltrami [3] l'opérateur différentiel défini par :

$$L(t)(u, v) = \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{G \cdot \frac{\partial t}{\partial u} - F \cdot \frac{\partial t}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] - \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{F \cdot \frac{\partial t}{\partial u} - E \cdot \frac{\partial t}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right] \quad (35.77)$$

Par suite, les fonctions cherchées $w = w(u, v)$ et $t = t(u, v)$ sont solutions de l'équation de Beltrami définie par :

$$L(f)(u, v) = 0 \quad (35.78)$$

Littérature

1. **Catherine Doss-Bachelet, Jean-Pierre François, Claude Piquet.** 2000. *Géométrie différentielle. Collection Mathématiques 2e Cycle, cours et exercices corrigés*, dirigée par Charles-Michel Marle et Philippe Pilibossian. Editions Ellipses, 200p.
2. **Shiing-Shen Chern.** 1955. An Elementary Proof of the Existence of Isothermal Parameters on a Surface. Proceedings of the American Mathematical Society, n°6, pp 771-782.
3. **B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko.** 1982. *Géométrie Comtemporaine, Méthodes et Applications.* Première Partie. Editions Mir, Moscou, 424p.

NOTE SUR LA CORRECTION DES DISTANCES DUES À L'ALTITUDE

Cette note concerne la correction due à l'altitude à tenir compte lors de la réduction des distances terrain au plan de la représentation UTM.

36.1 APPLICATION DE LA CORRECTION DES DISTANCES DUES À L'ALTITUDE

Lors de la réduction de la distance observée sur le terrain à une altitude moyenne H_m à l'ellipsoïde de référence, on apporte la correction suivante C_{alt} qui est proportionnelle à l'altitude de la région dans laquelle on opère ; elle est égale à :

- * -1 cm par km pour une altitude moyenne de 100m,
- * -3 cm par km pour une altitude moyenne de 200m,
- * -5 cm par km pour une altitude moyenne de 300m,
- * -7 cm par km pour une altitude moyenne de 400m,
- * -8 cm par km pour une altitude moyenne de 500m,
- * -10 cm par km pour une altitude moyenne de 600m,
- * -12 cm par km pour une altitude moyenne de 700m,

- * -13 cm par km pour une altitude moyenne de 800m,
- * -15 cm par km pour une altitude moyenne de 900m,
- * -17 cm par km pour une altitude moyenne de 1000m.

Donc :

$$D_e = D_{hm} + C_{alt} \quad (36.1)$$

où D_e est la distance réduite à l'ellipsoïde, et D_{hm} la distance horizontale à l'altitude moyenne de la zone de travail. Par suite, la distance réduite au plan de la représentation D_{plan} est :

$$D_{plan} = D_e(1 + \varepsilon) \quad (36.2)$$

avec ε l'altération linéaire dans la zone où on opère, soit :

$$D_{plan} = D_e(1 + \varepsilon) = (D_{hm} + C_{alt})(1 + \varepsilon) = D_{hm} + \varepsilon.D_{hm} + C_{alt}$$

en négligeant le terme $\varepsilon.C_{alt}$.

Finalement, on a :

$$D_{plan} = D_{hm} + \varepsilon.D_{hm}^{(enkm)} + C_{alt} \quad (36.3)$$

où :

- * D_{hm} : la distance terrain réduite à l'horizon à l'altitude moyenne H_m .
- * C_{alt} : la correction due à l'altitude avec son signe,
- * ε : l'altération linéaire de la représentation UTM exprimée en cm/km .

Si l'altitude où on opère est supérieure à 1000 m, on applique la relation rigoureuse liant la distance suivant la pente D_p et la distance D_e (on assimile D_e avec la distance corde D_c) à savoir :

$$D_e = D_p \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\Delta h}{D_p}\right)^2}{\left(1 + \frac{h_A}{R}\right) \left(1 + \frac{h_B}{R}\right)}} \quad (36.4)$$

où on a noté :

h_A, h_B sont respectivement les altitudes des points A et B telque $AB = D_p$,

$\Delta h = h_B - h_A$ la différence d'altitudes entre les points A et B ,

R le rayon moyen de la Terre soit 6378 km .

Par suite :

$$D_{plan} = D_e + \varepsilon.D_e^{(enkm)} \quad (36.5)$$

avec ε l'altération linéaire de la représentation UTM exprimée en cm/km .

36.1.1 Exemple

Supposons qu'on opère dans une zone d'altitude moyenne $H_m = 800$ m, et soit $D_{hm} = 532.47$ m la distance observée sur le terrain réduite à l'horizontale, et $\varepsilon = -32.2$ cm/km . La distance D_e est égale à :

$$D_e = 532.47 \text{ m} - 32.2 \times 0.532 \text{ cm} - 13 \times 0.532 \text{ cm} = 532.47 - 0.171 - 0.069$$

soit $D_e = 532.23 \text{ m}$ (36.6)

Littérature

1. **A. Ben Hadj Salem**. 2010. Le Nouveau Système Géodésique Terrestre Tunisien ou La Nouvelle Triangulation Tunisienne - NTT - pour les Techniciens. v3. Février 2010, 27p.

CHAPITRE 37

A CONTRIBUTION ON THE MATHEMATICAL FOUNDATION OF PHYSICAL GEODESY

Ce chapitre représente une traduction de l'article ' **A Contribution on the Mathematical Foundation of Physical Geodesy**' de Torben KRARUP, publié par l'Institut de Géodésie du Denmark sous la publication n° 44, 1969.

Vu l'importance de cette note, et quarante ans après sa première publication, j'ai jugé sa traduction en français.

37.1 REMERCIEMENTS

Une nuit en 1965, dans le hall d'un petit hôtel à Uppsala, Dr. Erik Tengström m'a ouvert les yeux sur quelques difficultés concernant les fondements mathématiques de la géodésie physique et m'encourageait d'essayer d'attaquer quelques uns de ces problèmes.(A cette période j'ai surestimé le lot de littérature mathématique que je dois connaître avant d'entamer réellement les problèmes sinon je n'avais pas accepté le risque). Durant l'année dernière dans ses lettres circulaires aux membres du groupe spécial d'études des méthodes mathématiques en géodésie, le professeur Helmut Moritz a donné une analyse tranchante sur des problèmes relatifs. Sans inspiration de ces deux sommetés de notre science et les discussions personnelles que j'ai eues avec le professeur Moritz à Berlin, le printemps dernier, cette publication n'aurait jamais vu la lumière du jour.

Je suis content pour avoir l'opportunité d'exprimer ma gratitude à mes collègues à l'Institut Danois de Géodésie pour leur bonne patience en m'écoutant lorsque je n'ai pu exprimer mes idées.

Finalement, j'adresse mes remerciements au directeur de l'Institut le professeur Einar Andersen, D.Sc., pour les conditions favorables dans lesquelles j'ai pu travailler et étudier et pour la confiance qui m'a démontré en publiant mon papier.

Janvier, 1969

37.2 EXPOSITION DES IDÉES

Traditionnellement, les géodésiens voyent le problème de la détermination du potentiel de la terre comme un problème des valeurs à la frontière ; en principe, nous pouvons mesurer quelques propriétés locales du potentiel - la pesanteur - à la surface de la terre et seulement à la surface que récemment. Actuellement, les satellites artificiels ont aussi rendu possible la mesure des effets du potentiel dans l'espace extérieur et que d'un autre côté, nous n'allons jamais être capables de faire les mesures de la pesanteur plus en un nombre fini de points, il serait peut être plus normal de voir le problème principal de la géodésie physique comme un problème d'interpolation. Le présent papier était principalement censé être une tentative pour résoudre quelques uns des problèmes théoriques et de calculs reliés à ce changement de point de vue, mais graduellement, aussi mes idées prenaient leurs formes et que je devenais conscient des difficultés, mon impression que les fondements mathématiques de la géodésie physique avaient atteint une situation de crise qui s'agrandissait fortement de plus en plus.

Je pense que la cause de cette crise est, en réalité, une crise de communication ; ce n'est pas la communication entre les géodésiens mais entre la géodésie et les mathématiques et que la géodésie physique partage cette difficulté avec d'autres sciences qui sont intéressées par les mathématiques appliquées.

Regardant autour des méthodes mathématiques utilisées, comme par exemple, en géodésie physique, vous trouverez des idées qui semblent nous avoir atteint accidentellement du village fermé des mathématiques plutôt des méthodes naturellement convenables pour nos problèmes.

Je vais donner quelques exemples que, j'espère, vont éclaircir ce que je pense.

Les méthodes utilisées pour déterminer le potentiel à partir des mesures des satellites et des mesures de gravité sur la terre, sont complètement différentes, et cependant, elles devraient être capables de compléter l'une l'autre - les données de satellites sont plus convenables pour donner une plus grande information globale et celles de la pesanteur de fournir une meilleure information locale - Il est sans doute difficile de combiner ces deux groupes d'information. Il est curieux que les géodésiens qui sont habitués d'utiliser et peut être d'employer des méthodes de compensation en géodésie géométrique, ne peuvent pas être capables de trouver une méthode de compensation qui peut combiner ces deux types de données.

Quelques géodésiens ont soupçonné que le problème des valeurs à la frontière de Molodensky a quelques formes d'instabilité. Serait-il naturel alors d'essayer de formuler le problème comme un problème de compensation, c'est-à-dire d'essayer d'obtenir une amélioration des valeurs à la frontière tel que le problème des valeurs à la frontière soit uniquement résolu et que l'amélioration dans un certain sens des moindres carrés serait la plus petite possible ? Nous sommes, cependant, collés pour la formulation traditionnelle des problèmes des valeurs à la frontière, utilisée et peut être en rapport avec d'autres parties des mathématiques physiques, mais au moins à mon avis, n'est pas en rapport ici.

Cette crise de communication est bien compréhensible. Les fondations mathématiques de la géodésie physique ont été la théorie classique du potentiel, comme on disait dans les années trente, une théorie bien décrite dans peu de livres bien connus. Après cette époque là, les mathématiques se sont développées rapidement et étaient devenues dans l'opinion de beaucoup de gens, une science ésotérique. Si vous voulez savoir quelques choses sur la théorie moderne du potentiel, vous apprendrez premièrement que rien n'est écrit aujourd'hui sur la théorie du potentiel, mais que ce sujet est généralisé à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques et qu'il est préférable aussi de lire quelques choses sur les équations aux dérivées partielles linéaires en général. Mais, lorsque vous voyez les livres, vous réalisez pour y comprendre quelques choses, vous devez premièrement lire un ou deux livres en analyse fonctionnelle (et pour les comprendre, vous devez lire quelque chose sur la topologie). Alors, après quelques années d'études, vous pouvez commencer à soupçonner qu'une théorie moderne du potentiel a de nouvelles choses d'importance pour la géodésie physique. Mais un livre de la théorie moderne du potentiel pour les géodésiens pouvait - s'il existe - être lu en quelques semaines, seulement un tel manuel n'existe pas. Je comprends, pourquoi les livres modernes en mathématiques sont écrits tels qu'ils sont, mais comme un utilisateur des mathématiques je dois le déplorer.

Un genre de problème qui devrait être traité dans un livre moderne sur la théorie moderne du potentiel, je peux mentionner les problèmes concernant l'approximation des potentiels et dans cette direction les problèmes de stabilité.

Je vais donner ici quelques exemples :

Nous avons appris dans la théorie classique du potentiel que deux potentiels identiques dans un ensemble ouvert sont identiques sur l'ensemble de leur domaine de régularité. La nouvelle théorie du potentiel donne un complément valable à ce théorème :

Considérons des potentiels réguliers dans un certain domaine Ω , et soit un autre domaine $\Omega_0 \subset \Omega$. Pour deux potentiels φ_1 et φ_2 réguliers dans Ω , on assume que

$$|\varphi_1(P) - \varphi_2(P)| < \varepsilon \text{ pour } P \in \Omega_0 \quad (37.1)$$

où ε est un certain nombre positif.

Nous devons distinguer deux différents cas :

1) La frontière de Ω est une partie de la frontière de Ω_0 . Alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que :

$$|\varphi_1(P) - \varphi_2(P)| < \delta \text{ pour } P \in \Omega \quad (37.2)$$

2) La limite de Ω n'est pas une partie de la frontière de Ω_0 . Alors, il n'existe pas une constante δ telque (37.2) est satisfait.

De ce théorème important, plusieurs conclusions peuvent être tirées, la majorité d'elles est plus ou moins connue par les géodésiens, exemples :

La continuation ascendante du potentiel (ou de la pesanteur) terrestre est stable et la continuation descendante est instable.

En passant à la limite dans (37.1), nous voyons que le problème de Dirichlet est stable mais le problème de Cauchy est instable.

Le potentiel à la surface de la terre (ou la figure de la terre) ne peut pas être déterminé seulement à partir des mesures dynamiques satellitaires.

Ces conclusions sont justes exprimées comme des slogans ; le sens exact peut être trouvé seulement sur les bases du théorème. Ainsi les mots stables et instables ont donné un contenu exact par (37.1) et (37.2).

En parenthèse, je voudrais dire quelques mots de plus sur le problème de la stabilité dans une autre connexion. Nous connaissons de la théorie classique du potentiel que les problèmes de Dirichlet et de Neumann ont tous les deux une et une seule solution et que c'est aussi le cas en considérant le troisième problème des valeurs à la frontière, où :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + h\varphi \tag{37.3}$$

est donné à la frontière, si $h \leq 0$. Mais pour certaines fonctions h pour lesquelles $h \leq 0$ n'a pas lieu, les valeurs de (37.3) à la frontière ne peuvent pas être arbitrairement prescrites, mais elles doivent satisfaire certaines conditions linéaires pour que le problème ait une solution qui maintenant n'est pas unique (l'alternative de Fredholm). Si h n'est pas donné exactement, mais par exemple trouvé par des mesures, on peut trouver qu'il n'y a pas de sens de dire que h est ou n'est pas un des coefficients exceptionnels de la fonction. Si c'est le cas, le problème des valeurs à la frontière sera instable.

Maintenant, revenons aux problèmes d'approximation.

A perte de vue, le point de vue le plus important introduit en géodésie physique depuis l'apparition des articles célèbres de Molodensky, est l'idée de Bjerhammer de calculer une approximation du potentiel par la collocation, aux points où les anomalies de la gravité ont été mesurées, des potentiels qui sont réguliers sous une certaine sphère située à l'intérieur de la surface terrestre.

D'après la théorie classique, cette idée semble très risquée parce que nous connaissons que le potentiel actuel de la terre n'est pas régulier sous la sphère de Bjerhammer. Ni l'évidence, que Bjerhammer produit dans le support de son idée, ne semble pas me convaincre. Comme nous allons le voir plus tard d'après le point de vue de la nouvelle théorie du potentiel, il y a beaucoup de choses qu'on peut dire en faveur de la détermination du potentiel par les méthodes de l'interpolation et de l'utilisation de potentiels qui sont réguliers à l'extérieur de la sphère de Bjerhammer.

Il est curieux que, dès le début, ces deux choses (c'est-à-dire l'interpolation et la sphère de Bjerhammer) sont apparues toutes les deux ensembles, exactement comme j'ai été obligé d'accepter la sphère de Bjerhammer aussitôt que je tirais les conclusions de la formule de l'interpolation de Moritz pour les anomalies de gravité.

La formule de l'interpolation de Moritz repose sur l'idée d'une fonction d'auto-corrélation pour les anomalies de gravité et qui est invariante par le groupe des rotations autour du centre de la terre.

Dans la troisième section, je vais prouver que d'après l'existence d'une fonction d'auto-corrélation sur une sphère, s'ensuit l'existence d'une fonction d'auto-corrélation pour le potentiel dans tout l'espace à l'extérieur de la surface de la sphère et que cette fonction d'auto-corrélation est invariante par le groupe de rotations. Il paraît d'après quelques articles de Kaula qu'il était aussi conscient bien de ça.

Maintenant, c'est une idée évidente de généraliser la formule de l'interpolation de Moritz comme de trouver le potentiel directement par la collocation (ou généraliser l'interpolation) d'après les anomalies de gravité et de laisser tomber la procédure compliquée de l'intégration en utilisant la formule de Stoke ou la formule rattachée. Il est moins évident que cette méthode n'est pas restreinte pour utiliser les données de l'anomalie de gravité mais par exemple les données reliées aux satellites ou aux déviations de la verticale qui peuvent être incluses. En effet, j'ai démontré une telle formule dans la troisième section, et plus que ça, j'ai aussi généralisé cette formule pour la rendre possible, non pas par collocation exacte mais à l'aide d'une matrice de variance-covariance donnée pour les mesures, de trouver un potentiel qui correspond aux mesures améliorées et qui va mieux en accord avec l'hypothèse d'auto-corrélation. C'est ce-ci que j'appelle une procédure lisse.

Comme l'a montré Moritz dans son article [11] qui est aussi amusant qu'intéressant. Il y a une relation étroite entre sa forme d'interpolation et la compensation classique des moindres carrés. Par conséquent, je peux déduire les résultats décrits dans la troisième section du point de vue de compensation décrits dans la quatrième section. La réciprocity classique entre la variance-covariance et les poids correspond ici à la réciprocity entre l'auto-corrélation et les normes métriques. Ce-ci rappelle la belle méthode géométrique de déduction de la formule pour la compensation classique où le poids définit la norme euclidienne dans l'espace vectoriel des mesures.

La difficulté technique ici est que l'espace vectoriel dans lequel la compensation sera faite n'est pas de dimension finie, mais, lorsque la métrique a été définie, un espace d'Hilbert.

L'espace d'Hilbert devrait être avec la sphère naturelle d'un intérêt pour les géodésiens, depuis qu'il est le substratum le plus général pour la compensation par les moindres carrés et aussi un outil indispensable de la théorie moderne du potentiel.

Mais l'espace d'Hilbert n'est pas suffisant. Nous devons utiliser un concept qu'il existe dans les espaces d'Hilbert consistant de fonctions bien suffisamment régulières et de potentiels réguliers qui sont bien définies dans le plus respect. C'est le concept du noyau reproduisant.

Il n'est pas possible dans ce papier de donner une introduction aux espaces d'Hilbert avec un noyau reproduisant mais des bons livres existent à ce sujet. Le manuel le plus pertinent pour l'usage que j'ai fait avec les espaces d'Hilbert avec noyau reproduisant est [9] qui existe

seulement en langue allemande. Mais le beau livre [1] qui contient un peu mais suffisant sur le sujet et qui contient plusieurs idées intéressantes non toutes relatives à nos problèmes, est aussi utile. D'un autre côté, j'estime que la majorité des géodésiens physiques seront capables de lire ce papier la première fois avec quelques profits sans jamais voir ensemble les mots "espaces d'Hilbert" et "noyau reproduisant".

L'avantage que nous trouvons par l'introduction de l'aspect de compensation, n'est pas seulement que nous atteignons une connexion étroite aux méthodes classiques de compensation, qui est un bénéfice officiel, mais aussi et c'est plus essentiel, que nous obtenons une meilleure pénétration dans l'ensemble des potentiels parmi lesquels la solution se trouve. Cet ensemble est exactement celui des potentiels pour lesquels la norme (définissant les métriques) est définie et finie, et ici encore, tous ces potentiels sont réguliers à l'extérieur d'une certaine sphère à l'intérieur de la terre : La sphère de Bjerhammer. Encore le couplage entre l'interpolation et la sphère de Bjerhammer.

Et maintenant, nous pouvons revenir à la formule de Moritz (je veux dire ici, comme auparavant, la formule de Moritz sans correction d'altitude). On présuppose l'invariance par rotation de la fonction d'auto-corrélation, à partir de laquelle la fonction d'auto-corrélation pour le potentiel et encore du domaine de définition du potentiel s'ensuit l'invariance par rotation de la fonction, indépendamment de la manière de calcul du potentiel : de la formule de Moritz et la formule de Stoke ou directement de la formule généralisée de Moritz. Encore une fois : la sphère de Bjerhammer.

Il y a une liaison fermée entre le problème de la sphère de Bjerhammer et le problème de la convergence des séries des harmoniques sphériques ou mieux encore la question d'approximation de potentiels par des séries en harmoniques sphériques, et ici je crois que nous avons atteint le vrai cœur du fondement de la géodésie physique.

La conséquence doit être non seulement les troisième et quatrième sections de ce papier mais aussi beaucoup de travail fait par les géodésiens physiques dans le monde entier, reste un formalisme oisif jusqu'à la résolution de ce problème d'approximation.

C'est ce que j'ai essayé de faire dans la cinquième section. Là, il paraît encore que la théorie des espaces d'Hilbert avec noyau reproduisant est un outil valable et que le théorème central -le théorème de Runge - est le cas spécial du théorème, qui est connu comme un type du théorème de Runge et qui est bien connu dans la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires et qui concerne l'approximation des solutions d'une équation aux dérivées dans un certain domaine par les solutions de la même équation dans un autre domaine contenant le premier. La démonstration du théorème de Runge donnée en annexe est une réduction et spécialisation du théorème 3.4.3 dans [5].

A perte de vue, tous les problèmes d'approximation des potentiels relevant à la géodésie physique sont résolus ou peuvent être résolus par les méthodes utilisées dans la cinquième section et l'annexe. Et il est curieux que là, les recherches semblent montrer que la méthode de compensation décrite dans la quatrième section (ou équivalent à la méthode de l'interpolation de la première section) est la méthode normale de trouver l'approximation, mais la cause de cette méthode est que je ne connais pas aucune autre méthode pour obtenir une approximation du potentiel terrestre qui est peut être prouvé en liaison.

La dernière section est dédiée pour les applications de la méthode de l'approximation traitée dans les premières sections. J'ai peur que la majorité des lecteurs sentiront déçus par la lecture de la dernière section comme j'en étais moi-même déçu pendant son écriture. A la lumière des plusieurs pensées et sentiments, j'ai eu comme pour les possibilités de l'application de la méthode qu'elle semble très pauvre pour moi. Mais dans moins de 18 mois écoulés de la première idée de la méthode originale jusqu'au l'envoi du papier à l'impression, j'ai dû me concentrer beaucoup à la fondation et les études de la littérature mathématique référentes qu'on peut jeter vaguement un coup d'œil aux aspects géodésiques ou physiques.

Cependant, je sens maintenant que le temps est prêt pour une discussion sur ce sujet et que spécialement la question reliée aux applications géodésiques est favorisée par la discussion et la collaboration, donc j'espère que peu d'indices dans la sixième section [37.6] seront suffisants pour commencer une telle discussion.

Forse altri canterà con miglior plettro!

37.3 COVARIANCE ET COLLOCATION

I. Comme point de départ je vais prendre la formule de prédiction des moindres carrés de Helmut Moritz [4],(7-63, p.268) et j'assume que le lecteur est familiarisé avec le raisonnement statistique arrivant à cette formule. Pour assurer une meilleure compréhension de ce qui suit, je vais faire quelques commentaires sur le raisonnement mathématique en utilisant les notations de Helmut Moritz.

La formule de prédiction de Helmut Moritz est ¹ :

$$\tilde{\Delta}g_P = (C_{P_1}, C_{P_2}, \dots, C_{P_n}) \cdot \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Delta g_1 \\ \Delta g_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta g_n \end{pmatrix}$$

Le problème est de trouver des coefficients α_{P_i} dans la formule linéaire de prédiction :

$$\tilde{\Delta}g_P = \sum_{i=1}^n \alpha_{P_i} \Delta g_i \quad (37.3a)$$

de manière que l'erreur moyenne quadratique m_P de l'anomalie préditée au point P atteint un minimum. Nous avons :

$$m_P^2 = C_{PP} - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_{P_i} C_{P_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{P_i} \alpha_{P_k} C_{ik} \quad (37.4)$$

et les α_{P_i} seront déterminées de façon que (37.4) atteint un minimum.

Avec :

$$\alpha_{P_i} = \beta_{P_i} + \gamma_{P_i} \quad (37.5)$$

(37.4) devient :

$$\begin{aligned} m_P^2 = C_{PP} - 2 \sum_{i=1}^n \beta_{P_i} C_{P_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \beta_{P_i} \beta_{P_k} C_{ik} \\ + 2 \sum_{i=1}^n \gamma_{P_i} \left(\sum_{k=1}^n \beta_{P_k} C_{ik} - C_{P_i} \right) \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_{P_i} \gamma_{P_k} C_{ik} \end{aligned} \quad (37.6)$$

Nous devons choisir ici les β_{P_i} comme on veut, et nous devons les choisir de façon que :

1. Expression rappelée par le traducteur.

$$\sum_{k=1}^n \beta_{P_k} C_{ik} = C_{P_i} \quad (37.7)$$

ce qui possible si (C_{ik}) est non singulière. Alors la deuxième ligne dans la formule (37.6) est nulle et la première ligne a une valeur fixe indépendante de γ_{P_i} .

Si maintenant (C_{ik}) est une matrice définie positive, alors la troisième ligne de (37.6) est ≥ 0 et $=0$ si $\gamma_{P_i} = 0$, soit (37.4) atteint son minimum pour α_{P_i} satisfaisant les équations normales :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{P_k} C_{ik} = C_{P_i} \quad (37.8)$$

Si de l'autre côté, (C_{ik}) est non définie, alors la troisième ligne peut atteindre toute valeur positive ou négative, et m_p^2 ne peut atteindre aucun minimum.

Ainsi, nous voyons que pour que la méthode des moindres carrés aura un sens la fonction covariance $C(P, Q)^2$ doit être de type positive à savoir :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C(P_i, P_k) X_i X_k > 0 \quad (37.9)$$

pour tous les ensembles de n points P_i et n nombres correspondants $X_i \neq 0$, pour $i=1,2,\dots,n$, pour tout entier naturel n . C'est évident, que dans ce cas seulement $C(P, Q)$ définit une fonction de covariance.

Les α_{P_i} ayant été déterminés par (37.8), les valeurs prédites peuvent être déterminées soit par (37.3a) ou par :

$$\tilde{\Delta} g_P = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ik}^{-1} C_{P_i} \Delta g_k \quad (37.10)$$

Si des valeurs prédites de plusieurs points sont à calculer, il est plus économique de résoudre premièrement l'ensemble des "équations normales" :

$$\sum_{i=1}^n \xi_i C_{ik} = \Delta g_k \quad (37.11)$$

où les ξ_i sont indépendants de P . Alors l'ensemble des solutions de (37.11) peuvent être utilisées pour trouver les valeurs prédites de tous les points par :

$$\tilde{\Delta} g_P = \sum_{i=1}^n \xi_i C_{P_i} \quad (37.12)$$

2. Je considère la fonction covariance $C(P, Q)$ comme une fonction symétrique de deux points P et Q et non pas une fonction de la distance PQ . Ce-ci sera d'importance dans la suite de cette note. On noterait préalablement que C_{ik} veut dire $C(P_i, P_k)$ et C_{P_i} veut dire $C(P, P_i)$.

Il est évident que (37.10) est déduite aussi de (37.11) et (37.12), mais (37.11) et (37.12) forment un problème d'interpolation et ses solutions :

(37.12) : Trouver $\tilde{\Delta}g_P$ dans toute la région comme une combinaison linéaire des fonctions $C(P, P_i)$ de P pour $i=1,2,\dots,n$ de façon que :

(37.11) : $\tilde{\Delta}g_P = \tilde{\Delta}g_k$ pour $k=1,2,\dots,n$.

En supposant que $C(P, Q)$ soit définie positive, ce problème a toujours une et une seule solution.

Ayant vu la méthode de point vue différente, on a le courage d'essayer de la généraliser.

Passons au nouveau problème :

Premièrement, en utilisant la formule de prédiction de Moritz avec comme donnée la fonction covariance $C(P, Q)$ nous pouvons trouver $\tilde{\Delta}g_P$ pour tous les points d'une certaine surface. La solution du problème des valeurs à la frontière correspondant nous donnera donc le potentiel perturbateur T . Mais peut-on, en utilisant une autre fonction de covariance $K(P, Q)$ définie dans un domaine incluant l'espace extérieur de la terre et décrivant la covariance entre les valeurs de T aux points P et Q , trouver le potentiel T directement à partir des valeurs mesurées de Δg_i ?

Ou poser la question d'une autre manière : peut-on trouver le potentiel perturbateur T par collocation (c'est-à-dire que les anomalies de gravité atteignent un ensemble de valeurs en des points donnés) de façon que T correspond aux anomalies interpolées qu'on peut trouver par la formule de Moritz ?

Je vais prouver non que ce-ci est non seulement possible mais c'est aussi relativement simple.

Evidemment, on ne peut pas trouver directement la fonction covariance, pour le faire, on doit avoir une population de terres similaires à la notre et avoir l'opportunité de mesurer T pour toutes ces terres en tous les points. Mais considérons pour un moment, que par un miracle, on nous a donné une telle fonction : comme va-t-on l'utiliser et que dirons nous a priori de ses propriétés ?

Premièrement, nous verrons que toute la théorie autour de la formule de prédiction de Moritz peut être utilisée sans changement. Ayant donné les valeurs du potentiel T en n points P_i , T peut être prédit pour tous les points P dans un domaine Ω où K est valide. La forme de (37.12) sera ici :

$$\tilde{T}_P = \sum_{i=1}^n \xi_i K(P, P_i) \quad (37.13)$$

où ξ_i est trouvé à partir des équations normales :

$$\sum_{k=1}^n K(P_k, P_i) \xi_k = T_P \quad (37.14)$$

Utilisant l'opérateur de Laplace Δ pour les deux membres de (37.13), pour $n = 1$, nous trouvons que :

a) pour tous les P_i $K(P, P_i)$ satisfait l'équation de Laplace :

$$\Delta_P K(P, P_i) = 0$$

en tout point $P \in \Omega$ et c'est un potentiel régulier à l'infini comme fonction de P .

La dernière remarque est déduite que T a la propriété correspondance (Par régularité à l'infini pour un potentiel φ je veux dire dans cette communication que :

1) $\lim \varphi = 0$ et :

2) $\lim r \cdot \varphi$ existe. Il est évident que T a au moins ces deux propriétés).

De la définition de $K(P, Q)$ comme fonction de covariance suit :

b) $K(P, Q) = K(Q, P)$.

Après, il est évident que pour tout P_i $K(P_i, P)$ comme fonction de P est un potentiel régulier dans Ω .

c) $K(P, Q)$ est une fonction de type positive.

Ceci est déduit comme dans la théorie expliquant la formule de Moritz.

Comme fonction harmonique $K(P, Q)$ doit être différentiable par rapport aux coordonnées de P et Q dans le domaine Ω . Maintenant, voyons qu'est ce qu'on peut en déduire à partir de la donnée de $K(P, Q)$ concernant la covariance entre les dérivées de T .

A partir de la définition de la fonction covariance $K(P, Q)$, nous avons :

$$M \{T_P, T_Q\} = K(P, Q) \quad (37.15)$$

{ M désigne l'opérateur espérance ou moyenne }.

Pour P, Q, R points de Ω on déduit :

$$M \{T_P, T_R - T_Q\} = K(P, R) - K(P, Q) \quad (37.16)$$

Soit $l = PQ$ la distance PQ , telle que pour un vecteur unitaire \mathbf{e} :

$$R = Q + l\mathbf{e} \quad (37.17)$$

Alors (37.16) donne :

$$M \left\{ T_P, \frac{T_Q + l\mathbf{e} - T_Q}{l} \right\} = \frac{K(P, Q + l\mathbf{e}) - K(P, Q)}{l} \quad (37.18)$$

Et quand $l \rightarrow 0$

$$M \left\{ T_P, \left(\frac{\partial T}{\partial l} \right)_Q \right\} = \left(\frac{\partial}{\partial l} K(P, Q) \right)_Q \quad (37.19)$$

où $\left(\frac{\partial f}{\partial l} \right)_Q$ désigne la dérivée de f suivant la direction de \mathbf{e} prise au point Q .

Evidemment (37.19) peut être généralisée à tout ordre et dans toute direction arbitraire et pour toutes les combinaisons d'opérateurs différentiels linéaires. Spécialement, on obtient :

$$0 = M \{ T_P, \Delta T_Q \} = \Delta_Q K(P, Q) \quad (37.20)$$

soit encore le résultat que $K(P, Q)$ est harmonique en tant qu'une fonction de Q .

Le potentiel normal U étant connu, Δg peut être déterminé à partir de T par un opérateur différentiel, appelons le \mathcal{L} , on a alors :

$$M \{ \Delta g_P, \Delta g_Q \} = \mathcal{L}_P \mathcal{L}_Q K(P, Q) \quad (37.21)$$

ce qui veut dire connaissant la fonction covariance $C(P, Q)$ sur la surface ω frontière de Ω des anomalies de gravité, alors on doit avoir :

d) $\mathcal{L}_P \mathcal{L}_Q K(P, Q) = C(P, Q)$ pour $P, Q \in \omega$

et maintenant il s'ensuit de a), b) et d) que $K(P, Q)$ peut être déterminé à partir de $C(P, Q)$ sous certaines conditions.

II. J'espère que le lecteur cherche maintenant la possibilité de trouver $K(P, Q)$ avec beaucoup d'optimisme qu'il est intéressé à comprendre comment utiliser la fonction covariance.

J'essayerai de le montrer, utilisant la même argumentation, que celle utilisée dans [4] (p.266).

Nous assumons que nous avons trouvé les anomalies de gravité Δg_i en n points :

$$P_i = Q_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et que nous utilisons une prédiction linéaire pour le potentiel T au point P .

$$\tilde{T}_P = \sum_{i=1}^n \alpha_{P_i} \Delta g_i \quad (37.22)$$

Si la valeur correcte de T au point P est T_P , l'erreur de prédiction ε_P est :

$$\varepsilon_P = T_P - \tilde{T}_P = T_P - \sum_{i=1}^n \alpha_{P_i} \Delta g_i \quad (37.23)$$

Alors, on peut trouver la covariance de l'erreur :

$$\sigma_{PQ} = M \{ \varepsilon_P \varepsilon_Q \} \quad (37.24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{PQ} &= M \left\{ \left(T_P - \sum_{i=1}^n \alpha_{P_i} \Delta g_i \right) \left(T_Q - \sum_{k=1}^n \alpha_{Q_k} \Delta g_k \right) \right\} \\ &= M \left\{ T_P T_Q - \sum_i \alpha_{P_i} T_Q \Delta g_i - \sum_k \alpha_{Q_k} T_P \Delta g_k + \sum_i \sum_k \alpha_{P_i} \alpha_{Q_k} \Delta g_i \Delta g_k \right\} \\ &= K(P, Q) - \sum_{i=1}^n \alpha_{P_i} \mathcal{L}_{P_i} K(Q, P) - \sum_{k=1}^n \alpha_{Q_k} \mathcal{L}_{Q_k} K(P, Q) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{P_i} \alpha_{Q_k} \mathcal{L}_{P_i} \mathcal{L}_{Q_k} K(P, Q) \end{aligned} \quad (37.25)$$

Pour $P = Q$, on obtient :

$$\varepsilon_P^2 = K(P, Q) - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_{P_i} \mathcal{L}_{Q_i} K(Q, P) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{P_i} \alpha_{P_k} \mathcal{L}_{P_i} \mathcal{L}_{Q_k} K(P, Q) \quad (37.26)$$

Si ε_P^2 doit atteindre un minimum, dans ce cas α_{P_i} doit satisfaire les équations normales :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{P_k} \mathcal{L}_{P_i} \mathcal{L}_{Q_k} K(P, Q) = \mathcal{L}_{Q_i} K(P, Q) \quad (37.27)$$

Si les points $P_i \in \omega$, alors les coefficients des équations normales sont $C(P_i, P_k)$, et la matrice est définie positive de façon à trouver la matrice inverse N_{ik} définie par :

$$\sum_{j=1}^n N_{ij} \mathcal{L}_{P_j} \mathcal{L}_{Q_k} K(P, Q) = \delta_{ik} \quad (37.28)$$

A l'aide des N_{ik} , le potentiel peut être prédit pour n'importe quel point P dans Ω par la formule :

$$\tilde{T}_P = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n N_{ik} \mathcal{L}_{Q_i} K(P, Q) \Delta g_k \quad (37.29)$$

La covariance de l'erreur pour les points P et Q est exprimée par :

$$\sigma_{PQ} = K(P, Q) - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n N_{ik} \mathcal{L}_{P_i} K(P, Q_i) \mathcal{L}_{Q_k} K(Q, P_k) \quad (37.30)$$

Ainsi ici, on peut tourner la question autrement comme c'était le cas pour la formule (37.10) :

On veut représenter \tilde{T}_P comme suit :

$$\tilde{T}_P = \sum_{i=1}^n \xi_i \mathcal{L}_{Q_i} K(P, Q_i) \quad (37.31)$$

pour tous les points dans Ω tels que pour $i = 1, 2, \dots, n$ (ξ_i sont constantes) :

$$\mathcal{L}_{P_k} \tilde{T}_P = \Delta g_k \quad (37.32)$$

Ce-ci est précisément ce qu'on veut dire par collocation.

Maintenant, on obtient les équations normales :

$$\sum_{i=1}^n \xi_i \mathcal{L}_{P_k} \mathcal{L}_{Q_i} K(P, Q) = \Delta g_k \quad (37.33)$$

et une fois résolues, T_P peut être trouvé par (37.31). Substituant les ξ_i de (37.33) dans (37.31) donne encore une fois (37.29).

Il s'ensuit de (37.31) et a) que T_P est un potentiel et de (37.32) et (37.33) ils donnent les valeurs voulues des anomalies de gravité aux points P_i . Ainsi, nous avons, en effet, éliminé le raisonnement statistique. La formule (37.30), de l'autre côté est déduite seulement de l'hypothèse statistique.

III. Mon traitement de l'aspect statistique est longtemps perdu. Je dois maintenant essayer de lui donner une meilleure fondation.

Laissons nous ici, ainsi que pour l'ensemble de cette note, considérer Ω comme un domaine à l'extérieur d'une sphère avec son centre O au centre de gravité de la terre et le potentiel T , régulier dans Ω , comme un processus stochastique dans Ω et invariant par rapport aux rotations autour du centre O . Toutes les fonctions de deux points $P, Q \in \Omega$ qui sont invariantes par rapport à telles rotations sont des fonctions des distances r_P et r_Q des points P et Q au point O et de l'angle w entre OP et OQ . A partir de celà, $K(P, Q)$ est une fonction non pas de six mais seulement de trois paramètres indépendants et elle peut être trouvée à partir de T comme moyenne de :

$$T_{P'} \cdot T_{Q'} \quad (37.34)$$

pour tout couple de points P' et Q' vérifiant :

$$\begin{aligned} OP' &= OP \\ OQ' &= OQ \\ \angle POQ' &= \angle POQ \end{aligned} \quad (37.35)$$

{ \angle désigne angle }.

De cette manière, les moyennes peuvent être interprétées comme simple interpolation (c'est-à-dire lorsqu'on ne fait pas intervenir les opérateurs \mathcal{L}), et ce-ci est analogue à l'interprétation des moyennes par Moritz. Mais dans le cas d'opérateurs non invariants avec les rotations, ça ne marche pas. Ici, un ensemble de potentiels Σ doit être donné de manière que la moyenne peut être prise sur Σ point par point, et que l'ensemble Σ doit avoir la propriété d'ergodicité de manière qu'en tout point, la moyenne de $\varphi \in \Sigma$ est égale à la moyenne d'un φ individuel sur la sphère (ayant pour centre O) passant par le point en question.

Soit $\varphi(P)$ un potentiel régulier dans Ω . Si R est une rotation (on considère seulement que les rotations de centre O) alors $\varphi(R(P))$ c'est aussi un potentiel régulier dans Ω . Alors, nous définissons Σ_φ pour un potentiel donné φ comme l'ensemble des potentiels $\varphi(R(P))$ pour toutes les rotations R et interprétons la moyenne en un point comme la moyenne sur Σ_φ utilisant comme mesure μ la mesure invariante pour le groupe des rotations G normalisé tel que $\mu(G) = 1$. Quand nous utilisons cette interprétation de $M\{\cdot\}$, le raisonnement menant à la formule (37.29) marche sans difficulté.

Maintenant, quelqu'un peut se demander s'il est raisonnable de représenter le potentiel perturbateur pour une planète non sphérique comme un processus stochastique invariant par rotation. Ma réponse est que ce-ci peut donner un résultat raisonnable s'il est fait d'une manière raisonnable : l'interpolation, c'est-à-dire la procédure mathématique qui donne un potentiel T satisfaisant un ensemble fini de conditions (à partir des observations), a une infinité de solutions. Ce-ci doit être théoriquement exact, soit il devrait donner une de ces solutions, mais pour des raisons économiques, on veut utiliser une méthode statistique qui peut nous donner une solution qui nous semble à utiliser les observations aussi bien que possible. Donc, plutôt une approximation rigoureuse en hypothèse statistique n'est pas désastreuse, mais seulement c'est une question d'économie. La situation est analogue à celle lors de la compensation des réseaux géodésiques, où il est essentiel que nous utilisons les constantes physiques (ou géométriques) de haute précision, mais moins important l'usage des coefficients de poids (ou covariance) "exacts".

Mais l'acceptance d'un potentiel perturbateur avec des propriétés d'invariance par rotations nous conforte avec un problème sévère : le potentiel T qu'on calcule doit être défini et harmonique non seulement à l'espace extérieur de la surface de la terre mais aussi au dessous de la sphère de Bjerhammer et nous connaissons que l'existence physique de T sur la terre ne peut pas être étendue à un potentiel avec cette propriété.

Revenons maintenant à la formule.

Un invariant par rotation $K(P, Q)$ restreint à une surface sphérique dans Ω avec le centre en O et un rayon R fonction seulement de w et peut être développé en séries de polynômes de Legendre :

$$K(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (2n+1) P_n(\cos w) \text{ pour } r_P = r_Q = R \quad (37.36)$$

Comme $K(P, Q)$ est un potentiel comme fonction de P et comme fonction de Q , peut être développé comme suit :

$$K(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{R^{2n+2} A_n}{r_P^{n+1} r_Q^{n+1}} P_n(\cos w) \text{ pour tout } P, Q \in \Omega \quad (37.37)$$

On voit que $K(P, Q)$ est une fonction seulement de r_P, r_Q et w et qu'il est symétrique et harmonique dans Ω et régulier à l'infini. On doit trouver justement les conditions pourqu'il soit défini positif ; on doit alors étudier l'expression :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N K(P_i, Q_k) x_i x_k = \sum_i \sum_k K(i, k) x_i x_k \quad (37.38)$$

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_k K(i, k) x_i x_k &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (2n+1) A_n R^{2n+2} \sum_i \sum_k \frac{P_n(\cos w_{ik})}{r_i^{n+1} r_k^{n+1}} x_i x_k \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^{2n+2} \left\{ \sum_{m=0}^n \sum_i \sum_k \frac{R_{nm}(\theta_i, \lambda_i) x_i}{r_i^{n+1}} \frac{\bar{R}_{nm}(\theta_k, \lambda_k) x_k}{r_k^{n+1}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^n \sum_i \sum_k \frac{\bar{S}_{nm}(\theta_i, \lambda_i) x_i}{r_i^{n+1}} \frac{\bar{S}_{nm}(\theta_k, \lambda_k) x_k}{r_k^{n+1}} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n R^{2n+2} \left\{ \sum_{m=0}^n \left[\sum_i \frac{\bar{R}_{nm}(\theta_i, \lambda_i) x_i}{r_i^{n+1}} \right]^2 + \sum_{m=1}^n \left[\sum_i \frac{\bar{S}_{nm}(\theta_i, \lambda_i) x_i}{r_i^{n+1}} \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (37.39)$$

Si $A_n \geq 0$ pour tout n , (37.39) montre que :

$$\sum_i \sum_k K(i, k) x_i x_k \geq 0 \quad (37.40)$$

mais si $A_n < 0$ pour un certain n , alors pour un ensemble de points P_i et des poids x_i :

$$\sum_i \sum_k K(i, k) x_i x_k < 0$$

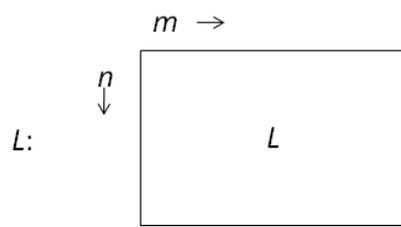
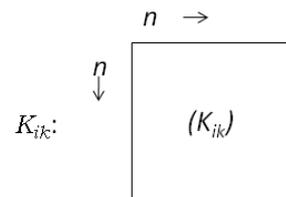
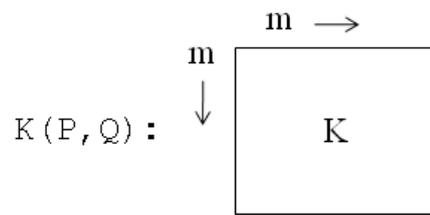
Nous devons conclure qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $K(P, Q)$ soit de type non négatif est que tous les coefficients A_n dans (37.37) soient :

$$A_n \geq 0$$

IV. Je pense que les lecteurs sont d'accord avec moi que la notation utilisée jusqu'à maintenant est plutôt maigre. Cependant, j'ai choisi ici à introduire une autre notation qui sera justifiée plus tard, mais qui est plus maniable.

Aussi longtemps que nous sommes intéressés seulement à la simple interpolation, la nouvelle notation n'est rien que la notation matricielle classique et qui ne demande aucune justification.

Nous supposons qu'on s'intéresse juste seulement aux valeurs interpolées à un ensemble fini de points, nous avons besoin de connaître $K(P, Q)$ en un nombre fini de points, disons m points, soit représenter $K(P, Q)$ par une matrice carrée : La matrice carrée $n \times n$ $K(P_i, Q_k)$ est représentée comme une matrice $n \times n$: K_{ik} est obtenue de $K(P, Q)$ utilisant une matrice projecteur L . Elle est de dimensions $n \times m$ et consiste avec seulement des 0 et des 1 avec précisément un seul 1 dans chaque colonne.



Ainsi, on peut écrire :

$$(K_{ik}) = LKL^T$$

(α_p) a la même forme que L^T soit $A = (A_{mn})$

(T_P) est représenté par un vecteur 'long' soit $t = (t_{m1})$

et Δg_i par un vecteur 'court' soit $x = (x_{n1})$.

J'appelle x le vecteur représentant Δg_i parcequ'il doit représenter non seulement les mesures des anomalies de gravité mais aussi les composantes de la déviation de la verticale, les perturbations des satellites, et d'autres...

Quand nous utilisons la méthode non pour un problème d'interpolation simple mais pour un problème de collocation, la dimension m est infinie, et L doit être interprétée comme un opérateur linéaire ou mieux comme un ensemble de n opérateurs linéaires opérant en différents points. Cependant, je ne pense pas que l'interprétation causera des difficultés quelconques, mais il sera pratique pour le lecteur de comparer en continu l'exemple suivant avec les formules (37.22)-(37.33).

Le problème à résoudre utilisant la nouvelle notation est ce-ci :

Si une interpolation ou une collocation est utilisée en plusieurs mesures, les nécessités pour que le résultat soit exactement compatible avec tous les résultats des mesures doit avoir l'effet que le résultat devient très oscillant ; dans ce cas, il est souvent mieux d'utiliser le lissage plutôt qu'une interpolation exacte.

Supposons de plus à ce qu'il a été donné dans le problème traité dans la section II de ce paragraphe, qu'on donne R une matrice covariance $n \times n$ pour les n observations, soit :

$$x = y - v \quad (37.41)$$

où x est le vecteur des observations, y est la vraie valeur et v le vecteur des corrections.

Nous posons comme précédemment cf.(37.22),

$$\tilde{t} = Ax \quad (37.42)$$

L'erreur de prédiction sera maintenant :

$$(\varepsilon_P) = t - \tilde{t} = t - Ay + Av \quad (37.43)$$

Et l'erreur de covariance :

$$\begin{aligned} (\sigma_{PQ}) &= M \{ (\varepsilon_P)(\varepsilon_Q)^T \} = M \{ (t - Ay + Av)(t^T - y^T A^T + v^T A^T) \} \\ &= M \{ t t^T \} - M \{ t y^T A^T \} - M \{ A y t^T \} + M \{ t v^T A^T \} \\ &+ M \{ A v t^T \} + M \{ A y y^T A^T \} - M \{ A y v^T A^T \} - M \{ A v y^T A^T \} + M \{ A v v^T A^T \} \\ &= K - K L^T A^T - A L K + 0 + 0 + A L K L^T A^T - 0 - 0 + A R A^T \end{aligned} \quad (37.44)$$

Ou :

$$(\sigma_{PQ}) = K - KL^T A^T - ALK + A [R + LKL^T] A^T \quad (37.45)$$

La condition que ε_P doit atteindre un minimum donne les équations normales :

$$A [R + LKL^T] = KL^T \quad (37.46)$$

Ou :

$$[R + LKL^T] A^T = LK \quad (37.47)$$

ici, la matrice R est définie positive et LKL^T est toujours définie non négative, alors la matrice des équations normales :

$$R + LKL^T$$

est toujours définie positive. Si on définit N par :

$$N [R + LKL^T] = I \quad (37.48)$$

où I est la matrice unité $n \times n$, nous obtenons :

$$A = KL^T N, \quad A^T = NLK \quad (37.49)$$

Et :

$$\tilde{t} = KL^T N x \quad (37.50)$$

Pour la covariance des erreurs σ_{PQ} (37.45) et (37.49) donnent :

$$(\sigma_{PQ}) = K - KL^T NLK \quad (37.51)$$

De même ici, il est plus simple de point de vue calculs de résoudre premièrement les équations normales :

$$[R + LKL^T] \xi = x \quad (37.52)$$

et puis trouver \tilde{t} par :

$$\tilde{t} = KL^T \xi \quad (37.53)$$

La matrice variance-covariance *a posteriori* pour les observations doit être aussi calculée :

$$\begin{aligned} L(\sigma_{PQ})L^T &= LKL^T - LKL^T NLKL^T = LKL^T [I - N(R + LKL^T - R)] \\ &= LKL^T NR = (R + LKL^T - R)NR = R - RNR \end{aligned} \quad (37.54)$$

V. Revenons au problème de collocation (non pas le problème de lissage). Alors $R = 0$ et (37.54) donne :

$$L(\sigma_{PQ})L^T = 0 \quad (37.55)$$

Ce qui n'est pas une surprise.

J'ai appelé σ_{PQ} la covariance des erreurs, parcequ'elle a été appelée comme ça par d'autres jusqu'à maintenant, bien que j'aurai préféré l'appeler la covariance *a posteriori*, et j'essayerai de l'expliquer pourquoi.

Imaginons la situation où nous avons effectué une collocation comme dans le paragraphe **II** de cette section et qu'après nous avons effectué des observations en à un autre ensemble de points et maintenant on veut faire l'interpolation utilisant les deux jeux d'observations. Je réclame qu'on peut le faire de la façon suivante :

Appelons la valeur trouvée \tilde{t} de la première collocation \tilde{t}_0 et celle trouvée de la deuxième collocation \tilde{s} et posons :

$$\tilde{t} = \tilde{t}_0 + \tilde{s} \quad (37.56)$$

Appelons y l'ensemble des observations du deuxième groupe, et M jouant le rôle de L pour ce groupe. Alors \tilde{s} peut être trouvé utilisant la méthode ordinaire, si pour K on utilise :

$$K' = K - KL^T NLK \quad (37.57)$$

pour L on utilise N , et pour x nous utilisons :

$$y - \tilde{t}_0$$

Soit :

$$\tilde{s} = (K - KL^T NLK)M^T N'(y - \tilde{t}_0) \quad (37.58)$$

où :

$$N' = [M(K - KL^T NLK)M^T]^{-1} \quad (37.59)$$

Ce-ci doit être vérifié directement avec la manipulation bien connue de la partition des matrices, mais il ne sera pas fait ici car je pense que le résultat ne sera d'aucune importance, cependant, je le trouve très intéressant spécialement quand il est formulé comme suit :

Si quelqu'un a utilisé la méthode de prédiction sur le résultat de certaines observations et après avoir fait d'autres observations (sur d'autres points), alors les deux procédures suivantes vont donner les mêmes résultats :

1. Utilisation de la méthode de prédiction sur toutes les observations avec la matrice covariance origine.
2. Utilisation de la méthode de prédiction sur les améliorations (les nouvelles mesures- les valeurs prédites pour les mêmes points) avec la fonction covariance *a posteriori*.

37.4 LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS DANS LES ESPACES DE HILBERT

I. Dans la troisième section, j'ai apporté la généralisation de la formule de prédiction de Moritz à un point ou plutôt au voisinage d'un point, avec quelques difficultés, à savoir en respectant une simple et consistante notation, semble indiquer le besoin d'un bagage mathématique puissant.

J'ai plusieurs fois pensé que la méthode de prédiction doit être vue sous deux aspects : l'aspect de la méthode originale où on cherche la valeur prédite en un point et de l'autre côté, l'aspect de la collocation où on cherche une fonction d'interpolation comme une entité. Peut être dit-on que le premier aspect est discret ou fini, alors que le deuxième est continu ou infini, par conséquent, ce n'est pas tellement une surprise qu'on doit utiliser des méthodes de l'analyse fonctionnelle pour plus utiliser le deuxième aspect.

La forme des équations normales du deuxième aspect (37.11) semble indiquer que la fonction d'interpolation est un résultat d'un problème de compensation. Quand nous avons introduit la nouvelle notation, nous avons vu dans le cas d'interpolation ordinaire que la notation était celle des matrices, montrant que nous devons chercher la valeur de la fonction d'interpolation à un ensemble fini de points. Premièrement, laissons nous étudier ce cas spécial pour trouver quelle quantité a été minimisée.

Essayons de trouver un vecteur t de m composantes de façon que les n premières composantes soient égales aux n composantes du vecteur x et que :

$$t^T G t = \text{Min} \quad (37.60)$$

où G est une $m \times m$ matrice définie positive. La première condition peut s'écrire comme suit :

$$L t = x \quad (37.61)$$

où L la matrice $m \times n$ peut être partitionnée comme :

$$\{I_n | 0\} \quad (37.62)$$

où I_n est la matrice unité $n \times n$, et 0 est la matrice nulle $n \times (m - n)$. Maintenant, le problème est un problème classique de compensation par les moindres carrés avec les équations de condition (37.61) et de matrice de G . Sa solution est :

$$t = G^{-1} L^T (L G^{-1} L^T)^{-1} x \quad (37.63)$$

Si :

$$G = K^{-1} \quad (37.64)$$

Alors nous avons (37.3, 37.50), c'est-à-dire x est la solution du problème de prédiction avec $K = G^{-1}$. Nous pouvons expliquer ce qu'on a ici en disant que la fonction de corrélation définit la métrique de l'espace vectoriel dont t est un élément, et que la matrice définissant cette métrique est la matrice de poids correspondante à la corrélation donnée.

Quand nous avons trouvé que t minimise :

$$t^T K^{-1} t \quad (37.65)$$

nous pouvons aussi trouver la valeur du minimum :

$$\begin{aligned} \text{Min}_t t^T K^{-1} t &= x^T (L K L^T)^{-1} L K K^{-1} K L^T (L K L^T)^{-1} x \\ &= x^T (L K L^T)^{-1} L K L^T (L K L^T)^{-1} x = x^T (L K L^T)^{-1} x \end{aligned} \quad (37.66)$$

Ce résultat est très intéressant parcequ'il est indépendant de l'ensemble des $m - n$ points où on veut trouver la prédiction, et parceque le résultat n'est pas limité à la simple interpolation mais peut être généralisé au cas où la matrice unité I_n dans (37.62) est remplacée par une autre matrice non singulière $n \times m$.

Si on interprète K^{-1} comme la matrice définissant la métrique de l'espace vectoriel des t , alors la norme de t est définie par :

$$\|t\| = [t^T K^{-1} t]^{\frac{1}{2}} \quad (37.67)$$

et utilisant (37.66) on peut définir la norme de la fonction d'interpolation t pour le problème donné par L, K et t :

$$\|t\| = [x^T (LKL^T)^{-1} x]^{\frac{1}{2}} \quad (37.68)$$

Maintenant, on doit trouver une expression plus explicite de la norme. Supposons que $K(P, Q)$ peut être exprimé comme suit :

$$K(P, Q) = \sum_n k_n \varphi_n(P) \varphi_n(Q) \text{ pour } P, Q \in \Omega \quad (37.69)$$

où k_n sont des constantes positives, $\varphi_n(P)$ est un ensemble de fonctions harmoniques dans Ω et n est fini ou infini. Comme on est intéressé ici à la simple interpolation, on cherche une telle fonction $t(P)$ telle que :

$$t(P_i) = x_i \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (37.70)$$

Comme dans (sec.(37.3),37.11), nous posons :

$$t(P) = \sum_{i=1}^N \xi_i K(P, Q_i) = \sum_n k_n \varphi_n(P) \cdot \sum_{i=1}^N \xi_i \varphi_n(Q_i) = \sum_n t_n \varphi_n(P) \quad (37.71)$$

où :

$$t_n = k_n \sum_{i=1}^N \xi_i \varphi_n(Q_i) \quad (37.72)$$

sont les coefficients dans le développement de $t(P)$ en séries de $\varphi_n(P)$.

Les conditions (37.70) donne les équations normales ([37.3],I,37.52) pour $R = 0$:

$$LKL^T \xi = x \quad (37.73)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \|t\|^2 &= \xi^T LKL^T (LKL^T)^{-1} LKL^T \xi = \xi^T LKL^T \xi = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \xi_i \xi_k K(P_i, P_k) \\ &= \sum_i \sum_k \xi_i \xi_k \sum_n k_n \varphi_n(P_i) \varphi_n(P_k) \\ &= \sum_n k_n \sum_i \sum_k \xi_i \xi_k \varphi_n(P_i) \varphi_n(P_k) \\ &= \sum_n k_n \left[\sum_i \xi_i \varphi_n(P_i) \right]^2 = \sum_n \frac{t_n^2}{k_n} \end{aligned} \quad (37.74)$$

Si pour tout f telle que :

$$f = \sum_n f_n \varphi_n(P) \quad (37.75)$$

converge en tout point de Ω et pour lesquels :

$$\sum_n \frac{f_n^2}{k_n} \quad (37.75.a)$$

converge aussi, nous définissons :

$$\|f\| = \left[\sum_n \frac{f_n^2}{k_n} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (37.76)$$

Alors notre définition est consistante avec (37.68). Nous devons adopter cette définition, et appelons H_K l'ensemble de tels f .

H_K est un espace vectoriel linéaire c'est-à-dire pour tout $f, g, \in H_K$ et pour a tout réel, $f + g \in H_K$ et $a.f \in H_K$.

Définissons pour $f, g, \in H_K$ le produit scalaire, $\langle f, g \rangle$ par :

$$2. \langle f, g \rangle = \|f + g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2 \quad (37.77)$$

Il est évident que $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$, ainsi le produit scalaire est bilinéaire, et que :

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle \quad (37.78)$$

Si $\langle f, g \rangle = 0$, on dit que f et g sont orthogonaux.

Pour :

$$f = \varphi_n + \varphi_m$$

nous trouvons par (37.77) :

$$\|f\|^2 = \|\varphi_n + \varphi_m\|^2 = \|\varphi_n\|^2 + \|\varphi_m\|^2 + 2. \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle \quad (37.79)$$

et utilisant (37.76) :

$$\frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_m} = \frac{1}{k_n} + \frac{1}{k_m} + 2. \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle \text{ pour } m \neq n \quad (37.80)$$

et :

$$\frac{4}{k_n} = \frac{2}{k_n} + 2. \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle \text{ pour } m = n \quad (37.81)$$

L'équation (37.80) donne

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = 0 \text{ pour } m \neq n \quad (37.82)$$

et l'équation (37.81) donne :

$$\|\varphi_n\|^2 = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = \frac{1}{k_n} \quad (37.83)$$

Ce qui montre que $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ est un système de fonctions orthogonales.

Comme une fonction de φ , la fonction de covariance $K(P, Q)$ est un élément de l'espace H_K et pour tout f un élément de H_K , on peut calculer :

$$\begin{aligned} \langle K(P, Q), f(Q) \rangle &= \langle \sum_k k_n \varphi_n(P) \varphi_n(Q), \sum_m f_m \varphi_m(Q) \rangle \\ &= \sum_n \sum_m k_m f_m \varphi_n(P) \langle \varphi_n(Q), \varphi_m(Q) \rangle = \sum_n k_n f_n \varphi_n(P) \frac{1}{k_n} = \sum_n f_n \varphi_n(P) = f(P) \end{aligned} \quad (37.84)$$

Spécialement pour $f(Q) = K(Q, R)$ nous obtenons :

$$\langle K(P, Q), K(Q, R) \rangle = K(P, R) \quad (37.85)$$

Ce nous avons trouvé plus loin doit être résumé comme suit : la fonction covariance donnée par (37.69) définit un espace de Hilbert H_K consistant des fonctions f satisfaisant (37.75)-(37.76), et $K(P, Q)$ est la fonction noyau de H_K . De la théorie des espaces de Hilbert avec des fonctions noyaux, on déduit qu'il n'est pas nécessaire de demander la convergence de (37.75), c'est déduit de $\sum_n \frac{f_n^2}{k_n}$ (37.75.a).

Comme pour le cas de l'invariance par rotation, nous avons trouvé la forme de la fonction covariance (sec. [37.3], 37.37) :

$$\begin{aligned} K(P, Q) &= \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n \left[\frac{R^2}{r_P r_Q} \right]^{n+1} P_n(\cos w) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left[\frac{R^2}{r_P r_Q} \right]^{n+1} \sum_{m=-n}^n E_{nm}(\theta_P, \lambda_P) E_{nm}(\theta_Q, \lambda_Q) \end{aligned} \quad (37.86)$$

où $A_n \geq 0$, et j'ai défini :

$$\begin{aligned} E_{nm}(\theta, \lambda) &= \bar{R}_{nm}(\theta, \lambda) \text{ pour } m \geq 0 \\ E_{nm}(\theta, \lambda) &= \bar{S}_{nm}(\theta, \lambda) \text{ pour } m \leq 0 \end{aligned} \quad (37.87)$$

H_K consiste ici de toutes les fonctions de la forme :

$$f(P) = \sum_{n=0}^l \sum_{m=-n}^n f_{nm} \left(\frac{R}{r_P} \right)^{n+1} E_{nm}(\theta, \lambda) \quad (37.88)$$

pour lesquelles :

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^l \sum_{m=-n}^n \frac{f_{nm}^2}{A_n} \quad (37.89)$$

converge. \sum'_n désigne ici et ci-dessous que la somme est prise pour n pour lesquels $A_n > 0$.

Les équations (37.82) et (37.83) donnent ici :

$$\left\langle \left(\frac{R}{r} \right)^{i+1} E_{ij}(\theta, \lambda), \left(\frac{R}{r} \right)^{k+1} E_{ke}(\theta, \lambda) \right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{A_i} \text{ pour } i = k \text{ et } j = e \\ 0 \text{ dans tous les autres cas} \end{cases} \quad (37.90)$$

II. Dans cette section, les deux problèmes classiques de compensation par les moindres carrés seront généralisés aux espaces de Hilbert.

Dans les deux cas, nous avons deux espaces de Hilbert H_1 et H_2 , et chacun d'eux est indépendant de l'autre, peut être de dimension finie ou infinie. Les produits scalaires et les normes dans les deux différents espaces seront distingués par les indices inférieurs, ainsi $\|\cdot\|_2$ est la norme dans H_2 . Les deux espaces peuvent être identiques.

Premièrement, j'attire l'attention du lecteur sur quelques définitions des opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert.

Un opérateur linéaire $A : H_1 \rightarrow H_2$ est une fonction de H_1 vers H_2 de façon que si A est défini pour deux éléments x_1 et $y_1 \in H_1$ telque :

$$\begin{aligned} Ax_1 &= x_2 \\ Ay_1 &= y_2 \end{aligned} \quad (37.91)$$

où x_2 et $y_2 \in H_2$, alors A est aussi défini pour $x_1 + y_1$ et :

$$A(x_1 + y_1) = x_2 + y_2 \quad (37.92)$$

et pour ax_1 , où a est un réel quelconque, et :

$$A(ax_1) = aAx_1 \quad (37.93)$$

Un opérateur linéaire $A : H_1 \rightarrow H_2$ est dit borné s'il est défini pour tout $x \in H_1$ et il existe un réel positif b telque pour tout $x \in H_1$:

$$\|Ax\|_2 \leq b \cdot \|x\|_1 \quad (37.94)$$

(En effet, la vérification de la deuxième condition est déduite de la première).

Si $H_1 = H_2$, les opérateurs linéaires bornés $A : H_1 \rightarrow H_2$ sont analogues aux matrices carrées, Si $H_1 \neq H_2$, ils sont analogues aux matrices rectangulaires. Il y a aussi l'analogie suivante pour la transposée :

Si $A : H_1 \rightarrow H_2$ est un opérateur borné, alors il existe un et un seul opérateur borné $A^T : H_2 \rightarrow H_1$ telque pour tout $x_1 \in H_1$ et $x_2 \in H_2$:

$$\langle Ax_1, x_2 \rangle_2 = \langle x_1, A^T x_2 \rangle_1 \quad (37.95)$$

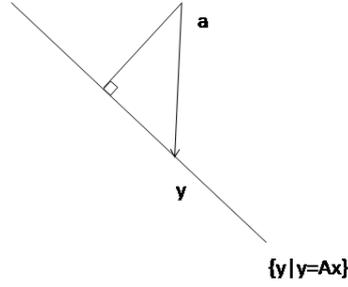
Quand j'utilise le mot opérateur, ça signifie généralement un opérateur linéaire borné.

Le premier problème :

Etant donné un opérateur linéaire borné $A : H_1 \rightarrow H_2$ et un élément $a \in H_2$, trouver un tel élément $x \in H_1$ telque $\|z\|_2$ où :

$$z = Ax - a \quad (37.96)$$

est assez petite que possible.



$\|z\|_2$ atteint un minimum si et seulement si z est orthogonal à Ay pour tout $y \in H_1$:

$$\begin{cases} \langle z, Ay \rangle_2 = 0 \\ \langle A^T z, y \rangle_1 = 0 \end{cases} \text{ pour tout } y \in H_1 \quad (37.97)$$

Ce-ci est :

$$\begin{aligned} 0 &= A^T z = A^T Ax - A^T a \\ A^T Ax &= A^T a \end{aligned} \quad (37.98)$$

Si l'opérateur $A^T A$ est inversible, la solution unique est :

$$x = (A^T A)^{-1} A^T a \quad (37.99)$$

et :

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \langle A(A^T A)^{-1} A^T a - a, A(A^T A)^{-1} A^T a - a \rangle_2 = \langle A(A^T A)^{-1} A^T a, A(A^T A)^{-1} A^T a \rangle_2 \\ &\quad - 2 \langle A(A^T A)^{-1} A^T a, a \rangle_2 + \langle a, a \rangle_2 = \langle A^T A(A^T A)^{-1} A^T a, (A^T A)^{-1} A^T a \rangle_1 \\ &\quad - 2 \langle A(A^T A)^{-1} A^T a, a \rangle_2 + \langle a, a \rangle_2 = \langle A^T a, (A^T A)^{-1} A^T a \rangle_1 - 2 \langle (A^T A)^{-1} A^T a, A^T a \rangle_1 \\ &\quad + \langle a, a \rangle_2 = \langle a, a \rangle_2 - \langle a, A(A^T A)^{-1} A^T a \rangle_2 \\ &= \langle a, a \rangle_2 - \langle A(A^T A)^{-1} A^T a, A(A^T A)^{-1} A^T a \rangle_2 \\ &= \|a\|_2^2 - \|A(A^T A)^{-1} A^T a\|_2^2 \end{aligned} \quad (37.100)$$

parceque :

$$[A(A^T A)^{-1} A^T]^2 = A(A^T A)^{-1} A^T A(A^T A)^{-1} A^T = A(A^T A)^{-1} A^T \quad (37.101)$$

L'opérateur des équations normales (37.98) est définie non négative :

$$\langle x, A^T Ax \rangle_2 \geq 0 \text{ pour tout } x \in H_2 \quad (37.102)$$

parceque

$$\langle x, A^T Ax \rangle_2 = \langle Ax, Ax \rangle_1 = \|Ax\|_1^2 \geq 0 \quad (37.103)$$

L'opérateur $A^T A$ est symétrique :

$$(A^T A)^T = A^T A \quad (37.104)$$

Le second problème :

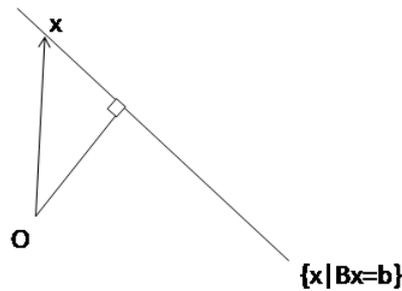
Etant donné un opérateur borné $B : H_2 \rightarrow H_1$ et un élément $b \in H_1$, trouver un tel élément $x \in H_2$ telque :

$$Bx = b \quad (37.105)$$

et que :

$$\|x\|_2 \quad (37.106)$$

soit assez petite que possible.



Tout élément $x \in H_2$ peut s'écrire sous la forme :

$$x = B^T \xi + y \quad (37.107)$$

avec un certain $\xi \in H_2$ et $y \in H_2$ de façon que y est orthogonal à $B^T s$ pour tous les $s \in H_1$, soit :

$$0 = \langle B^T s, y \rangle_2 = \langle s, By \rangle_1 \quad \text{pour tout } s \in H_1 \quad (37.108)$$

ou :

$$By = 0 \quad (37.109)$$

Maintenant (37.107) et (37.109) donnent :

$$Bx = BB^T \xi + By = BB^T \xi \quad (37.110)$$

La condition de x écrite sous la forme (37.107), satisfaisant (37.105) est que ξ est déterminé par :

$$BB^T \xi = b \quad (37.111)$$

Si BB^T , qui est symétrique et définie non négative, est inversible, nous obtenons :

$$\xi = (BB^T)^{-1} b \quad (37.112)$$

Dans (37.107), x est déterminé comme somme de deux éléments orthogonaux dont le premier est donné, la norme de x cependant atteint son minimum pour $y = 0$ et nous avons la solution :

$$x = B^T (BB^T)^{-1} b \quad (37.113)$$

Pour la valeur minimum $\|x\|_2$, nous avons :

$$\|x\|_2^2 = \langle B^T (BB^T)^{-1} b, B^T (BB^T)^{-1} b \rangle_2 = \langle BB^T (BB^T)^{-1} b, (BB^T)^{-1} b \rangle_1 = \langle b, (BB^T)^{-1} b \rangle_1$$

Comme dans le cas de dimension finie, on peut ici aussi définir et résoudre les problèmes les plus sophistiqués des moyennes quadratiques.

Il y'a une méthode d'inclure dans les deux problèmes traités ici les problèmes qui semblent plus généraux en utilisant la somme directe d'espaces de Hilbert.

Pour deux espaces (de dimension finie ou infinie) de Hilbert H_1 et H_2 on peut définir un troisième espace de Hilbert H_+ :

$$H_+ = H_1 \oplus H_2 \quad (37.114)$$

appelé la somme directe des espaces H_1 et H_2 . Il consiste à tous les couples ordonnés :

$$(x_1, x_2) \quad (37.115)$$

d'éléments $x_1 \in H_1$ et $x_2 \in H_2$, le produit scalaire dans H_+ est défini par :

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_+ = \langle x_1, y_1 \rangle_1 + \langle x_2, y_2 \rangle_2 \quad (37.116)$$

Si on un quatrième espace de Hilbert H_3 et un opérateur $A : H_+ \rightarrow H_3$, il est souvent plus pratique de partitionner A :

$$A = (A_1 | A_2) \quad (37.117)$$

où $A_1 : H_1 \rightarrow H_3$ et $A_2 : H_2 \rightarrow H_3$.

Si, de la même manière, $B : H_3 \rightarrow H_+$, alors :

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \quad (37.118)$$

où $B_1 : H_3 \rightarrow H_1$ et $B_2 : H_3 \rightarrow H_2$. L'analogie à la notation matricielle est frappante.

III. Pour se permettre l'utilisation de la formule de compensation, on doit connaître comment obtenir les formes explicites des opérateurs A et B_1 et ici la fonction covariance ou le noyau $K(P, Q)$ va très bien nous aider.

La formule (37.84) montre que $K(P, Q)$ peut opérer sur une fonction $f(P)$. Nous devons écrire (37.84) comme suit

$$Kf = f \quad (37.119)$$

Nous voyons qu'en réalité cet opérateur est l'opérateur unité dans l'espace de Hilbert H_K .

Si P_1, P_2, \dots, P_N est tout ensemble ordonné de points dans Ω , alors l'opérateur L défini par :

$$L_i = \langle K(P_i, Q), f(Q) \rangle = f(P_i) \quad (37.120)$$

est un opérateur linéaire borné $L : H_K \rightarrow E_N$ où E_N est l'espace euclidien de dimension N , qui à un élément de H_K associe le vecteur donnant sa valeur au point P_i . Ce-ci peut être généralisé, définissant L par :

$$L_i = \langle \mathcal{L}_{P_i} K(P, Q), f(Q) \rangle = \mathcal{L}_i f(P) \quad (37.121)$$

où \mathcal{L}_i sont N fonctionnelles linéaires, soit des opérateurs différentiels opérant à des points discrets.

Si (V_i) est un vecteur de E_N , alors L^T est défini par :

$$\langle \mathcal{L}_{Q_i} K(P, Q), V \rangle_N = \sum_i \mathcal{L}_{Q_i} K(P, Q) V_i \quad (37.122)$$

On en déduit que :

$$LL^T V = \sum_k \mathcal{L}_{P_i} \mathcal{L}_{Q_k} K(P, Q) V_k \quad (37.123)$$

Soit LL^T est le même opérateur (matrice) que LKL^T dans par exemple (37.46). Ce-ci n'est pas une surprise, comme nous avons vu que l'opérateur K est équivalent à l'opérateur unité dans H_K .

Maintenant, nous pouvons résoudre le problème qui a été résolu précédemment en raisonnant sur les covariances comme un exemple du second problème de compensation.

H_2 est maintenant l'espace de Hilbert de dimension infinie H_K , et H_1 est l'espace de dimension N des observations E_N , où N est le nombre des observations scalaires en question.

$B : H_2 \rightarrow H_1$ devient ici $L : H_K \rightarrow E_N$; et b est le N -vecteur des résultats des observations. Les équations normales sont :

$$LL^T \xi = b \quad (37.124)$$

et maintenant elles sont réellement des équations normales. La solution est donnée par (37.113) ou par :

$$x = L^T (LL^T)^{-1} b \quad (37.125)$$

Nous notons que nous pouvons déterminer la solution au problème sans utiliser explicitement la norme de l'espace du potentiel, mais seulement la fonction covariance K . Comme nous le voyons de (37.114), la norme $\|x\|$ du résultat peut être aussi calculée sans notre connaissance de l'expression explicite de la norme de l'espace des potentiels.

Un exemple instructeur de la technique de compensation est le problème de lissage de la troisième section.

Ici, nous avons encore les équations d'observations :

$$(Lf)_i \equiv \mathcal{L}_i f(P) = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (37.126)$$

mais maintenant nous ne demandons pas qu'elles soient exactement satisfaites. Nous cherchons un tel potentiel f telque :

$$Lf - v = b \quad (37.127)$$

et

$$\|f\|^2 + v^T P v = \text{minimum} \quad (37.128)$$

où P est une matrice $n \times n$ définie positive.

Ce problème doit être traité comme un problème de compensation du second type.

Nos quantités inconnues consistent du potentiel f et le vecteur v ; et nous devons les considérer comme une seule quantité :

$$x = f \oplus v \quad (37.129)$$

ou

$$x = \begin{pmatrix} f \\ v \end{pmatrix} \quad (37.130)$$

Si nous avons un autre élément y du même type :

$$y = \begin{pmatrix} g \\ u \end{pmatrix} \quad (37.131)$$

nous pouvons définir le produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle_2 = \langle f, g \rangle + v^T P u \quad (37.132)$$

et la norme :

$$\|x\|_2 = \langle x, x \rangle_2^{\frac{1}{2}} \quad (37.133)$$

Maintenant nous avons défini l'espace H_2 .

H_1 est l'espace des observations soit l'espace euclidien de dimension n , et l'opérateur $B; H_2 \rightarrow H_1$ est défini par (37.127) ou par :

$$Bx = (L \ -I_n) \cdot \begin{pmatrix} f \\ v \end{pmatrix} = Lf - v \quad (37.134)$$

où I_n est la matrice unité de H_1 .

Le problème est maintenant : Trouver un tel élément $x \in H_2$ telque :

$$Bx = b \quad (37.105)$$

et que :

$$\|x\| \quad (37.106)$$

est aussi petite que possible.

Nous devons premièrement trouver les équations normales (37.111) :

$$BB^T \xi = b \quad (37.111)$$

Mais que signifie B^T ?

A partir de la définition de l'opérateur transposé, on déduit que $B^T : H_1 \rightarrow H_2$ est donné par l'équation :

$$\langle Bx_2, x_1 \rangle_1 = \langle x_2, B^T x_1 \rangle_2 \quad (37.135)$$

pour tout $x_1 \in H_1$ et $x_2 \in H_2$, ou si on écrit :

$$x_2 = \begin{pmatrix} f_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (37.136)$$

et :

$$B^T x_1 = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \quad y \in H, z \in H \quad (37.137)$$

et on utilise (37.132) et (37.134)

$$\langle Lf_2 - v_2, x_1 \rangle_1 = \langle f_2, y \rangle + v_2^T Pz \quad (37.138)$$

Ou :

$$\langle f_2, L^T x_1 \rangle - \langle v_2, x_1 \rangle_1 = \langle f_2, y \rangle + \langle v_2, Pz \rangle_1 \quad (37.139)$$

L'équation (37.139) sera vérifiée pour tout x_2 , soit pour tout f et v_2 si :

$$y = L^T x_1 \quad (37.140)$$

et :

$$z = -P^{-1} x_1 \quad (37.141)$$

C'est-à-dire :

$$B^T x_1 = \begin{pmatrix} L^T x_1 \\ -P^{-1} x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^T \\ -P^{-1} \end{pmatrix} x_1 \quad (37.142)$$

Alors :

$$BB^T = (L \ -I_n) \cdot \begin{pmatrix} L^T \\ -P^{-1} \end{pmatrix} = LL^T + P^{-1} \quad (37.143)$$

où P^{-1} est la matrice R de variance-covariance des observations. Si cette matrice est diagonale, comme c'est habituellement en usage, elle aura une influence d'amélioration sur le nombre de conditions des équations normales :

$$(R + LL^T) \xi = b \quad (37.144)$$

La solution du problème est maintenant donnée par :

$$x = B^T \xi \quad (37.145)$$

ou plus explicitement :

$$f = L^T \xi, \quad v = -R\xi \quad (37.146)$$

L'équation (37.114) donne ici :

$$\|x\|_2^2 = \|f\|^2 + v^T P v = b^T \xi = b^T (R + LL^T)^{-1} b \quad (37.147)$$

Le lecteur devrait comparer avec attention cette solution du problème de lissage avec celle donnée dans la troisième section [37.3], (37.41)-(37.54).

Le même problème peut être aussi résolu comme un problème du premier type.

37.5 LES ESPACES DE HILBERT AVEC LES FONCTIONS NOYAUX ET LES HARMONIQUES SPHÉRIQUES

1. Comme en première approximation la terre est sphérique, on est tenté de considérer son potentiel de gravitation parmi les potentiels qui sont réguliers à l'extérieur d'une certaine sphère. Il y eu certaines discussions de ce-là entre les géodésiens aussi acceptables, mais avant de répondre à cette importante question nous devons premièrement étudier de tels ensembles de potentiels et leurs connexions avec les harmoniques sphériques.

Soit Σ la partie de l'espace extérieur à une sphère de rayon R et de surface σ , n'étant pas incluse dans Σ . Nous nous intéressons à plusieurs ensembles de potentiels φ qui sont réguliers dans Σ y compris l'infini de façon que :

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \varphi(P) = 0 \quad (37.148)$$

Le premier ensemble S de ces potentiels consiste à ceux qui sont continus dans $\Sigma + \sigma$, c'est-à-dire ceux qui ont des valeurs continues sur la frontière σ de la sphère considérée. Pour tels potentiels, on peut définir un produit scalaire :

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \varphi(P) \psi(P) d\sigma \quad \text{pour } \varphi, \psi \in S \quad (37.149)$$

Ce-ci est la valeur moyenne du produit des valeurs à la frontière de deux potentiels sur la surface de la sphère. La norme correspondante est :

$$\|\varphi\| = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2} = \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \varphi(P)^2 d\sigma \right)^{1/2} \quad (37.150)$$

Si pour un potentiel $\varphi \in S$, $\|\varphi\| = 0$, alors φ doit être égal à zéro sur σ parceque φ est continue et :

$$\int_{\sigma} \varphi(P)^2 d\sigma = 0 \quad (37.151)$$

Mais un potentiel qui est régulier dans Σ et continu dans $\Sigma + \sigma$ est nul en tout point de Σ s'il est nul sur σ . Ainsi $\|\varphi\| = 0$ si et seulement si $\varphi = 0$. (37.150) définit réellement une norme et l'ensemble S est un espace pré-Hilbertien.

Il est connu [4] (p.34-35) que si les valeurs à la frontière d'un potentiel $\varphi \in S$ sur σ sont connues, alors φ peut être déterminé sur Σ par l'intégrale de Poisson :

$$\varphi(P) = \frac{R(r_P^2 - R^2)}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\varphi(Q)}{l^3} d\sigma; \quad P \in \Sigma, \quad Q \in \sigma \quad (37.152)$$

où :

$$l = \sqrt{r_P^2 + R^2 - 2Rr_P \cos \psi} \quad (37.153)$$

et ce "noyau de Poisson" peut être exprimé en harmoniques sphériques comme suit :

$$\frac{R(r_P^2 - R^2)}{l^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{r_P} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \quad (37.154)$$

Le noyau de Poisson est une fonction de deux points P et Q dont l'un est sur σ et l'autre dans Σ . On peut définir un noyau symétrique $K(P, Q)$ en posant :

$$K(P, Q) = \frac{r_P^2 r_Q^2 - R^4}{RL^3} \quad (37.155)$$

où :

$$L = \sqrt{\frac{r_P^2 r_Q^2}{R^2} - 2r_P r_Q \cos \psi + R^2} \quad (37.156)$$

Comme $K(P, Q)$ est le résultat de la substitution de :

$$R \text{ par } R^2$$

et

$$r_P \text{ par } r_{PrQ}$$

dans la formule du noyau de Poisson, la même substitution dans (37.154) donnera l'expansion de $K(P, Q)$ en harmoniques sphériques :

$$K(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R^2}{r_{PrQ}} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi) \quad (37.157)$$

$K(P, Q)$ est défini pour P et $Q \in \Sigma$ et aussi pour $P \in \sigma$ et $Q \in \Sigma$ (ou $P \in \Sigma$ et $Q \in \sigma$), mais pour P et Q les deux $\in \sigma$ $K(P, Q)$ est nul pour $P \neq Q$ et il n'est défini pour $P = Q$.

De (37.157) on déduit, au moins formellement, que pour P ou Q fixé $K(P, Q)$ est un potentiel régulier comme fonction de l'autre variable. Une différenciation directe vérifiera cela. Cependant, nous avons pour un point fixé $P \in \Sigma$, $K(P, Q)$ comme fonction de Q est un membre de l'ensemble S .

Maintenant, nous devons calculer le produit scalaire de $K(P, Q)$ et un potentiel $\varphi(Q) \in S$. Ici, nous devons seulement utiliser les valeurs de $K(P, Q)$ pour $Q \in \sigma$, dans ce cas $r_Q = R$ et $K(P, Q)$ a les mêmes valeurs comme le noyau de Poisson.

Cependant, le produit scalaire est exactement le membre à droite de (37.152), et nous avons :

$$\langle K(P, Q), \varphi(Q) \rangle = \varphi(P) \text{ pour } P \in \Sigma \quad (37.158)$$

soit $K(P, Q)$ est le noyau reproduit de l'ensemble S des potentiels.

Avec la métrique définie dans (37.150), S n'est pas un espace de Hilbert, mais seulement un espace pré-hilbertien, c'est-à-dire non pour toute suite :

$$\{\psi_n\} \quad \psi_n \in S \text{ pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

pour laquelle

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|\psi_n - \psi_m\| = 0$$

a une limite $\psi \in S$. Cependant, nous devons compléter S en un espace de Hilbert H qui peut être prouvé constitué de potentiels réguliers dans Σ et ayant des valeurs à la frontière de carrés intégrables sur σ . pour cet espace de Hilbert $K(P, Q)$ est le noyau reproduisant. Maintenant, les valeurs des intégrales dans (37.149) et (37.150), etc... doivent être comprises comme les limites pour $r > R, r \rightarrow R$ des intégrales correspondantes sur des sphères avec rayon r .

Si nous définissons les fonctions avec deux indices :

$$\{\varphi_n^m(P)\} \quad \begin{matrix} m = -n, -n+1, \dots, n-1, n \\ n = 0, 1, 2, \dots \end{matrix}$$

par :

$$\varphi_n^m(P) = \begin{cases} \left(\frac{R}{r_P}\right)^{n+1} \bar{R}_{nm}(Q_P, \lambda_P) & \text{pour } m \geq 0; \\ \left(\frac{R}{r_P}\right)^{n+1} \bar{S}_{nm}(Q_P, \lambda_P) & \text{pour } m < 0 \end{cases} \quad (37.159)$$

où \bar{R}_{nm} et \bar{S}_{nm} sont les harmoniques entières normalisées [4,p.31], ainsi nous pouvons écrire (37.157) comme suit :

$$K(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \varphi_n^m(P) \varphi_n^m(Q) \quad (37.160)$$

qui montre que les harmoniques sphériques $\{\varphi_n^m\}$ forment un système orthogonal complet pour l'espace de Hilbert H . Ce-ci signifie que chaque $\varphi \in H$ peut être représenté par le développement en séries :

$$\varphi(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_n^m \varphi_n^m(P) \text{ pour } P \in \Sigma \quad (37.161)$$

où :

$$a_n^m = \langle \varphi, \varphi_n^m \rangle \quad (37.162)$$

Cependant, ce-ci doit être compris dans le sens de la convergence avec la métrique de l'espace de Hilbert :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \varphi(P) - \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n a_n^m \varphi_n^m(P) \right\| = 0 \quad (37.163)$$

et nous voulons un théorème qui sécurise la convergence uniforme de la série.

Heureusement, la théorie des noyaux va nous aider ici. Pour tout $\psi \in H$ nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
|\varphi(P)| &= |\langle \psi(Q), K(P, Q) \rangle| \leq \|\varphi\| \cdot \|K(P, Q)\|_Q \\
&= \|\varphi\| \cdot \langle K(P, Q), K(P, Q) \rangle_Q^{1/2} = \|\varphi\| \cdot K(P, P)^{1/2}
\end{aligned} \tag{37.164}$$

ici, nous avons utilisé le fait que $K(P, Q)$ est un produit de noyau, l'inégalité de Schartz, l'expression de la norme par un produit scalaire (l'indice Q signifie que la norme et le produit scalaire doivent être compris avec respect à Q) et encore une fois le fait que $K(P, Q)$ est un noyau.

Utilisons (37.164) :

$$\|\varphi(P) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_n^m \varphi_n^m(P)\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_n^m \varphi_n^m(P) \right\| \leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_n^m)^2 \right)^{1/2} \tag{37.165}$$

pour avoir :

$$\left| \varphi(P) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_n^m \varphi_n^m(P) \right| \leq \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_n^m)^2 \right)^{1/2} \cdot K(P, P)^{1/2} \tag{37.166}$$

Un simple calcul donne :

$$0 < K(P, P)^{1/2} \leq \frac{Rr_P}{r_P^2 - R^2} \sqrt{2} \tag{37.167}$$

et ainsi (37.166) montre que la série (37.161) converge uniformément pour tout P de façon que :

$$r_P \geq r_0 > R \tag{37.168}$$

Maintenant on doit revenir aux équations (37.161) et (37.162).

De la théorie générale des espaces de Hilbert, nous déduisons de (37.161) et (37.162) que :

$$\|\varphi\| = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_n^m)^2 \right)^{1/2} \tag{37.169}$$

et que pour toute suite $\{a_n^m\}$ pour laquelle :

$$\sum \sum (a_n^m)^2$$

converge telqu'il existe un élément $\varphi \in H$ et que (37.161), (37.162) et (37.169) sont vérifiées.

Si nous avons un élément φ donné par (37.161), il serait intéressant de connaître si la série converge pour les points telque $r_P < R$.

Posons :

$$A_n = \left(\sum_{m=-n}^n (a_n^m)^2 \right)^{1/2} \tag{37.170}$$

alors, nous avons à partir de (37.169) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 = \|\varphi\|^2 \quad (37.171)$$

et par conséquent nous devons avoir :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \rho^n = 0 \quad (37.172)$$

pour $0 \leq \rho \leq 1$. Soit ρ_0 la borne supérieure de ρ pour laquelle (37.172) est valide. (ρ_0 peut être ∞).

Alors (37.172) est valide pour chaque ρ telque $0 < \rho < \rho_0$.

Si $\rho_0 > 1$, alors prenons deux valeurs ρ_1 et ρ_2 avec :

$$0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_0 \quad (37.173)$$

Alors nous avons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \rho_1^n < +\infty \quad (37.174)$$

dès que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \rho_2^n = 0 \quad (37.175)$$

il existera un nombre entier N telque :

$$|A_n \rho_2^n| < 1 \text{ pour } n > N \quad (37.176)$$

Nous devons écrire alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \rho_1^n)^2 &= \sum_{n=0}^N (A_n \rho_1^n)^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{2n} = \\ &= \sum_{n=0}^N (A_n \rho_1^n)^2 + \frac{\left(\frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}} \end{aligned} \quad (37.177)$$

et nous devons confirmer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_n^m \rho_1^n)^2$$

convergera pour chaque ρ_1 telque (37.167) ou :

$$0 < \rho_1 < \rho_0 \quad (37.178)$$

soit vérifié .

Utilisons maintenant les fonctions $\{\psi_n^m\}$ définies comme $\{\varphi_n^m\}$ par (3.12) seulement avec R/ρ_1 substitué par R ; alors nous avons le résultat :

$$\psi(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (\rho_1^{n+1} a_n^m) \varphi_n^m(P) \text{ pour } r_P > \frac{R}{\rho_1} \quad (37.179)$$

Si nous appelons la sphère limite la sphère de centre le centre de σ et de rayon $\frac{R}{\rho_0}$, nous pouvons exprimer notre résultat comme suit :

Le développement en séries d'un potentiel en harmoniques sphériques avec O comme origine convergera uniformément sur la surface et dans l'espace extérieur de toute sphère ayant O comme centre et telle que toutes les singularités du potentiel sont à l'intérieur de la sphère. Il existera un tel rayon R' telque pour $R > R'$ les séries convergeront uniformément sur la surface et à l'extérieur de toute sphère avec un rayon R et centre O . Cependant ce-ci n'est pas vrai pour $R < R'$.

La dernière (la négation) partie du théorème sera prouvée quelques pages plus tard.

II. Les géodésiens sont intéressés par les champs de potentiel à l'extérieur ; par conséquent j'ai seulement traité ici de tels champs. Mais à l'aide de l'inversion par rapport à une sphère nous obtenons les résultats correspondants aux régions sphériques intérieures qui rappelleront les théorèmes bien connus de la convergence des séries dans le plan complexe. Là nous avons un cercle limite et la convergence uniforme à l'intérieur du cercle et divergence en tout point à l'extérieur du cercle. J'ai l'impression que plusieurs géodésiens croient que ce-ci serait vrai que les séries des harmoniques sphériques divergent en tout point à l'intérieur de la sphère limite, mais ils ne peuvent pas en donner aucune démonstration.

je ne vais pas donner la démonstration - bien au contraire, je donnerai un exemple qui montre que la conjecture est fausse.

Considérons le potentiel suivant :

$$\varphi = \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2} \quad (37.180)$$

dans un espace à trois dimensions. Il correspond à une distribution de masse uniforme sur la droite :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad (37.181)$$

et c'est une fonction seulement de x et de y . C'est élémentaire de démontrer qu'il peut être développable en séries :

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \cos n\theta \cos n\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2 + y^2)^{n/2} \cos n\lambda \quad (37.182)$$

ou

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n P_n^n(\sin\theta) \cos n\lambda \quad (37.183)$$

$$P_n^n(\sin\theta) = (-1)^n 1.3.5 \dots (2n+1) \cos n\theta \quad (37.184)$$

Ni le potentiel φ ni les coefficients dans (37.182) ou (37.183) dépendent de la coordonnée z ; par suite la série (37.183) sera convergente dans le cylindre avec $x = 0, y = 0$ comme axes et de rayon 1. Si nous faisons une inversion par rapport à la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (37.185)$$

alors :

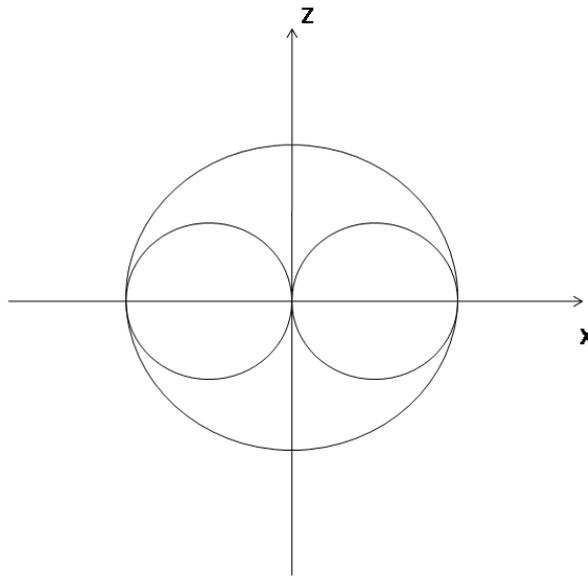
$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{r} \varphi \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2} \right) = \frac{r(r^2 - x)}{(r^2 - x)^2 + y^2} \quad (37.186)$$

est aussi un potentiel et il est régulier à l'infini. Le développement en séries de Φ correspondant à (37.183) devient :

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n^n(\sin\theta) \cos n\lambda \quad (37.187)$$

qui par conséquent convergera en tout point de l'espace extérieur du tore transformé du cylindre. Le tore est décrit par le cercle :

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4}; y = 0$$



quand son plan tourne autour de l'axe z . En utilisant l'idée de cet exemple, il n'est pas difficile de construire d'autres expansions en harmoniques sphériques qui convergent dans des régions qui ne sont pas sphériques. Je n'ai pas senti que normalement la sphère limite délimite la région de convergence, mais cette question nécessite une étude poussée.

Le critère donné ici pour la sphère limite est seulement théorique, comme le rayon limite peut être trouvé seulement quand tous les coefficients du développement sont connus. Ainsi, nous devons avoir un critère qui donne plus d'information pratique.

A partir de dessus, il s'ensuit qu'à l'extérieur de la sphère limite les séries représentent un potentiel régulier, sachant que le rayon de la sphère limite est plus petit que le rayon de la petite sphère contenant les points auxquels le potentiel original donné était non défini ou irrégulier.

En d'autres termes, les séries donnent une continuation analytique du potentiel. C'est un fait bien connu que le potentiel d'une sphère homogène peut être analytiquement continu dans l'espace entier à l'exception du centre et que le potentiel normal d'un ellipsoïde de révolution peut être aussi continu à l'ensemble de l'espace à l'exception du "disque focal". Naturellement la continuation du potentiel extérieur à l'intérieur du corps gravitant n'a rien à voir avec le potentiel irrégulier qui existe physiquement dans le corps.

Deux potentiels qui sont réguliers dans un certain domaine et sont identiques dans un certain ensemble ouvert de points dans ce domaine sont connus d'être identiques dans le domaine entier de définition. Alors, nous devons définir un *potentiel maximal* comme un potentiel régulier défini dans une région connectée de façon qu'il n'existe pas aucune région large connectée dans laquelle le potentiel pourrait être défini et être régulier, et nous confirmons qu'à chaque potentiel il correspond un et un seul potentiel maximum continu du potentiel donné. Au voisinage de chaque point de la frontière de la région de définition du potentiel maximal, il y a des points où le potentiel est singulier. Par conséquent, nous devons affirmer :

A chaque potentiel régulier au voisinage de l'infini et à chaque sphère Σ contenant tous les points singuliers du potentiel maximal correspondant il existe des développements en séries de la forme (37.161) qui convergent uniformément sur et à l'extérieur de toute sphère concentrique avec Σ telle que aucun point sur sa surface ne soit au voisinage d'aucun point singulier. Si nous appelons R_0 le rayon minimum de telles sphères, alors les séries doivent être divergentes en quelques points de chaque sphère avec un rayon plus petit que R_0 et concentrique avec Σ .

La partie importante de la confirmation marchera comme suit :

1) Pour θ et λ fixés une série comme (37.161) est une série en puissances de $\frac{1}{r}$, cependant si elle diverge pour une certaine valeur de $\frac{1}{r}$, disons α , elle divergera pour chaque valeur de r telque $\frac{1}{r} > \alpha$ avec les mêmes θ et λ ; en d'autres mots, si elle diverge en un point, elle divergera en tout point du segment de droite liant le point et l'origine.

2) De la définition de la sphère limite, il s'ensuit qu'il y'a des singularités en chaque voisinage de quelques de ses points : cependant, étant donné tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver une sphère concentrique avec Σ avec un rayon $r > R_0 - \varepsilon$, telqu'il existe des points singuliers sur sa surface, et ainsi les séries ne peuvent pas être uniformément convergentes sur une telle sphère (Si elles convergent, elles représentent une continuation du potentiel qui est supposé être maximal). La surface d'une sphère est un ensemble fermé de points ; par conséquent la convergence en tous les points serait simplement une convergence uniforme.

3) De 2) il s'ensuit qu'il y'a des sphères avec un rayon arbitrairement voisin de R_0 où les séries divergent (au moins en quelques points), et de 1) il s'ensuit que toutes les sphères de rayon inférieur à R_0 auront aussi des points sur ses sphères où il y'a divergence.

Le potentiel qui intéresse les géodésiens est le potentiel perturbateur T ; par conséquent, il serait plus intéressant de connaître s'il est raisonnable d'espérer que la sphère limite pour le potentiel maximal sera située en dessous de la surface de la terre. Utilisant une idée de [10] je montrerai que la base d'un tel souhait est faible. Plus précisément, je montrerai que pour un corps en gravitation pour lequel le potentiel maximal correspondant est défini au dessous de la surface, on ajoute localement une certaine distribution de masse par exemple un grain de sable sur la surface, en une place où le potentiel maximal original est défini en dessous de la

surface, alors le potentiel maximal résultant aura une singularité à l'intérieur de la distribution de masse ajoutée.

La démonstration est presque triviale. Le potentiel résultant est la somme du potentiel original Φ et le potentiel ϕ de la distribution de masse ajoutée et il est au moins régulier où les deux potentiels sont définis. Enfermons la distribution de la masse ajoutée dans une surface fermée σ laissant les singularités de Φ à l'extérieur (ce-ci est possible en concordance avec ce que nous avons supposé). ϕ est régulier à l'extérieur de σ et doit par conséquent avoir une singularité à l'intérieur de σ (dès que chaque potentiel régulier défini dans tout l'espace s'annule).

De l'autre côté, Φ est régulier à l'intérieur de σ , et par conséquent $\Phi + \sigma$ doit avoir une singularité à l'intérieur de σ , et comme nous pouvons choisir approximativement σ , nous avons alors le théorème.

Ici, j'appelle l'attention du lecteur s'il n'a pas noté l'importance du mot *localement*, alors il n'a pas réellement compris la démonstration (la distribution de masse ajoutée ne doit pas couvrir toute la surface du corps original, ainsi nous serons pas capable de trouver σ).

Si comme un exemple de la distribution de masse ajoutée, j'ai mentionné le grain de sable et non pas comme l'a fait Moritz une montagne, c'était dans l'ordre de pousser la divergence sur les séries des fonctions harmoniques au voisinage des masses gravitantes. Une méthode populaire d'exprimer le théorème serait : même si les séries convergent sur la surface de la terre, un déplacement d'un grain de sable effacera la convergence.

La conséquence de ce-ci sera la convergence des séries des harmoniques sphériques au voisinage de la surface de la terre est une propriété instable telle qu'elle n'a aucune signification physique du tout.

Je sais qu'ici plusieurs géodésiens diront que nous utilisons des séries sans savoir rien de leur convergence. Je dois me confesser que je ne comprends pas ce qu'ils signifient par le mot "utilisons".

Prenons un exemple, regardons le noyau de Poisson de (37.154). Il a une singularité au pôle nord : $r_P = R, \psi = 90^\circ$, il est régulier en tous les autres points de l'espace. Pour le point singulier, la série donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \quad (37.188)$$

La somme des N premiers nombres est N^2 , et ce-ci est juste ; pour les autres points de la sphère, $r_P = R$, le noyau est nul. Mais pour le "pôle sud" $\psi = -90^\circ$ la série donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \quad (37.189)$$

et la somme des N premiers termes est $(-1)^{N+1}N$.

Pour un point ayant $r_P = \frac{R}{\rho}$ et $\psi = -90^\circ$ ($\rho > 1$) la série donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \rho^n \quad (37.190)$$

et la somme des N premiers termes est :

$$\frac{1 - \rho + (-1)^N \rho^{2N} (2N + 1 + (2N - 1)\rho^2)}{(1 + \rho)^2} \quad (37.191)$$

Comment pourriez-vous utiliser un tel résultat ?

Je vois très bien si nous multiplions le noyau par une petite constante et ajoutons un potentiel normal dominant, alors c'est une simple tâche dans les séries résultantes de filtrer la partie perturbatrice avec des coefficients croissants de la partie avec des coefficients décroissants. Mais si nous intéressons par le potentiel perturbateur, comment "utilisons" alors les séries ?

J'aime très bien cet exemple, ainsi je demande au lecteur d'avoir assez de patience de suivre avec une autre expérience.

La série (37.154) peut être écrite comme suit :

$$F_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \left(\frac{R}{r_P} \right)^n P_n(\cos \psi) \quad (37.192)$$

On définit une autre série :

$$F_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 1}{1 + 2^{n+1} \lambda} \left(\frac{R}{r_P} \right)^{n+1} P_n(\cos \psi), \lambda \geq 0 \quad (37.193)$$

Il est évident que pour $\lambda = 0$ $F_\lambda = F_0$, et il semble que pour des petites valeurs de λ F_λ doit approximer F_0 ; en effet nous avons :

$$|F_0 - F_\lambda| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \left[1 - \frac{1}{1 + 2^{n+1} \lambda} \right] \left(\frac{R}{r_P} \right)^{n+1} |P_n(\cos \psi)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) \frac{2^{n+1} \lambda}{1 + 2^{n+1} \lambda} \left(\frac{R}{r_P} \right)^{n+1} \quad (37.194)$$

Pour chaque $r_P > R$ fixé, la série en deuxième ligne est uniformément convergente pour $\lambda \geq 0$, et par conséquent, elle représente une fonction continue. Comme cette fonction est nulle pour $\lambda = 0$, nous avons :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} F_\lambda = F_0 \text{ pour } r_P > R \quad (37.195)$$

La chose intéressante est que pour $\lambda > 0$ les séries de F_λ (37.195) convergent à l'extérieur d'une sphère de rayon $\frac{R}{2}$ et non par R comme dans le cas des séries F_0 .

Il n'est pas difficile de voir que la méthode utilisée dans cet exemple peut être généralisée pour résoudre le problème suivant :

Etant donné un potentiel φ défini à l'extérieur d'une sphère σ . Trouver une suite de potentiels $\{\varphi_n\}$ réguliers à l'extérieur d'une sphère géocentrique avec σ et ayant la moitié de son rayon telle que pour tous les points à l'extérieur de σ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi \quad (37.196)$$

Si des développements en séries des potentiels $\{\varphi_n\}$ nous considérons les termes à partir du degré n φ'_n , alors nous avons aussi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n = \varphi \quad (37.197)$$

et nous avons ici une approximation de φ par des 'polynômes' des harmoniques sphériques (c'est-à-dire des séries avec un nombre limité de termes).

Nous avons vu un nouvel aspect très important de l'instabilité de convergence des séries des harmoniques sphériques. Nous avons vu avant (le théorème de Moritz) que dans le voisinage de chaque potentiel qui peut être exprimé par une série convergente à la surface de la terre, il y'a un autre potentiel régulier à l'extérieur de la terre mais pour lequel la série diverge sur la surface. Maintenant, nous voyons que peut être qu'il existe aussi un autre théorème (théorème de Runge) exprimant qu'au voisinage de tout potentiel φ régulier dans l'espace extérieur à la terre il y'a un potentiel pour lequel la série des harmoniques sphériques converge sous la surface d'une certaine sphère à l'intérieur de la terre ; c'est dire : φ peut être approchée par des polynômes de harmoniques sphériques.

En effet, il existe un théorème de Runge pour la géodésie physique (comme le nom dont j'ai donné, voir [1] (p.275-278), mais comme sa démonstration est plutôt technique, je l'ai donnée en annexe et je veux en donner seulement ici le résultat :

Le Théorème de Runge : *Etant donné un potentiel régulier à l'extérieur de la terre et toute sphère à l'intérieur de la terre. Pour toute surface fermée refermant la terre (dont la surface peut être aussi proche de la surface de la terre), alors il existe une suite de potentiels réguliers à l'extérieur de la sphère donnée et uniformément convergente au potentiel donné sur et à l'extérieur de la surface donnée.*

Ce théorème est extrêmement important. En effet, il permet un traitement mathématique de la géodésie physique en donnant une bonne compensation de la possibilité d'utilisation des séries des fonctions harmoniques convergentes en dessous de la surface de la terre.

III. Le théorème de Runge établit seulement l'existence d'une suite avec les propriétés demandées. J'irai, maintenant, du moins théoriquement, montrer comment de telles séries peuvent être trouvées à l'aide de la méthode de compensation du paragraphe (37.5).

Soit le potentiel donné φ et Ω le domaine où il est défini. La partie de l'espace extérieur à la sphère σ est appelée Σ , et nous avons $\Omega \subset \Sigma$. Définissons alors une métrique $\langle, \rangle_{\Sigma}$ pour les potentiels réguliers dans Σ , et appelons l'espace de Hilbert correspondant H_{Σ} . Nous supposons que H_{Σ} a un noyau K . Nous connaissons qu'il en a un si la métrique dans H_{Σ} est celle définie dans la première partie de ce paragraphe(37.5). Soit ω une surface lisse fermée dans Ω entourant et arbitrairement au voisinage de la frontière de Ω . Alors, nous pouvons définir la norme :

$$\|\varphi\|_{\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \varphi^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (37.198)$$

pour les potentiels réguliers dans Ω . Avec cette norme et le produit scalaire correspondant, nous avons défini un espace d'Hilbert H_{Ω} constitué des potentiels réguliers dans Ω .

Alors le problème est :

Trouver $\varphi \in H_{\Sigma}$ telle que :

$$\|\psi\|_{\Sigma}^2 + \lambda \|\psi - \varphi\|_{\Omega}^2 = \text{minimum} \quad (37.199)$$

où λ n'est pas encore spécifiée constante. Ecrivons (37.199) comme :

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi - 0 \right\|_{\Sigma}^2 + \|\psi - \varphi\|_{\Omega}^2 = \text{minimum} \quad (37.200)$$

Alors le problème c'est un problème de compensation du premier type traité dans le paragraphe (37.5)(formules (37.96)-(37.104)), en posant :

$$H_1 = H_{\Sigma}, H_2 = H_{\Sigma} \oplus H_{\Omega}$$

L'opérateur $A : H_1 \rightarrow H_2$ est défini comme suit :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \\ A_1 &: H_{\Sigma} \rightarrow H_{\Sigma} \\ A_1 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ A_2 &: H_{\Sigma} \rightarrow H_{\Omega} \\ A_2 \psi &= \psi' \text{ où } \psi' \text{ est la restriction de } \psi \text{ à } \Omega \end{aligned} \quad (37.201)$$

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (37.202)$$

Les équations normales (37.98) :

$$A^T A \psi = A^T a \quad (37.203)$$

deviennent ici :

$$\{A_1^T \ A_2^T\} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \psi = \{A_1^T \ A_2^T\} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (37.204)$$

ou :

$$\{A_1^T A_1 + A_2^T A_2\} \psi = A_2^T \varphi \quad (37.205)$$

Ici, A_1 est un opérateur scalaire c'est-à-dire un opérateur indiquant une multiplication par un scalaire, et ce-ci est identique à sa transposée telle que :

$$A_1^T A_1 \psi = \frac{1}{\lambda} \psi \quad (37.206)$$

Pour la restriction ψ' de ψ à Ω , nous avons :

$$\psi'(Q) = \langle K(Q, P), \psi(P) \rangle_{\Sigma} \text{ pour } Q \in \Omega, P \in \Sigma \quad (37.207)$$

et ce-ci s'ensuit d'après le fait trivial que :

$$\psi'(Q) = \psi(Q), \text{ pour } Q \in \Omega \quad (37.208)$$

et d'après la définition même du noyau $K(P, Q)$.

Pour trouver la transposée A_2^T nous rappelons la définition de l'opérateur transposé (37.95) et écrivons pour $\xi \in H_{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \langle A^T \xi(Q), \psi(Q) \rangle &= \langle \xi(Q), A(\psi Q) \rangle \\ &= \int_{\omega} \xi(Q) \langle K(Q, P), \psi(P) \rangle_{\Sigma} d\omega_Q = \int_{\omega} \xi(Q) K(Q, P) d\omega_Q, \psi(P) \rangle_{\Sigma} \end{aligned} \quad (37.209)$$

de façon qu'on obtient :

$$A^T \xi(Q) = \int_{\omega} \xi(Q) K(Q, P) d\omega_Q \text{ pour } Q \in \Omega, P \in \Sigma \quad (37.210)$$

Maintenant, on peut écrire (37.205) :

$$\frac{1}{\lambda} \psi(P) + \int_{\omega} \psi(Q) K(Q, P) d\omega_Q = \int_{\omega} \varphi(Q) K(Q, P) d\omega_Q \quad Q \in \Omega, P \in \Sigma \quad (37.211)$$

Définissons $\xi \in H_{\Omega}$ par :

$$\xi(Q) = \varphi(Q) - \psi(Q) \quad (37.212)$$

Alors, pour $P, Q \in \Omega$ (37.201) devient :

$$\xi(P) + \lambda \int_{\omega} \xi(Q) K(Q, P) d\omega_Q = \varphi(P) \quad (37.213)$$

L'équation (37.213) qui est analogue aux équations normales, est une équation intégrale. Comme nous allons voir, $\xi(P)$ peut être trouvé à partir de (37.213), et alors $\psi(Q)$ peut être trouvée par :

$$\psi(Q) = \varphi(Q) - \xi(Q) \quad (37.214)$$

pour $Q \in \Omega$; pour $P \in \Sigma$ $\psi(P)$ peut être trouvée à partir de (37.211) :

$$\psi(P) = \lambda \int_{\omega} \xi(Q) K(Q, P) d\omega_Q \text{ pour } Q \in \Omega, P \in \Sigma \quad (37.215)$$

L'équation intégrale (37.213) est l'équation intégrale de Fredholm du second type avec un noyau borné symétrique continu défini positif. Normalement une telle équation intégrale est écrite avec un signe moins devant λ et non pas le signe plus, et alors un des plusieurs théorèmes élégants sur ces équations montre que toutes les valeurs propres sont positives ou nulles, cependant l'équation (37.213) peut ne pas avoir des solutions propres pour des λ positifs. Ainsi pour un φ donné, il y'aura une solution unique ξ pour tout λ positif, et alors par (37.215) ψ

sera aussi uniquement déterminée, et le problème des moindres carrés (37.199) a été résolu.

Mais que signifie tout cela ?

Commençons par un "petit" $\lambda > 0$ et laissons le croître. Alors, nous devons attendre de trouver des potentiels $\psi \in H_\Sigma$ qui dans H_Ω , approximaient φ mieux en mieux de façon dans la partie de Σ à l'extérieur de Ω ψ croît et si nous avons la chance :

$$\|\psi - \varphi\|_\Omega \rightarrow 0 \text{ pour } \lambda \rightarrow +\infty \quad (37.216)$$

Je démontrai que ce résultat est ainsi, et pour la démonstration j'utiliserai la théorie des équations intégrales et le théorème de Runge.

Soit l'équation intégrale homogène :

$$\Phi(P) - \lambda \int_\omega K(Q, P) \Phi(Q) d\omega_Q = 0; P, Q \in \Omega \quad (37.217)$$

ayant des valeurs propres λ_n et les fonctions propres correspondantes φ_n ; nous devons supposer que :

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \quad (37.218)$$

et que les fonctions propres sont normalisées et orthogonales telles que :

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_\Omega = \begin{cases} 1 \text{ pour } m = n \\ 0 \text{ pour } m \neq n \end{cases} \quad (37.219)$$

Les fonctions propres $\{\varphi_n\}$ sont seulement définies dans Ω , mais peuvent être définies dans Σ et sur σ par :

$$\varphi_n(P) = \lambda_n \int_\omega K(Q, P) \varphi_n(Q) d\omega_Q, P \in \Sigma + \sigma, Q \in \Omega \quad (37.220)$$

parce que $K(P, Q)$ est régulier pour $Q, P \in \sigma + \Sigma$ sachant que les deux points P et Q n'appartiennent simultanément à σ . D'après le théorème de Mercer, il s'ensuit que :

$$K(P, Q) = \sum_n \frac{\varphi_n(P) \varphi_n(Q)}{\lambda_n} \quad (37.221)$$

pour $P, Q \in \Omega$ et à partir de méthode de la démonstration du théorème de Mercer (37.221) peut être prouvée pour $P, Q \in \Sigma$.

Maintenant $K(P, Q)$ est le noyau produit pour H_Σ et par conséquent :

$$\varphi_n(P) = \langle \sum_m \frac{\varphi_m(P) \varphi_m(Q)}{\lambda_m}, \varphi_n(Q) \rangle_\Sigma = \sum_m \frac{\varphi_m(P)}{\lambda_m} \langle \varphi_m(Q), \varphi_n(Q) \rangle_\Sigma \quad (37.222)$$

Comme $\{\varphi_n\}$ sont orthogonales dans H_Ω , elles doivent être linéairement indépendantes et ainsi (37.222) implique :

$$\frac{1}{\lambda_m} \langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_\Sigma = \begin{pmatrix} 1 \text{ pour } m = n \\ 0 \text{ pour } m \neq n \end{pmatrix} \quad (37.223)$$

ou :

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_{\Sigma} = \begin{cases} \lambda_n & \text{pour } m = n \\ 0 & \text{pour } m \neq n \end{cases} \quad (37.224)$$

c'est-à-dire les fonctions $\left\{ \frac{\varphi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}$ forment un système de fonctions orthogonales dans H_{Σ} .

Si nous écrivons :

$$\varphi'_n = \frac{\varphi_n}{\sqrt{\lambda_n}} \quad (37.225)$$

alors (37.221) devient :

$$K(P, Q) = \sum_n \varphi'_n(P) \varphi'_n(Q) \quad (37.226)$$

Un théorème bien connu de la théorie des espaces de Hilbert avec les noyaux établit que, si un noyau peut être exprimé par (37.226) c'est-à-dire par un ensemble de fonctions orthogonales, alors cet ensemble est complet. Par conséquent, l'ensemble des fonctions $\{\varphi_n\}$ est complet dans H_{Σ} .

Le système $\{\varphi_n\}$ sera aussi complet dans H_{Ω} . S'il n'était pas, il existerait un tel élément $\eta \in H_{\Omega}$ telque :

$$\|\eta\|_{\Omega} = 1 \text{ et } \langle \eta, \varphi_n \rangle_{\Omega} = 0 \text{ pour tout } \varphi_n \quad (37.227)$$

A partir du théorème de Runge, il s'ensuit que pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un tel élément $\mu \in H_{\Sigma}$ telque :

$$|\eta(Q) - \mu(Q)| < \varepsilon \text{ pour } Q \in \omega \quad (37.228)$$

Etant un élément de H_{Σ} $\mu(Q)$ s'écrira comme :

$$\mu(Q) = \sum_n a_n \varphi_n \quad (37.229)$$

où la somme converge uniformément sur ω . Par conséquent :

$$\|\eta(Q) - \sum_n a_n \varphi_n(Q)\|_{\Omega}^2 = 1 + \sum_n a_n^2 > 1 \quad (37.230)$$

(à partir de (37.227)). D'autre part :

$$\|\eta(Q) - \sum_n a_n \varphi_n(Q)\|_{\Omega}^2 = \int_{\omega} (\eta(Q) - \sum_n a_n \varphi_n(Q))^2 d\omega \leq \varepsilon^2 \cdot A \quad (37.231)$$

où A est l'aire de la surface ω . Si nous choisissons $\varepsilon < A^{-1/2}$, nous avons une contradiction, et, par conséquent, $\{\varphi_n\}$ sera aussi complète dans H_{Ω} .

Maintenant, nous pouvons revenir à l'équation intégrale (37.213). Ici nous pouvons exprimer φ et ξ par l'ensemble complet $\{\varphi_n\}$:

$$\xi = \sum_n x_n \varphi_n, \quad \varphi = \sum_n f_n \varphi_n \quad (37.232)$$

de façon, utilisant (37.221), nous avons :

$$\sum_n x_n \varphi_n + \lambda \sum_n \frac{x_n}{\lambda_n} \varphi_n = \sum_n f_n \varphi_n \quad (37.233)$$

ou :

$$x_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda} f_n \quad (37.234)$$

$$\xi = \sum_n \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda} f_n \varphi_n \quad (37.235)$$

ξ est défini par (37.212) telque :

$$\|\varphi(Q) - \psi(Q)\|_{\Omega} = \left(\sum_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda} \right)^2 f_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (37.236)$$

(Nous devons se rappeler que $\psi(Q)$ est une fonction de λ).

Les séries du membre à droite de (37.236) sont uniformément convergentes en λ pour $\lambda > 0$ dès que :

$$\sum f_n^2 = \|\varphi\|_{\Omega}^2 \quad (37.237)$$

et :

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda} < 1 \text{ pour } \lambda > 0 \quad (37.238)$$

Cependant, chaque terme des séries converge vers 0 quand $\lambda \rightarrow +\infty$, et alors :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\varphi(Q) - \psi(Q)\|_{\Omega} = 0 \quad (37.239)$$

A partir de laquelle la convergence uniforme s'ensuit de la manière usuelle (37.164).

Si nous posons :

$$\psi = \sum_n P_n \varphi_n \quad (37.240)$$

Nous trouvons à partir de (37.215) :

$$P_n = \frac{\lambda}{\lambda_n + \lambda} f_n \quad (37.241)$$

ou :

$$\psi(P) = \sum_n \frac{\lambda}{\lambda_n + \lambda} f_n \varphi_n(P) \quad (37.242)$$

et :

$$\|\psi\|_{\Sigma}^2 = \sum_n \left(\frac{\lambda}{\lambda_n + \lambda} \right)^2 f_n^2 \quad (37.243)$$

seulement si la série $\sum f_n^2$ est convergente, c'est-à-dire si la définition de φ peut être étendue à Σ , la série de (37.243) converge quand $\lambda \rightarrow +\infty$. Seulement dans ce cas que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \psi = \varphi \quad (37.244)$$

est vérifié dans H_Σ . $\psi(P)$ ne converge pas en général quand $\lambda \rightarrow +\infty$ (pour $P \in \Sigma$ mais n'appartient pas à Ω), comme on peut le voir à partir de l'exemple (37.193).

Maintenant nous avons, du moins théoriquement résolu le problème d'approximation des potentiels au dessous de la surface terrestre par des potentiels réguliers en dessous de la sphère de Bjerhammer et donne un son de fondation mathématique de la méthode décrite dans les deux sections précédentes.

Cependant, aussi loin que je peux voir, seulement cette méthode présente un chemin dans lequel on peut trouver de telles approximations à partir de mesures physiques des effets du potentiel.

La démonstration donnée ici de la convergence de la fonction ψ quand $\lambda \rightarrow +\infty$ pourrait être utilisée comme modèle des démonstrations de la convergence des résultats de l'application de la méthode de compensation sur des problèmes concrets en géodésie physique, pourvu que le nombre et la qualité des mesures augmentent jusqu'à ce que nous obtenons suffisamment de mesures exactes. Cependant, je ne vais pas donner une démonstration pour aucun cas pratique, parce que je n'y vois pas vraiment la valeur. Je pense que des informations suffisantes sur la fiabilité des résultats peuvent être trouvées par le moyen des méthodes statistiques mentionnées dans la troisième section. L'information importante que le théorème de Runge nous a donnée dans cette connexion est la méthode de l'approximation qui n'introduit jamais d'erreur systématique dans le résultat sous aucune forme.

IV) Avant de quitter la question concernant la convergence des séries des harmoniques sphériques, je voudrais présenter quelques considérations naïves.

Il est souvent dit que, généralement, la convergence des séries des harmoniques sphériques est lente (j'ai souvent posé des questions si ceux qui disent cela, ont-ils jamais essayé de calculer e^{-100} en utilisant directement la série puissance bien connue de e^x qui est convergente pour tout x).

La cause de la convergence lente des harmoniques sphériques utilisées ici, est plutôt que les fonctions que nous voulons représenter sont très compliquées (c'est-à-dire elles contiennent une large quantité d'information) que les harmoniques sphériques ne sont pas convenables pour l'ensemble des fonctions auxquelles nous sommes intéressés.

Si nous essayons de décrire une certaine fonction définie sur une sphère par des séries en harmoniques sphériques jusqu'à l'ordre 36, alors nous devons avoir $36^2 = 1296$ paramètres, mais nous ne pouvons pas s'attendre que les détails d'amplitude plus petite de $180^\circ/36 = 5^\circ$ peuvent être cartographiés. Si nous voulons une cartographie plus détaillée, le prix à payer sera plus de paramètres et ce-ci est relativement indépendant du type de fonctions utilisées pour la cartographie. Par l'interpolation locale, il est bien-sur possible de cartographier beaucoup de petits détails par un choix convenable des 1296 premiers coefficients de la série, mais alors nous attendons à un comportement "sauvage" pour les séries à l'extérieur du domaine local dans lequel il a été forcé de suivre les détails.

Après cet avertissement, je vais dire quelques choses sur le critère de choix des noyaux et les métriques correspondantes.

Il existe un nombre infini de métriques symétriques invariantes par rotation pour des ensembles de potentiels réguliers à l'extérieur d'une sphère de Bjerhammer donnée et ayant des noyaux reproduisants correspondants. L'une d'elles a été traitée dans les premières pages de cette section. Il y a une autre métrique qui est mentionnée parfois dans la littérature. Elle est définie par le produit scalaire :

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \psi d\Sigma \quad (37.245)$$

où le domaine de l'intégration est tout l'espace extérieur. En utilisant le théorème de Green et $\Delta \psi = 0$, nous trouvons cependant :

$$\langle \varphi, \psi \rangle = -\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} d\sigma \quad (37.246)$$

Cette propriété de la métrique spéciale l'a rendue convenable pour l'étude des problèmes classiques des valeurs à la frontière relatifs à l'équation de Laplace. Mais pour notre but, elle n'est pas d'un grand intérêt, comme elle a l'inconvénient, que l'expression du noyau reproduisant est plutôt compliquée en contenant un logarithme.

Une métrique qui a un produit scalaire légèrement plus compliqué, mais a une expression beaucoup plus simple du noyau reproduisant est définie par le produit scalaire suivant :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_L = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{1}{r} \text{grad} \varphi \cdot \text{grad} \psi d\Sigma \quad (37.247)$$

Et le noyau reproduisant est :

$$K(P, K) = \frac{2R}{L}$$

où L est donné par (37.156) :

$$L = \sqrt{\frac{r_P^2 r_Q^2}{R^2} - 2r_P r_Q \cos \psi + R^2} \quad (37.156)$$

Si P est un point dans Σ , alors :

$$P' = \left\{ \frac{x_P}{R^2}, \frac{y_P}{R^2}, \frac{z_P}{R^2} \right\} \quad (37.248)$$

est le point à l'intérieur de sphère auquel P est image par inversion par rapport à la sphère. On a :

$$L = \frac{r_P}{R} \sqrt{r_Q^2 - 2r_Q r_{P'} \cos \psi + r_{P'}^2} \quad (37.249)$$

C'est-à-dire pour P fixé, $\frac{1}{L}$ est proportionnel à $\frac{1}{QP'}$ et par conséquent, $\frac{1}{L}$ est un potentiel régulier dans Σ comme une fonction de l'un des points P, Q , l'autre étant fixé, et :

$$\begin{aligned} \frac{2R}{L} &= \frac{2R^2}{r_P} \frac{1}{QP'} = \frac{R^2}{2r_P} \frac{1}{r'_P} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r_P}{r_Q}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{R^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi) \end{aligned} \quad (37.250)$$

Je vais prouver que $\frac{2R}{L}$ est le noyau reproduisant qui correspond à \langle, \rangle_L . Comme :

$$\varphi_i^k = \left(\frac{R}{r}\right)^{i+1} E_i^k \text{ pour } k = -i, -i+1, \dots, i \text{ et } i = 0, 1, 2, \dots \quad (37.251)$$

où E_i^k sont les $2i+1$ harmoniques sphériques complètes normalisées pour $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, est un système orthogonal complet, un produit scalaire est défini dès que son effet sur φ_i^k est connu. Nous trouvons :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i^k, \varphi_j^l \rangle_L &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{1}{r} \text{grad} \varphi_i^k \cdot \text{grad} \varphi_j^l d\Sigma \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \varphi_i^k \frac{\partial}{\partial r} \varphi_j^l + \text{grad}_2 \varphi_i^k \cdot \text{grad}_2 \varphi_j^l \right\} d\Sigma \end{aligned} \quad (37.252)$$

(où grad_2 est le gradient bi-dimensionnel sur la sphère)

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{1}{r} \left\{ \frac{d}{dr} \left(\frac{R}{r}\right)^{i+1} \frac{d}{dr} \left(\frac{R}{r}\right)^{j+1} E_i^k E_j^l + \left(\frac{R}{r}\right)^{i+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{j+1} \text{grad}_2 E_i^k \cdot \text{grad}_2 E_j^l \right\} d\Sigma \quad (37.252)$$

(Maintenant, nous allons utiliser le théorème de Green pour la surface de sphère)

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{1}{r} \left\{ \frac{(i+1)(j+1)}{r^2} \left(\frac{R}{r}\right)^{i+j+2} E_i^k E_j^l - \left(\frac{R}{r}\right)^{i+j+2} E_j^l \Delta_2 E_i^k \right\} r \sin\theta d\theta d\lambda \quad (37.252)$$

(où Δ_2 est l'opérateur Laplace-Beltrami sur la sphère)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{1}{r} \left\{ \frac{R}{r} \right\}^{i+j+2} ((i+1)(j+1) + i(i+1)) E_i^k E_j^l \sin\theta d\theta d\lambda \\ &= \frac{(i+1)(i+j+1)}{4\pi} \int E_i^k E_j^l \sin\theta d\theta d\lambda \int_R^{+\infty} \frac{R^{i+j+2} dr}{r^{i+j+3}} \\ &= (i+1)(i+j+1) \delta_{ij} \delta_{kl} \frac{1}{2i+2} = \begin{cases} \frac{2i+1}{2} \text{ pour } i = j, k = l \\ 0 \text{ dans tous les autres cas} \end{cases} \end{aligned}$$

On peut écrire maintenant :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{2R}{L}, \varphi_j^l \right\rangle_L &= \left\langle 2 \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{R^2}{r_P r_Q} \right)^{i+1} P_i(\cos \psi), \varphi_j^l \right\rangle_L = \\ &= \left\langle 2 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2i+1} \varphi_i^k(P) \varphi_i^k(Q), \varphi_j^l(Q) \right\rangle_L = \varphi_j^l(P) \end{aligned} \quad (37.253)$$

Et ainsi, nous avons prouvé que $\frac{2R}{L}$ est le noyau reproduisant dans l'espace d'Hilbert H_L avec le produit scalaire \langle, \rangle_L .

Cette section sera conclue par une courte discussion sur le problème important : comment choisir la métrique (ou le noyau) pour les calculs pratiques.

L'idée la plus évidente est peut être l'utilisation comme noyau, les séries finies des harmoniques sphériques qui correspondent à l'expansion de Kaula des fonctions de corrélation $C(P, Q)$. [7]. (Dans la publication de Kaula, un de ces coefficients dans cette expansion est négatif, mais il ne peut pas l'être. S'agit-il d'une erreur répétée de l'impression ?).

Mais, si une personne utilise un noyau avec seulement un nombre fini de membres, on a limité la solution à un espace de dimension finie, consisté de potentiels exprimés par les harmoniques sphériques avec le même degré comme ceux rencontrés dans le noyau. Pour avoir des résultats locaux, on doit utiliser un très grand nombre de membres.

Une autre possibilité est l'utilisation d'un noyau avec une expression simple fermée : exemple $\frac{2R}{L}$ (ou $\frac{2R}{L}$ multiplié par une constante convenable). Si le rayon R de sphère de Bjerhammer est choisi plutôt que le rayon principal de la terre, une bonne approximation locale de fonction de corrélation est achevée.

Je peux voir une bonne chose à faire est d'utiliser une combinaison de ces deux idées. C'est-à-dire $\frac{2R}{L}$ multiplié par une certaine constante + une correction qui consiste à une somme finie des harmoniques sphériques telle que la fonction de corrélation correspondante est suffisamment similaire à la fonction de corrélation de Kaula.

Le produit scalaire sera un multiple constant de \langle, \rangle_L + une correction qui est simple à calculer mais comme le produit scalaire n'est pas explicitement utilisé dans le calcul, je ne vais pas donner le résultat ici. D'après un point de vue théorique, la chose importante, dès que cette correction est finie, l'espace d'Hilbert qui correspond au noyau corrigé consiste des mêmes éléments que ceux de H_L .

37.6 APPLICATION DE LA MÉTHODE

Aujourd'hui, le problème de Molodensky est déjà vu comme le problème classique de la géodésie physique ; il est donc raisonnable de commencer la discussion sur l'application de la méthode de noyau avec ce problème.

Comme je ne trouve pas que les aspects mathématiques du problème de Molodensky sont clairement formulés dans la littérature, je vais d'abord proposer une autre formulation du problème.

Le problème de Molodensky est le problème de trouver une meilleure approximation du potentiel de la Terre -le potentiel normal- à partir d'une approximation donnée par les mesures géodésiques.

Supposons que nous avons mesuré les données suivantes en des points sur la surface physique de la Terre :

- 1) Les coordonnées géographiques astronomiques, c'est-à-dire la direction de la verticale physique,
- 2) Le potentiel de gravité de la Terre W , et
- 3) La gravité g .

Supposons aussi que nous avons donné un potentiel normal U ; nous pouvons trouver donc pour chaque point P sur la surface de la Terre, un point Q telque :

- a) Le potentiel normal en Q est égal au potentiel au point P :

$$U_Q = W_P \quad (37.254)$$

et que :

- b) Les coordonnées géodésiques normales de Q sont égales aux coordonnées astronomiques de P , qui peuvent être exprimées par l'équation vecteur :

$$\frac{1}{\gamma_Q} (\text{grad}U)_Q = \frac{1}{g_P} (\text{grad}W)_P \quad (37.255)$$

Les deux membres de cette équation représentent les vecteurs unités définissant les directions en question. La localisation des points Q est le telluroid.

Nous voulons trouver le vecteur \mathbf{QP} et $T = W - U$. Ici T est le potentiel perturbateur, c'est un potentiel régulier, étant donné que le potentiel de la force centrifuge est le même dans W et U .

Comme $T = W - U$, (37.254) peut être écrite :

$$T_P + U_P - U_Q = 0 \quad (37.256)$$

Et (37.255) peut être écrire :

$$(\text{grad}T)_P + (\text{grad}U)_P - \frac{g_P}{\gamma_Q} (\text{grad}U)_Q = 0 \quad (37.257)$$

mais :

$$(\text{grad}T)_P + (\text{grad}U)_P - (\text{grad}U)_Q = \frac{g_P - \gamma_Q}{\gamma_Q} (\text{grad}U)_Q \quad (37.258)$$

Maintenant :

$$g_P - \gamma_Q = \Delta g \quad (37.259)$$

est l'anomalie de gravité au point en question, telle que (37.258) devient :

$$(\text{grad}T)_P + (\text{grad}U)_P - (\text{grad}U)_Q = \frac{\Delta g}{\gamma} (\text{grad}U)_Q \quad (37.260)$$

Si on introduit un système cartésien de coordonnées (x_1, x_2, x_3) et appelons les composantes de vecteur QP $p_1, p_2,$ et p_3 on peut écrire (37.256) et (37.260) dans une approximation linéaire :

$$T + \sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \quad (37.261)$$

Et :

$$\frac{\partial T}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^3 p_i \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\Delta g}{\gamma} \frac{\partial U}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3 \quad (37.262)$$

Ces quatre équations doivent être satisfaites par tous les points du telluroïd où tous les variables sauf $T, \frac{\partial T}{\partial x_j}$ et p_j sont connues.

Si T et $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ sont connues en un point Q du telluroïd, alors (37.261) et (37.262) seraient quatre équations linéaires des trois variables p_j qui pourraient être déterminées si et seulement si (37.261) et (37.262) étaient compatibles ; c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} T & \frac{\partial U}{\partial x_i} \\ \frac{\partial T}{\partial x_j} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p_i \end{pmatrix} = \frac{\Delta g}{\gamma} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial U}{\partial x_j} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \text{ (colonnes)} \\ j = 1, 2, 3 \text{ (lignes)} \end{matrix} \quad (37.263)$$

En d'autres termes, (37.263) doit être satisfaite par tous les points du telluroïd.

L'équation (37.263) est la forme correcte des conditions des valeurs à la frontière pour T dans le problème de Molodensky.

Le problème des valeurs à la frontière pour T n'est pas un des problèmes classiques des valeurs à la frontière des potentiels, c'est-à-dire les problèmes où le potentiel, la dérivée normale du potentiel, ou une combinaison linéaire est donnée à la frontière. Notre problème est appelé problème à dérivée oblique où une combinaison linéaire du potentiel et de sa dérivée dans une certaine direction est donnée à la frontière. Il peut être prouvé que la direction en question est la ligne normale passant par le point Q , la ligne normale est la courbe constituant des points ayant les mêmes coordonnées normales que Q ; les lignes normales sont approximativement verticales. Si cette direction ne coïncide pas en aucun point de la frontière avec une tangente à celle-ci au même point et si pour toute la frontière, la direction est du même côté de la surface frontière, alors nous avons le problème à dérivée oblique régulier, pourvu que la surface frontière et les coefficients de l'équation (37.263) satisfassent quelques conditions très faibles de régularité.

Le problème à dérivée oblique est en général un problème très compliqué, mais s'il est régulier, il a été prouvé ([5] (p.265), [2] (p.82)) que le théorème appelé l'alternative de Fredholm s'ap-

plique. Comme nous avons une certaine liberté dans le choix des modèles mathématiques pour la surface de la terre, nous pouvons et nous assumerons travailler avec le problème à dérivée oblique régulier.

L'alternative de Fredholm se présente comme suit ;

Soit :

a. Il n'y a pas un potentiel régulier T différent de zéro et qui vérifie l'équation homogène des valeurs à la frontière correspondante à (37.263) (c'est-à-dire (37.263) avec le membre à droite égal à zéro) ; si ainsi, (37.263) a une solution unique T pour tout membre à droite, et qu'elle est un potentiel régulier (à l'extérieur de la surface de la frontière)

ou

b. Le problème homogène a un nombre fini n de solutions linéairement indépendantes ; si ainsi, le problème non homogène est résoluble seulement si le membre à droite satisfait n conditions linéaires homogènes linéairement indépendantes, et alors, le problème a n solutions linéairement indépendantes de façon que la différence entre deux solutions arbitraires est une solution du problème homogène correspondant.

En mathématiques pures, il est bien de travailler avec des alternatives claires, en mathématiques appliquées et numériques, les faits sont plus flous. Là, nous avons souvent une situation où il est pratiquement impossible de dire si nous sommes dans le cas a. ou dans le cas b. ; nous avons la même situation lorsque nous avons à résoudre un système linéaire d'équations algébriques telles que la matrice des coefficients a une "petite" valeur propre : le système est instable - un "petit" changement dans les valeurs de l'entrée peut faire un changement dans le résultat qui n'est pas "petit".

Pour trouver quel cas à appliquer pour le problème de Molodensky, nous devons premièrement considérer la situation simplifiée où nous avons une planète qui ne tourne pas.

Ici, le potentiel normal U est régulier ainsi qu'à l'infini avec toutes ses dérivées par rapport aux coordonnées cartésiennes, alors :

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \frac{\partial U}{\partial x_3}$$

sont des potentiels réguliers.

Si dans le membre à gauche de (37.263), nous substituons $\frac{\partial U}{\partial x_h}$, pour T , alors la première et la $h + 1$ colonnes sont identiques et le déterminant de la matrice s'annule, c'est-à-dire $\frac{\partial U}{\partial x_h}$ est une solution pour le problème homogène correspondant au problème de Molodensky pour $h = 1, 2, 3$; c'est-à-dire nous sommes dans le cas b. avec n égal au moins à trois.

Supposons premièrement que $n=3$.

Alors, si le problème des valeurs à la frontière a une solution T_0 et ainsi il en a, si les anomalies de gravité satisfont trois équations linéaires, alors :

$$T = T_0 + a \frac{\partial U}{\partial x_1} + b \frac{\partial U}{\partial x_2} + c \frac{\partial U}{\partial x_3} \quad (37.264)$$

est une solution pour toutes les valeurs de a, b et c , et nous devons choisir les constantes, telles que le centre de gravité de T coïncide avec le centre de gravité de U , c'est-à-dire que les trois premiers membres du développement de T en fonctions sphériques s'annulent à l'infini.

Pour $n > 3$ les anomalies doivent satisfaire plus que trois conditions, mais s'il y a des solutions, il en aura telles que leurs centres de gravité coïncident avec celui de la terre. Néanmoins, les solutions auront $n - 3$ fois indéterminées.

Maintenant, nous allons discuter le cas intéressant où la terre est en rotation. Fixons le système des coordonnées tel que son origine est au centre de masse de la terre et que l'axe x_3 coïncide avec l'axe de rotation. Alors :

$$\frac{\partial U}{\partial x_3}$$

reste encore une solution du problème homogène, alors que :

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} \text{ et } \frac{\partial U}{\partial x_2}$$

sont seulement des solutions formelles. Elles ne s'annulent pas à l'infini ; de plus elles ne sont pas bornées. Cependant, nous pouvons seulement dire que n est égal au moins à un, et si le problème a une solution T_0 , nous ne pouvons pas généralement obtenir la coïncidence entre les centres de gravité de T et de la terre. Donc, nous avons encore la situation afin d'obtenir une solution utilisable, nous devons avoir une série de Δg qui satisfait (au moins) trois conditions. Et plus encore, Il est connu que les deux membres du premier ordre du développement doivent être nuls [4] (p 62), donc, en réalité, nous avons (au moins) cinq conditions qui devraient être satisfaites.

Le résultat de cette recherche serait que le problème de Molodensky est mal posé dans la terminologie de J. Hadamard [8]. Pour qu'un problème soit bien posé, il doit avoir selon Hadamard une et seulement une solution pour toute donnée arbitraire, et des petites variations des données causeraient raisonnablement des petites variations de la solution.

La formulation correcte du problème de Molodensky serait de chercher un potentiel T régulier à l'extérieur du telluroïde qui satisfait cinq conditions à l'infini (les premiers membres du premier ordre et les deux membres du deuxième ordre du développement en harmoniques sphériques s'annulent) et satisfait aussi l'équation (37.263) où dans les membres à droite $\Delta g + V$ est substitué pour Δg , où :

$$\int_{\omega} p(Q) V^2(Q) d\omega = \text{minimum}$$

L'intégrale doit être prise sur le telluroïde et p est une fonction de poids positive donnée. Cette formulation du problème des valeurs à la frontière peut être appelée le problème des valeurs à la frontière des moindres carrés.

Je ne vais pas poursuivre ici cette idée, depuis que nous ne possédons pas un champ continu des données à la frontière, mais j'ai essayé de montrer que les méthodes de compensation,

même de point de vue théorie abstraite, sont plus réalistes que celles de l'approche classique.

Dans le calcul pour la détermination du potentiel, il serait pratique d'inclure d'une part des résultats concernant la déviation de la verticale et de rendre possible la détermination de la déviation de la verticale d'autre part. Par conséquent, nous devons trouver les opérateurs différentiels qui donnent ces quantités à partir de la représentation du potentiel perturbateur, et je vais ici en tirer les correspondants au même modèle qui a conduit à la formule(37.263) pour l'opérateur différentiel donnant Δg .

Au point P , la direction de la verticale physique est $-\text{grad}W$ et la direction de verticale normale est $-\text{grad}U$. Nous sommes intéressés à la projection sur un plan horizontal passant par P de la différence entre les vecteurs unitaires des deux verticales. Cette différence est :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{g}\text{grad}W + \frac{1}{\gamma}\text{grad}U &= -\frac{1}{g}\text{grad}W + \frac{1}{\gamma}(\text{grad}W - \text{grad}T) \\ &= \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{g}\right)\text{grad}W - \frac{1}{\gamma}\text{grad}T \end{aligned} \quad (37.265)$$

Utilisons un système de coordonnées ayant l'axe z la direction de la verticale physique, l'axe x la direction ouest- est et l'axe y la direction sud-nord. Le plan horizontal passant par P a pour équation $z = \text{constante}$, c'est-à-dire la projection sur ce plan de $\text{grad}W$ est zéro et les composantes ouest-est et sud-nord de la déviation de la verticale sont :

$$\xi = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{et} \quad \eta = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (37.266)$$

Si la méthode de l'interpolation est utilisée pour l'interpolation des déviations des verticales utilisant les anomalies de gravité, nous avons au moins deux avantages par rapport à la méthode classique : 1) l'avantage théorique est que toutes les mesures entrent dans le calcul par la même méthode, 2) l'avantage pratique est qu'il n'y a pas une intégration dans le processus ; les anomalies aux stations de mesures entrent directement dans les calculs qui, par conséquent, peuvent être automatisées.

Je la trouve une idée très attractive que le problème de l'interpolation locale des déviations des verticales peut être résolu par la méthode lisse de sorte que les mesures des déviations des verticales et les anomalies de gravité entrent dans les calculs par la même méthode. En effet, ce problème est le premier auquel nous avons planifié d'utiliser la présente théorie à l'Institut Géodésique Danois.

Mais reste plus attractif est l'utilisation de cette méthode pour la compensation intégrée des mesures des satellites dynamiques et les mesures se rapportant au potentiel à la surface de la terre.

Je ne peux encore écrire une formule pratique pour être utilisée dans de tels calculs ; je pense qu'un travail de recherche spécial pour ce problème est nécessaire et je peux seulement offrir quelques commentaires théoriques sur la question.

Il est important de se rappeler que les potentiels perturbateurs T et R utilisés respectivement pour les mesures relatifs à la surface de la terre et des satellites ne sont pas les mêmes, mais comme la différence entre eux est connue, ce fait ne provoque pas de difficultés sérieuses. Le cas le plus simplement compliqué où la différence n'est pas complètement connue mais elle dépend d'un ou de plusieurs paramètres inconnus doit être traitée en laissant ces paramètres entrer dans la compensation comme inconnus. Ce problème est peut être non réaliste.

Comme point de départ pour la discussion de la forme explicite des équations normales, je considère les formules de [6] :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \\
\frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} \\
\frac{di}{dt} &= \frac{\cos i}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \sin i} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\
\frac{dM}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}
\end{aligned} \tag{37.267}$$

Ici, comme dans les problèmes précédents, les opérations sur les membres à droite des équations (37.267) ne sont pas directement exécutées sur le potentiel perturbateur R mais sur le noyau reproduisant par rapport au premier point P ou le second point Q . Si le noyau est donné explicitement, exemple comme $\alpha \cdot \frac{2R}{L}$, il n'est pas difficile de l'exprimer par les éléments correspondants aux deux points P et Q et d'appliquer les différentiations. Si le noyau contient des termes de correction sous la forme de harmoniques sphériques, les coefficients différentiels par rapport aux éléments peuvent être tirés par la méthode traditionnelle ou par l'utilisation des harmoniques sphériques généralisées [12], [3].

Maintenant, si nous pourrions mesurer directement les taux de variation des éléments pendant de courts intervalles de temps, alors le problème pourrait être résolu, mais nous pouvons trouver seulement les perturbations résultantes durant des intervalles longs de temps, et par conséquent, nous devons utiliser les intégrations ou les valeurs moyennes. Cette situation, néanmoins, n'est pas particulière à notre problème, alors il pourrait être possible de surmonter aussi cette difficulté.

Le plus sévère reculement de la méthode, est qu'elle présente des systèmes très larges d'équations normales -une équation pour chaque mesure - et que ces équations ne sont pas clairsemées comme elles sont pour l'instant les équations normales utilisées pour la compensation des réseaux géodésiques. C'est une consolation que la matrice des équations normales est définie positive de sorte que les équations peuvent être résolues sans l'utilisation de pivots et que la procédure de compensation -comme les procédures de compensation en général- est relativement simple de l'informatiser.

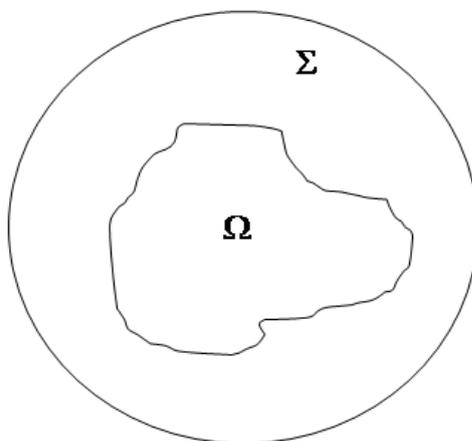
Je crois qu'il est nécessaire de trouver quelques astuces qui peuvent réduire le nombre des équations normales ou au moins le nombre des coefficients différents de zéro. J'ai quelques idées à ce sujet mais je pense qu'il est très tôt d'aller dans les détails des calculs.

La technique de compensation introduite ici, est une méthode de traitement des données typiques donnant un résultat officiellement correct qui est absolument indépendant du sens donné (ou non donné) aux informations d'entrée. Il est à mon avis un recul dangereux de cette méthode, comme tous les méthodes de compensation qui donnent une réponse même à une question la plus idiote si elle est seulement posée officiellement d'une manière correcte.

Par conséquent, j'espère que le temps gagné par ce-ci et par d'autres formes d'informatisation de calculs longs, ne sera pas utilisé exclusivement pour la production des figures en plus mais pour une meilleure formulation du problème, de façon que les questions que nous posons doivent être plus réalistes, de point de vue de physique et aussi numérique. Je pense que quelques unes des idées exprimées dans ce papier, peuvent être utiles à cet égard.

37.7 ANNEXE : DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE RUNGE

Je veux prouver que tout potentiel régulier dans un ouvert borné Ω peut être approché par des potentiels réguliers sur une sphère ouverte Σ contenant dans son intérieur Ω . La région Ω est supposée limitée par une surface ω qui est suffisamment régulière ; c'est-à-dire ayant partout une courbure finie. Cette condition pourrait être très faible, mais je ne pense pas qu'elle pourrait être d'un grand intérêt dans cette connexion. Il est pourtant très important que $\Sigma - \Omega$ soit connexe.



Le théorème sera prouvé d'après des séries de lemmes.

Lemme 1. Pour chaque fonction f continue dans $\Omega + \omega$ et 0 sur ω , nous avons d'après :

$$\int_{\Omega} f \cdot \psi d\Omega = 0 \quad (37.268)$$

pour tous les potentiels ψ réguliers dans Σ s'ensuit :

$$\int_{\Omega} f \cdot \varphi d\Omega = 0 \quad (37.269)$$

pour tous les potentiels φ réguliers dans Ω .

Il est évident que si nous pouvons prouver le lemme pour certains potentiels ψ réguliers dans Σ , alors le lemme sera juste tel qu'il est posé. L'ensemble de ψ que je vais utiliser, est celui représenté par des distributions continues en couches simples sur la surface σ de Σ c'est-à-dire pour les potentiels représentés par :

$$\psi_P = \int_{\sigma} \frac{1}{r_{PQ}} \chi(Q) d\sigma_Q \quad (37.270)$$

où

$$P \in \Sigma, Q \in \sigma$$

et r_{PQ} est la distance entre les points P et Q . χ est la densité de la distribution en couche simple sur σ .

Pour que (37.268) soit satisfaite par tous les ψ représentés par (37.270), il est nécessaire et suffisant que :

$$F(Q) \equiv \int_{\Omega} f(P) \frac{1}{r_{PQ}} \chi(Q) d\sigma_P = 0 \text{ pour tout } Q \in \sigma \quad (37.271)$$

F est ici un potentiel régulier dans l'espace extérieur de ω . Dans Ω , F est une solution de l'équation de Poisson $\Delta F = f$.

Maintenant, (??) implique que F est nulle sur la surface de la sphère et qu'elle a une masse finie :

$$M = \int_{\Omega} f d\Omega \quad (37.272)$$

C'est-à-dire F est nulle à l'infini ; par conséquent, elle s'annulera dans l'espace extérieur de la sphère, mais alors elle doit être nulle dans tout l'espace extérieur de ω et sur ω .

Pour chaque potentiel φ régulier dans Ω , nous pouvons par conséquent écrire :

$$\int_{\Omega} f \varphi d\Omega = \int_{\Omega} \Delta F \cdot \varphi d\Omega = \int_{\Omega} F \Delta \varphi d\Omega = 0 \quad (37.273)$$

(ici nous avons utilisé la formule de Green) et le lemme est démontré.

Considérons, maintenant l'espace d'Hilbert H constitué des fonctions, non nécessairement des potentiels, f définies dans Ω telles que l'intégrale :

$$\|f\|^2 = \int_{\Omega} f^2 d\Omega \quad (37.274)$$

est finie. Le produit scalaire dans H est :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\Omega} f_1 \cdot f_2 d\Omega \quad (37.275)$$

Comme les fonctions du type f du lemme 1 sont denses dans H , nous avons :

Lemme 2. : Dans l'espace d'Hilbert H , tout élément orthogonal à tout potentiel φ régulier dans Σ et restreint à Ω est orthogonal à chaque élément φ de H est un potentiel régulier dans Ω .

Maintenant, selon la théorie élémentaire des espaces d'Hilbert, le lemme 2 implique :

Théorème 1. : Tout élément φ de H qui est un potentiel régulier dans Ω peut être approché dans la topologie forte dans H par la restriction à Ω des potentiels ψ réguliers dans Σ .

Mais ce que nous voulions, ce n'était pas un théorème sur l'approximation par la topologie forte dans H mais en topologie uniforme sur tous les sous-ensembles fermés de Ω .

Si pour un moment, nous supposons que les éléments φ de H qui sont des potentiels réguliers dans Ω forment un espace d'Hilbert, disons H_0 , avec le noyau reproduisant $K(P, Q)$, alors nous pouvons en déduire le théorème suivant en utilisant une technique déjà utilisée dans la section [37.5].

Théorème 2. : Tout élément φ de H_0 (c'est-à-dire pour tout φ de H qui est un potentiel régulier dans Ω) peut être approché uniformément sur tout sous-ensemble fermé de Ω par la restriction à Ω des potentiels ψ réguliers dans Σ de sorte que toute dérivée de φ par rapport aux coordonnées dans Ω est uniformément approchée par les dérivées correspondantes de ψ sur les mêmes sous-ensembles fermés de Ω .

Corollaire : Par l'utilisation de l'inversion par rapport à la sphère Σ , ce théorème donne une forme renforcée du théorème de Runge au moins pour $\varphi \in H_0$.

Démonstration du théorème 2. : pour une fonction $f(P)$ qui est un élément d'un espace d'Hilbert avec le noyau reproduisant $K(P, Q)$, nous avons (sec.[37.5],(37.164)) :

$$|F(P)| = |\langle f(Q), K(P, Q) \rangle| \leq \|f\| \cdot \|K(P, Q)\| = \|f\| \cdot \langle K(P, Q), K(Q, P) \rangle^{\frac{1}{2}} = \|f\| \cdot K(P, P)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_P} \right)_P \right| &= \left| \langle f(Q), \frac{\partial K(Q, P)}{\partial x_P} \rangle \right| \leq \|f\| \cdot \left\| \frac{\partial K(Q, P)}{\partial x_P} \right\|_Q \\ &= \|f\| \cdot \langle \frac{\partial K(P, Q)}{\partial x_P}, \frac{\partial K(P, Q)}{\partial x_P} \rangle^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (37.276)$$

aussi bien que des formules similaires pour les dérivées d'ordre supérieur. Des propriétés de noyau reproduisant et de la limite de Ω , il s'ensuit que :

$$\langle K(P, Q), K(Q, P) \rangle > \frac{1}{Q}$$

est finie. Des mêmes prémisses et du fait que $K(P, Q)$, une fonction de P ou de Q , est un potentiel régulier dans Ω , il s'ensuit que la même chose est appliquée à :

$$\left\langle \frac{\partial K(P, Q)}{\partial x_p}, \frac{\partial K(P, Q)}{\partial x_p} \right\rangle > \frac{1}{Q}$$

et aussi pour les dérivées d'ordre supérieur du noyau.

Maintenant du théorème 1., il s'ensuit que, étant donné $\varphi \in H_0$, nous pouvons trouver une suite $\{\psi_n\}$ de potentiels ψ_n réguliers dans Σ de sorte que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que :

$$\|\varphi - \psi_n\| < \varepsilon \text{ pour } n > N \quad (37.277)$$

En posant $f = \varphi - \psi_n$, le théorème 2 est déduit de (37.276), (37.276), etc.

Afin de débarrasser de la restriction que φ doit avoir une norme- H finie; nous devons utiliser les espaces H_p à la place de H . Pour tout couple de fonctions différentiables positives continûment définies sur Ω H_p est donné par le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle_p = \int_{\Omega} p(P) \cdot f(P) \cdot g(P) d\Omega \quad (37.278)$$

Et la norme correspondante :

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} p \cdot f^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \quad (37.279)$$

Etant donné un potentiel quelconque φ régulier dans Ω , nous pouvons trouver un p tel que :

$$\varphi \in H_p$$

(Prendre $p = (1 + \varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$).

Le lecteur est invité à prouver que le lemme 1., le lemme 2. et le théorème 1. pour H_p au lieu de H , qui est tout à fait simple. Alors la restriction est levée et le théorème de Runge est prouvé aussitôt que nous avons prouvé :

Lemma 3. : *Le sous ensemble de H_p consistant des potentiels réguliers dans Ω est un espace d'Hilbert avec noyau reproduisant.*

Mais nous devons premièrement prouver :

Lemma 4. : *Tout espace d'Hilbert consistant exclusivement de potentiels réguliers dans Ω a un noyau reproduisant.*

Si φ est un élément de l'espace d'Hilbert en question et P un point fixe dans Ω , alors $\varphi(P)$ est finie. L'opérateur linéaire A_P de l'espace d'Hilbert vers les nombres réels qui à φ affecte

la valeur $\varphi(P)$ de φ en P , est par conséquent défini pour tout φ de l'espace d'Hilbert. D'après un théorème bien connu de l'analyse fonctionnelle (le Théorème d'Hellinger et Tœplitz ou le Théorème du Graphe Fermé) il s'ensuit que A_P est un opérateur borné et dans notre cas où l'image est les nombres réels, est une fonctionnelle linéaire bornée, et d'après ce-ci il s'ensuit encore d'après un des théorèmes fondamentaux des espaces d'Hilbert avec noyau reproduisant que l'espace d'Hilbert en question a un noyau reproduisant.

Comme pour la démonstration du lemme 3., il reste seulement de montrer que le sous ensemble de H_P constituant des potentiels réguliers dans Ω forme un espace d'Hilbert, c'est-à-dire un sous ensemble linéaire fermé de H_P . Il est un sous espace linéaire c'est évident ; la seule difficulté est de prouver que le sous espace est fermé.

Utilisons M pour appeler l'ensemble des fonctions continuellement différentielles deux fois définies sur Ω et nulles à l'extérieur d'un certain sous ensemble fermé de Ω . Il est évident que $M \in H_P$ et que toute une fonction de H_P qui est orthogonale à toute fonction $f \in M$ est équivalente à zéro, de sorte qu'une condition nécessaire et suffisante que $\varphi \in H_P$ soit un potentiel régulier dans Ω est que :

$$\int_{\Omega} p.f \Delta \varphi d\Omega = 0 \text{ pour toute } f \in M \quad (37.280)$$

D'après (37.280) il s'ensuit :

$$\int_{\Omega} \Delta(p.f) \varphi d\Omega = 0 \text{ pour toute } f \in M \quad (37.281)$$

où la formule de Green est utilisée.

Si φ est deux fois différentiables, (37.280) s'ensuit de (37.281), et comme les $\varphi \in H_P$ pour lesquels (37.281) est vérifié, forme un sous ensemble linéaire fermé de H_P , le lemme 3. est déduit du célèbre lemme de Weyl, qui montre que les φ pour lesquels (37.281) est vérifié ne sont pas seulement deux fois mais arbitrairement plus différentiable.

Finalement, je vais signaler une courte démonstration du lemme de Weyl.

Soit S la sphère unité et supposons que $\Phi(P)$ est une fonction n fois continûment différentiable qui vaut zéro à l'extérieur de S et qui dépend seulement de la distance de P de l'origine. Supposons aussi que :

$$\int_S \Phi d\Omega = 1 \quad (37.282)$$

Pour toute fonction $u(P) \in H_P$ et pour tout $\varepsilon > 0$ nous pouvons définir maintenant :

$$u_{\varepsilon}(P) = \int_S \Phi(Q) u(P - \varepsilon Q) d\Omega_Q = \varepsilon^{-3} \int \Phi \left(\frac{P-Q}{\varepsilon} \right) u(Q) d\Omega_Q \quad (37.283)$$

où la dernière intégrale est prise sur le domaine où l'intégrant est différent de zéro.

Il est facile de montrer que u_{ε} est n fois continûment différentiable et que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\varepsilon}(P) = u(P) \quad (37.284)$$

presque partout.

Nous allons prouver maintenant que, étant donné deux nombres positifs ε_1 et ε_2 , il s'ensuit de (37.281) que :

$$\varphi_{\varepsilon_1}(P) = \varphi_{\varepsilon_2}(P) \quad (37.285)$$

pour tout point $P \in \Omega$ telque la distance de P à la frontière de Ω est plus grande que les deux ε_1 et ε_2 .

Définissons la fonction F par

$$F(P) = \int \left\{ \varepsilon_1^{-3} \Phi \left(\frac{P-Q}{\varepsilon_1} \right) - \varepsilon_2^{-3} \Phi \left(\frac{P-Q}{\varepsilon_2} \right) \right\} \frac{1}{r_Q} d\Omega_Q \quad (37.286)$$

Pour F nous avons immédiatement :

$$\Delta F(P) = \varepsilon_1^{-3} \Phi \left(\frac{P}{\varepsilon_1} \right) - \varepsilon_2^{-3} \Phi \left(\frac{P}{\varepsilon_2} \right) \quad (37.287)$$

et :

$$F(P) = 0 \quad (37.288)$$

pour P à l'extérieur des sphères avec les centres à l'origine et de rayons ε_1 et ε_2 .

Par conséquent, pour $Q \in \Omega$ donné et pour ε_1 et ε_2 suffisamment petits $\Delta F(P-Q)$ est une fonction de P dans l'ensemble M , et donc (37.281) implique :

$$\int F(P-Q) \varphi(Q) d\omega_Q = 0 \quad (37.289)$$

qui est dans un tour équivalente à (37.285).

Les équations (37.284) et (37.285) donnent maintenant :

$$\varphi_\varepsilon(P) = \varphi(P) \quad (37.290)$$

presque partout pour ε suffisamment petit (dépendant de P).

Mais une conséquence de (37.290) est que φ est équivalente à une fonction qui est n fois continûment différentiable. Pour $n = 2$ ce-ci signifie que nous pouvons déduire (37.280) de (37.281), et nous avons le lemme de Weyl.

Littérature

1. **Davis, P.J.** 1963. Interpolation and Approximation.-New York.
2. **Fichera, G.** 1965. Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems. Berlin.

3. **Gelfand, J.M.** and **Z. Sapiro.** Representation of the Group of Rotations of 3-dimensional Space.- American Mathematical Society Translations, Series 2, Vol. 2. p.207-316.
4. **Heiskanen, W.A.** and **H. Moritz.** 1967. Physical Geodesy. Freeman, San Francisco. Reprint,1979. Institute of Theoretical Geodesy, Technical University, Graz, Austria.
5. **Hormander, L.** 1964. Linear Partial Differential Operators. Springer. Berlin.
6. **Kaula, W.M.** 1965. Theory of Satellite Geodesy. San Francisco.
7. **Kaula, W.M.** 1959. Statistical and Harmonic Analysis of Gravity. Journal of Geophysical Research, Vol. 64.
8. **Lavrientiev, M.M.** 1967. Some Improperly Posed Problems of Mathematical Physics. Springer. Berlin.
9. **Meschkowski, H.** 1962. Hilbertsche Räume mit Kernfunktion. Berlin.
10. **Moritz, H.** Über die Konvergenz für das Aussenraumpotential an der Erdoberfläche.- Öosterreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, 49. Jahrgang, Nr. 1.
11. **Moritz, H.** 1965. Schwerevorhersage und Ausgleichungsrechnung. Zeitschrift für Vermessungswesen, 90. Jahrgang.
12. **Stiefel, E.** 1965. Expansion of spherical Harmonics on a Satellite Orbit Based on Spinor Algebra. Mathematische Methoden der Himmelsmechanik und Astronautik. Mannheim. p341-350.

NOTE SUR LE CALCUL DES LIGNES GÉODÉSQUES DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION

" A côté de la difficulté principale, de celle qui tient au fond même des choses, il y a une foule de difficultés secondaires qui viennent compliquer encore la tâche du chercheur. Il y aurait donc intérêt à étudier d'abord un problème où l'on rencontrerait cette difficulté principale, mais où l'on serait affranchis de toutes les difficultés secondaires. Ce problème est tout trouvé, c'est celui des **lignes géodésiques** d'une surface ; c'est encore un problème de dynamique, de sorte que la difficulté principale subsiste ; mais c'est le plus simple de tous les problèmes de dynamique "

H. Poincaré, 1905

Après avoir défini les lignes géodésiques d'une surface, on établit les équations des géodésiques pour une surface donnée. Comme application, nous détaillons celles de l'ellipsoïde de révolution. On fera l'intégration de ces équations.

38.1 INTRODUCTION ET NOTATIONS

Soit (S) une surface définie par les paramètres (u, v) avec $(u, v) \in D$ un domaine $\subset \mathbb{R}^2$. Un point $M \in (S)$ vérifie :

$$OM = OM(u, v) \tag{38.1}$$

On introduit les notations usuelles :

$$E = \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|^2 \quad (38.2)$$

$$F = \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \quad (38.3)$$

$$G = \frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = \left\| \frac{\partial M}{\partial v} \right\|^2 \quad (38.4)$$

Des équations (38.2-38.3-38.4), on obtient les équations :

$$\frac{\partial E}{\partial u} = 2 \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \quad (38.5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 2 \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \quad (38.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \quad (38.7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \quad (38.8)$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2 \frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \quad (38.9)$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = 2 \frac{\partial M}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \quad (38.10)$$

Soit n le vecteur unitaire normal en $M(u, v)$ à la surface (S) , n est donné par :

$$n = \frac{\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}}{H} \quad (38.11)$$

avec :

$$H = \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\| \quad (38.12)$$

D'où :

$$ds^2 = E \cdot du^2 + 2 \cdot F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2 \quad (38.13)$$

L'équation (38.13) représente le carré infinitésimal de la longueur de l'arc.

Soit une courbe (Γ) tracée sur (S) et N est le vecteur unitaire de la normale principale le long de (Γ) .

Définition : Une courbe (Γ) est dite ligne géodésique de la surface (S) si et seulement si les vecteurs n et N sont colinéaires.

38.2 LES EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES LIGNES GÉODÉSIQUES

Calculons l'expression de N , on a :

$$N = R \frac{dT}{ds} \quad (38.14)$$

Or :

$$T = \frac{dM}{ds} = \frac{\partial M}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{dv}{ds} \quad (38.15)$$

D'où :

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial M}{\partial u} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{\partial M}{\partial v} \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \quad (38.16)$$

La condition $n \parallel N$ peut être écrite :

$$N \wedge n = 0 \quad (38.17)$$

soit :

$$R \frac{dT}{ds} \wedge \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}}{H} \right) = 0 \quad (38.18)$$

Utilisant la formule du produit vectoriel :

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C \quad (38.19)$$

On obtient :

$$\left(\frac{dT}{ds} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \right) \frac{\partial M}{\partial u} - \left(\frac{dT}{ds} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} \right) \frac{\partial M}{\partial v} = 0 \quad (38.20)$$

Or $\frac{\partial M}{\partial u}$ et $\frac{\partial M}{\partial v}$ forment une base du plan tangent en M , d'où les deux conditions :

$$\frac{dT}{ds} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dT}{ds} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} = 0 \quad (38.21)$$

Ce qui donne deux équations différentielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 u}{ds^2} + 2 \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial v} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + G \frac{d^2 v}{ds^2} = 0 \quad (38.22)$$

et :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 v}{ds^2} + 2 \frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + E \frac{d^2 u}{ds^2} = 0 \quad (38.23)$$

Posons :

$$\begin{aligned} E'_u &= \frac{\partial E}{\partial u}; & E'_v &= \frac{\partial E}{\partial v}; & F'_u &= \frac{\partial F}{\partial u} \\ F'_v &= \frac{\partial F}{\partial v}; & G'_u &= \frac{\partial G}{\partial u}; & G'_v &= \frac{\partial G}{\partial v} \end{aligned} \quad (38.24)$$

Utilisons les équations (38.5)à (38.10), (38.22) et 38.23), ces 2 dernières équations peuvent être écrites :

$$\left(F'_u - \frac{E'_v}{2}\right) \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + F \frac{d^2u}{ds^2} + G'_u \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{G'_v}{2} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + G \frac{d^2v}{ds^2} = 0 \quad (38.25)$$

$$\left(F'_v - \frac{G'_u}{2}\right) \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + F \frac{d^2v}{ds^2} + E'_v \frac{dv}{ds} \frac{du}{ds} + \frac{E'_u}{2} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + E \frac{d^2u}{ds^2} = 0 \quad (38.26)$$

38.3 DÉTERMINATION DES LIGNES GÉODÉSQUES DE L'ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION

Considérons maintenant comme surface l'ellipsoïde de révolution qu'on paramètre comme suit :

$$\begin{aligned} X &= N \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= N \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= N(1 - e^2) \sin \varphi \end{aligned} \quad (38.27)$$

où :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = aW^{-1/2} \quad (38.28)$$

est le rayon de courbure de la grande normale avec :

$$W = 1 - e^2 \sin^2 \varphi \quad (38.29)$$

Appelons :

$$r = N \cos \varphi \quad (38.30)$$

le rayon du parallèle de latitude φ et ρ le rayon de courbure de la méridienne donné par :

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = a(1 - e^2)W^{-3/2} \quad (38.31)$$

Alors la première forme fondamentale s'écrit :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2 \quad (38.32)$$

En prenant comme variables $u = \varphi$ et $v = \lambda$, nous obtenons :

$$E = E(\varphi) = \rho^2 \quad ; F = 0 \quad ; G = r^2 \quad (38.33)$$

$$E'_\varphi = 2\rho\rho' \quad ; E'_\lambda = 0 \quad ; F'_\varphi = F'_\lambda = 0 \quad ; G'_\varphi = 2rr' = -2r\rho\sin\varphi \quad ; G'_\lambda = 0 \quad (38.34)$$

Alors les équations (38.25) et (38.26) deviennent :

$$-2r\rho\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\lambda}{ds} + r^2 \frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0 \quad (38.35)$$

$$r\rho\sin\varphi \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \rho\rho' \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \rho^2 \frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0 \quad (38.36)$$

La première équation s'écrit :

$$\frac{d}{ds} \left(r^2 \frac{d\lambda}{ds} \right) = 0 \quad (38.37)$$

dont l'intégration donne :

$$r^2 \frac{d\lambda}{ds} = C = \text{constante} \quad (38.38)$$

Nous retrouvons la relation de Clairaut :

$$r \cdot \sin Az = \text{constante} = C \quad (38.39)$$

où Az est l'azimut de la géodésique au point M. L'équation (38.36) s'écrit :

$$\rho \left(r \sin\varphi \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \rho' \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \rho \frac{d^2\varphi}{ds^2} \right) = 0 \quad (38.40)$$

Ce qui donne :

- $\rho = 0$ le point M est sur l'équateur : $\varphi = 0$ et $r = a$ le demi-grand axe de l'ellipsoïde et l'équation (38.35) devient :

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0 \quad (38.41)$$

dont l'intégration donne :

$$\lambda - \lambda_0 = l(s - s_0) \quad (38.42)$$

Le point M décrit l'équateur et la géodésique est le grand cercle de rayon a .

- $\rho \neq 0$, le point M n'est pas sur l'équateur, l'équation (38.36) s'écrit comme suit :

$$\rho \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \rho' \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + r \sin\varphi \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = 0 \quad (38.43)$$

Pour intégrer (38.43), utilisons une nouvelle fonction, soit :

$$Z = \frac{d\lambda}{d\varphi} \quad (38.44)$$

De (38.38), on obtient :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{d\lambda}{ds} = \frac{C}{r^2} \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{C}{r^2 Z}$$

Soit

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{C}{r^2 Z} \quad (38.45)$$

Exprimons maintenant la dérivée seconde $d^2\varphi/ds^2$:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \quad (38.46)$$

L'équation (38.43) s'écrit en utilisant (38.38) et (38.46) :

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{d\varphi} \left[\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right] + \rho' \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \sin\varphi \left(\frac{C^2}{r^3} \right) = 0 \quad (38.47)$$

Posons :

$$U = \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \quad (38.48)$$

L'équation (38.47) devient :

$$\frac{\rho}{2} \frac{dU}{d\varphi} + \rho' U = - \frac{C^2 \sin\varphi}{r^3} \quad (38.49)$$

L'équation (38.49) est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre. Sa résolution sans second membre donne :

$$U = \frac{k}{\rho^2} \quad (38.50)$$

En utilisant le second membre de (38.49), on considère que k est une fonction de φ , on a alors :

$$U = \frac{1}{\rho^2} \left(k_0 - \frac{C^2}{r^2} \right) = \frac{k_0 r^2 - C^2}{\rho^2 r^2} \quad (38.51)$$

avec k_0 la constante d'intégration. U étant une fonction positive, on doit avoir :

$$k_0 r^2 - C^2 > 0 \quad (38.52)$$

Revenant à l'équation (38.48), on obtient :

$$U = \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{k_0 r^2 - C^2}{\rho^2 r^2} \quad (38.53)$$

Utilisons les équations (38.45) et (38.53), on obtient :

$$\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = \frac{k_0 r^2 - C^2}{\rho^2 r^2} = \left(\frac{C}{r^2 Z} \right)^2 = \frac{C^2}{r^4 Z^2} = \frac{C^2}{r^4} \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 \quad (38.54)$$

ce qui donne :

$$\left(\frac{d\lambda}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\rho^2}{r^2} \frac{C^2}{k_0 r^2 - C^2} \quad (38.55)$$

Déterminons la valeur de k_0 . Pour cela, nous exprimons $\frac{d\lambda}{ds}$ en utilisant les équations (38.38) et (38.55). Calculons ds^2 , on obtient :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2 = \frac{r^2(k_0 r^2 - C^2)}{C^2} d\lambda^2 + r^2 d\lambda^2$$

Soit :

$$ds^2 = \frac{r^4 k_0}{C^2} d\lambda^2 \Rightarrow \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \frac{C^2}{k_0 r^4} \quad (38.56)$$

or d'après (38.38) :

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \frac{C^2}{r^4}$$

d'où alors : $k_0 = 1$ et par suite :

$$\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\rho^2}{r^2} \frac{C^2}{r^2 - C^2} \quad (38.57)$$

Pour pouvoir intégrer l'équation précédente, exprimons $r^2 - C^2$, d'où :

$$\begin{aligned} r^2 - C^2 &= N^2 \cos^2 \varphi - C^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} - C^2 = \\ &= \frac{(a^2 - C^2) \left(1 - \frac{a^2 - C^2 e^2}{a^2 - C^2} \sin^2 \varphi\right)}{W} \end{aligned} \quad (38.58)$$

Posons :

$$k^2 = \frac{a^2 - C^2 e^2}{a^2 - C^2} \quad (38.59)$$

D'où :

$$r^2 - C^2 = (a^2 - C^2)(1 - k^2 \sin^2 \varphi)/W \quad (38.60)$$

Remarquons que le coefficient k est supérieur à 1, donc la latitude géodésique φ reste inférieure à la latitude φ_1 définie par $\sin \varphi_1 = 1/k$.

Alors l'équation (38.57) s'écrit :

$$\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 = \frac{(1 - e^2)^2 C^2}{(a^2 - C^2) \cos^2 \varphi (1 - e^2 \sin^2 \varphi) (1 - k^2 \sin^2 \varphi)} \quad (38.61)$$

D'où en remplaçant C par $a \sin(Aze)$ et comme $tg(Aze)$ est de même signe que $(d\lambda/d\varphi)$, on peut écrire alors :

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{(1 - e^2) tg(Aze)}{\cos \varphi \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) (1 - k^2 \sin^2 \varphi)}} \quad (38.62)$$

soit en intégrant entre 0 et φ :

$$\lambda - \lambda_e = \int_0^\varphi \frac{(1 - e^2) tg(Aze)}{\cos t \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 t) (1 - k^2 \sin^2 t)}} dt =$$

$$(1 - e^2)tg(Aze) \int_0^\varphi \frac{dt}{\cos t \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 t)(1 - k^2 \sin^2 t)}}$$

ou encore :

$$\lambda - \lambda_e = (1 - e^2)tg(Aze) \int_0^\varphi \frac{dt}{\cos t \sqrt{(1 - e^2 \sin^2 t)(1 - k^2 \sin^2 t)}} \quad (38.63)$$

En prenant comme variable $w = \sin t$, l'intégrale (38.63) devient :

$$\lambda - \lambda_e = (1 - e^2)tg(Aze) \int_0^{\sin \varphi} \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - e^2 w^2)(1 - k^2 w^2)}} \quad (38.64)$$

Cherchons à exprimer l'abscisse curviligne s en fonction de φ . Or l'expression de ds^2 est égale à :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2 = \rho^2 d\varphi^2 + \frac{C^2}{r^2} ds^2$$

soit :

$$ds^2 = \frac{r^2 \rho^2 d\varphi^2}{r^2 - C^2} = \frac{a^2 (1 - e^2)^2 \cos^2 \varphi d\varphi^2}{\cos^2(Aze) (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3 (1 - k^2 \sin^2 \varphi)} \quad (38.65)$$

D'où :

$$ds = \frac{a(1 - e^2) \cos \varphi d\varphi}{\cos(Aze) (1 - e^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)}} \quad (38.66)$$

En prenant $t = \sin \varphi$ comme nouvelle variable, l'intégrale de (38.66) donne en prenant comme origine de l'abscisse curviligne s un point de l'équateur :

$$s = \frac{a(1 - e^2)}{\cos Aze} \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{(1 - e^2 t^2) \sqrt{(1 - k^2 t^2)(1 - e^2 t^2)}} \quad (38.67)$$

Les intégrales (38.64) et (38.67) sont des intégrales elliptiques de troisième espèce.

38.4 APPLICATIONS AUX PROBLÈMES DIRECTE ET INVERSE DU CALCUL DES LIGNES GÉODÉSIQUES

Dans cette deuxième partie, on va traiter numériquement l'application des formules précédentes dans la résolution des problèmes dits direct et inverse du calcul des lignes géodésiques.

38.4.1 Le Problème Direct

On donne :

- (φ_1, λ_1) d'un point M_1 ,

- la longueur s de la géodésique de M_1 à M_2 ,
- l'azimut géodésique Az_1 de la ligne géodésique de M_1 à M_2 .

On demande de calculer :

- les coordonnées géodésiques (φ_2, λ_2) de M_2 ,
- l'azimut géodésique Az_2 en M_2 .

Solution :

1. Calcul de la constante C , $C = N(\varphi_1) \cdot \cos\varphi_1 \cdot \sin Az_1 = a \cdot \sin(Aze)$ d'où Aze et k ,
2. Détermination de φ_2 à partir de :

$$s = \frac{a(1-e^2)}{\cos Aze} \int_{\sin\varphi_1}^{\sin\varphi_2} \frac{dt}{(1-e^2t^2)\sqrt{(1-k^2t^2)(1-e^2t^2)}}$$

3. Ayant φ_2 , on calcule λ_2 par :

$$\lambda_2 - \lambda_1 = (1-e^2)tg(Aze) \int_{\sin\varphi_1}^{\sin\varphi_2} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-e^2w^2)(1-k^2w^2)}}$$

4. Le calcul de Az_2 se fait par $\sin(Az_2) = C/r(\varphi_2)$.

38.4.2 Le Problème Inverse

On donne les coordonnées (φ_1, λ_1) et (φ_2, λ_2) de deux points M_1 et M_2 . On demande de calculer :

- la longueur s de la ligne géodésique de M_1 à M_2 ,
- l'azimut Az_1 en M_1 ,
- l'azimut géodésique Az_2 en M_2 .

Solution :

1. On doit calculer la constante C . A partir de l'équation (38.57), on peut écrire que :

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}\right)^2 = \frac{\rho^2(\varphi_1)}{r^2(\varphi_1)} \frac{C^2}{(r^2(\varphi_1) - C^2)} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(\varphi_2 - \varphi_1)^2}$$

ce qui donne C :

$$C = \frac{\frac{r^2}{\rho} \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{\rho^2} \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}\right)^2}}$$

En considérant l'azimut compris entre 0 et π , donc Az est positif, C est positif. En le calculant pour φ_1 et φ_2 , on obtient C par la valeur moyenne :

$$C = \frac{C_1(\varphi_1) + C_2(\varphi_2)}{2}$$

2. Par suite, on obtient la valeur de k par (38.59) :

$$k = \frac{a^2 - C^2 e^2}{a^2 - C^2}$$

3. Ayant C , on a par (38.39), Az_1 et Az_2 :

$$\sin Az_1 = \frac{C}{r(\varphi_1)} \text{ et } \sin Az_2 = \frac{C}{r(\varphi_2)}$$

4. Par suite, on a aussi Az_e :

$$\sin Az_e = \frac{C}{a}$$

5. Enfin, l'équation (38.67) détermine s .

On itère le processus.

38.4.3 Calcul de l'Expression (38.67)

Dans ce paragraphe, on calcule en détail :

$$s = \frac{a(1-e^2)}{\cos Az_e} \int_0^{\sin\varphi} \frac{dt}{(1-e^2t^2)\sqrt{(1-k^2t^2)(1-e^2t^2)}}$$

Pour $|x| < 1$, on a les développements limités suivants :

$$\frac{1}{(1+x)^{3/2}} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + \frac{315}{128}x^4 + \dots \quad (38.68)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} + \dots \quad (38.69)$$

En prenant $x = -e^2t^2$ et $x = k^2t^2$, on obtient :

$$\frac{1}{(1-e^2t^2)^{3/2}} = 1 + \frac{3}{2}e^2t^2 + \frac{15}{8}e^4t^4 + \frac{35}{16}e^6t^6 + \frac{315}{128}e^8t^8 + \dots \quad (38.70)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2t^2}} = 1 + \frac{k^2t^2}{2} + \frac{3k^4t^4}{8} + \frac{5k^6t^6}{16} + \frac{35k^8t^8}{128} + \dots \quad (38.71)$$

Par suite :

$$\frac{1}{(1-e^2t^2)\sqrt{(1-k^2t^2)(1-e^2t^2)}} = 1 + \frac{k^2+3e^2}{2}t^2 + \frac{3k^4+6e^2k^2+15e^4}{8}t^4 + \frac{5k^6+9k^4e^2+15k^2e^4+35e^6}{16}t^6 + \frac{35k^8+60k^6e^2+90k^4e^4+140k^2e^6+315e^8}{128}t^8 + \dots \quad (38.72)$$

ou encore à l'ordre 4 :

$$\frac{1}{(1-e^2t^2)\sqrt{(1-k^2t^2)(1-e^2t^2)}} = 1 + mt^2 + nt^4 + \dots$$

$$m = \frac{k^2+3e^2}{2}; \quad n = \frac{3k^4+6e^2k^2+15e^4}{8}$$

38.4.4 Calcul de l'expression (38.64)

On a :

$$\lambda - \lambda_e = (1-e^2)tg(Aze) \int_0^{\sin\varphi} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-e^2w^2)(1-k^2w^2)}}$$

soit dans notre cas :

$$\lambda_2 - \lambda_1 = (1-e^2)tg(Aze) \int_{\sin\varphi_1}^{\sin\varphi_2} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-e^2t^2)(1-k^2t^2)}}$$

Or d'après (38.69) :

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2t^2}} = 1 + \frac{1}{2}e^2t^2 + \frac{3}{8}e^4t^4 + \frac{5}{16}e^6t^6 + \frac{35}{128}e^8t^8 + \dots$$

et :

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2t^2}} = 1 + \frac{k^2t^2}{2} + \frac{3k^4t^4}{8} + \frac{5k^6t^6}{16} + \frac{35k^8t^8}{128} + \dots$$

et :

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{8} + \frac{5t^6}{16} + \frac{35t^8}{128} + \dots \quad (38.73)$$

D'où :

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-e^2t^2)(1-k^2t^2)}} = 1 + \frac{1+k^2+e^2}{2}t^2 + \frac{3+2k^2+2e^2+3k^4+2e^2k^2+3e^4}{8}t^4 + \frac{5+3k^2+3e^2+3k^4+2e^2k^2+3e^4+5k^6+3k^4e^2+3k^2e^4+5e^6}{16}t^6 \quad (38.74)$$

Qu'on écrit sous la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-e^2t^2)(1-k^2t^2)}} = 1 + \alpha t^2 + \beta t^4 + \gamma t^6 + \dots \quad (38.75)$$

avec :

$$\alpha = \frac{1+k^2+e^2}{2} \quad (38.76)$$

$$\beta = \frac{3+2k^2+2e^2+3k^4+2e^2k^2+3e^4}{8} \quad (38.77)$$

$$\gamma = \frac{5+3k^2+3e^2+3k^4+2e^2k^2+3e^4+5k^6+3k^4e^2+3k^2e^4+5e^6}{16} \quad (38.78)$$

38.5 Traitement d'Un Exemple

38.5.1 Le Problème Direct

Soit le point M_1 avec :

- $\varphi_1 = 10.45498299 \text{ gr}$,
- $\lambda_1 = 9.59542429 \text{ gr}$,
- $Az_1 = 249.310168 \text{ gr}$,
- $s = 16255.206 \text{ m}$.

Solution :

- $C = N(\varphi_1) \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin Az_1 = -3.594478.080 \text{ m}$,
- $Az_e = 238.1131471 \text{ gr}$,
- $k = \sqrt{\frac{a^2 - C^2 e^2}{a^2 - C^2}} = 1.209227584$

-Pour calculer φ_2 , on pose $\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, et $s = \Delta s$ on a alors l'équation :

$$\frac{s \cdot \cos Az_e}{a(1-e^2)} = \frac{\Delta \varphi \cos \varphi_1}{(1-e^2 \sin^2 \varphi_1) \sqrt{(1-k^2 \sin^2 \varphi_1)(1-e^2 \sin^2 \varphi_1)}}$$

Littérature

1. **A. Ben Hadj Salem.** 2013. Eléments de Géodésie. (En préparation). 335p.
2. **H. Poincaré.** 1905. Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes . Trans. Amer. Math. Soc. n°6, p237-274 ; Œuvres 6, p38-84.

ETUDE DES ERREURS SYSTÉMATIQUES DANS LA COMBINAISON DES DONNÉES DOPPLER ET DES OBSERVATIONS TERRESTRES

Ce chapitre est extrait du mémoire de fin d'études intitulé " La Combinaison des Données Doppler et les Observations Terrestres Classiques dans la Compensation des Réseaux Géodésiques " présenté en octobre 1986 pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur Géographe Civil de l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques (ENSG/IGN France).

39.1 INTRODUCTION

L'un des problèmes fondamentaux rencontrés dans la compensation des réseaux géodésiques est l'accumulation des erreurs systématiques. Pour les réseaux Doppler, le problème est de moins en moins présent avec l'amélioration des modèles de calcul et l'augmentation de la précision des résultats.

Les données Doppler sont nécessaires à la détection des erreurs systématiques d'orientation, de mise à l'échelle et de position des réseaux géodésiques terrestres (D. B. Thomson, 1976).

39.2 ORIGINES DES ERREURS SYSTÉMATIQUES

Les sources des erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques sont nombreuses (V. Ashkenazi, 1981 ; D.B. Thomson, 1976 ; T. Vincenty, 1985), nous citons les plus importantes :

- la non modélisation des erreurs systématiques des observations de directions, de distances et des distances zénithales,
- la réfraction atmosphérique,
- les erreurs inconnues des observations astronomiques,
- les erreurs sur les altitudes orthométriques et l'imprécision des hauteurs du géoïde et des composantes des déviations des verticales,
- la propagation des erreurs lors de la réduction des observations,
- la calibration des appareils de mesures.

39.3 DÉFINITIONS

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques définitions sur les erreurs.

Soit \mathcal{L} la valeur nominale d'une grandeur que nous cherchons à estimer (coordonnées, angles, distances, ...) et $\overline{\mathcal{L}}$ un estimateur de \mathcal{L} .

L'erreur sur \mathcal{L} est :

$$e_{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}} - \mathcal{L} \quad (39.1)$$

L'erreur $e_{\mathcal{L}}$ est la somme de 2 termes (P. Hottier, 1978) :

$$e_{\mathcal{L}} = e_A + b_{\mathcal{L}} \quad (39.2)$$

où :

e_A : erreur dite d'observation ou accidentelle,

$b_{\mathcal{L}}$: un biais dû au fait que la grandeur $\overline{\mathcal{L}}$ est mal définie, aux caractéristiques du processus de mesure et à ses imperfections.

L'erreur accidentelle représente les fluctuations de l'estimateur ou de l'observable par rapport à la valeur moyenne de la grandeur, soit :

$$e_A = \overline{\mathcal{L}} - E(\overline{\mathcal{L}}) \quad (39.3)$$

avec $E(\cdot)$ l'opérateur moyenne. De (39.3) on a :

$$E(e_A) = 0 \quad (39.4)$$

e_A : est appelée aussi le bruit de l'estimation ou erreur résiduelle de l'observation (P. Hottier, 1978).

Les erreurs accidentelles sont des erreurs centrées et qu'on suppose indépendantes. Par suite, le biais $b_{\mathcal{L}}$ s'écrit :

$$b_{\mathcal{L}} = E(\overline{\mathcal{L}}) - \mathcal{L} \quad (39.5)$$

Dans (39.5), on ne considère que les effets résiduels des erreurs systématiques, la partie principale de ces erreurs est supposée éliminée.

Le biais $b_{\mathcal{L}}$ est considéré plutôt comme une constante dépendante du système de mesure c'est-à-dire l'ensemble incluant la grandeur \mathcal{L} et l'instrument (l'observateur et la procédure et les conditions expérimentales).

39.4 ANALYSE DES ERREURS SYSTÉMATIQUES DANS LES RÉSEAUX GÉODÉSIQUES TERRESTRES

Avant d'étudier les erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques terrestres suite à la compensation des données Doppler avec les observations terrestres, on analyse les erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques sans les données Doppler.

En gardant les mêmes notations, on a l'équation des observations terrestres :

$$A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 = L + V; \quad \text{poids } P \quad (39.6)$$

avec la matrice de variance :

$$\Sigma^2 = \sigma_0^2 \cdot P^{-1} \quad (39.7)$$

et σ_0^2 le facteur de variance unitaire. Les équations (39.6) et (39.7) constituent les modèles fonctionnel et stochastique.

En général, les paramètres définissent l'échelle du réseau terrestre ou la calibration des appareils de mesure des distances sont introduits comme des inconnus dans l'équation (39.6).

Malgré cela, il reste des effets résiduels qui sont dûs à l'insuffisance du modèle stochastique ou encore à l'imprécision de la modélisation des erreurs entrant en jeu dans la compensation.

39.4.1 Sur L'Orientation du Réseau Géodésique Terrestre

39.4.1.1 Le choix de (φ, λ, H) au point fondamental

Au point fondamental d'un réseau géodésique, on a déterminé par des observations astronomiques la latitude et la longitude (φ_a, λ_a) astronomiques et l'azimut Az_a astronomique d'une direction donnée. En ce point, le choix des coordonnées géodésiques φ, λ et de l'azimut géodésique Az_g correspondant à Az_a est varié.

Choix de φ, λ et Az_g :

a - On peut choisir les valeurs de φ, λ proches de φ_a, λ_a et en déduire l'azimut géodésique Az_g en utilisant l'équation de Laplace généralisée soit :

$$\varphi \approx \varphi_a \quad (39.8)$$

$$\lambda \approx \lambda_a \quad (39.9)$$

$$Az_g = Az_a + (\lambda - \lambda_a) \sin \varphi + ((\lambda - \lambda_a) \cos \varphi \sin Az_a + (\varphi - \varphi_a) \sin Az_a) \cot g z \quad (39.10)$$

$$z = Z + (\lambda - \lambda_a) \cos \varphi \sin Az_a - (\varphi - \varphi_a) \cos Az_a \quad (39.11)$$

Z et z sont des distances zénithales astronomique et géodésique.

b - On peut prendre :

$$Az_g \approx Az_a \quad (39.12)$$

$$\lambda \approx \lambda_a \quad (39.13)$$

et on obtient φ à partir de (39.10) soit :

$$\varphi = \varphi_a - (\lambda - \lambda_a) \left(\frac{\sin \varphi_a}{\sin Az_a \cot g Z} + \frac{\cos \varphi_a}{\operatorname{tg} Az_a} \right) + \frac{Az_g - Az_a}{\sin Az_a \cot g Z} \quad (39.14)$$

$$\text{pour } \sin Az_a \cot g Z \neq 0 \quad (39.15)$$

c - On peut choisir :

$$Az_g \approx Az_a \quad (39.16)$$

$$\varphi \approx \varphi_a \quad (39.17)$$

$$\lambda = \lambda_a + \frac{(\varphi_a - \varphi) \sin Az_a \cot g Z + Az_g - Az_a}{\sin \varphi + \cos \varphi \cos Az_a \cot g Z} \quad (39.18)$$

$$\text{avec } \sin \varphi + \cos \varphi \cos Az_a \cot g Z \neq 0 \quad (39.19)$$

d - Les composantes de la déviation de la verticale au point fondamental sont :

$$\xi = \varphi_a - \varphi \quad (39.20)$$

$$\eta = (\lambda_a - \lambda) \cos \varphi \quad (39.21)$$

et la désorientation dans le plan horizontal local est :

$$\zeta = (\lambda_a - \lambda) \sin \varphi = \eta \operatorname{tg} \varphi \quad (39.22)$$

Si on choisit φ, λ et Az_g telles que :

$$(\varphi_a - \varphi)^2 + (\lambda_a - \lambda)^2 + (Az_a - Az_g)^2 \quad \text{minimum} \quad (39.23)$$

avec l'équation de Laplace (39.10), on obtient :

$$\varphi = \varphi_a$$

$$\lambda = \lambda_a$$

$$Az_g = Az_a$$

(39.24)

En pratique, ce sont les cas a et d qui sont choisis si on adopte un point fondamental.

Si on observait plusieurs points de Laplace dans le réseau géodésique, on obtient les azimuts géodésiques observés Az_{go} en utilisant (39.10), par le calcul, on a les azimuts géodésiques calculés Az_{gc} . En l'absence d'erreurs dans les observations et le calcul, on obtient pour chaque point de Laplace :

$$Az_{gc} = Az_{go} \quad (39.25)$$

Malheureusement, il ya des erreurs, l'équation (39.25) devient une équation d'observation et non plus une équation de condition dans la compensation du réseau géodésique, comme suit :

$$dAz_g = Az_{gc} - Az_{go} + v \quad (39.26)$$

où v est le résidu.

Au lieu de (39.26), il serait mieux d'écrire :

$$dAz_g - dAz_{go} = Az_{gc} - Az_{go} + v' \quad (39.27)$$

où dAz_{go} est une inconnue due aux erreurs inconnues dans les observations astronomiques de φ_a, λ_a et Az_a qui se propagent par l'équation (39.10).

Les effets de choix de (φ, λ, H) au point initial :

Soit P le point initial ou fondamental d'un réseau géodésique ayant un ellipsoïde de référence $E(a, e)$ où a et e sont respectivement le demi-grand axe et la première excentricité. Les coor-

données cartésiennes 3D s'expriment par :

$$X = (N + H)\cos\varphi\cos\lambda \quad (39.28)$$

$$Y = (N + H)\cos\varphi\sin\lambda \quad (39.29)$$

$$Z = (N(1 - e^2) + H)\sin\varphi \quad (39.30)$$

H = altitude ellipsoïdique

On considère en ce point 2 choix des valeurs des coordonnées géodésiques :

$$\begin{aligned} \text{choix a : } (\varphi, \lambda) &\xrightarrow{(39.10)} Az_g \\ H : \text{altitude ellipsoïdique(39.28 - 39.30)} &\Rightarrow (X, Y, Z) \quad H = h + \bar{N} \end{aligned} \quad (39.31)$$

$$\begin{aligned} \text{choix b : } (\varphi', \lambda') &\xrightarrow{(39.10)} Az'_g \\ H' : \text{altitude ellipsoïdique(39.28 - 39.30)} &\Rightarrow (X, Y, Z) \quad H' = h' + \bar{N}' \end{aligned} \quad (39.32)$$

On considère que les altitudes orthométriques sont égales :

$$h = h'$$

On a les composantes de la déviation de la verticale :

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi_a - \varphi \\ \eta &= (\lambda_a - \lambda)\cos\varphi \\ \xi' &= \varphi_a - \varphi' \\ \eta' &= (\lambda_a - \lambda')\cos\varphi' \end{aligned} \quad (39.33)$$

et les désorientations dans les plans horizontaux locaux de P :

$$\zeta = (\lambda_a - \lambda)\sin\varphi_a \quad (39.34)$$

$$\zeta' = (\lambda_a - \lambda')\sin\varphi_a \quad (39.35)$$

Posons :

$$\begin{aligned} dAz_g &= Az'_g - Az_g \\ d\varphi &= \varphi' - \varphi \\ d\lambda &= \lambda' - \lambda \end{aligned} \quad (39.36)$$

alors :

$$dAz_g = \sin\varphi_a d\lambda + (\cos\varphi\cos Az_a d\lambda + \sin Az_a d\varphi)\cot gZ \quad (39.37)$$

est la variation de l'équation de Laplace.

Posons :

$$\begin{aligned} d\xi &= \xi' - \xi \\ d\eta &= \eta - \eta' \end{aligned} \quad (39.38)$$

d'où :

$$\begin{aligned} d\xi &= -d\varphi \\ d\eta &= -\cos\varphi_a d\lambda \end{aligned} \quad (39.39)$$

alors :

$$\Theta = \sqrt{d\varphi^2 + \cos^2\varphi_a d\lambda^2} \quad (39.40)$$

où Θ est l'angle des 2 normales au point P. On a aussi :

$$d\zeta = \zeta' - \zeta = -dAz_g = -\sin\varphi_a d\lambda \quad (39.41)$$

si on néglige le terme en $\cot gZ$ dans (39.37).

A partir des équations (39.31),(39.32),(39.34),(39.35) et (39.37) on peut énoncer que le choix des coordonnées géodésiques φ, λ et H au point fondamental du réseau affecte les valeurs numériques :

- du hauteur du géoïde : équations (39.31) et (39.32).
- des composantes de la déviation de la verticale : équations (39.32) et (39.33).
- de l'équation de Laplace (39.37).

De plus, soit O' l'origine du repère géocentrique, O et O' sont respectivement les positions de l'ellipsoïde E dans les choix a et b.

On a la relation vectorielle :

$$\mathbf{O'O} = \begin{pmatrix} X' - X \\ Y' - Y \\ Z' - Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dT_X \\ dT_Y \\ dT_Z \end{pmatrix} \quad (39.42)$$

en supposant que tous les repères ont les axes respectifs parallèles et qu'on néglige les échelles.

L'équation (39.42) montre une variation du vecteur translation du repère tridimensionnel géodésique au repère géocentrique.

Une question qui se pose : est ce que l'orientation du réseau est touchée ? Pour répondre à cette question, on transforme le problème du tridimensionnel en bidimensionnel par le biais des représentations planes conformes.

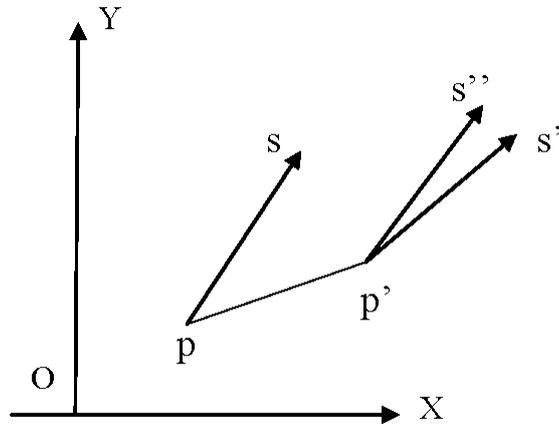


Fig. 39.1 Les effets de choix de (φ, λ, H) au point initial

On considère ici une représentation plane conforme de l'ellipsoïde sur le plan :

$$K : \lambda \quad (\varphi, \lambda) \longmapsto X = X(\varphi, \lambda), Y = Y(\varphi, \lambda) \quad (39.43)$$

où X, Y sont les fonctions définissant la représentation K . Aux azimuts géodésiques, on fait correspondre les gisements G . Soit P le point fondamental du réseau :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\varphi, \lambda) \longmapsto p(X, Y) \in K \text{ image de } E \\ Az_g \longmapsto G \text{ le gisement} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} P(\varphi', \lambda') \longmapsto p'(X', Y') \in K' \text{ image de } E \\ Az'_g \longmapsto G' \text{ le gisement} \end{array} \right.$$

On suppose qu'on a mesuré une distance PS dans la direction de l'azimut géodésique (Az_g, Az'_g) . Soit d cette distance réduite à la représentation. Les valeurs de $(\varphi; \lambda)$ et (φ', λ') étant très proches, d a la même valeur.

Les coordonnées des images du point S sont :

$$S \in K \left\{ \begin{array}{l} X_S = X + d \sin G \\ Y_S = Y + d \cos G \end{array} \right. , \quad S' \in K' \left\{ \begin{array}{l} X_{S'} = X' + d \sin G' \\ Y_{S'} = Y' + d \cos G' \end{array} \right. \quad (39.44)$$

de plus :

$$\begin{aligned} G &= Az_g + g + dV \\ G' &= Az'_g + g' + dV' \end{aligned} \quad (39.45)$$

où :

- g, g' : les gisements des images du méridiens passant par P .
- dV, dV' : les corrections angulaires arc-corde.

d'où en négligeant dV et dV' :

$$G' - G = Az'_g - Az_g + g' - g = dAz_g + g' - g \quad (39.46)$$

Dans la plan OXY (Fig.39.1), on a les composantes des vecteurs \mathbf{ps} et $\mathbf{p's'}$:

$$\mathbf{ps} = \begin{pmatrix} d\sin G \\ d\cos G \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p's'} = \begin{pmatrix} d\sin G' \\ d\cos G' \end{pmatrix} \quad (39.47)$$

Soit s'' un point de OXY telque $\mathbf{p's''}$ est parallèle à \mathbf{ps} , on a alors :

$$\mathbf{p's''} = \begin{pmatrix} d\sin G \\ d\cos G \end{pmatrix} \quad (39.48)$$

Entre $\mathbf{p's''}$ et $\mathbf{p's'}$ on a la relation :

$$\mathbf{p's''} = R(t) \cdot \mathbf{p's'} \quad (39.49)$$

où $R(t)$ est la matrice de rotation suivante :

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad (39.50)$$

et :

$$t = G' - G$$

On a donc :

$$\mathbf{ps'} = \mathbf{pp'} + R(G - G') \cdot \mathbf{ps} \quad (39.51)$$

l'équation (39.51) montre que le réseau obtenu à partir du point p' est semblable à une rotation et une translation près à celui obtenu par p :

$$\boxed{\text{réseau origine } p} \rightarrow \boxed{\text{translation de vecteur } pp'} \rightarrow \boxed{\text{rotation d'angle } G - G'} \rightarrow \boxed{\text{réseau origine } p'}$$

Le vecteur translation et la rotation ne dépendent que de $d\varphi$ et de $d\lambda$ (dAz_g est fonction de $d\varphi$ et $d\lambda$). Par suite, on ne peut déceler une erreur d'orientation du réseau (T. Vincenty, 1985).

Variations des coordonnées géodésiques dues à une rotation autour de la normale d'un point :

Soit P_0 le point de coordonnées géodésique $(\varphi_0, \lambda_0, H_0 = 0)$ et de coordonnées 3D $(X_0, Y_0, Z_0)_g$ calculées par (39.28-39.30). On considère un point $P(\varphi, \lambda, H = 0)$ sur l'ellipsoïde de référence et $(X, Y, Z)_g$ ses coordonnées 3D. Au point P_0 , soit le repère 3D local (P_0, x, y, z) . On note par $(x, y, z)^T$ les composantes de P_0P .

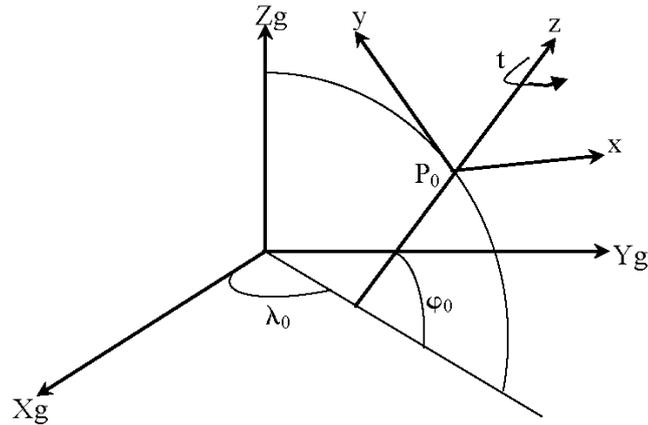


Fig. 39.2 Rotation autour de la normale

Si on effectue au point P_0 une rotation d'angle t autour de la normale à savoir l'axe P_0z , les composantes $(x, y, z)^T$ de P_0P deviennent (Fig.39.2) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (39.52)$$

t étant petit en général, on a :

$$\begin{aligned} x' &= x - ty \\ y' &= y + tx \\ z' &= z \end{aligned} \quad (39.53)$$

Les variations des composantes de P_0P sont :

$$dx = -ty; \quad dy = tx; \quad dz = 0 \quad (39.54)$$

Entre (dx, dy, dz) et $(dX, dY, dZ)_g$ on a la relation :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = R_0 \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = R_0 \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} \quad (39.55)$$

avec R_0 la matrice donnée par :

$$R_0 = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\cos\lambda \cdot \sin\varphi & \cos\lambda \cdot \cos\varphi \\ \cos\lambda & -\sin\lambda \cdot \sin\varphi & \sin\lambda \cdot \cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (39.56)$$

appliquée au point P_0 . Mais on peut aussi écrire :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = R \cdot \begin{pmatrix} N \cos\varphi d\lambda \\ \rho d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_P \quad (39.57)$$

On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} N \cos\varphi d\lambda \\ \rho d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_P = R^T \cdot R_0 \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot R^T \cdot R_0 \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (39.58)$$

Calculons (x, y) . Posons :

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_g = \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}_g \quad (39.59)$$

on a alors la relation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_g \quad (39.60)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} x &= -\Delta X \sin\lambda_0 + \Delta Y \cos\lambda_0 \\ y &= (-\Delta X \cos\lambda_0 - \Delta Y \sin\lambda_0) \sin\varphi_0 + \Delta Z \cos\varphi_0 \end{aligned} \quad (39.61)$$

Finalement en remplaçant (39.61) dans (39.58) et en calculant le produit matriciel $R^T \cdot R_0$, on obtient les variations des coordonnées géodésiques $(d\varphi, d\lambda, dH)$ par :

$$N \cos\varphi d\lambda = t((\Delta X \cos\lambda + \Delta Y \sin\lambda) \sin\varphi_0 - \Delta Z \cos\varphi_0 \cos\lambda) \quad (39.62)$$

avec :

$$l = \lambda - \lambda_0 \quad (39.63)$$

$$\begin{aligned} \rho \cdot d\varphi &= t(\Delta X(-\sin\varphi \sin\lambda \sin\varphi_0 - \cos\varphi \sin\lambda_0 \cos\varphi_0) \\ &+ \Delta Y(\sin\varphi \cos\lambda \cdot \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos\lambda_0) + \Delta Z \sin\varphi \cos\varphi_0 \sin l) \end{aligned} \quad (39.64)$$

$$\begin{aligned} dH &= t(\Delta X(\cos\varphi \sin\lambda \sin\varphi_0 - \sin\varphi \sin\lambda_0 \cos\varphi_0) \\ &+ \Delta Y(-\cos\varphi \cos\lambda \cdot \sin\varphi_0 + \sin\varphi \cos\varphi_0 \cos\lambda_0) - \Delta Z \cos\varphi \cos\varphi_0 \sin l) \end{aligned} \quad (39.65)$$

Ces relations montrent que les variations $(d\varphi, d\lambda, dH)$ sont à un facteur multiplicatif fonctions de t angle de rotation de la normale au point P . t peut être considérée comme une variation d'azimut $t = -dAz$ (t et dAz sont de signes opposés).

Si on suppose que les points P_0 et P ne sont pas sur l'ellipsoïde de référence ($H \neq 0$), il suffit de remplacer dans les formules précédentes N par $N + H$, ρ par $\rho + H$ et tenir compte des altitudes ellipsoïdiques dans le calcul de $(X, Y, Z)_g$ et $(X_0, Y_0, Z_0)_g$.

Exprimons maintenant les variations $(dX, dY, dZ)_g$ des coordonnées 3D $(X, Y, Z)_g$ du point P . A l'aide de (39.55) on a :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = R_0 \cdot \begin{pmatrix} -t \cdot y \\ t \cdot x \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot R_0 \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot R_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (39.66)$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = t \cdot R_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot R_0^T \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (39.67)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\sin\varphi_0 & \sin\lambda_0 \cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & 0 & -\cos\lambda_0 \cos\varphi_0 \\ -\sin\lambda_0 \cos\varphi_0 & \cos\lambda_0 \cos\varphi_0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (39.68)$$

On peut écrire (39.68) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta Z & \Delta Y \\ \Delta Z & 0 & -\Delta X \\ -\Delta Y & \Delta X & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t \cos\varphi_0 \cos\lambda_0 \\ -t \cos\varphi_0 \sin\lambda_0 \\ -t \sin\varphi_0 \end{pmatrix} \quad (39.69)$$

(39.69) exprime les variations des coordonnées dues à la rotation de vecteur $\Omega = (rx, ry, rz)^T$ du repère tridimensionnel translaté au point P_0 . Le vecteur Ω est donné par :

$$\Omega = \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \cos\varphi_0 \cos\lambda_0 \\ -t \cos\varphi_0 \sin\lambda_0 \\ -t \sin\varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dAz \cos\varphi_0 \cos\lambda_0 \\ dAz \cos\varphi_0 \sin\lambda_0 \\ dAz \sin\varphi_0 \end{pmatrix} \quad (39.70)$$

On retrouve les formules de T. Vincenty (1985).

On considère que P_0 est un point particulier du réseau géodésique terrestre, par exemple le point fondamental où on a défini un azimut géodésique initial à partir de l'observation d'un azimut astronomique Az_a . On suppose que cet azimut Az_a est entaché d'une erreur dAz_a . Pour corriger l'orientation de l'ellipsoïde de référence par rapport au repère géocentrique on effectue autour de la normale en P_0 la rotation d'angle :

$$t = -dAz$$

Cette rotation va "basculer" l'ellipsoïde initial sur un autre ellipsoïde (de mêmes dimensions) dont les axes $(X', Y', Z')_g$ se déduisent des anciens axes par la rotation de vecteur Ω donné par (39.70) et par une translation de l'origine O des axes donnés par :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_O = \begin{pmatrix} -Y & Z & 0 \\ X & 0 & -Z \\ 0 & -X & Y \end{pmatrix}_{P_0} \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (39.71)$$

Pour calculer les coordonnées des points dans le nouveau repère il suffit d'ajouter les corrections $(d\varphi, d\lambda, dH)$ exprimées par les formules (39.62), (39.64) et (39.65).

En général, les parties principales des erreurs sont corrigées mais il reste des effets résiduels qui font que le parallélisme entre les axes de l'ellipsoïde de référence du réseau géodésique terrestre et ceux du référentiel géocentrique n'est jamais obtenu parfaitement (P. Vanicek & G. Carrera, 1985).

39.4.1.2 Sur la variation de l'azimut

Dans ce paragraphe, on va étudier l'effet des rotations des axes de l'ellipsoïde de référence du réseau géodésique sur l'azimut géodésique.

Soit (O, X, Y, Z) le repère 3D géodésique où est défini l'ellipsoïde de référence. En un point P_0 du réseau géodésique, on a un azimut géodésique d'une direction P_0P . Dans (O, X, Y, Z) on a :

$$\begin{aligned} P_0(X, Y, Z)_0 &\rightarrow \boxed{\text{équation (3-1)}} \rightarrow (\varphi, \lambda, H)_0 \\ P(X, Y, Z) &\rightarrow \boxed{\text{équation (3-1)}} \rightarrow (\varphi, \lambda, H) \end{aligned} \quad (39.72)$$

Posons :

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix} \quad (39.73)$$

$$\begin{cases} x = -\sin\varphi_0(\Delta X \cos\lambda_0 + \Delta Y \sin\lambda_0) + \Delta Z \cos\varphi_0 \\ y = -\Delta X \sin\lambda_0 + \Delta Y \cos\lambda_0 \end{cases} \quad (39.74)$$

L'azimut calculé en P_0 est donné par :

$$tg(Az_g) = \frac{y}{x} \quad (39.75)$$

On suppose que les axes OX, OY, OZ , sont mal orientés. On fait subir au repère (O, X, Y, Z) trois rotations infinitésimales de vecteur $\Omega = (rx, ry, rz)^T$ donné. Dans (O, X, Y, Z) , on a Az_g , par suite on obtient dans (O, X', Y', Z') l'azimut $Az_g + dAz_g$. Nous allons calculer dAz_g en fonction de rx, ry, rz .

Dans (O, X', Y', Z') on a :

$$P_0 : \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} X + dX \\ Y + dY \\ Z + dZ \end{pmatrix}_0 ; \quad \begin{pmatrix} \varphi' \\ \lambda' \\ H' \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} \varphi + d\varphi \\ \lambda + d\lambda \\ H + dH \end{pmatrix}_0 \quad (39.76)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} -Y & Z & 0 \\ X & 0 & -Z \\ 0 & -X & Y \end{pmatrix}_0 \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = U_0 \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (39.77)$$

et :

$$\begin{pmatrix} (N+H)\cos\varphi d\lambda \\ (\rho+H).d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_0 = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_0 = R_0^T \cdot U_0 \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (39.78)$$

soit :

$$\begin{aligned} (N_0 + H_0)\cos\varphi_0 d\lambda_0 &= (\cos\lambda_0 rx + \sin\lambda_0 ry)Z - rz(N_0 + H_0)\cos\varphi_0 \\ (\rho_0 + H_0)d\varphi_0 &= (-rx\sin\lambda_0 + ry\cos\lambda_0)\left(\frac{a^2}{N_0} + H_0\right) \\ dH_0 &= (-rx\sin\lambda_0 + ry\cos\lambda_0)N_0 e^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \end{aligned} \quad (39.79)$$

Pour le point P , on a dans (O, X', Y', Z') :

$$P : \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + dX \\ Y + dY \\ Z + dZ \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} \varphi' \\ \lambda' \\ H' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi + d\varphi \\ \lambda + d\lambda \\ H + dH \end{pmatrix} \quad (39.80)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (39.81)$$

La différentielle de (39.75) donne :

$$d(Az_g) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad (39.82)$$

Le calcul de $x^2 + y^2$ donne :

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 = & \Delta X^2(1 - \cos^2 \lambda_0 \cos^2 \varphi) + \Delta Y^2(1 - \sin^2 \lambda_0 \cos^2 \varphi_0) + \Delta Z^2 \cos^2 \varphi_0 \\
& - 2\Delta X \Delta Y \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \cos \varphi_0 - 2\Delta Y \Delta Z \sin \lambda_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \\
& - 2\Delta Z \Delta X \cos \lambda_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0
\end{aligned} \tag{39.83}$$

Le calcul de $xdy - ydx$ donne :

$$\begin{aligned}
xdy - ydx = & \begin{pmatrix} -\Delta Z \cos \varphi_0 (\Delta X \cos \lambda_0 + \Delta Y \sin \lambda_0) + \sin \varphi_0 (\Delta X^2 + \Delta Y^2) \\ \cos \varphi_0 ((\Delta Y^2 - \Delta X^2) \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 + \Delta X \Delta Y \cos 2\lambda_0) \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} d\lambda_0 \\ d\varphi_0 \\ dH_0 \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} \Delta Y \sin \varphi_0 - \Delta Z \sin \lambda_0 \cos \varphi_0 \\ -\Delta X \sin \varphi_0 + \Delta Z \cos \lambda_0 \cos \varphi_0 \\ -y \cos \varphi_0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} dX - dX_0 \\ dY - dY_0 \\ dZ - dZ_0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{39.84}$$

avec en utilisant (39.77) et (39.81) :

$$\begin{pmatrix} dX - dX_0 \\ dY - dY_0 \\ dZ - dZ_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta Y & \Delta Z & 0 \\ \Delta X & 0 & -\Delta Z \\ 0 & -\Delta X & \Delta Y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -rx\Delta Y + ry\Delta Z \\ rx\Delta X - rz\Delta Z \\ -ry\Delta X + rz\Delta Y \end{pmatrix} \tag{39.85}$$

Due à la rotation de vecteur $(rx, ry, rz)^T$, l'azimut géodésique dans la direction P_0P va varier de dAz_g . L'expression de dAz_g est de la forme :

$$dAz_g = a_1 rx + a_2 ry + a_3 rz \tag{39.86}$$

où les coefficients a_1, a_2 et a_3 sont fonctions de $(\varphi_0, \lambda_0, H_0)$ et de (φ, λ, H) . On peut alors introduire dans chaque équation d'observation d'un azimut astronomique le terme :

$$-a_1 rx - a_2 ry - a_3 rz \tag{39.87}$$

Dans (39.87), rx, ry et rz ne doivent être confondues avec les paramètres du modèle de Bursa-Wolf.

T. Vincenty (1982, 1985) proposait l'introduction dans l'équation d'observation d'un azimut un terme similaire mais avec des coefficients différents obtenus avec une autre approche.

Z. Zhou (1983) a étudié les systématismes de l'orientation de l'ellipsoïde à partir de l'expression de l'azimut géodésique donnée par (39.75) et de (39.82).

Exemple numérique :

Dans le tableau 39.1 ci-dessous, on donne les variations de l'azimut géodésique dues à la rotation (rx, ry, rz) utilisant l'ellipsoïde de Clarke Français 1880. Ce tableau montre qu'une rotation rz n'a pas d'effet sur l'azimut. Par contre une variation de rx fait varier l'azimut géodésique d'une quantité sensiblement égale.

$\varphi = 40\text{ gr}, \lambda = 10\text{ gr}$ $H = 100\text{ m}$ $Az_g = 56.6052\text{ gr}$	rx (dmgr)	ry (dmgr)	rz (dmgr)	dAz _g (dmgr)
	1.00	0.00	0.00	1.32
	1.00	1.00	0.00	1.35
	1.00	1.00	1.00	1.35
	2.00	1.00	1.00	2.67
	2.00	2.00	1.00	2.70
	2.00	2.00	2.00	2.70
	3.00	0.00	0.00	3.96
	0.00	3.00	0.00	0.09
	0.00	0.00	3.00	0.00
	3.00	3.00	0.00	4.05
	0.00	5.00	0.00	0.15

Tableau 39.1 Les Variations de l'Azimut Géodésique

39.4.1.3 Sur l'inconnue d'orientation

Parmi les inconnues qui jouent un rôle fondamental dans l'orientation d'un réseau géodésique terrestre sont celles d'orientation des observations angulaires azimutales.

Par manque d'observations d'azimuts astronomiques en chaque point du réseau géodésique, les inconnus d'orientation TH jouent le rôle d'"observations" d'azimuts géodésiques.

En l'absence des erreurs, l'inconnue d'orientation TH en une station et l'azimut géodésique d'une direction Az_g sont liés par une relation linéaire à savoir :

$$Az_{g_0} = TH + L \quad (39.88)$$

où :

L : différence de lectures angulaires horizontales réduites au plan horizontal géodésique local.

Az_{g_0} : l'azimut géodésique "observé" inconnu.

De (39.88) l'erreur sur l'azimut géodésique est composée de 2 erreurs : l'une provient de la détermination de TH par le calcul de la compensation, l'autre est due aux mesures et à la réduction des observations angulaires. On peut écrire :

$$e_{Az_g} = e_{TH} + e_L \quad (39.89)$$

e_L peut-être la résultante de 4 erreurs :

$$e_L = e_{L_s} + e_{L_o} + e_{L_v} + e_{L_r} \quad (39.90)$$

avec : e_{L_s} : erreurs dues à la mise en station et à l'appareil de mesures.

e_{L_o} : erreurs dues à l'observation.

e_{L_v} : erreurs dues au point visé (décentrage, excentrement, ...).

e_{L_r} : erreurs dans la réduction des observations.

En pratique, la partie principale de e_L est éliminée par les procédés connus, mais il reste toujours un effet résiduel.

En ce qui concerne l'erreur sur l'inconnue d'orientation TH on a :

$$e_{TH} = \overline{TH} - \mathbf{TH} \quad (39.91)$$

avec :

\overline{TH} : la valeur de TH déterminée par la compensation.

\mathbf{TH} : la valeur nominale de TH .

Généralement, on utilise une valeur moyenne TH_m comme valeur approchée de TH . On fixera un seuil t tel que :

$$\text{si } |TH_o - TH_c| > t \text{ la visée est rejetée}$$

E. Grafarend (1985) a montré que si on fixait dans un réseau géodésique l'échelle, l'orientation et la position d'un point et si on effectuait sur l'ensemble des points du réseau les observations angulaires azimutales et verticales, alors les éléments $(\varphi_a, \lambda_a, TH)$ seraient déterminés en tout point du réseau.

Ce résultat montre le rôle que peut jouer les inconnues d'orientation dans le calcul d'un réseau géodésique.

En négligeant les erreurs systématiques sur les lectures L , on peut écrire :

$$dTH = dAz_g \quad (39.92)$$

On peut donc inclure dans chaque équation d'observation angulaire horizontale les termes de systématismes d'orientation donnés par (39.87).

39.4.2 Sur la mise à l'échelle d'un réseau géodésique

39.4.2.1 Introduction

Avant de voir la question de la mise à l'échelle, nous revenons sur les définitions des facteurs d'échelle que P. Vanicek (1975) présentait dans son rapport sur les datums géocentriques et géodésiques.

En effet, il y a 2 choix : soit de dire que le facteur d'échelle d'un système de coordonnées est donné indépendamment des mesures de distances ou qu'il soit déterminé à partir d'observations de distances. En d'autres termes l'échelle définie à partir de mesures (de distances) peut-être considérée comme le résultat d'une distorsion d'échelle du réseau géodésique (respectivement géocentrique) sans aucune influence du système des coordonnées géodésiques (respectivement géocentriques), ou qu'en moyenne la distorsion d'échelle peut être interprétée comme un influençant l'échelle du système de coordonnées.

Par exemple, considérons un système de coordonnées géodésiques $(O, X, Y, Z)_g$ ayant la base (E_X, E_Y, E_Z) telle que :

$$E_i^T . E_j = \delta_{ij} \quad i, j = X, Y, Z; \quad \delta_{ij} : \text{le symbole de Kroneker} \quad (39.93)$$

Dans ce système, le facteur d'échelle s vaut 1. On définit dans ce système de coordonnées un réseau géodésique. Pour sa définition on introduit la condition :

distance observée entre 2 points A, B = distance calculée entre les points A,B

soit :

$$D_{Obs} = \left(\sum_{X,Y,Z} (X_A - X_B)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (39.94)$$

De (39.94), le facteur d'échelle en A et B vaut :

$$s(A, B) = 1 \quad (39.95)$$

La propagation des erreurs dans le réseau fait que le facteur d'échelle du système s passe de la valeur 1 à la valeur :

$$s = 1 + m \quad (39.96)$$

donc cette distorsion du facteur d'échelle va jouer sur le facteur d'échelle du système de coordonnées qui va se définir par :

$$E_i^T . E_j = (1 + m')^2 \delta_{ij} \quad (39.97)$$

où m' est l'échelle moyenne sur le réseau géodésique.

En utilisant les notations du paragraphe 3 de ce chapitre, considérons la relation entre les vecteurs X_g et X' définis respectivement dans les systèmes géodésique et géocentrique, on a :

$$(1 + m'')X' = T + (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & -rx & ry \\ rx & 1 & -rz \\ -ry & rz & 1 \end{pmatrix} .X_g \quad (39.98)$$

avec :

$1 + m''$ le facteur d'échelle dans le système géocentrique.

$1 + m$ le facteur d'échelle dans le système géodésique.

L'équation (39.98) décrit le cas où les réseaux respectifs ont le même facteur d'échelle que celui des systèmes de coordonnées .

L'équation (39.98) ne change pas si on écrit (le terme $m''.T$ est négligable).

$$(1 + m'')(X' - T) = (1 + m)J(rx, ry, rz).X_g \quad (39.99)$$

avec $J(rx, ry, rz)$ la matrice donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -rx & ry \\ rx & 1 & -rz \\ -ry & rz & 1 \end{pmatrix} . \quad (39.100)$$

Si on considère le point initial du réseau géodésique de rayon vecteur X_{g_0} dans le système de coordonnées géodésiques, on peut écrire vectoriellement :

$$X_g = X_{g_0} + \Delta X_g \quad (39.101)$$

L'équation (39.99) devient :

$$(1 + m'')(X' - T) = (1 + m)J.X_{g_0} + (1 + m).J.\Delta X_g \quad (39.102)$$

Si on interprète le facteur d'échelle $1 + m$ comme influençant seulement le réseau géodésique, on pourra écrire (39.102) comme suit :

$$(1 + m'')(X' - T) = J.X_{g_0} + (1 + m).J.\Delta X_g \quad (39.103)$$

En pratique, on calcule un seul facteur d'échelle :

$$s = 1 + n = \frac{1 + m}{1 + m''} \quad (39.104)$$

par :

$$X' = T + J.X_{g_0} + (1 + n).J.\Delta X_g \quad \text{ou} \quad X' = T + (1 + n).J.X_g \quad (39.105)$$

On considère que les 2 systèmes de coordonnées géocentriques et géodésiques ont un même facteur d'échelle égal à 1 et que n est une distorsion d'échelle dans le réseau géodésique (P. Vanicek, 1975).

39.4.2.2 Modélisation du facteur d'échelle dans la compensation du réseau géodésique

Afin de rendre homogène le facteur d'échelle sur l'ensemble du réseau géodésique, on introduit dans les équations d'observations de distances un facteur d'échelle correspondant à chaque type d'appareils utilisés comme suit :

$$dD + D_{Cal} - (1 + m)D_{Obs} = v$$

soit en 3-D :

$$\sum_{X,Y,Z} \left(\frac{\Delta X_{ij}}{D_{ij}} (dX_i - dX_j) \right) + mD_{ij} = D_{Obs_{ij}} - D_{Cal_{ij}} + v_{ij} \quad (39.106)$$

avec :

$$\Delta X_{ij} = X_i - X_j$$

Dans l'équation (39.106) m n'est pas l'échelle du réseau géodésique.

Entre 2 points M, M' du réseau, on peut définir le facteur d'échelle par :

$$s = 1 + m = \frac{D_{Cal}}{D_{Obs}} = 1 + \frac{D_{Cal} - D_{Obs}}{D_{Obs}} \quad (39.107)$$

avec :

D_{Cal} : la distance MM' calculée à partir des coordonnées géodésiques terrestres compensées.
 D_{Obs} : la distance MM' observée avec un instrument "parfait".

On désigne par un instrument "parfait" un instrument qui donne la distance D_{Obs} avec une erreur non sensible par le réseau géodésique.

Pour les grandes distances, la méthode Doppler est un instrument "parfait". D_{Obs} peut-être calculée à partir des coordonnées Doppler.

Pour les réseaux Doppler, le VLBI constitue un instrument "parfait".

(39.107) donne l'échelle du réseau par :

$$m = \frac{D_{Cal} - D_{Obs}}{D_{Obs}} \quad (39.108)$$

en omettent les indices on peut écrire :

$$m = \frac{dD}{D} \quad (39.109)$$

soit pour le couple (M, M') :

$$m(M, M') = \frac{1}{D^2} (\Delta X(dX' - dX) + \Delta Y(dY' - dY) + \Delta Z(dZ' - dZ)) \quad (39.110)$$

avec :

$$\Delta X = X' - X; \Delta Y = Y' - Y; \Delta Z = Z' - Z$$

supposant que le point M est exempt d'erreurs, on a :

$$dX = dY = dZ = 0$$

l'échelle devient :

$$m = \frac{1}{D^2} (\Delta X dX' + \Delta Y dY' + \Delta Z dZ')$$

Pour le point M' , on suppose qu'il se trouve à l'intérieur d'un ellipsoïde d'erreurs avec dX' , dY' et dZ' vérifiant l'équation :

$$\sum_{j=1}^{j=3} a_{jj} dX'^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} dX' dY' + c < 0 \quad (39.111)$$

où les coefficients a_{ij} , c sont fonctions des éléments de la matrice variance du point M' .

la condition (39.111) limite les valeurs de l'échelle m .

39.4.2.3 Expression de l'échelle en fonction des coordonnées géodésiques (φ, λ, H)

On a :

$$D^2 = \mathbf{M}\mathbf{M}'^T \cdot \mathbf{M}\mathbf{M}' = \mathbf{M}\mathbf{M}'^2 \quad (39.112)$$

En différenciant (39.112), on obtient :

$$D \cdot dD = \mathbf{M}\mathbf{M}'^T \cdot (d\mathbf{M}' - d\mathbf{M}) = \mathbf{M}\mathbf{M}'^T \cdot d\mathbf{M}' - \mathbf{M}\mathbf{M}'^T \cdot d\mathbf{M} \quad (39.113)$$

On va exprimer les produits scalaires $\mathbf{M}\mathbf{M}'^T \cdot d\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}\mathbf{M}'^T \cdot d\mathbf{M}$ respectivement dans les repères géodésiques locaux de M' et de M .

Dans le repère géodésique local de M , on a :

$$d\mathbf{M} = \begin{pmatrix} (N+H) \cdot \cos\varphi d\lambda \\ (\rho+H) \cdot d\varphi \\ dH \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}\mathbf{M}' = R(M)^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (39.114)$$

Soit :

$$\mathbf{M}\mathbf{M}'^T \cdot d\mathbf{M} = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T \cdot R(M) \cdot \begin{pmatrix} (N+H) \cdot \cos\varphi d\lambda \\ (\rho+H) \cdot d\varphi \\ dH \end{pmatrix} \quad (39.115)$$

De même on obtient :

$$MM^T .dM' = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T .R(M') . \begin{pmatrix} (N' + H') . \cos \varphi' d\lambda' \\ (\rho' + H') . d\varphi' \\ dH' \end{pmatrix} \quad (39.116)$$

L'expression (39.113) devient :

$$D.dD = a'd\lambda' + b'd\varphi' + c'dH' - ad\lambda - bd\varphi - cdH \quad (39.117)$$

avec les coefficients a, b et c (resp a', b' et c') sont :

$$\begin{aligned} a &= (N + H) \cos \varphi (-\Delta X \sin \lambda + \Delta Y \cos \lambda) \\ b &= -(\rho + H) (\sin \varphi (\Delta X \cos \lambda + \Delta Y \sin \lambda) - \Delta Z \cos \varphi) \\ c &= \cos \varphi (\Delta X \cos \lambda + \Delta Y \sin \lambda) + \Delta Z \sin \varphi \end{aligned} \quad (39.118)$$

d'où m :

$$m = \frac{1}{D^2} (a'd\lambda' + b'd\varphi' + c'dH' - ad\lambda - bd\varphi - cdH) \quad (39.119)$$

Si on fait intervenir la distance zénithale Z de M sur M' , on peut écrire m sous la forme :

$$m = m_H \sin^2 Z + m_V \cos^2 Z \quad (39.120)$$

avec :

$$m_H = \frac{1}{D_h^2} (a'd\lambda' + b'd\varphi' - ad\lambda - bd\varphi) \quad (39.121)$$

$$m_V = \frac{1}{D_v^2} (c'dH' - cdH) \quad (39.122)$$

et

$$D_h = D . \sin Z; \quad D_v = D . \cos Z \quad (39.123)$$

Ecrivons le facteur d'échelle s :

$$s = 1 + m = s_H . \sin^2 Z + s_V . \cos^2 Z \quad (39.124)$$

avec :

$$s_H = 1 + m_H; \quad s_V = 1 + m_V \quad (39.125)$$

s_H et s_V : sont des pseudo-facteurs d'échelle respectivement horizontal et vertical.

39.5 LES ERREURS SYSTÉMATIQUES DANS LA COMBINAISON DES DONNÉES DOPPLER AVEC LES OBSERVATIONS TERRESTRES CLASSIQUES

Dans la section précédente, on a traité les erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques sans l'introduction des données Doppler. Nous verrons ci-après les erreurs systématiques dans

les réseaux géodésiques obtenus par la combinaison des données Doppler avec les observations géodésiques classiques.

Entre les rayons vecteurs géocentriques Doppler X' et géodésiques X_g d'un point, on a la relation vectorielle en utilisant le modèle de Bursa-Wolf :

$$X' = T + (1 + m) \cdot J(rx, ry, rz) \cdot X_g \quad (39.126)$$

avec J la matrice définie par (39.100).

Considérons les 2 cas suivants :

- i) Les points du réseau géodésique terrestre sont positionnés correctement dans le référentiel géodésique, mais ce dernier présente une désorientation par rapport au référentiel géocentrique.
- ii) Les points du réseau géodésique sont mal positionnés et que l'orientation interne du réseau n'est pas soignée dans le référentiel géodésique, lui même parallèle convenablement au référentiel géocentrique Doppler.

En pratique, c'est le cas ii qu'on trouve. L'orientation du réseau est faite à partir d'observations astronomiques. Malgré l'utilisation de l'équation de Laplace, l'orientation reste insuffisante.

Les données Doppler ont le rôle de :

- positionner les points du réseau géodésique terrestre,
- orienter le référentiel géodésique terrestre,
- améliorer la mise à l'échelle du réseau géodésique terrestre.

39.5.1 Orientation du référentiel géodésique

Dans ce paragraphe nous étudions le cas i. On suppose que les points M d'un réseau géodésique terrestre sont bien positionnés. On détermine les éléments de la transformation (39.126) et en particulier les angles de rotations (rx, ry, rz) . On peut trouver un point M_0 tel qu'en faisant la rotation autour de la normale en ce point, on va mettre l'ensemble du réseau dans un repère parallèle au repère géocentrique Doppler.

Entre (rx, ry, rz) et (px, py, pH) on a la relation :

$$\begin{pmatrix} px \\ py \\ pH \end{pmatrix} = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}$$

avec R_0 donnée par (39.56).

On pose alors :

$$px = py = 0 \quad (39.127)$$

d'où :

$$pH = \sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2} \quad (39.128)$$

et :

$$\begin{pmatrix} px \\ py \\ pH \end{pmatrix} = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ pH \end{pmatrix} \quad (39.129)$$

En notant :

$$p = \sqrt{rx^2 + ry^2} \quad (39.130)$$

et en résolvant (39.129), on trouve (T. Vincenty, 1985) :

$$\sin\varphi_0 = \frac{rz}{pH}; \quad \sin\lambda_0 = \frac{ry}{p}; \quad \cos\lambda_0 = \frac{rx}{p} \quad (39.131)$$

Sans tenir compte de la translation, on obtient les coordonnées des points dans le nouveau repère géodésique (parallèle au repère géocentrique) par :

$$\bar{X}_g = (1 + m) \cdot J(rx, ry, rz) \cdot X_g \quad (39.132)$$

Ayant \bar{X}_g , on calculera $(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}, \bar{H})$ par les formules inverses de (39.28)-(39.30).

Il serait intéressant de voir les écarts de l'équation de Laplace appliqués aux points de Laplace du réseau géodésique.

39.5.2 Orientation du référentiel géodésique et mise en place du réseau géodésique

Ici, on étudie le cas ii. Les points du réseau géodésique sont mal positionnés. Au lieu d'avoir X_g on a X_{g_0} telque :

$$X_g = X_{g_0} + dX_g = X_{g_0} + R_0 \cdot \begin{pmatrix} (N+H)\cos\varphi d\lambda \\ (\rho+H)d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_0 \quad (39.133)$$

39.5.2.1 Influence de l'altitude ellipsoïdique sur les paramètres du modèle Bursa-Wolf

Dans ce cas, on a $d\lambda = d\varphi = 0$. La relation (39.133) devient :

$$X_g = X_{g_0} + dH \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \sin\lambda \cdot \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (39.134)$$

En remplaçant X_g donnée par (39.134) dans la relation (39.126) on obtient :

$$X' = T + (1+m) \cdot J \cdot X_{g_0} + dH \cdot (1+m) \cdot J \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (39.135)$$

Le terme $m \cdot J \cdot (\cos\lambda \cos\varphi, \sin\lambda \cos\varphi, \sin\varphi)_0^T$ est négligable, l'équation (39.135) devient :

$$X' = T + (1+m) \cdot J \cdot X_{g_0} + dH \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (39.136)$$

Une correction de l'altitude ellipsoïdique en un point se traduit par une correction du vecteur translation T de :

$$dT = dH \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (39.137)$$

Numériquement, on a le tableau 39.2 qui donne les corrections des composantes du vecteur translation en fonction de celles de l'altitude ellipsoïdique pour $\varphi_0 = 40.00$, $\lambda_0 = 10.00$ gr et $H_0 = 100$ m.

Les résultats ci-dessous montrent que les composantes T_x et T_z sont les plus sensibles aux

$dH(m)$	$dTx(m)$	$dTy(m)$	$dTz(m)$
0.001	0.001	0.000	0.001
0.010	0.008	0.001	0.006
0.100	0.080	0.013	0.059
0.200	0.160	0.025	0.018
0.500	0.400	0.063	0.294
0.750	0.599	0.095	0.441
1.000	0.799	0.127	0.588
1.500	1.199	0.190	0.882
1.750	1.398	0.221	1.029
2.000	1.598	0.253	1.176
5.000	3.995	0.633	2.939
10.000	7.991	1.266	5.878

Tableau 39.2 Les Variations du vecteur Translation

variations de l'altitude ellipsoïdique. D'où la nécessité d'avoir une mesure sur le géoïde.

39.5.2.2 Influence de la longitude géodésique

On suppose que $d\varphi = dH = 0$. L'équation (39.126) devient :

$$X' = T + (1+m).J(rx, ry, rz).X_{g_0} + (1+m).J. \begin{pmatrix} -(N+H)\sin\lambda\cos\varphi d\lambda \\ -(N+H)\cos\lambda\cos\varphi d\lambda \\ 0 \end{pmatrix}_0$$

En négligeant les termes en $rx.d\lambda, ry.d\lambda$ et $rz.d\lambda$, on obtient :

$$X' = T + (1+m). \begin{pmatrix} 1 & -rx-d\lambda & ry \\ rx+d\lambda & 1 & -rz \\ -ry & rz & 1 \end{pmatrix}.X_{g_0} \quad (39.138)$$

Une correction $d\lambda$ de la longitude géodésique se traduit par une correction $d\lambda$ de l'angle de rotation rx .

39.5.2.3 Influence de la latitude géodésique

On considère que $d\lambda = dH = 0$. Détaillons l'expression de dX_g , on a :

$$dX_g = (\rho + H)d\varphi. \begin{pmatrix} -\cos\lambda\sin\varphi \\ -\sin\lambda\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (39.139)$$

On peut écrire que :

$$\rho = N(1 - e^2) + \delta N \quad (39.140)$$

où :

$$\delta N = Nt(1 - e^2)(1 + t + t^2 + o(t^2)); \quad t = e^2 \sin^2 \varphi_0$$

Utilisant (39.140), l'équation (39.139) devient :

$$dX_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos\lambda d\varphi \\ 0 & 0 & -\sin\lambda d\varphi \\ \cos\lambda d\varphi & \sin\lambda d\varphi & 0 \end{pmatrix}_0 .X_{g_0} + d\varphi. \begin{pmatrix} -\delta N.\cos\lambda\sin\varphi \\ -\delta N.\sin\lambda\sin\varphi \\ (\delta N - Ne^2).\cos\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (39.141)$$

ou encore :

$$dX_g = dJ.X_{g_0} + \overline{dX}_{g_0} \quad (39.142)$$

En remplaçant (39.142) dans (39.126), on obtient :

$$X' = T + (1+m).(J + dJ).X_{g_0} + (1+m).J.\overline{dX}_{g_0} \quad (39.143)$$

(39.143) montre qu'une correction de $d\varphi$ fait changer les angles des rotations de :

$$\begin{cases} rx \implies rx - \sin\lambda d\varphi \\ ry \implies ry + \cos\lambda d\varphi \\ rz \implies rz \end{cases} \quad (39.144)$$

et le vecteur translation de \overline{dX}_{g_0} .

Avec les mêmes données, on obtient les valeurs numériques dans le tableau 39.3 ci-dessous. De ces valeurs, on remarque que les composantes de la translation varient seulement de quelques *cm*.

$d\varphi$ (dmgr)	dTx (m)	dTy (m)	dTz (m)	drx (dmgr)	dry (dmgr)
0.10	-0.001	0.000	-0.004	-0.016	0.099
0.50	-0.007	-0.001	-0.018	-0.078	0.494
1.00	-0.014	-0.002	-0.036	-0.156	0.988
1.50	-0.020	-0.003	-0.054	-0.235	1.482
2.00	-0.027	-0.004	-0.072	-0.313	1.975
2.50	-0.034	-0.005	-0.091	-0.391	2.469
3.00	-0.041	-0.006	-0.109	-0.469	2.963
4.00	-0.055	-0.009	-0.145	-0.626	3.951
5.00	-0.068	-0.011	-0.181	-0.782	4.983
10.00	-0.136	-0.022	-0.362	-1.564	9.877

Tableau 39.3 Influence de la latitude géodésique

Littérature

1. **D.B. Thomson** : 1976. Combination of geodetic networks. Technical report N°30, department of Surveying Engineering. University of New Brunswick. Fredericton N.B.Canada.
2. **I.I. Mueller** : 1982. African Doppler Survey. Proceedings of the Third International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning. Las Cruces, Feb 8-12, vol 1, pp 637-656.
3. **J. Adam** : 1981. On the determination of similarity coordinate transformation parameters. Presented at the 8th Symposium on Mathematical Geodesy -5th HOTINE SYMPOSIUM- Italy, Sept 7-9. Bollettino Di Geodesia E Scienze Affini, N°3, Vol 41, p 283-290, 1982.
4. **V. Ashkenazi** : 1981. Models for controlling national and continental networks. BG Vol 55, N°1, pp 49-58.
5. **V. Ashkenazi, S.A. Crane & J.W. Williams** : 1981. The OSGB scientific network : combination of satellite and terrestrial data. Annale de Géophysique, tome 37, pp 49-54.
6. **V. Ashkenazi & S.N. Grist** : 1981. Inter-comparison of 3-D geodetic network adjustment models. Proceeding of the International Symposium on Geodetic Networks and Computationq of the IAG, Munich, August 31 to september 5. DGK, série B, N° 258 Vol IV, 1982, pp 37-44.
7. **V. Ashkenazi & S.N. Grist** : 1983. 3-D Geodetic networks adjustment models : significance of different approches. Sympsiun d, Proceedings of the IAG, Vol 2. Hambourg August pp 326 -346 .
8. **M. Baumker** : 1983. Common adjustment of terrestrial and satellite Doppler observing in three dimensions Symposium d, Proceedings of the IAG, Vol 2. Hambourg, August, pp 224-256.
9. **C. Boucher** : 1978. Formulaire pour transformations de coordonnées 3-D cartésiennes ou géographiques

- entre deux systèmes géodésiques. IGN NT/G N°8.
10. **C. Boucher** : 1979. Investigations on geodetic applications of satellite Doppler observations for control networks. Proceedings of the Second International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning, Vol 2. Austin, USA, January 22-26, pp 1001-1025.
 11. **C. Boucher** : 1984. Progress report on the use of space derived data for the Retrig phase III. Retrig Symposium, Copenhagen, October.
 12. **C. Boucher** : 1985. The use of space data for the phase III of Retrig : a status report. Retrig Symposium, The Hague. C/C N°511, IGN 27405, December.
 13. **H.M. Dufour** : 1971. La projection stéréographique de la sphère et de l'ellipsoïde. Sept, IGN/2, 26804.
 14. **H.M. Dufour** : 1980. Evolutions possibles du calcul de Retrig Subcommission, publication N°13, pp 173-175.
 15. **H.M. Dufour** : 1986a. Etude de l'utilisation de la projection stéréographique pour la comparaison de 2 réseaux tridimensionnels. Manuscrit. Février.
 16. **H.M. Dufour** : 1986b. Les référentiels régionaux inverses : une synthèse possible entre la géodésie Tri et Bi-dimensionnelle. Cours de géodésie appliquée. CERN, 14-18 Avril.
 17. **D. Ehlert** : 1981. Combined least squares solution using terrestrial and Doppler observations. Proceeding of the International Symposium on Geodetic Networks and Computations of the IAG, Munich, August 31 to september 5, 1981. DGK série B, N°258 Vol V, 1982, pp 94-103.
 18. **I. Gajderowicz** : 1981. Combined adjustment of Doppler and terrestrial nets in Doppler reference systems. Proceedings of the International symposium on Geodetic Networks and computations of the IAG, Munich, August 31 to september 5, 1981. DGK série B, N°258 Vol V. 1982, pp 98-113.
 19. **Le Géomètre Canadien** : 1974. Communications du symposium International sur les problèmes liés à la définition du réseau géodésique de l'Amérique du Nord, Vol 28 N°4.
 20. **E.W. Grafarend** : 1974. Optimization of geodetic networks. Bollettino Di Geodesia E Scienze Affini. Année 33, N°4 pp 351-406.
 21. **E.W. Grafarend** : 1985. Estimability of astronomical longitude and latitude only from theodolite observations within three-dimensional networks of terrestrial type. BG Vol 59, N°2, pp 124-138.
 22. **L. Grundig, M. Neureither & J. Bahndorf** : 1985. Including Macrometer - type observables into a standart 3-D adjustment program. Proceedings FIG, Inertial, Doppler and GPS measurements for National and Engineering Surveys. Joint Meeting of study Group 5B and 5C July 1-3. Publication UniBW, N°20, Vol 2, October 1985, pp 377-390.
 23. **G.W. Hein** : 1981. A Contribution to 3D-operational geodesy : Part 1 : Principle and observational equations of terrestrial type, pp 31-64 ; Part 2 : concept of solution. pp 65-85. Proceedings of the International Symposium on Geodetic Networks and Computations of the IAG, Munich August 31 to September 5. BGK série B, N°258 Vol VIII, 1982.
 24. **G.W. Hein** : 1986. Integrated Geodesy : State-Of-The-Art 1986 reference text. Lectures Notes. Fourth International Summer School in the Mountains, Admont Austria, August 25- september 5.
 25. **L. Hothem, T. Vincenty & R.E. Moose** : 1982. Relationship between Doppler and other advanced geodetic system measurements based on global data. Proceedings of the Third International geodetic symposium on Satellite Doppler positioning. Las Cruces, Feb 8-12, Vol 1, pp 109-128.
 26. **P. Hottier** : 1978. Théorie des erreurs à deux composantes bruit et silence. Vol 1, RT/G N°2. SGNM. Octobre.
 27. **P. Hottier** : 1984. Analyse numérique, chapitre 1, cours ENSG. IGN France.
 28. **H. Jochemczyk** : 1983. Untersuchungen zur Kombination von geodatischen Punkthaufen. DGK, série C, N°285.
 29. **R. Kelm** : 1983. Estimating relative and absolute coordinates with terrestrial and satellite data Symposium d, Proceedings of the IAG, Vol 2. Hambourg, August, pp 347-371.
 30. **C. Le Cocq et C. Boucher** : 1981. Mathematical model for network geometric adjustment. Proceedings of the International Symposium on Geodetic Networks and Computations of the IAG, Munich August 31 to September 5 ? 1981. DGK série B, N°258, Vol VI, pp 27-42. 1982.
 31. **A. Leick & V. Gelder H.W.** : 1975. On similarity transformations and geodetic network distortions based on Doppler satellite observations. Ohio report N°235.
 32. **P. Meissl** : 1983. Least squares adjustment : A Modern Approach. Mitteilung der geodatischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge N°43.
 33. **J.V. Mierlo** : 1980. Free network adjustment and S-transformations. DGK, série B, N°252, pp 41-54.
 34. **H. Moritz** : 1980. Advanced Physical Geodesy . Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe. Abacus Press

Tunbridge wells Kent.

35. **G. Schmitt** : 1984. Review of networks designs : criteria, risk functions, design ordering. Third Course of The International School of Advanced Geodesy, Erice Italy, April 25-May 10, 1984. Optimization and Design of Geodetic Networks, pp 6-10. Edited by E.W. Grafarend and F. Sanso. Springer-Verlag 1985.
36. **R. Strauß** : 1985. On the variation of the transformation parameters between GPS and the German Horizontal Network. Proceedings FIG, Inertial Doppler and GPS Measurements for National and engineering Surveys. Joint Meeting of Study Group 5B and 5C, July 1-3. Publication UniBW, N°20, October 1985, pp 545-552.
37. **G.L. Strang** : 1980. Variance - covariance transformations of geodetic networks. MG Vol 7, N°1, pp 1-20.
38. **K. Swiatek** : 1984. Anwendung von Doppler Satellitenmessungen zur genauigkeitsverbesserung geodatischer Netze. ZfV N°2, Fevrier, pp 65-75.
39. **D.B. Thomson & E.J. Krakiwski** : 1976. Concepts of the combination of geodetic networks. Proceedings of the First International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning. Las Cruces, Oct. Vol 2, pp 727-746.
40. **P. Vanicek** : 1975. Report on geocentric and geodetic datums. Technical report N°32. Department of Surveying Engineering. University of New Brunswick. Fredericton N.B.Canada.
41. **P. Vanicek & D.E. Wells** : 1974. Positioning of horizontal geodetic datums Symposium Readjustment NAD. Fredericton. The Canadian Surveyor, Vol 28 N°5, pp 531-538.
42. **P. Vanicek & G. Carrera** : 1985. Reference ellipsoid misalignment, deflection components and geodetic azimuths. The Canadian Surveyor, vol 39, N°2, pp 123-130.
43. **T. Vincenty** : 1980. Height - controlled three dimensional adjustment of horizontal networks. BG Vol 54, N°1, pp 37-43.
44. **T. Vincenty** : 1982. Methods of adjusting space systems data and terrestrial measurements. BG Vol 56, N°3, pp 231-241.
45. **T. Vincenty** : 1985. On the meaning of the geodetic orientation. BG Vol 59, N°2, pp 189-199.
46. **W. Welsch** : 1984. Kombinierte Ausgleichung von Doppler-Satellitennetzen und terrestrischen Netzen. Satelliten - Doppler Messungen. Beitrage Zum geodatischen Seminar 24 - 25 september. Publication UniBW, N°15, December 1984, pp 155-191.
47. **W. Welsch & W. Oswald** : 1985. Variance analysis of satellite networks. Proceedings First International symposium on precise Positioning with the Global Positioning System. Vol 2, pp 667-676. Maryland. USA, April.
48. **H. Wolf** : 1980a. On the use of Doppler observations for improving the Retrig adjustment. IAG Retrig Subcommission publication N°13, pp 176-183.
49. **H. Wolf** : 1980b. The Retrig's phase III : problems and solutions (Idem), pp 184-189.
50. **H. Wolf** : 1980c. Scale and orientation in combined Doppler and triangulation nets. BG, Vol 54 N°1, pp 45-53.
51. **H. Wolf** : 1982a. Stochastic aspects in combined Doppler and triangulation nets. BG, Vol 56 N°1, pp 63-69.
52. **H. Wolf** : 1982b. Alternate procedure to combine Doppler measurements with the Retrig adjustment phase III. IAG Retrig Subcommission publication N°14, pp 115-127.
53. **H. Wolf** : 1982c. Minutes on the combining procedure of Doppler observations with the Retrig phase III. IAG Retrig Subcommission publication N°14, pp 212-221.
54. **H. Wolf** : 1984. Satelliten - Dopplermessungen in der Berechnung des Europäischen Dreiecksnetzes Retrig. Satelliten-Doppler messungen, Beitrage zum Geodatischen seminar 24/25 September. Publication UniBW, N°15. December 1984, pp 221-229.
55. **H. Wolf** : 1985. Das-lage und Hohen problem in grossen geodatischen netzen bei Einbeziehung von Satellitendopplermessungen. ZfV N°5, May, pp 179-186.
56. **Z. Zhou** : 1983. Untersuchung der mathematischen modelle zur kombination eines terrestrischen Netzes mit einem satellitennetz. DGK, série C, N°274.

Abréviations :

AIG : Association Internationale de Géodésie.

BG : Bulletin Géodésique, publication de l'AIG, publié par Springer Verlag.

DGK : Publications de "Deutsche Geodatische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften". Munchen.

ENSG : Ecole Nationale des Sciences Géographiques (France).

FIG : Fédération Internationale des Géomètres.

IAG : International Association of Geodesy.

IGN : Institut Géographique National (France).

MG : Manuscripta Geodaetica publiée par Springer Verlag.

Ohio : Department of Geodetic Science, Ohio State University. Columbus. USA.

Retrig : Réseau Européen de triangulation.

UniBW : Universitat der Bundeswehr Munchen.

ZfV : Zeitschrift für Vermessungswesen publié par Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart.

CHAPITRE 40

MÉMOIRE DE GÉODÉSIE PHYSIQUE

Ce mémoire de géodésie physique concerne la présentation de différents aspects du problème géodésique des valeurs à la frontière en géodésie physique avec la traduction de l'article " The Geodetic Boundary Value Problem and the Coordinate Choice Problem " de F. Sanso, publié dans le journal *Bulletin Géodésique*, Volume 55, n° 1, 1981.

Dans ce travail, nous avons développé plus les calculs de l'article original, peut faire l'objet d'un cours d'introduction à la géodésie mathématique et physique.

Ce mémoire a été rédigé durant la période 1984-1997.

40.1 INTRODUCTION

Assumons que la Terre est un corps rigide B qui tourne uniformément autour d'un axe passant par le barycentre O . Nous définissons un repère cartésien tridimensionnel (x_1, x_2, x_3) avec x_3 coïncidant avec l'axe de rotation, l'origine du repère est le barycentre O , x_1, x_2 les deux axes tournant uniformément avec la Terre dans le plan équatorial.

Dans un modèle simplifié, nous connaissons sur la surface inconnue de la Terre :

- W = le potentiel du champ de la pesanteur,
- $g = \|\mathbf{g}\|$ = le module du champ de la pesanteur,

— (Φ, Λ) = les angles définissant la direction de \mathbf{g} dans le repère (x_1, x_2, x_3) .

Déterminer la forme de la surface S , frontière de B et le potentiel du champ de la pesanteur W à travers l'espace Ω , en dehors de S , c'est le problème géodésique classique des valeurs à la frontière (P.G.V.F).

Comme c'est connu, le champ de la pesanteur est composé de deux éléments :

1. le champs gravitationnel (nous le désignons par \mathbf{g} .)
2. l'accélération centrifuge, qui dans le repère (x_1, x_2, x_3) peut s'écrire par la formule :

$$\mathbf{a}_c = \omega^2(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2)$$

avec ω = vitesse angulaire.

Pour plus de simplification du P.G.V.F, nous supposons que nous avons comme données sur la frontière S les quatre quantités :

$$\begin{cases} u = \text{le potentiel du champ gravitationnel et } g = \|\mathbf{g}\| = \text{le module du champ} \\ \text{de la pesanteur} \\ (\Phi, \Lambda) = \text{les angles définissant la direction de } \mathbf{g} \text{ dans le repère } (x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (40.1)$$

Notre problème devient donc de chercher la surface frontière S et le champ de potentiel u qui est harmonique dans Ω , c'est-à-dire que u vérifie :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \quad (40.2)$$

et que u est régulier à l'infini et en tenant compte que l'origine O est placée dans le barycentre tel que :

$$u = \frac{M}{\|\mathbf{x}\|} + \varepsilon(\|\mathbf{x}\|^{-3}) \quad (40.3)$$

avec $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\varepsilon \rightarrow 0$ quand $\|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$, M la masse de B .

40.2 LA FORMULATION DU P.G.V.F EN COORDONNÉES GÉNÉRALES

Commençons avec l'équation du champ en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \quad (40.4)$$

(40.4) est équivalente au système du premier ordre :

$$\mathbf{g} = \nabla u = \mathbf{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = g_1 \mathbf{e}_1 + g_2 \mathbf{e}_2 + g_3 \mathbf{e}_3 \quad (40.5)$$

$$\nabla \mathbf{g} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} = 0 \quad (40.6)$$

ou encore :

$$g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ avec } \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial x_i} = 0 \quad (40.7)$$

Introduisons maintenant un nouveau système de coordonnées (ξ_1, ξ_2, ξ_3) lié à (x_1, x_2, x_3) par les relations :

$$\xi_i = k_i(\mathbf{x}) = k_i(x_1, x_2, x_3) \quad (40.8)$$

$$x_i = h_i(\xi) = h_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (40.9)$$

Les matrices jacobiniennes de la transformation (x_1, x_2, x_3) et son inverse sont notées par $((x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3))$:

$$K = (k_{ij}) = \left(\frac{\partial k_i(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial k_i}{\partial x_j} \right) \quad (40.10)$$

$$H = K^{-1} = (h_{ij}) = \left(\frac{\partial h_i}{\partial \xi_j} \right) \quad (40.11)$$

Dans ce nouveau système de coordonnées, les équations du champ gravitationnel deviennent :

$$g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi_l} k_{li} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u}{\partial \xi_l} h_{li}^{-1} \quad (40.12)$$

ou encore :

$$g_i = \frac{\partial u}{\partial \xi_l} k_{li} = \frac{\partial u}{\partial \xi_l} h_{li}^{-1}$$

et :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial \xi_l} k_{li} = 0$$

Soit encore :

$$\frac{\partial g_i}{\partial \xi_l} k_{li} = \frac{\partial g_i}{\partial \xi_l} h_{li}^{-1} = 0 \quad (40.13)$$

Introduisons la matrice $G = \left(\frac{\partial g_i}{\partial \xi_j} \right)$. Les équations (40.12) et (40.13) peuvent s'écrire ainsi :

$$H^T \cdot \mathbf{g} = \nabla_{\xi} u \quad (40.14)$$

$$Tr(G.H^{-1}) = 0 \quad (40.15)$$

∇_{ξ} l'opérateur par rapport à ξ , H^T désigne transposée de H , Tr trace de matrice. (40.14) et (40.15) sont les équations du champ en coordonnées générales.

Maintenant si une transformation des coordonnées est choisie de façon à fixer les fonctions $k_i(\mathbf{x})$, c'est-à-dire que les ξ_i sont des fonctions connues des x_i , notre problème, décrit dans les nouvelles coordonnées, sera toujours une forme de P.G.V.F et rien ne sera gagné. Mais de l'autre côté, on pourra supposer que les k_i aussi bien les h_i sont des fonctions inconnues et on essayera de les déterminer en imposant que la surface inconnue S (en coordonnées x_i) se transformera en une surface connue \check{S} (en coordonnées ξ_i).

La difficulté dans cette approche se tient dans le choix des autres équations à être satisfaites par $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$ (sont-elles arbitraires ?) et dans l'écriture des conditions aux limites.

Il y a une infinité de transformations et essayer de les caractériser en vaut la peine pour une approche générale du P.G.V.F. Cependant, il y a des choix qui sont "naturels" depuis qu'ils résultent de l'affectation du vecteur ξ comme une fonction connue des 3 parmi les quatre quantités (u, g, Φ, Λ) . Comme ils sont connues sur la surface S , la frontière en coordonnées ξ_i devient fixe : les 4 quantités peuvent être prises comme dérivant le champ de façon à obtenir les équations (40.14) et (40.15) du champ.

La considération du cas sphérique simple dans lequel $u = \frac{M}{\|\mathbf{x}\|}$, $\|\mathbf{g}\| = g = \frac{M}{\|\mathbf{x}\|^2}$ convaincra le lecteur que pour le champ quasi-sphérique, les seules transformations non singulières des coordonnées peuvent venir heureusement en prenant ξ_i comme fonction de (g, Φ, Λ) ou (u, Φ, Λ) .

40.3 L'APPROCHE DE L'ESPACE DE PESANTEUR

Posons :

$$\xi_i = k_i(\mathbf{x}) = k_i(x_1, x_2, x_3) = g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, x_3) \quad (40.16)$$

C'est-à-dire vectoriellement on a :

$$\xi = \|\mathbf{g}\| \begin{pmatrix} \cos\Phi \cos\Lambda \\ \cos\Phi \sin\Lambda \\ \sin\Phi \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \cos\Phi \cos\Lambda \\ \cos\Phi \sin\Lambda \\ \sin\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (40.17)$$

Cette transformation envoie la frontière S à une surface connue \check{S} dans l'espace des vecteurs \mathbf{g} (l'espace de pesanteur).

En effet, en un point de S on connaît g, Φ, Λ mais non x_1, x_2, x_3 , par contre sur \check{S} on connaît $\xi_i = \xi_1, \xi_2, \xi_3$ qui vérifient $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = g^2$.

La région Ω (\mathbf{x} à l'extérieur de B) est transformée en une région $\check{\Omega}$ intérieure à \check{S} .

Suivant le symbolisme du paragraphe 2, nous obtenons :

$$K = \left(\frac{\partial k_i}{\partial x_j} \right) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) = U = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \quad (40.18)$$

car $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$

$$H = K^{-1} = U^{-1} \quad (40.19)$$

$$G = \left(\frac{\partial g_i}{\partial \xi_j} \right) = (\delta_{ij}) = I \quad (40.20)$$

Avec $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j, =1$ si $i = j$, I la matrice unité 3×3 . La matrice U est évidemment symétrique $\implies U^{-1}$ est symétrique et par suite H est symétrique donc $H^T = H$ c'est-à-dire :

$$\frac{\partial h_j}{\partial \xi_i} = \frac{\partial h_i}{\partial \xi_j} \implies \frac{\partial h_i}{\partial \xi_j} - \frac{\partial h_j}{\partial \xi_i} = 0 \implies \nabla_{\xi} \wedge \mathbf{h} = \mathbf{0}$$

où \wedge désigne le produit vectoriel. Nous en déduisons que :

$$\mathbf{h} = \mathbf{grad}_{\xi} \psi = \nabla_{\xi} \psi \quad (40.21)$$

où la fonction ψ est appelée le potentiel adjoint du champ. D'après (40.20), on trouve :

$$H = U^{-1} = \left(\frac{\partial h_i}{\partial \xi_j} \right) = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right) = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial g_i \partial g_j} \right) = \Psi \quad (40.22)$$

Utilisant (40.19) et (40.22) dans (40.14) et (40.15) nous obtenons les équations du champ :

$$H^T \mathbf{g} = \nabla_{\xi} u \implies H \mathbf{g} = \nabla_{\xi} u \implies \Psi \mathbf{g} = \nabla_{\xi} u \quad (40.23)$$

$$Tr(GH^{-1}) = 0 \implies Tr(I\Psi^{-1}) = 0 \implies Tr\Psi^{-1} = 0 \quad (40.24)$$

L'équation (40.23) peut être intégrée, en notant que :

$$\Psi \mathbf{g} = \nabla_{\xi} u \implies \sum_{j=1}^3 \Psi_{ij} g_j = u_i = \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \quad (40.25)$$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sum_{j=1}^3 \Psi_{ij} g_j - \Psi \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \Psi_{ij}}{\partial \xi_i} g_j + \sum_{j=1}^3 \Psi_{ij} \frac{\partial g_j}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_i} = \sum_{j=1}^3 \Psi_{ij} g_j \quad (40.26)$$

Donc (40.26) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\sum_{j=1}^3 \Psi_{ij} g_j - \Psi \right) = \frac{\partial u}{\partial \xi_i}$$

On intègre, d'où :

$$\sum_{j=1}^3 \Psi_j g_j - \Psi = u + cte$$

or :

$$\sum_{j=1}^3 \Psi_j g_j = g \frac{\partial \Psi}{\partial g} \Rightarrow g \frac{\partial \Psi}{\partial g} - \Psi = u + cte$$

En définissant Ψ à une constante additive près, on obtient :

$$\sum_{j=1}^3 \Psi_j g_j - \Psi = g \frac{\partial \Psi}{\partial g} - \Psi = u \quad (40.27)$$

Ainsi pour tout vecteur :

$$\mathbf{g} = \|\mathbf{g}\| \begin{pmatrix} \cos\Phi \cos\Lambda \\ \cos\Phi \sin\Lambda \\ \sin\Phi \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} \cos\Phi \cos\Lambda \\ \cos\Phi \sin\Lambda \\ \sin\Phi \end{pmatrix}$$

sur \check{S} .

Le potentiel u correspondant est donné, (40.27) peut être considérée comme une condition aux limites pour le potentiel adjoint ψ , cette condition aux limites devra être rattachée aux équations du champ (40.23-40.24).

Le problème :

$$Tr\Psi^{-1} = 0 \quad (40.28)$$

$$g \frac{\partial \psi}{\partial g} - \psi = u \text{ sur } \check{S} \quad (40.29)$$

est la formulation de base du P.G.V.F dans l'espace de pesanteur. Il a été très étudié par Sanso, Moritz et Witch.

Ici, nous mentionnons seulement que (40.28-40.29) n'a pas de solutions en général, sauf si les données satisferont à trois conditions, de plus quand la solution existe, elle n'est pas unique, il est évident que si ψ_0 est solution de (40.28-40.29) alors il est pour $\psi = \psi_0 + \lambda \cdot \mathbf{g}$ pour tout vecteur arbitraire λ . Cette indétermination est naturellement liée à l'invariance du P.G.V.F pour les translations spatiales, elle peut être éliminée en ajoutant 3 conditions, par exemple en imposant que le barycentre soit placé à l'origine des coordonnées.

Ces considérations laissent à formuler (40.28-40.29) comme suit : trouver ψ et un vecteur constant \mathbf{c} tels que :

$$Tr\Psi^{-1} = 0 \text{ dans } \check{\Omega}, \quad (40.30)$$

$$g \frac{\partial \psi}{\partial g} - \psi = u + \mathbf{c} \cdot \mathbf{g} \text{ sur } \check{S}, \quad (40.31)$$

$$\text{et } \psi = -2M^{1/2} g^{1/2} + \varepsilon(g^{3/2}) \text{ à l'origine} \quad (40.32)$$

Pour les données d'un modèle quasi-sphérique, on peut prendre :

$$u(\Phi, \Lambda) \approx M^{1/2} g^{1/2}(\Phi, \Lambda) \text{ sur } \check{S}$$

Quelques théorèmes d'existence et d'unicité de la solution de (40.30-40.31-40.32) pour un cas quasi-sphérique ($u(\Phi, \Lambda) \approx M^{1/2} g^{1/2}(\Phi, \Lambda)$ sur \check{S}) peuvent être trouvés dans les références citées par l'auteur.

40.4 L'APPROCHE MARUSSI-CARTÉSIENNE

Nous appelons les coordonnées Marussi-cartésiennes le triplet ($u \cdot \cos \Phi \cdot \cos \Lambda, u \cdot \cos \Phi \cdot \sin \Lambda, u \cdot \sin \Phi$). L'approche Marussi-cartésienne se tient dans le choix de (ξ_1, ξ_2, ξ_3) comme coordonnées Marussi-cartésiennes :

$$\xi = u \frac{\mathbf{g}}{g} = u \begin{pmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \sin \Lambda \\ \sin \Phi \end{pmatrix} \quad (40.33)$$

avec cette transformation, qui est non singulière, dès que nous avons mis à part l'élément qui provient de l'accélération centrifuge, la frontière inconnue S est envoyée sur la surface connue \check{S} :

$$\xi_1 = u(\Phi, \Lambda) \cdot \cos \Phi \cdot \cos \Lambda \quad (40.34)$$

$$\xi_2 = u(\Phi, \Lambda) \cdot \cos \Phi \cdot \sin \Lambda \quad (40.35)$$

$$\xi_3 = u(\Phi, \Lambda) \cdot \sin \Phi \quad (40.36)$$

où $g(\Phi, \Lambda)$ est aussi donnée.

L'espace Ω extérieur à S est ainsi transformé dans $\check{\Omega}$ à l'intérieur de \check{S} et les points à l'infini dans l'espace (x_1, x_2, x_3) sont transformés à l'origine dans l'espace (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

Montrons d'abord 2 relations qui sont conséquences de (40.34-40.35-40.36) et utiles pour la suite, prenons le module du vecteur ξ , d'où :

$$\|\xi\| = \xi = \left\| u \frac{\mathbf{g}}{g} \right\| = u \Rightarrow \xi = u \quad (40.37)$$

On a alors :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \xi}{\partial \xi_i} = \frac{\xi_i}{\xi} \quad (40.38)$$

Utilisant (40.37) et résolvant (40.34-40.35-40.36) par rapport à \mathbf{g} , nous obtenons :

$$\xi = u \frac{\mathbf{g}}{g} \Rightarrow \mathbf{g} = \frac{g}{u} \xi = g \frac{\xi}{\xi} \Rightarrow g_i = \frac{g}{\xi} \xi_i \quad (40.39)$$

Voyons maintenant la première équation du champ (40.14), elle devient :

$$\sum_{l=1}^3 h_{li} g_l = \frac{\partial u}{\partial \xi_i} = \frac{\xi_i}{\xi} \Rightarrow \sum_{l=1}^3 h_{li} \xi_l \frac{g}{\xi} = \frac{\xi_i}{\xi} \quad (40.40)$$

$$\text{d'où } \sum_{l=1}^3 h_{li} \xi_l = \frac{\xi_i}{g} \quad (40.41)$$

Cette relation montre que ξ est un vecteur propre de H^T avec la valeur propre $\frac{1}{g}$.

Pour la deuxième équation (40.15), nous commençons en notant que :

$$G = \left(\frac{\partial g_k}{\partial \xi_i} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_i} (g \cdot \frac{\xi_k}{\xi}) \right) = \left(\frac{\xi_k}{\xi} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} + \frac{g}{\xi} \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_i} - \frac{g \xi_k}{\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial \xi_i} \right)$$

or $\frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_i} = \delta_{ik}$ d'où :

$$G = (G_{ki}) = \left(\frac{\xi_k}{\xi} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} + \frac{g}{\xi} (\delta_{ik} - \frac{\xi_k \xi_i}{\xi^2}) \right) \quad (40.42)$$

Soit $GH^{-1} = (\theta_{kl}) \Rightarrow \theta_{kl} = \sum_{i=1}^3 G_{ki} h_{il}^{-1}$. Exprimons θ_{kk} :

$$\begin{aligned} \theta_{kl} &= \sum_{i=1}^3 G_{ki} h_{il}^{-1} = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\xi_k}{\xi} \frac{\partial g}{\partial \xi_i} + \frac{g}{\xi} (\delta_{ik} - \frac{\xi_k \xi_i}{\xi^2}) \right) h_{ik}^{-1} \\ &= \frac{\xi_k}{\xi} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial g}{\partial \xi_i} h_{ik}^{-1} + \frac{g}{\xi} \sum_{i=1}^3 \delta_{ik} h_{ik}^{-1} - \frac{g}{\xi^2} \sum_{i=1}^3 \xi_i h_{ik}^{-1} \xi_k \end{aligned}$$

$$Tr(GH^{-1}) = \sum_{k=1}^3 \theta_{kk} = 0$$

D'après (40.40), on a $\xi = gH^T \xi \Rightarrow \xi^T = g \xi^T H$ d'où $\xi^T H^{-1} = g \xi^T I \Rightarrow \xi^T H^{-1} \xi = g \xi^T \xi = g \xi^2$.

Revenons à $Tr(GH^{-1})$:

$$Tr(GH^{-1}) = \sum_{k=1}^3 \theta_{kk} = \sum_k \frac{\xi_k}{\xi} \sum_i \frac{\partial g}{\partial \xi_i} h_{ik}^{-1} + \frac{g}{\xi} \sum_k \sum_i \delta_{ik} h_{ik}^{-1} - \frac{g}{\xi^3} \sum_k \sum_i \xi_i h_{ik}^{-1} \xi_k = 0$$

Or :

$$\sum_k \sum_i \delta_{ik} h_{ik}^{-1} = Tr(H^{-1}) \sum_k \sum_i \xi_i h_{ik}^{-1} \xi_k = \xi^T H^{-1} \xi = g \xi^2 \text{ et } \left(\sum_k h_{ik}^{-1} \frac{\xi_k}{\xi} \right) = H^{-1} \frac{\xi}{\xi}$$

En définitive, nous obtenons :

$$Tr(GH^{-1}) = \nabla_{\xi} g H^{-1} \frac{\xi}{\xi} + \frac{g}{\xi} Tr(H^{-1}) - \frac{g}{\xi^3} g \xi^2 = 0$$

Soit :

$$Tr(GH^{-1}) = \nabla_{\xi} g H^{-1} \frac{\xi}{\xi} + \frac{g}{\xi} Tr(H^{-1}) - \frac{g^2}{\xi} = 0 \quad (40.43)$$

Divisons (40.42) par g^2/ξ , nous arrivons à l'équation du champ :

$$\frac{\nabla_{\xi} g H^{-1} \xi}{g^2} + \frac{1}{g} Tr(H^{-1}) - 1 = 0$$

ou :

$$\nabla_{\xi} \left(\frac{1}{g} \right) H^{-1} \xi + \frac{1}{g} Tr(H^{-1}) - 1 = 0 \quad (40.44)$$

Pour réduire le système des équations (40.40) et (40.44) en une seule équation, introduisons le potentiel auxiliaire :

$$\varphi = \sum_l h_l \xi_l = \mathbf{h} \xi \quad (40.45)$$

Comme nous verrons, la matrice H et la fonction $g^{-1} = 1/g$ peuvent être exprimées à la fois au moyen de φ de façon que (40.44) devient notre unique équation de champ avec l'inconnue φ . En effet, prenons la dérivée de (40.45) et utilisant (40.40), nous obtenons :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} = \sum_l \frac{\partial h_l}{\partial \xi_i} \xi_l + \sum_l h_l \frac{\partial \xi_l}{\partial \xi_i} = \sum_l h_l \xi_l + h_i \Rightarrow \frac{\xi_i}{g} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} - h_i \quad (40.46)$$

Calculons :

$$\begin{aligned} \sum_i \xi_i \frac{\xi_i}{g} &= \frac{\xi^2}{g} = \sum_i \xi_i \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} - \sum_i i \xi_i h_i = \xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \varphi \\ \frac{\xi^2}{g} &= \xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \varphi \Rightarrow g^{-1} = \frac{1}{g} = \frac{1}{\xi^2} (\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \varphi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\varphi}{\xi} \right) \end{aligned} \quad (40.47)$$

Utilisant (40.47) dans (40.46), nous trouvons :

$$h_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\varphi}{\xi} \right) \quad (40.48)$$

Différentions (40.48) encore une fois, nous obtenons la relation entre H et φ

$$\frac{\partial h_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i \partial \xi_k} - \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\varphi}{\xi} \right) - \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\varphi}{\xi} \right) \quad (40.49)$$

Nous écrivons (40.49) sous forme symbolique :

$$H = D \cdot \varphi \quad (40.50)$$

avec D la matrice des dérivées partielles du 2ème ordre :

$$D = (D_{ik}) \Rightarrow D_{ik}\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i \partial \xi_k} - \delta_{ik} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\varphi}{\xi^2} \right) - \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\varphi}{\xi^2} \right) =$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i \partial \xi_k} - \frac{\delta_{ik}}{\xi^2} \left(\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \varphi \right) - \frac{\xi_i}{\xi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_k \partial \xi} + \frac{\xi_i \xi_k}{\xi^3} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\xi_i}{\xi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k} - 2\varphi \frac{\xi_i \xi_k}{\xi^4}$$

Or :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \xi_k} = \frac{\xi_k}{\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

D'où :

$$D_{ik}\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i \partial \xi_k} - \frac{\xi_i}{\xi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_k \partial \xi} - \frac{\delta_{ik}}{\xi^2} \left(\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \varphi \right) + 2 \frac{\xi_i \xi_k}{\xi^4} \left(\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \varphi \right)$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_i \partial \xi_k} - \frac{\xi_i}{\xi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi_k \partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left(\delta_{ik} - 2 \frac{\xi_i \xi_k}{\xi^2} \right) \left(\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \varphi \right)$$

Soit :

$$D_{ik} = \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_k} - \frac{\xi_i}{\xi} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \left(\delta_{ik} - 2 \frac{\xi_i \xi_k}{\xi^2} \right) \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - 1 \right) \quad (40.51)$$

Enfin utilisant (40.47) et (40.50) dans (40.44), nous pouvons écrire l'équation du champ à l'aide de la seule inconnue φ comme :

$$- \left[\nabla_{\xi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\varphi}{\xi} \right) \right] (D\varphi)^{-1} \xi + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\varphi}{\xi} \text{Tr}(D\varphi)^{-1} - 1 = 0 \quad (40.52)$$

A cette équation, on peut ajouter la relation :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\varphi}{\xi} \right) = \frac{1}{g} \text{ ou } \xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \varphi = \frac{\xi^2}{g} \quad (40.53)$$

qui peut servir comme une relation aux limites du type problème avec dérivée oblique.

En résolvant les équations (40.52) et (40.53) pour φ et utilisant (40.48), nous obtenons le vecteur champ \mathbf{x} comme fonction de ξ traduisant ce-ci pour \check{S} nous aurons la surface S qui était l'une des inconnus du problème.

L'autre inconnue u peut être obtenue en principe en invertissant $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\xi) \rightarrow \xi = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ et posons alors $u = \xi = \|\mathbf{k}(\mathbf{x})\|$.

L'auteur espérait au début que cette approche Marussi-cartésienne pouvait arriver aux équations du champ avec une condition simple aux limites. Cependant, il n'a pas pu réduire le système (40.40), (40.44) à une seule équation sans introduire le potentiel auxiliaire φ qui inévitablement amène à une condition aux limites du problème avec dérivée oblique et de plus sans unicité. C'est facilement vérifiable en notant si φ_0 est une solution de (40.52) et (40.53), la fonction $\varphi = \varphi_0 + \mathbf{a} \cdot \xi$ est aussi solution du même problème pour toute constante vectorielle \mathbf{a} :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\varphi}{\xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\varphi_0}{\xi} \right) \text{ et } D\varphi = D\varphi_0$$

La non unicité est encore une fois reliée à l'invariance du P.G.V.F par une translation, en revenant à (40.48) et en notant que si :

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{h}_0 = \nabla_{\xi} \varphi_0 - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\varphi_0}{\xi} \right)$$

est le vecteur champ \mathbf{x} correspondant à φ_0 alors :

$$\mathbf{x} = \mathbf{h} = \nabla_{\xi} (\varphi_0 + \mathbf{a} \cdot \xi) - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\varphi_0 + \mathbf{a} \cdot \xi}{\xi} \right) \quad (40.54)$$

$$\mathbf{x} = \nabla_{\xi} \varphi_0 + \frac{\mathbf{a} \cdot \xi}{\xi} - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\varphi_0}{\xi} \right) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \quad (40.55)$$

en notant $\mathbf{a} = a\xi/\xi$.

(40.55) montre pour le moment que la frontière S correspondante à φ est la même que celle de φ_0 translatée par le vecteur constant \mathbf{a} en module.

L'unicité peut être achevée en imposant l'identité entre le barycentre des masses avec l'origine des coordonnées (x_1, x_2, x_3) . Après une simple analyse du comportement asymptotique de φ :

$$\varphi = \mathbf{h}\xi = \mathbf{h}(\xi) \cdot \xi = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} \mathbf{g} / g$$

on réalise facilement que la condition cherchée peut être écrite sous la forme :

$$\varphi = -M + o(\xi^2) \text{ quand } \xi \rightarrow 0 \quad (40.56)$$

car $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} \frac{\mathbf{g}}{g} = -u \|\mathbf{x}\| = -M$.

En approximation quasi-sphérique, on a équivalence avec :

$$(\nabla_{\xi} \varphi)_{\xi=0} = \mathbf{0} = (\mathbf{grad}_{\xi} \varphi)_{\xi=0}$$

En analogie avec l'approche dans l'espace gravité, nous modifions la condition aux limites en ajoutant la constante \mathbf{c} :

$$\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \varphi = \frac{\xi^2}{g} + \mathbf{c} \cdot \xi \quad (40.57)$$

ainsi nous avons équilibré les conditions et les inconnues.

Recapitulons, nous arrivons à la définition suivante du P.G.V.F en coordonnées Marussi-cartésienne : trouver φ et \mathbf{c} tels que :

$$-\left[\nabla_{\xi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\frac{\varphi}{\xi}\right)\right](D\varphi)^{-1}\xi+\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\varphi}{\xi}Tr(D\varphi)^{-1}-1=0\text{ dans } \check{\Omega} \quad (40.58)$$

$$\xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}-\varphi=\frac{\xi^2}{g}+c.\xi\text{ sur } \check{S} \quad (40.59)$$

$$\varphi=-M+o(\xi^2)\text{ quand } \xi\rightarrow 0 \quad (40.60)$$

Pour montrer que ce problème est significatif, nous devons le linéariser au paragraphe suivant sous l'hypothèse que la différence entre l'actuel φ et la solution sphérique φ_0 est une petite quantité du premier ordre.

40.5 L'APPROCHE MARUSSI-CARTÉSIENNES EN APPROXIMATION SPHÉRIQUE

Le potentiel gravitationnel d'une sphère homogène de masse M est :

$$u=\frac{M}{\|\mathbf{x}\|} \quad (40.61)$$

et le vecteur champ de pesanteur :

$$g=-\frac{M}{\|\mathbf{x}\|^3}\mathbf{x} \quad (40.62)$$

Notons que $\mathbf{g}/g=-\mathbf{x}/x$. Nous trouvons à partir de la définition (40.34- 40.36) :

$$\xi=-u\frac{\mathbf{x}}{x}=-\frac{M}{\|\mathbf{x}\|^2}\mathbf{x} \quad (40.63)$$

Notons que la relation connue $\|\xi\|=\xi=\frac{M}{\|\mathbf{x}\|}=u$ est vérifiée. De (40.63) et de la définition (40.45), nous déduisons que le potentiel auxiliaire φ_0 pour une sphère homogène est donné par :

$$\varphi_0=\mathbf{x}.\xi=-M=\text{constante}$$

Vérifions que c'est réellement une solution de (40.58-40.59-40.60). En effet, nous avons :

$$-\left[\nabla_{\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\varphi}{\xi}\right)\right](D\varphi)^{-1}\xi+\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\varphi}{\xi}Tr(D\varphi)^{-1}-1=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\varphi_0}{\xi}\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{-M}{\xi}\right)=\frac{M}{\xi^2}$$

et :

$$\nabla_{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\varphi_0}{\xi}\right)=\nabla_{\xi}\left(\frac{M}{\xi^2}\right)=\mathbf{grad}_{\xi}\left(\frac{M}{\xi^2}\right)=\frac{-2M\xi}{\xi^4} \quad (40.64)$$

et :

$$D\varphi_0=-\frac{M}{\xi^2}(I-2P_{\xi})\text{ avec } P_{\xi}=\begin{pmatrix} \xi_i\xi_k \\ \xi^2 \end{pmatrix}$$

projection dans la direction de ξ d'où $[D\varphi_0]^{-1} = -\frac{\xi^2}{M}(I - 2P_\xi)$. En remplaçant dans (40.58), nous trouvons :

$$-\left(\frac{-2M}{\xi^4}\xi\right) \cdot \frac{-\xi^2}{M}(I - 2P_\xi)\xi + \frac{M}{\xi^2} \text{Tr} \left[-\frac{\xi^2}{M}(I - 2P_\xi) \right] - 1 = \frac{-2\xi}{\xi^2}(I - 2P_\xi)\xi - \text{Tr}(I - 2P_\xi) - 1 = 0$$

Pour l'équation (40.59), nous notons que vu $g = \frac{M}{x^2} = \frac{u^2}{M} = \frac{\xi^2}{M}$, la relation :

$$\xi \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} - \varphi_0 = M = \frac{\xi^2}{g} + \mathbf{c} \cdot \xi$$

est clairement satisfaite avec $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Finalement la troisième relation (40.60) est triviale à vérifier dès que $\varphi_0 = -M$. Si nous assumons que l'actuel potentiel u est proche d'un potentiel sphérique et cette hypothèse peut être testée en observant si la relation $g = \frac{u^2}{M}$ est approximativement satisfaite par les valeurs de la frontière, nous pouvons encore écrire :

$$\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi = -M_0 + \delta\varphi \quad (40.65)$$

en considérant $\delta\varphi$ une petite quantité du 1er ordre, nous pouvons linéariser le problème (40.58-40.60). Linéarisons l'équation du champ en rappelant que pour toute matrice non singulière la relation :

$$d(A^{-1}) = -A^{-1} \cdot dA \cdot A^{-1}$$

est vérifiable, nous pouvons écrire :

$$-\left[\nabla_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\delta\varphi}{\xi} \right) \right] [D\varphi_0]^{-1} \cdot \xi + \left[\nabla_\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\delta\varphi}{\xi} \right) \right] [D\varphi_0]^{-1} [D\delta\varphi] [D\varphi_0]^{-1} \xi \quad (40.66)$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\delta\varphi}{\xi} \right) \right] \text{Tr} [D\varphi_0]^{-1} - \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\varphi_0}{\xi} \right) \right] \text{Tr} [D\varphi_0]^{-2} [D\delta\varphi] = 0 \quad (40.67)$$

En utilisant (40.64), il n'est pas difficile de prouver que (40.66-40.67) se réduit à l'équation simple :

$$\frac{-\xi^2}{M} \Delta \delta\varphi = 0$$

A la place de (40.58-40.59-40.60), nous obtenons pour l'approximation sphérique linéarisée le problème :

$$\Delta \delta\varphi = 0 \quad (40.68)$$

$$\xi \frac{\partial \delta\varphi}{\partial \xi} - \delta\varphi = \left(\frac{\xi^2}{g} - M \right) + \mathbf{c} \cdot \xi \quad (40.69)$$

$$\delta\varphi = -(M - M_0) + o(\xi^2) \quad (40.70)$$

Ceci n'est autre que le bien connu "le problème simple de Molodensky" dans la terminologie de T. Krarup.

Il est facile de prouver que la solution de (40.68-40.69-40.70) existe et elle est unique, dès que les données $u(\Phi, \Lambda)$ et $g(\Phi, \Lambda)$ sont régulières de façon que les fonctions $g \in C^{1+d}$ et $u \in C^{2+d}$ ($d > 0$, C^{1+d} désigne l'ensemble des fonctions $1 + d$ différentiables).

40.6 CONCLUSION

Au paragraphe 2, nous avons défini ce qu'on peut appeler le problème général de choix du système de coordonnées qui entraîne le problème géodésique des valeurs à la frontière une forme de frontière fixe. L'approche de l'espace de gravité et celle de Marussi (légèrement modifiée) sont alors considérées comme des solutions possibles de ce même problème général.

Les deux approches aboutissent en deux problèmes non-linéaires des valeurs à la frontière du type dérivée-oblique, d'une ressemblance frappante, aussi loin que les propriétés de l'unicité et de la régularité des solutions soient considérées.

Il semble que le problème de dérivée oblique (avec solutions non uniques) défini par l'opérateur de frontière :

$$\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \varphi = f$$

est la formulation "naturelle" du P.G.V.F. L'approche Marussi-cartésienne a l'avantage que les conditions de régularité :

$$g(\Phi, \Lambda) \in C^{d+1}, u(\Phi, \Lambda) \in C^{d+2}$$

requis dans l'ordre de garantir l'existence de la solution semblent plus raisonnables que les conditions reciproques ($u \in C^{d+1}, g \in C^{d+2}$ provenant de l'approche de gravité. Ce-ci est dû comme conséquence des relations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \Phi} &= \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial u}{\partial \Lambda} &= \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \Lambda} \end{aligned}$$

Nous exigeons que u soit plus régulière que \mathbf{g} , au moins pour une topographie lisse convenable.

Littérature

1. **T. Krarup.** Letters on Molodensky's Problem. Manuscript.
2. **A. Marussi.** 1951. Fondamenti di geodesia intrinseca. Commiss. Geodet. Italiana. III serie. Memorie n° 7.
3. **A. Marussi.** 1975. Tensor Calculus. Mathematical Geodesy. Methoden und Verfahren der mathematischen Physik. Band 13.
4. **H. Moritz.** 1977. Recent Developments in the Geodetic Boundary Value Problem. Dept. of Geodetic Science, Report 266. Ohio State University.
5. **H. Moritz.** 1980. Advanced Physical Geodesy. Karlsruhe Wichmann.
6. **F. Sanso.** 1977. The Geodetic Boundary Value Problem in Gravity Space. Memorie Accad. Naz. Lincei, Roma.
7. **F. Sanso.** 1978. Molodensky's Problem in Gravity Space. A Review of First Results. Bulletin Géodésique.
8. **F. Sanso.** 1979. On the Local Solvability of Molodensky's Problem in Gravity Space. Manuscripta Geodetica.
9. **F. Sanso.** The Boundary Value Problems in the Representation of the Gravity Field. XVII General Assembly of I.U.G.G. Canberra (in print).
10. **K.J. Witsch.** 1978. Ein schiefes Randwertproblem zu einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer expliziten L_∞ Abschätzung für die zweiten Ableitungen. Institut für angewandte Mathematik der Universität, Bonn.
11. **K.J. Witsch.** 1978. The Geodetic Boundary Value Problem. A uniqueness Result. Institut für angewandte Mathematik der Universität, Bonn.

CHAPITRE 41

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DE L'APPROXIMATION

Ce papier représente des notes rédigées à partir du cours de l'Analyse Numérique suivi à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques pendant les études au Cycle d'Ingénieur Géographe (1984-1986). Ces notes concernent une introduction à la théorie de l'approximation.

41.1 INTRODUCTION

Le problème de l'approximation pose les questions suivantes :

- le choix de l'espace dans lequel on se place pour faire une approximation ; exemple l'ensemble $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle $[0, 1]$ vers l'ensemble des réels \mathbb{R} .

- le choix de la notion de proximité (de distance). Deux fonctions f et g sont proches si :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \quad (41.1)$$

pour $\varepsilon > 0$ donné,

- le choix des fonctions de bases. Exemple : $1, x, \dots, x^n, \dots$ de $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On a comme donnée $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Le problème posé est considérer les composantes linéaires $\sum_{p=0}^n a_p x^p$ de façon que :

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \sum_{p=0}^n a_p x^p - f(x) \right| \leq \varepsilon \quad (41.2)$$

Application : remplacement dans les calculs la fonction par le réel $\sum_{p=0}^n a_p x^p$.

41.2 NOTIONS D'APPROXIMATION

1. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, déterminer un polynôme P tel que $\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)|$ soit le plus petit possible.

2. Même problème avec P de degré donné $N : P(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i$.

3. $\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x) - \sum_{k=-n}^{k=n} a_k e^{-ikx}|^2 dx \leq \varepsilon$ donné, trouver les a_k .

4. Trouver un polynôme $P(x)$ d'interpolation telque :

$$P(x_i) = y_i \quad (41.3)$$

$$P'(x_i) = y_{i1} \quad (41.4)$$

$$P^{(n)}(x_i) = y_{in} \quad (41.5)$$

41.3 MEILLEURE APPROXIMATION DANS UN ESPACE MÉTRIQUE

Définition : Soit E un espace métrique muni d'une distance d . d est une application de $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\forall x, y, z \in E$:

$$d(x, y) = d(y, x) \quad (41.6)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (41.7)$$

$$d(x, y) = 0 \iff x = y \quad (41.8)$$

Exemples :

- $E = \mathbb{R}^3$, $d(x, y) = \|x - y\|$,

- $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$,

- $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $d(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}$,

- E est l'ensemble des fonctions de carré intégrable, $d(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx}$,
- $E = \mathcal{C}^p([a, b], \mathbb{R})$ p fois continuellement dérivables, $d(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} \sup_{j \in \{0, \dots, p\}} |f(x)^{(j)} - g(x)^{(j)}|$.

Problème Posé : Soit $f \in E$ un espace métrique et $F \subset E$, F un sous ensemble, déterminer $\Phi^* \in F$ telque $d(f, \Phi^*) = \min_{\Phi \in F} d(f, \Phi)$.

Soit E un espace vectoriel muni d'une application $\| \cdot \|$ de $E \rightarrow \mathbb{R}^+$:

$$x \rightarrow \|x\| \begin{cases} \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \end{cases} \quad (41.9)$$

L'application $\| \cdot \|$ est appelée norme et l'espace vectoriel E est dit espace vectoriel normé.

Théorème 1. : Si F est un sous espace vectoriel de dimension finie dans l'espace normé E , alors pour toute fonction $f \in E$, il existe $\Phi^* \in F$ qui réalise la meilleure approximation de f .

$$\|f - \Phi^*\| = \min_{\Phi \in F} \|f - \Phi\| \quad (41.10)$$

41.4 APPROXIMATION UNIFORME

Soient $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ensemble dénombrable de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Problème : Chercher les $a_i \in \mathbb{R}$ tels que $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \sum_{n=0}^N a_n f_n(x)|$ plus petit possible ?

Soit F le sous espace vectoriel engendré par les f_n pour $n \leq N$. Soit $\Phi^* \in F$, alors Φ^* s'écrit :

$$\Phi^* = \sum_{n=0}^{n=N} a_n f_n$$

avec $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \sum_{n=0}^N a_n f_n(x)| = 0$.

Soit A un sous ensemble de E . On dit que A sépare les points de $[a, b]$ si pour tout $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ $\exists f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$ pour $x \neq y$.

Exemple : $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $A =$ l'ensemble des polynômes définis dans E .

Théorème 2. : Si l'espace vectoriel $A \subset \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ sépare les points et telque $f \in A$ et $g \in A \Rightarrow fg \in A$ et contient les constantes, alors toute $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ s'approche uniformément par une suite φ_n de A avec :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \varphi_p(x)| = 0 \quad (41.11)$$

Si p_0, p_1, \dots, p_n les polynômes et A l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires finies de polynômes, on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_x |f(x) - \sum_{n=0}^N a_n p_n(x)| = 0 \quad (41.12)$$

41.5 POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV

Considérons $e^{ni\theta}$, on a alors :

$$e^{ni\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p \cos\theta^{n-p} i^p \sin^p\theta = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad (41.13)$$

On sépare partie réelle et partie imaginaire. Pour la partie réelle, on obtient pour p pair soit $2k$:

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^{2k} (\cos\theta)^{n-2k} (1 - \cos^2\theta)^k \quad (41.14)$$

On pose :

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \quad (41.15)$$

Posons :

$$x = \cos\theta; \quad \frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{+\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \text{Arccos } x; \quad -1 \leq x \leq +1 \quad (41.16)$$

$T_n(x)$ est un polynôme dit polynôme de **Tchebychev** d'ordre et de degré n . Il est défini par :

$$T_n(x) = \cos(n \text{Arccos } x); \quad -1 \leq x \leq +1 \quad (41.17)$$

41.6 LES PROPRIÉTÉS DE $T_n(x)$

-1. $-1 \leq T_n(x) \leq +1$,

-2. Si n est pair alors $T_n(x)$ est pair,

-3. Si n est impair alors $T_n(x)$ est impair,

-4. $T_n(x)$ est un polynôme de degré n car $T_n(x) = 2^{n-1}x^n +$ polynômes de degré $\leq n-1$. En effet, le coefficient de x^n est $\sum_k C_n^{2k}$ or $(1+1)^{n-1} = \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l = 2^{n-1} = \sum_{k=0} C_n^{2k}$ en utilisant la formule $C_{n-1}^{2k-1} + C_{n-1}^{2k1} = C_n^2$.

-5. Relations de récurrence entre T_{n+1}, T_n, T_{n-1} . On a :

$$\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta = 2\cos n\theta \cos m\theta$$

pour $m = 1$, on obtient :

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos n\theta \cos \theta$$

soit :

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad (41.18)$$

On a : $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$.

-6. Les zéros de $T_n(x)$:

$$\begin{aligned} T_n(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos(n\text{Arccos}(x)) = 0 \Leftrightarrow n\text{Arccos}(x) = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ &\Leftrightarrow \text{Arccos}(x) = (2k+1)\frac{\pi}{2n} \Leftrightarrow x = \cos\left((2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) \end{aligned}$$

-7. Les maximums et minimums de T_n sont $+1$ et -1 pour $x = 1, \cos(\pi/n), \dots, \cos(k\pi/n)$.

-8. L'ensemble des $T_n(x)$ forme un système de polynômes orthogonaux relativement au produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (41.19)$$

On utilise la formule :

$$\cos n\theta \cos m\theta = T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta) = \frac{1}{2}(\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta)$$

on a :

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\pi} T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta)d\theta = \\ &\frac{1}{2} \int_0^{+\pi} (\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta)d\theta = \begin{cases} n \neq m; & = 0 \\ n = m \neq 0; & = \pi/2 \\ n = m = 0; & = \pi \end{cases} \quad (41.20) \end{aligned}$$

Faisons le changement de variables :

$$x = \cos\theta \Rightarrow d\theta = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

L'équation (41.20) devient :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)T_m(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \sin \neq m; & = 0 \\ \sin = m \neq 0; & = \pi/2 \\ \sin = m = 0; & = \pi \end{cases} \quad (41.21)$$

Remarque : les vecteurs propres de l'équation de Sturm-Liouville :

$$\left[\sqrt{1-x^2}u'(x) \right]' + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}u(x) = 0 \quad (41.22)$$

sont les polynômes $T_n(x)$ et les valeurs propres correspondantes sont n^2 .

Application : soit f une fonction définie et continue de $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On veut l'approcher par des $T_n(x)$. Posons :

$$a_n = \frac{1}{\|T_n\|} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (41.23)$$

avec :

$$\|T_n\|^2 = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n^2(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (41.24)$$

A f on associe $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$, alors f s'écrit :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T_n(x) \quad (41.25)$$

La limite est au sens de la norme :

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-1}^{+1} \frac{f^2(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Alors on a une approximation polynômiale de telle que $\|f(x) - \sum_{n=0}^N a_n T_n(x)\|$ soit aussi petit.

41.7 MEILLEURE APPROXIMATION UNIFORME

Théorème 3. Théorème de Tchebychev : Dans l'ensemble des polynômes de degré n , ayant pour coefficient de terme de plus haut degré 1, c'est $T_n^* = \frac{T_n}{2^{n-1}}$ qui réalise la meilleure approximation de la fonction nulle sur $[0, 1]$.

Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\|\varphi\| = \text{Sup}_{x \in [0, 1]} |\varphi(x)|$ et $\mathcal{P}_n = \{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0\}$.

Alors $\|T_n^*\| = \frac{1}{2^{n-1}} = \text{Min}_{R_n \in \mathcal{P}_n} \|R_n\|$.

Raisonnons par l'absurde, il existe un $R_n \in \mathcal{P}_n$ $\|R_n\| < \|T_n^*\|$. Or :

$$T_n^* - R_n = P_{n-1}$$

de degré $n - 1$ et on a :

$$P_{n-1}(1) = T_n^*(1) - R_n(1) = \frac{1}{2^{n-1}} - R_n(1) \geq 0$$

Soient x_0, x_1, \dots, x_n les $n + 1$ points où T_n^* prend les valeurs $1, -1, \dots$, alors on a :

$$P_{n-1}(x_1) = \frac{T_n^*(x_1)}{2^{n-1}} - R_n(x_1) = -\frac{1}{2^{n-1}} - R_n(x_1) < 0$$

P_{n-1} de degré $n - 1$ a $n + 1$ points où il prend des valeurs alternées positives et négatives donc P_{n-1} aurait n racines $\Rightarrow P_{n-1} \equiv 0 \Rightarrow T_n^* = R_n$ et on a la contradiction car $\|R_n\| \leq \|T_n^*\|$.

41.8 APPROXIMATION UNIFORME POLYNÔMIALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Soit $\mathcal{P}_n = \{\text{ensemble de tous les polynômes de degré } \leq n\}$; p_n^* la meilleure approximation uniforme polynômiale d'une fonction $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, on a alors :

$$\|f - p_n^*\| = \text{Min}_{p_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\| \quad (41.26)$$

On admet l'existence de p_n^* .

Théorème 4. : Si $p_n \in \mathcal{P}_n$ est telle que la fonction $\varepsilon_n(x) = f(x) - p_n(x)$ atteint des valeurs absolues extrêmes alternées $M, -M, M, \dots$ avec $M = \|\varepsilon_n\|$ en $n + 2$ points alternés, alors p_n est la meilleure approximation uniforme polynômiale de f sur $[a, b]$.

Démonstration par l'absurde : $\exists q_n \in \mathcal{P}_n$ avec

$$\|f - q_n\| < \|f - p_n\| = \|\varepsilon_n\| = M$$

Soit $r_n = q_n - p_n$, il est de degré $\leq n$, il change $n + 1$ fois de signe dans l'intervalle x_0, x_1, \dots, x_{n+1} où $\varepsilon_n = \pm M$ et :

$$r_n(x_0) = q_n(x_0) - p_n(x_0) = q_n(x_0) - f(x_0) + f(x_0) - p_n(x_0)$$

Or $|q_n(x_0) - f(x_0)| < M$ et $f(x_0) - p_n(x_0) = \pm M$ donc $r_n(x_0)$ est < 0 ou > 0 , change $n + 1$ fois de signe a $n + 1$ racines $\Rightarrow r_n \equiv 0$.

La réciproque est vraie.

Unicité de p_n^* : Soit p_{n1}^* et p_{n2}^* 2 meilleures approximations polynômiales.

$$\|f - p_{n1}^*\| = \|f - p_{n2}^*\| = \rho_n^*$$

alors :

$$\rho_n^* \leq \|f - \frac{p_{n1}^* + p_{n2}^*}{2}\| \leq \frac{1}{2}\|f - p_{n1}^*\| + \frac{1}{2}\|f - p_{n2}^*\| = \rho_n^* \quad (41.27)$$

En posons :

$$s_n = \frac{p_{n1}^* + p_{n2}^*}{2} \quad (41.28)$$

on a :

$$\rho_n^* = \|f - s_n\| \quad (41.29)$$

Donc $f - s_n$ atteint son maximum en $n + 2$ points de façon alternée en appliquant la reciproque du théorème 3. avec $s_n = \frac{p_{n1}^* + p_{n2}^*}{2}$, il existe x_0, x_1, \dots, x_{n+1} tels que :

$$\rho_n^* = |f(x_i) - s_n(x_i)| \leq \frac{1}{2}|f(x_i) - p_{n1}^*(x_i)| + \frac{1}{2}|f(x_i) - p_{n2}^*(x_i)| \leq \rho_n^* \quad (41.30)$$

car :

$$|f(x_i) - s_n(x_i)| = |f(x_i) - p_{n1}^*(x_i)| = |f(x_i) - p_{n2}^*(x_i)|$$

Les points extrêmes de $f - s_n, f - p_{n1}^*, p_{n2}^*$ sont les mêmes et :

$$|f(x_i) - p_{n1}^*(x_i)| = |f(x_i) - p_{n2}^*(x_i)| = \frac{1}{2}|f(x_i) - p_{n1}^*(x_i) + f(x_i) - p_{n2}^*(x_i)| \quad (41.31)$$

et utilisant :

$$|a| = |b| = \frac{1}{2}|a + b| \Rightarrow a = b \quad (41.32)$$

Alors :

$$p_{n1}^*(x_i) = p_{n2}^*(x_i) \Rightarrow p_{n1}^* = p_{n2}^* \quad (41.33)$$

41.8.1 Calcul de p_n^*

On peut toujours ramener $[a, b]$ à $[-1, +1]$. Soit $f \in \mathcal{C}([-1, +1], \mathbb{R})$, on suppose que f est un polynôme quelconque de degré $\leq n + 1$, soit :

$$P_{n+1}(x) = f(x) = a_{n+1}x^{n+1} + a_nx^n + \dots + a_0 \quad \text{avec } a_{n+1} \neq 0$$

Posons :

$$p_n(x) = P_{n+1}(x) - \frac{a_{n+1}}{2^n} T_{n+1}^*(x) \quad \text{degré} \leq n \quad (41.34)$$

$$\varepsilon_n(x) = f(x) - p_n(x) = P_{n+1}(x) - (P_{n+1}(x) - \frac{a_{n+1}}{2^n} T_{n+1}^*(x)) = \frac{a_{n+1}}{2^n} T_{n+1}^*(x) \quad (41.35)$$

or T_{n+1} atteint en $n+2$ points des valeurs extrémales alternées $\pm \frac{a_{n+1}}{2^n}$.

Cas général : f fonction continuellement dérivable. f s'écrit :

$$f(x) = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r T_r(x) \quad (41.36)$$

avec :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (41.37)$$

$$a_r = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_r(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (41.38)$$

La convergence est uniforme.

$$f(x) - \sum_{r=n+2}^{+\infty} a_r T_r(x) - \sum_{r=0}^n a_r T_r(x) = a_{n+1} T_{n+1} \quad (41.39)$$

Alors :

$$q_n^*(x) = \sum_{r=0}^n a_r T_r(x) \quad (41.40)$$

est meilleure approximation de la fonction $f - \sum_{r=n+2}^{+\infty} a_r T_r(x)$.

41.9 MEILLEURE APPROXIMATION EN QUADRATIQUE

Définition 1 : Un espace de Hilbert H est un espace vectoriel (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}) telqu'il existe une application de $H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} qui à $(x, y) \in H \times H \rightarrow \langle x, y \rangle$ vérifiant :

$$\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (41.41)$$

$$\langle x, x \rangle > 0 \text{ si } x \neq 0 \quad (41.42)$$

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle \quad \text{bilinéaire} \quad (41.43)$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad (41.44)$$

Définition 2 : La norme d'un vecteur x est :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (41.45)$$

Théorème 5. : Toute suite de Cauchy dans un espace de Hilbert H converge. soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall p \geq n_0 \forall q \geq n_0, \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$$

$$\text{et } \exists y \in H \text{ telque } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - y\| = 0 \quad (41.46)$$

Exemples :

- $H = \mathbb{R}$ avec $\langle x, y \rangle = x.y$

- $H = \mathbb{R}^3$ avec $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i.y_i$

- L'ensemble de toutes les fonctions f de carrés intégrables à valeurs complexes est un espace de Hilbert :

$$f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{C} \quad \langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx \quad (41.47)$$

Théorème 6. : *L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions à variables réelles :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (41.48)$$

Notons que si f et g sont orthogonaux, alors $\langle f, g \rangle = 0$, et on a le théorème de Pythagore :

Théorème 7. : *Si f et g sont deux fonctions orthogonaux avec le produit scalaire défini par (41.47), on a :*

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 \quad (41.49)$$

Propriété : *Si H est un espace de Hilbert et K un convexe de H , alors toute suite de Cauchy dans K converge dans K , soit pour tout $w \in H \exists$ un unique $x^* \in K$ telque $\|w - x^*\| = \min_{x \in K} \|w - x\|$.*

Cas particulier : Si K est un sous espace vectoriel telque toute suite de Cauchy dans K converge dans K , alors \exists un unique $x^* \in K$ telque $\|w - x^*\| = \min_{x \in K} \|w - x\|$.

Si K est un sous espace vectoriel de dimension finie, la condition que toute suite de Cauchy dans K converge dans K n'est pas nécessaire, et pour tout $w \in H \exists$ un unique $x^* \in K$ telque $\|w - x^*\| = \min_{x \in K} \|w - x\|$.

41.10 MEILLEURE APPROXIMATION DANS UN ESPACE HILBERTIEN

Théorème 8. : *Soit E un espace de Hilbert et F un sous espace vectoriel de E de dimension finie, alors la meilleure approximation $\Phi^* \in F$ de $f \in E$ existe et unique :*

$$\|f - \Phi^*\| = \min_{\Phi \in F} \|f - \Phi\| \quad (41.50)$$

Théorème 9. : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi^* \in F$ soit meilleure approximation est que :

$$\langle f - \Phi^*, \Phi \rangle = 0 \quad \forall \Phi \in F$$

Démonstration :

Soit $\Phi^* \in F$, $\exists \Phi_1 \neq 0 \in F / \langle f - \Phi^*, \Phi_1 \rangle = \alpha \neq 0$.

Soit :

$$\Phi_2 = \Phi^* + \frac{\alpha}{\|\Phi_1\|^2} \Phi_1 \quad (41.51)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \|f - \Phi_2\|^2 &= \langle f - \Phi_2, f - \Phi_2 \rangle = \langle f - \Phi^* - \frac{\alpha}{\|\Phi_1\|^2} \Phi_1, f - \Phi^* - \frac{\alpha}{\|\Phi_1\|^2} \Phi_1 \rangle = \\ \|f - \Phi^*\|^2 + \frac{\alpha^2}{\|\Phi_1\|^2} + 2 \langle f - \Phi^*, \frac{-\alpha}{\|\Phi_1\|^2} \Phi_1 \rangle &= \|f - \Phi^*\|^2 + \frac{\alpha^2}{\|\Phi_1\|^2} - 2 \frac{\alpha^2}{\|\Phi_1\|^2} = \\ \|f - \Phi^*\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|\Phi_1\|^2} &\leq \|f - \Phi^*\|^2 \end{aligned} \quad (41.52)$$

D'où la contradiction. Réciproquement, soit $\Phi_1 \in F / \langle f - \Phi_1, \Phi \rangle = 0, \forall \Phi \in F$, alors :

$$\begin{aligned} \|f - \Phi\|^2 &= \langle f - \Phi, f - \Phi \rangle = \langle f - \Phi_1 + \Phi_1 - \Phi, f - \Phi_1 + \Phi_1 - \Phi \rangle = \\ \|f - \Phi_1\|^2 + \|\Phi_1 - \Phi\|^2 + 2 \langle f - \Phi_1, \Phi_1 - \Phi \rangle &= \\ \|f - \Phi_1\|^2 + \|\Phi_1 - \Phi\|^2 &\Rightarrow \|f - \Phi_1\| \leq \|f - \Phi\| \quad \forall \Phi \in F \end{aligned} \quad (41.53)$$

Donc Φ_1 est la meilleure approximation de $f \in E$.

Unicité : soient Φ_1^*, Φ_2^* deux meilleures approximations :

$$\langle f - \Phi_1^*, \Phi \rangle = 0 \quad \forall \Phi \in F$$

$$\langle f - \Phi_2^*, \Phi \rangle = 0 \quad \forall \Phi \in F$$

En prenant $\Phi = \Phi_1^* - \Phi_2^*$, on obtient :

$$\langle f - \Phi_1^*, \Phi_1^* - \Phi_2^* \rangle = 0$$

$$\langle f - \Phi_2^*, \Phi_1^* - \Phi_2^* \rangle = 0$$

Par soustraction, on a :

$$\langle \Phi_1^* - \Phi_2^*, \Phi_1^* - \Phi_2^* \rangle = 0 \Rightarrow \|\Phi_1^* - \Phi_2^*\|^2 = 0 \Rightarrow \Phi_1^* = \Phi_2^* \quad (41.54)$$

CQFD

41.10.1 Procédé de calcul de Φ^*

Soient $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ une base orthonormée de E c'est-à-dire :

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} +1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (41.55)$$

$$f = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \varphi_k \quad \text{pour tout } f \in E \quad (41.56)$$

Soit F l'espace vectoriel engendré par $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ et $\Phi^* \in F$, on a alors :

$$\Phi^* = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k \quad (41.57)$$

Calculer les a_k . On utilise $\langle f - \Phi^*, \varphi \rangle = 0 \forall \varphi \in F$, soit :

$$\langle f - \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k, \varphi_h \rangle = 0 \Rightarrow \langle f, \varphi_h \rangle = a_h \quad (41.58)$$

41.11 EVALUATION DE $\|f - \Phi^*\|$

On connaît f et Φ^* d'où $\|f - \Phi^*\|$.

Application : Approximation polynômiale c'est trouver un choix judicieux de polynômes de façon à minimiser $\|f - \Phi^*\|$. Alors, on a :

$$\|f - \Phi^*\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n a_k^2 \quad (41.59)$$

Donnons ci-dessous des exemples.

41.11.1 Les Polynômes de Tchybechev

Soit E :

$$E = \left\{ f : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R} / \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)^2}{\sqrt{1-t^2}} dt < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (41.60)$$

alors, E est un espace vectoriel de Hilbert et soit F telque :

$$F = \{ \text{le sous espace vectoriel de } E \text{ engendré par } \tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_n \}$$

avec :

$$\tilde{T}_k = \frac{T_k}{\|T_k\|}$$

et T_k le polynôme de Tchybechev de degré k , alors Φ^* s'écrit :

$$\Phi^*(x) = \sum_{k=0}^n a_k \tilde{T}_k(x) = \sum_{k=0}^n \left(\int_{-1}^{+1} \frac{f(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right) \tilde{T}_k(x) \quad (41.61)$$

41.11.2 Polynômes de Hermite

Soit E :

$$E = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 e^{-t^2} dt < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t^2} dt \quad (41.62)$$

alors, c'est un espace vectoriel de Hilbert.

Soit la fonction :

$$\Psi(x, t) = e^{-t^2+2tx} = e^{x^2} e^{-(t-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} \quad (41.63)$$

$H_n(x)$ est le n ème polynôme de Hermite de degré n . Il est défini aussi par :

$$H_n(x) = \left(\frac{\partial^n \Psi(x, t)}{\partial t^n} \right)_{t=0} = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \quad (41.64)$$

On a aussi :

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = 2(x-t)\Psi(x, t) \quad (41.65)$$

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} = 2t\Psi(x, t) \quad (41.66)$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2H_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2H_{n-1}(x)t^n}{(n-1)!} \Rightarrow H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad (41.67)$$

41.11.3 Relations d'orthogonalité

Soit $m < n$, calculons :

$$\begin{aligned} \langle H_n, H_m \rangle &= I_{n,m} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(t) H_m(t) e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n H_m(t) \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n} dt = \\ &= \left[(-1)^n H_m(t) \frac{d^{n-1} e^{-t^2}}{dt^{n-1}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} H_m'(t) \frac{d^{n-1} e^{-t^2}}{dt^{n-1}} dt \end{aligned} \quad (41.68)$$

En tenant compte de l'équation (41.67) et $H_0(t) = 1$, on a :

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= 2(-1)^{n-1} m \int_{-\infty}^{+\infty} H_{m-1}(t) \frac{d^{n-1} e^{-t^2}}{dt^{n-1}} dt = 2(-1)^{n-1} m I_{n-1,m-1} = \\ &= 2^n (-1)^{n-m} m! \int_{-\infty}^{+\infty} H_0(t) \frac{d^{n-m} e^{-t^2}}{dt^{n-m}} dt = 0 \end{aligned} \quad (41.69)$$

Donc pour $m < n$, on a $\langle H_n, H_m \rangle = 0$ c'est-à-dire les H_m sont orthogonaux. Si $m = n$, on a :

$$\langle H_n, H_n \rangle = I_{n,n} = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2^n n! \sqrt{\pi} \quad (41.70)$$

Donc les fonctions polynômes $\frac{H_n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$ sont orthonormées. On choisit alors la base φ_k pour $k = 0, n$ avec :

$$\varphi_k(x) = \frac{H_k e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} \quad (41.71)$$

Soit $f \in E$, elle est estimée par Φ^* telle que :

$$\Phi^*(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k \varphi_k(x) \text{ avec } a_k = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi_k(t) dt \quad (41.72)$$

NOTE SUR LA DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE BURSA-WOLF

42.1 INTRODUCTION

Avec le développement de la technologie de positionnement spatial (GPS, GLONASS, Galileo, ComPass), laquelle fournit à l'utilisateur sa position (X, Y, Z) tridimensionnelle dans un système géocentrique mondial donné, par exemple pour la technologie GPS c'est le système dit WGS84 (World Geodetic System 1984), il est nécessaire de savoir la transformation de passage du système géodésique mondial au système géodésique national ou local. Nous présentons ci-après en détail comment déterminer manuellement les paramètres du modèle de Bursa-Wolf de transformations de passage entre les systèmes géodésiques.

Nous utilisons par la suite les notations suivantes :

- (X_1, Y_1, Z_1) les coordonnées cartésiennes 3D dans le système géocentrique (système 1) (O, X_1, Y_1, Z_1)
- (X_2, Y_2, Z_2) les coordonnées cartésiennes 3D dans le système local (système 2) (O', X_1, Y_1, Z_1) .

42.2 LE MODÈLE DE BURSA - WOLF

Ce modèle s'écrit sous la forme vectorielle :

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{T} + (1+m) \cdot \mathbf{R}(rx, ry, rz) \cdot \mathbf{X}_1 \quad (42.1)$$

où :

- \mathbf{X}_2 est le vecteur de composantes $(X_2, Y_2, Z_2)^T$, T désigne transposée,
- $\mathbf{T} = \mathbf{O}'\mathbf{O}$ est le vecteur translation de composantes $(T_X, T_Y, T_Z)^T$ entre les systèmes 1 et 2,
- $1+m$ est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,
- $\mathbf{R}(rx, ry, rz)$ est la matrice de rotation (3×3) pour passer du système 1 au système 2,
- \mathbf{X}_1 est le vecteur de composantes $(X_1, Y_1, Z_1)^T$.

En développant (42.1), on obtient :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad (42.2)$$

avec (rx, ry, rz) les rotations comptées positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Comment déterminer les paramètres modèle (42.1) ?

42.3 DÉTERMINATION DE L'ÉCHELLE $1+m$

On suppose donné un ensemble de points P_i pour $i = 1, n$ connus dans les deux systèmes S_1 et S_2 . On écrit l'équation (42.1) pour deux points P_j et P_k , d'où :

$$\mathbf{X}(P_j)_2 = \mathbf{T} + (1+m) \cdot \mathbf{R}(rx, ry, rz) \cdot \mathbf{X}(P_j)_1 \quad (42.3)$$

$$\mathbf{X}(P_k)_2 = \mathbf{T} + (1+m) \cdot \mathbf{R}(rx, ry, rz) \cdot \mathbf{X}(P_k)_1 \quad (42.4)$$

Par différence, on obtient :

$$(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_2 = (1+m) \cdot \mathbf{R}(rx, ry, rz) \cdot (\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_1 \quad (42.5)$$

On prend la norme des deux membres de (42.5) et que $1+m > 0$:

$$\|(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_2\| = \|(1+m) \cdot \mathbf{R}(rx, ry, rz) \cdot (\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_1\| = (1+m) \|\mathbf{R}(rx, ry, rz) \cdot (\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_1\| \quad (42.6)$$

Comme \mathbf{R} est une matrice de rotation, donc son application à un vecteur est une isométrie, c'est-à-dire qu'elle laisse invariant la norme ou la longueur du vecteur soit :

$$\|\mathbf{R} \cdot \mathbf{X}\| = \|\mathbf{X}\| \quad \forall \mathbf{X} \quad (42.7)$$

On a donc :

$$\|(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_2\| = (1+m) \|(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_1\| \quad (42.8)$$

Soit :

$$1 + m = \frac{1}{N} \sum \frac{\|(\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k)_2\|}{\|(\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k)_1\|} \quad (42.9)$$

N désigne le nombre de couples de points $P_j P_k, j \neq k$.

42.4 DÉTERMINATION DES ROTATIONS (rx, ry, rz)

Connaissant $(1 + m)$, pour un couple de points P_j, P_k , on a :

$$(\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k)_2 = (1 + m) \cdot R(rx, ry, rz) \cdot (\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k)_1$$

Détaillons la matrice R :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & rz & -ry \\ -rz & 0 & rx \\ ry & -rx & 0 \end{pmatrix} = I_3 + Q \quad (42.10)$$

avec I_3 la matrice Unité et Q la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & rz & -ry \\ -rz & 0 & rx \\ ry & -rx & 0 \end{pmatrix} \quad (42.11)$$

Alors l'équation (42.5) devient :

$$(\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k)_2 = (1 + m) \cdot (I_3 + Q(rx, ry, rz)) \cdot (\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k)_1 \quad (42.12)$$

Soit comme $m \ll 1$ et $m^2 \ll 1$:

$$Q(rx, ry, rz) \cdot (\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k)_1 = (1 - m) \cdot (\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k)_2 - (\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k)_1 \quad (42.13)$$

En posant :

$$(\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k)_2 = \begin{pmatrix} \Delta X'_{jk} \\ \Delta Y'_{jk} \\ \Delta Z'_{jk} \end{pmatrix} ; \quad (\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k)_1 = \begin{pmatrix} \Delta X_{jk} \\ \Delta Y_{jk} \\ \Delta Z_{jk} \end{pmatrix} ; \quad v = \begin{pmatrix} v_1 = (1 - m) \Delta X'_{jk} - \Delta X_{jk} \\ v_2 = (1 - m) \Delta Y'_{jk} - \Delta Y_{jk} \\ v_3 = (1 - m) \Delta Z'_{jk} - \Delta Z_{jk} \end{pmatrix} \quad (42.14)$$

Alors, on obtient l'équation :

$$Q(rx, ry, rz) \cdot (\mathbf{P}_j \mathbf{P}_k)_1 = v \quad (42.15)$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Delta Z_{jk} & \Delta Y_{jk} \\ \Delta Z_{jk} & 0 & -\Delta X_{jk} \\ -\Delta Y_{jk} & \Delta X_{jk} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (42.16)$$

Or le déterminant de la matrice Q' :

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta Z_{jk} & \Delta Y_{jk} \\ \Delta Z_{jk} & 0 & -\Delta X_{jk} \\ -\Delta Y_{jk} & \Delta X_{jk} & 0 \end{pmatrix} \quad (42.17)$$

est nul. Pour passer de cette conséquence, on utilise pour chaque ligne du système (42.16) un couple de points ij ce qui donne le système :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Delta Z_{jk} & \Delta Y_{jk} \\ \Delta Z_{lm} & 0 & -\Delta X_{lm} \\ -\Delta Y_{in} & \Delta X_{in} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{jk1} \\ v_{lm2} \\ v_{in3} \end{pmatrix} \quad (42.18)$$

Le système (42.18) devient résolvable ce qui permet de déterminer les trois rotations rx, ry et rz .

42.5 DÉTERMINATION DES COMPOSANTES DE LA TRANSLATION T

Les composantes T_x, T_y, T_z du vecteur translation sont déterminées à partir des coordonnées des points P_j connus dans les deux systèmes à partir de :

$$Tx_j = X_{2j} - (1 + m)(X_{1j} - rxY_{1j} + ryZ_{1j}) \quad (42.19)$$

$$Ty_j = Y_{2j} - (1 + m)(rxX_{1j} + Y_{1j} - rzZ_{1j}) \quad (42.20)$$

$$Tz_j = Z_{2j} - (1 + m)(-ryX_{1j} + rzY_{1j} + Z_{1j}) \quad (42.21)$$

Les composantes T_x, T_y, T_z sont obtenues par une moyenne sur les N points communs à savoir :

$$T_x = \frac{\sum^N Tx_j}{N} \quad (42.22)$$

$$T_y = \frac{\sum^N Ty_j}{N} \quad (42.23)$$

$$T_z = \frac{\sum^N Tz_j}{N} \quad (42.24)$$

Littérature

1. **A. Ben Hadj Salem**. 2011. Cours d'initiation au GPS. v1. 74 p.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DU REPÈRE MOBILE À L'ELLIPSOÏDE DE RÉFÉRENCE

43.1 LE REPÈRE MOBILE

43.1.1 INTRODUCTION

Soit E l'ellipsoïde de référence géodésique défini par les paramètres a, e respectivement le demi grand axe et la première excentricité. Soit $\mathcal{R}(O, X, Y, Z)$ le référentiel géocentrique associé à cet ellipsoïde. Un point A est défini par ses coordonnées cartésiennes tridimensionnelles (X, Y, Z) par :

$$X = (N + h)\cos\varphi\cos\lambda \quad (43.1)$$

$$Y = (N + h)\cos\varphi\sin\lambda \quad (43.2)$$

$$Z = (N(1 - e^2) + h)\sin\varphi \quad (43.3)$$

avec :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} \quad (43.4)$$

Au point $A(\varphi, \lambda, h)$, considérons le repère local défini par le repère orthonormé $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ défini dans la base orthonormée (i, j, k) de \mathcal{R} par :

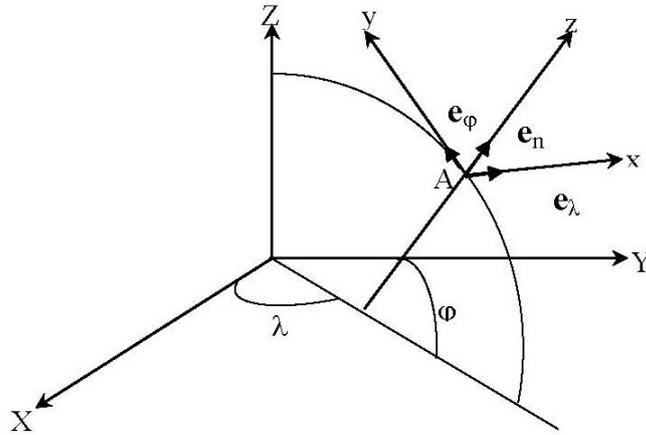


Fig. 43.1 Le Repère Mobile

$$e_\lambda = \begin{vmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix} ; e_\varphi = \begin{vmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi \end{vmatrix} ; e_n = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\varphi\sin\lambda \\ \sin\varphi \end{vmatrix} \quad (43.5)$$

Pour faciliter les notations, posons :

$$e_1 = e_\lambda \quad (43.6)$$

$$e_2 = e_\varphi \quad (43.7)$$

$$e_3 = e_n \quad (43.8)$$

Quand les coordonnées géodésiques (φ, λ, h) du point A varient, le repère local en A se déplace ce qu'on appelle le repère mobile du point A.

43.2 ECRITURE DIFFÉRENTIELLE DE dA ET de_i

Le point A est défini dans \mathcal{R} par :

$$OA = Xi + Yj + Zk \quad (43.9)$$

avec (i, j, k) la base canonique de \mathcal{R} . Comme (e_1, e_2, e_3) est aussi une base orthonormée de \mathcal{R} , on peut passer de (i, j, k) à (e_1, e_2, e_3) (voir §[??]) par :

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\sin\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (43.10)$$

La différentielle de (43.9) donne :

$$dA = idX + jdY + kdZ$$

en remplaçant i, j et k en fonction de e_1, e_2 et e_3 , on arrive à l'expression différentielle :

$$dA = \sum_{i=1}^3 \omega_i e_i \quad (43.11)$$

De même, la différentielle d'un vecteur e_i s'exprime dans la base (i, j, k) qui sera transformée dans la base (e_i) utilisant la matrice inverse de (43.10), on aura alors :

$$de_i = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij} e_j \quad (43.12)$$

Les deux formules (43.11) et (43.12) définissent le déplacement infinitésimal du repère mobile au point A quand ce dernier se déplace.

Les coefficients ω_i et ω_{ij} respectivement dans les deux formules précédentes sont des formes différentielles de degré 1 en fonction des formes différentielles $d\lambda, d\varphi$ et dh (voir §[??]).

43.3 LES RELATIONS SATISFAITES PAR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES ω_i ET ω_{ij}

Revenons aux dernières formules (43.11) et (43.12), elles représentent des différentielles de fonctions vectorielles, par suite, on a alors :

$$d(dA) = 0 \quad (43.13)$$

$$d(de_i) = 0 \quad i = 1, 3 \quad (43.14)$$

La formule (43.13) donne :

$$d(dA) = d\left(\sum_i \omega_i e_i\right) = \sum_i d(\omega_i e_i) = \sum_i (d\omega_i e_i - \omega_i \wedge de_i) = \sum_i d\omega_i e_i - \sum_i \omega_i \wedge de_i = 0 \quad (43.15)$$

Soit :

$$\sum_i d\omega_i e_i = \sum_i \omega_i \wedge de_i$$

Remplaçons maintenant de_i par son expression (43.12), on obtient :

$$\sum_i d\omega_i e_i = \sum_i \omega_i \wedge de_i = \sum_i \omega_i \wedge \sum_k \omega_{ik} e_k = \sum_k \sum_i \omega_i \wedge \omega_{ik} e_k$$

Ce qui donne en changeant les indices i et k pour le terme à droite :

$$\sum_i d\omega_i e_i = \sum_i \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} e_i$$

Soit :

$$\boxed{d\omega_i = \sum_{k=1}^{k=3} \omega_k \wedge \omega_{ki}} \quad (43.16)$$

Revenons maintenant à la formule (43.14) :

$$d(de_i) = 0 = d\left(\sum_{j=1}^{j=3} \omega_{ij} e_j\right) = \sum_{j=1}^{j=3} d(\omega_{ij} e_j) \quad (43.17)$$

Or :

$$\sum_j d(\omega_{ij} e_j) = \sum_j d\omega_{ij} e_j - \sum_j \omega_{ij} \wedge d(e_j) = \sum_j d\omega_{ij} e_j - \sum_j \omega_{ij} \wedge \left(\sum_{k=1}^{k=3} \omega_{jk} e_k\right) = 0$$

Soit :

$$\sum_j d\omega_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{j=3} \sum_{k=1}^{k=3} \omega_{ij} \wedge \omega_{jk} e_k \quad (43.18)$$

Les (e_i) forment une base de \mathcal{R} , les coefficients de e_j doivent être égaux, ce qui donne après manipulation :

$$\boxed{d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{k=3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \quad 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3} \quad (43.19)$$

43.3.1 CAS DE REPÈRE MOBILE ORTHONORMÉ

Dans le cas étudié dans cette note, la base (e_i) est une base orthonormée c'est-à-dire :

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad \begin{cases} = 1 & \text{si } i = j = 1 \\ = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (43.20)$$

En différentiant (43.20), on a :

$$de_i \cdot e_j + e_i \cdot de_j = 0 \quad (43.21)$$

En utilisant la formule donnant de_i c'est-à-dire (43.12), l'expression ci-dessous devient :

$$\left(\sum_{k=1}^{k=3} \omega_{ik} e_k\right) \cdot e_j + e_i \cdot \left(\sum_{k=1}^{k=3} \omega_{jk} e_k\right) = 0 \quad (43.22)$$

Comme $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$, on obtient :

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \quad \forall i, j = 1, 3 \quad (43.23)$$

Et quand $i = j$, on a :

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0 \quad (43.24)$$

43.4 APPLICATION À L'ELLIPSOÏDE DE RÉFÉRENCE

43.4.1 CALCUL DES ω_i

En différentiant les formules (43.1-43.3) dans la base (i, j, k) on a :

$$dA = idX + jdY + kdZ$$

En remplaçant i, j et k par leurs expressions en fonction de e_1, e_2 et e_3 on obtient :

$$dA = \cos\varphi(N+h)d\lambda e_1 + (\rho+h)d\varphi e_2 + dhe_3 \quad (43.25)$$

Soit :

$$\omega_1 = \cos\varphi(N+h)d\lambda; \quad \omega_2 = (\rho+h)d\varphi; \quad \omega_3 = dh \quad (43.26)$$

43.4.2 Calcul des ω_{ij}

Le calcul de de_i en fonction des vecteurs e_i du repère mobile au point A se fait en utilisant (43.5) :

$$\begin{aligned} de_1 &= -(i\cos\lambda + j\sin\lambda)d\lambda \\ de_2 &= (-\cos\varphi\cos\lambda d\varphi + \sin\varphi\sin\lambda d\lambda)i + (-\cos\varphi\sin\lambda d\varphi - \sin\varphi\cos\lambda d\lambda)j - k\cos\varphi d\varphi \\ de_3 &= (-\sin\varphi\cos\lambda d\varphi - \cos\varphi\sin\lambda d\lambda)i + (-\sin\varphi\sin\lambda d\varphi + \cos\varphi\cos\lambda d\lambda)j + k\cos\varphi d\varphi \end{aligned} \quad (43.27)$$

En partant de (43.10), on obtient donc :

$$de_1 = \sin\varphi d\lambda e_2 - \cos\varphi d\lambda e_3 \quad (43.28)$$

$$de_2 = -\sin\varphi d\lambda e_1 - d\varphi e_3 \quad (43.29)$$

$$de_3 = \cos\varphi d\lambda e_1 + d\varphi e_2 \quad (43.30)$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\varphi d\lambda & -\cos\varphi d\lambda \\ -\sin\varphi d\lambda & 0 & -d\varphi \\ \cos\varphi d\lambda & d\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (43.31)$$

avec :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \sin\varphi d\lambda & -\cos\varphi d\lambda \\ -\sin\varphi d\lambda & 0 & -d\varphi \\ \cos\varphi d\lambda & d\varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad (43.32)$$

D'où les éléments ω_{ij} :

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0 \quad (43.33)$$

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = \sin\varphi d\lambda \quad (43.34)$$

$$\omega_{13} = -\omega_{31} = -\cos\varphi d\lambda \quad (43.35)$$

$$\omega_{23} = -\omega_{32} = -d\varphi \quad (43.36)$$

43.4.3 VÉRIFICATION DES FORMULES $d\omega_i$ ET $d\omega_{ij}$

A- Vérifions la formule (43.16) soit :

$$d\omega_i = \sum_{k=1}^{k=3} \omega_k \wedge \omega_{ki}$$

Calculons par exemple $d\omega_1$:

$$d\omega_1 = d((N+h)\cos\varphi d\lambda) = d(N\cos\varphi d\lambda) + d(h\cos\varphi d\lambda) \quad (43.37)$$

Or $d(N\cos\varphi) = -\rho\sin\varphi d\varphi$ ce qui donne :

$$d\omega_1 = -\rho\sin\varphi d\varphi \wedge d\lambda - h\sin\varphi d\varphi \wedge d\lambda + \cos\varphi dh \wedge d\lambda \quad (43.38)$$

soit :

$$\boxed{d\omega_1 = -(\rho+h)\sin\varphi d\varphi \wedge d\lambda + \cos\varphi dh \wedge d\lambda} \quad (43.39)$$

Par la formule (43.16) :

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \sum_{k=1}^{k=3} \omega_k \wedge \omega_{k1} = \omega_1 \wedge \omega_{11} + \omega_2 \wedge \omega_{21} + \omega_3 \wedge \omega_{31} = \\ &0 + \omega_2 \wedge \omega_{21} + \omega_3 \wedge \omega_{31} = (\rho+h)d\varphi \wedge (-\sin\varphi d\lambda) + dh \wedge \cos\varphi d\lambda = \\ &-(\rho+h)\sin\varphi d\varphi \wedge d\lambda + \cos\varphi dh \wedge d\lambda \end{aligned} \quad (43.40)$$

Ce qui est identique à (43.39) ci-dessus.

B- Vérifions maintenant la formule des $d\omega_{ij}$:

soit :

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{k=3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

Calculons par exemple $d\omega_{12}$:

$$\boxed{d\omega_{12} = d(\sin\varphi d\lambda) = \cos\varphi d\varphi \wedge d\lambda} \quad (43.41)$$

D'autre part, d'après la formule (43.19), on a :

$$d\omega_{12} = \sum_{k=1}^{k=3} \omega_{1k} \wedge \omega_{k2} = \omega_{11} \wedge \omega_{12} + \omega_{21} \wedge \omega_{22} + \omega_{13} \wedge \omega_{32}$$

Or :

$$\omega_{11} = \omega_{22} = 0$$

Par suite, on a finalement :

$$d\omega_{12} = \sum_{k=1}^{k=3} \omega_{1k} \wedge \omega_{k2} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = -\cos\varphi d\lambda \wedge d\varphi = \cos\varphi d\varphi \wedge d\lambda \quad (43.42)$$

C'est le résultat de (43.41).

43.5 ETUDE DU CAS $h = 0$

Quand $h = 0$, le point A est sur le plan tangent à l'ellipsoïde, dans ce cas, on a alors :

$$\omega_1 = N \cos\varphi d\lambda \quad (43.43)$$

$$\omega_2 = \rho d\varphi \quad (43.44)$$

$$\omega_{12} = \sin\varphi d\lambda \quad (43.45)$$

Or d'après le théorème fondamental de la géométrie riemannienne locale, il existe une unique forme différentielle ω_{12} définie dans le plan tangent qui satisfait aux équations (S.S Chern, 1985 ; W.M. Boothby, 1986) :

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 \quad (43.46)$$

$$d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} \quad (43.47)$$

$$\text{et } d\omega_{12} = -K \omega_1 \wedge \omega_2 \quad (43.48)$$

avec K la courbure de Gauss ou la courbure totale au point A .

Vérifions alors les équations (43.46-43.48). Des équations (43.43-43.45), on obtient :

$$d\omega_1 = -\rho \sin\varphi d\varphi \wedge d\lambda \quad (43.49)$$

$$d\omega_2 = \rho' d\varphi \wedge d\lambda = 0 \quad (43.50)$$

$$d\omega_{12} = \cos\varphi d\varphi \wedge d\lambda \quad (43.51)$$

Par suite :

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 = \sin\varphi d\lambda \wedge \rho d\varphi = \rho \sin\varphi d\lambda \wedge d\varphi \quad (43.52)$$

$$d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} = N \cos\varphi d\lambda \wedge \sin\varphi d\lambda = 0 \quad (43.53)$$

$$\text{et } d\omega_{12} = \cos\varphi d\varphi \wedge d\lambda \quad (43.54)$$

Or :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = N \cos\varphi d\lambda \wedge \rho d\varphi = -\rho N \cos\varphi d\varphi \wedge d\lambda \quad (43.55)$$

En comparant (43.51) et (43.55), on trouve que :

$$d\omega_{12} = -\frac{1}{\rho N} \omega_1 \wedge \omega_2 = -K \omega_1 \wedge \omega_2 \quad (43.56)$$

avec :

$$K = \frac{1}{\rho N} = \text{la courbure totale ou courbure de Gauss}$$

c'est l'inverse du produit des 2 rayons de courbure de l'ellipsoïde (43.57)

CQFD

Littérature

1. **W.A. Heiskanen W.A, H. Moritz.** 1967. Physical Geodesy. Freeman, San Francisco. Reprint,1979. Institute of Physical Geodesy, Technical University, Graz, Austria.
2. **E.W. Grafarend.** 1978. Marusseau Geodesy. Modern Trends in Geodesy. Bollettino Di Geodesia E Science Affini. Numero special in onore del Prof. Antonio Marussi.pp 209-248. Anno XXXVII 2-3, Aprile - Settembre 1978. Istituto Geografico Militare. Firenze.
3. **C. Boucher.** 1979. Les transformations géométriques entre systèmes géodésiques. Rapport Technique RT/G n°3,SGNM,IGN.
4. **J. Lemenestrel.** 1980. Cours de géodésie. ENSG, IGN.
5. **P. Vanicek, E. J. Krakiwsky.** 1986. Geodesy : the Concepts. North Holland. 2ème Edition.
6. **H. Cartan.** 1979. Cours de Calcul Différentiel. Nouvelle édition refondue et corrigée. Hermann Paris. Collection Méthodes. 365p.
7. **S.S Chern.** 1985. Moving Frames. Société Mathématique de France. Astérisque, numéro hors série "Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui". Lyon, 25-29 juin 1984. p 67-77.
8. **W.M. Boothby.** 1986. An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. Second Edition. Academic Press Inc. 430p.

CHAPITRE 44

NOTE SUR LA FORMULE DE DUFOUR-FEZZANI

Résumé : Dans cette note, on passe en revue la formule de Dufour-Fezzani concernant la comparaison de deux réseaux géodésiques. On développe cette formule pour des modèles ellipsoïdiques.

Octobre 2012

44.1 INTRODUCTION

Dans la comparaison des réseaux géodésiques, C. Fezzani [1] prévoit la méthode suivante :

Mercator modèle sphérique \Rightarrow Mercator Transverse UTM

\Rightarrow Passage d'un ellipsoïde à un autre ellipsoïde

Le point de départ est deux calculs R_1 et R_2 d'un réseau géodésique qu'on considère au voisinage de l'équateur.

44.2 COMPARAISON EN COORDONNÉES MERCATOR

On considère que les coordonnées de R_1 et R_2 sont exprimées par la représentation plane Mercator directe d'un modèle sphérique (de rayon a).

44.2.1 L'effet d'une rotation pure

Si on suppose que les calculs sont parfaits. Si R_2 est obtenu par une rotation autour de l'axe des pôles d'un angle Ω , alors nous avons les expressions suivantes en un point M :

$$(\varphi_1, \lambda_1)_{R_1} \implies \begin{cases} X_1 = a\lambda_1 \\ Y_1 = aL(\varphi_1) = a.Logtg(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}) \end{cases} \quad (44.1)$$

et :

$$(\varphi_2, \lambda_2)_{R_2} \implies \begin{cases} X_2 = a\lambda_2 \\ Y_2 = aL(\varphi_2) = a.Logtg(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2}) \end{cases} \quad (44.2)$$

Or :

$$\varphi_2 = \varphi_1 \quad (44.3)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Omega \quad (44.4)$$

Posons :

$$z = X_1 + iY_1 \quad (44.5)$$

$$Z = X_2 + iY_2 = a\lambda_2 + iY_2 = a(\lambda_1 + \Omega) + iY_1 = X_1 + iY_1 + a\Omega \quad (44.6)$$

Alors, nous avons :

$$Z = z + a\Omega \quad (44.7)$$

La transformation (44.7) est une représentation conforme, donc conserve localement les figures donc les angles sont conservés.

Ecrivons maintenant l'équation de Laplace :

$$\text{Pour } R_1 \implies Aza - Azg_1 = (\lambda_a - \lambda_1)\sin\varphi_1 \quad (44.8)$$

$$\text{Pour } R_2 \implies Aza - Azg_2 = (\lambda_a - \lambda_2)\sin\varphi_2 \quad (44.9)$$

où Aza est l'azimut astronomique observé au point M. Comme : $\varphi_1 = \varphi_2$, par différence des équations précédentes, on obtient :

$$Azg_2 - Azg_1 = \Omega\sin\varphi_1 \quad (44.10)$$

Donc, les azimuts géodésiques ne sont pas conservés lors d'une rotation autour de l'axe des pôles.

44.2.2 L'effet d'une translation tridimensionnelle

Pour un modèle sphérique, le point M a pour coordonnées :

$$M \begin{cases} X = a \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = a \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = a \sin \varphi \end{cases} \quad (44.11)$$

Les coordonnées géodésiques (φ, λ) dans (44.11) sont exprimées par :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \lambda = \frac{Y}{X} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \end{cases} \quad (44.12)$$

Une translation tridimensionnelle infinitésimale est exprimée par (dX, dY, dZ) . Exprimons $d\varphi$ et $d\lambda$ en fonction de dX, dY et dZ . De (44.12), on a :

$$d\lambda = \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \frac{a \cos \varphi \cos \lambda dY - a \cos \varphi \sin \lambda dX}{a^2 \cos^2 \varphi} = \frac{-\sin \lambda}{\cos \varphi} dX + \frac{\cos \lambda}{\cos \varphi} dY \quad (44.13)$$

et :

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{dZ}{\sqrt{X^2 + Y^2}} - \frac{Z}{X^2 + Y^2} \frac{XdX + YdY}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad (44.14)$$

Utilisant (44.11), on obtient :

$$\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{dZ}{\cos \varphi} - \frac{a \sin \varphi}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{a \cos \varphi \cos \lambda dX + a \cos \varphi \sin \lambda dY}{\cos \varphi} \quad (44.15)$$

Soit :

$$\frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{dZ}{a} - \frac{\operatorname{tg} \varphi \cos \lambda}{a} dX - \frac{\operatorname{tg} \varphi \sin \lambda}{a} dY \quad (44.16)$$

Or l'équation (44.16) n'est autre que la différentielle de la latitude de Mercator L , d'où :

$$dL = \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{dZ}{a} - \frac{\operatorname{tg} \varphi \cos \lambda}{a} dX - \frac{\operatorname{tg} \varphi \sin \lambda}{a} dY \quad (44.17)$$

Au voisinage du point central $M_0(\varphi = 0, \lambda = 0)$, on peut écrire au deuxième ordre de petitesse :

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \quad (44.18)$$

$$\sin \lambda = \lambda \quad (44.19)$$

$$\cos \lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \quad (44.20)$$

L'expression de la latitude de Mercator L devient :

$$L = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{1 - \frac{\varphi^2}{2}} = \int_0^\varphi \left(1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) d\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{6} \approx \varphi \quad (44.21)$$

Alors, les expressions (44.17) et (44.13) deviennent respectivement :

$$dL = \frac{dZ}{a} - \frac{\varphi(1 - \frac{\lambda^2}{2})}{a} dX - \frac{\varphi \cdot \lambda}{a} dY$$

$$dL = \frac{dZ}{a} - \frac{dX}{a} L - \frac{dY}{a} L \cdot \lambda \quad (44.22)$$

et :

$$d\lambda = \frac{-\sin\lambda}{a \cos\varphi} dX + \frac{\cos\lambda}{a \cos\varphi} dY = \frac{-\lambda(1 + \frac{L^2}{2})}{a} dX + \frac{(1 - \frac{\lambda^2}{2})(1 + \frac{L^2}{2})}{a} dY$$

En gardant les termes du 2ème ordre :

$$d\lambda = \frac{-dX}{a} \lambda + \frac{dY}{a} + \frac{dY}{2a} (L^2 - \lambda^2) \quad (44.23)$$

Posons :

$$z = \lambda + iL \quad (44.24)$$

$$Z = d\lambda + idL \quad (44.25)$$

On utilise les équations (44.22) et (44.23), on obtient :

$$Z = d\lambda + idL = \frac{-dX}{a} \lambda + \frac{dY}{a} + \frac{dY}{2a} (L^2 - \lambda^2) + i \left(\frac{dZ}{a} - \frac{dX}{a} L - \frac{dY}{a} L \cdot \lambda \right) \quad (44.26)$$

Soit :

$$Z = \frac{dY + idZ}{a} - \frac{dX}{a} (\lambda + iL) - \frac{dY}{2a} (\lambda^2 - L^2 + 2i\lambda L)$$

ou :

$$Z = \frac{dY + idZ}{a} - \frac{dX}{a} (\lambda + iL) - \frac{dY}{2a} (\lambda + iL)^2 \quad (44.27)$$

Et en remplaçant $\lambda + iL$ par z , (44.27) devient :

$$\boxed{Z = \frac{dY + idZ}{a} - \frac{dX}{a} z - \frac{dY}{2a} z^2} \quad (44.28)$$

C'est la formule de **Dufour-Fezzani** [1],[2]. La transformation (44.28) est une fonction holomorphe de z donc c'est une représentation conforme sous la forme d'un polynôme du second degré.

44.3 COMPARAISON EN COORDONNÉES UTM

On considère que les coordonnées de R_1 et R_2 sont exprimées par la représentation UTM d'un modèle ellipsoïdique $E(a, e)$; a et e sont respectivement le demi grand-axe et la première excentricité.

Ecrivons maintenant l'équation de Laplace :

$$\text{Pour } R_1 \implies Aza - Azg_1 = (\lambda_a - \lambda_1) \sin \varphi_1 \quad (44.29)$$

$$\text{Pour } R_2 \implies Aza - Azg_2 = (\lambda_a - \lambda_2) \sin \varphi_2 \quad (44.30)$$

Comme : $\varphi_1 = \varphi_2$, par différence des équations précédentes, on obtient :

$$Azg_2 - Azg_1 = \Omega \sin \varphi_1 \quad (44.31)$$

Donc, les azimuts géodésiques ne sont pas conservés lors d'une rotation autour de l'axe des pôles.

44.3.1 L'Effet d'Une Translation Tridimensionnelle

Un point M du modèle ellipsoïdique a pour coordonnées :

$$M \begin{cases} X = N \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = N \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = N(1 - e^2) \cdot \sin \varphi \end{cases} \quad (44.32)$$

avec :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (44.33)$$

Les coordonnées géodésiques (φ, λ) dans (44.32) sont exprimées par :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \lambda = \frac{Y}{X} \\ (1 - e^2) \operatorname{tg} \varphi = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \end{cases} \quad (44.34)$$

Une translation tridimensionnelle infinitésimale est exprimée par (dX, dY, dZ) . Exprimons $d\varphi$ et $d\lambda$ en fonction de dX, dY et dZ . De (44.34), on a :

$$d\lambda = \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} = \frac{N \cos \varphi \cos \lambda dY - N \cos \varphi \sin \lambda dX}{N^2 \cos^2 \varphi} = \frac{-\sin \lambda}{N \cos \varphi} dX + \frac{\cos \lambda}{N \cos \varphi} dY \quad (44.35)$$

et :

$$(1 - e^2) \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{dZ}{\sqrt{X^2 + Y^2}} - \frac{Z}{X^2 + Y^2} \frac{XdX + YdY}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \quad (44.36)$$

Utilisant (44.32), on obtient après calculs :

$$(1-e^2)d\varphi = \frac{\cos\varphi dZ}{N} - \frac{(1-e^2)\sin\varphi\cos\lambda dX}{N} - \frac{(1-e^2)\sin\varphi\sin\lambda dY}{N} \quad (44.37)$$

Dans le modèle ellipsoïdique, posons \mathcal{L} la latitude isométrique :

$$\mathcal{L} = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e\sin\varphi}{1 - e\sin\varphi} \quad (44.38)$$

En utilisant la latitude de Mercator L (44.21), l'équation (44.38) s'écrit :

$$\mathcal{L} = L - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e\sin\varphi}{1 - e\sin\varphi} \quad (44.39)$$

Au voisinage du point central $M_0(\varphi = 0, \lambda = 0)$, on peut écrire au deuxième ordre de petitesse :

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \quad (44.40)$$

$$\sin\varphi = \varphi \quad (44.41)$$

$$\sin\lambda = \lambda \quad (44.42)$$

$$\cos\lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \quad (44.43)$$

L'expression de \mathcal{L} devient :

$$\mathcal{L} = L - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e\varphi}{1 - e\varphi} = \varphi - \frac{e}{2} \text{Log}(1 + e\varphi)(1 - e\varphi)^{-1} \quad (44.44)$$

Or au deuxième ordre de petitesse, on a :

$$\frac{1}{1 - e\varphi} = 1 + e\varphi + e^2\varphi^2 \quad (44.45)$$

L'expression de \mathcal{L} devient :

$$\mathcal{L} = \varphi - \frac{e}{2} \text{Log}(1 + e\varphi)(1 + e\varphi + e^2\varphi^2) = \varphi - \frac{e}{2} \text{Log}(1 + 2e\varphi + 2e^2\varphi^2) \quad (44.46)$$

on utilise la formule du développement limité de la fonction Log pour x petit devant 1 :

$$\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

ce qui donne :

$$\mathcal{L} = \varphi - e^2\varphi = (1 - e^2)\varphi \quad (44.47)$$

$1/N\cos\varphi$ devient :

$$\frac{1}{N\cos\varphi} = \frac{(1 - e^2\varphi^2)^{1/2}(1 + \varphi^2/2)}{a} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{(1 - e^2)\varphi^2}{2} \right) \quad (44.48)$$

Alors, l'expression (44.35) devient :

$$d\lambda = \frac{-\sin\lambda}{N\cos\varphi}dX + \frac{\cos\lambda}{N\cos\varphi}dY = \frac{-\lambda(1 + \frac{(1-e^2)\varphi^2}{2})}{a}dX + \frac{(1 - \frac{\lambda^2}{2})(1 + \frac{(1-e^2)\varphi^2}{2})}{a}dY \quad (44.49)$$

En gardant les termes du 2ème ordre en λ et φ , on a :

$$d\lambda = \frac{-dX}{a}\lambda + \frac{dY}{a} + \frac{dY}{2a}(1-e^2)\varphi^2 - \frac{\lambda^2}{2a}dY \quad (44.50)$$

De (44.47), on a :

$$\varphi = \frac{\mathcal{L}}{1-e^2} = (1+e^2)\mathcal{L} \Rightarrow \varphi^2 = (1+e^2)^2\mathcal{L}^2 = (1+2e^2)\mathcal{L}^2 \quad (44.51)$$

En remplaçant φ dans (44.50), $d\lambda$ devient :

$$d\lambda = \frac{-dX}{a}\lambda + \frac{dY}{a} + (1+e^2)\mathcal{L}^2\frac{dY}{2a} - \frac{\lambda^2}{2a}dY \quad (44.52)$$

et (44.37) devient en utilisant (44.47) :

$$d\mathcal{L} = \frac{(1 - \frac{\varphi^2}{2})(1 - e^2\frac{\varphi^2}{2})}{a}dZ - \frac{\mathcal{L}(1 - e^2\frac{\varphi^2}{2})(1 - \frac{\lambda^2}{2})}{a}dX - \frac{\mathcal{L}\lambda(1 - e^2\frac{\varphi^2}{2})}{a}dY \quad (44.53)$$

Soit :

$$d\mathcal{L} = (1 - \frac{(1+e^2)\varphi^2}{2})\frac{dZ}{a} - \mathcal{L}\frac{dX}{a} - \lambda\mathcal{L}\frac{dY}{a} \quad (44.54)$$

Utilisant (44.51), l'expression de $d\mathcal{L}$ devient à l'ordre 2 de petitesse :

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= (1 - \frac{(1+3e^2)\mathcal{L}^2}{2})\frac{dZ}{a} - \mathcal{L}\frac{dX}{a} - \lambda\mathcal{L}\frac{dY}{a} \\ d\mathcal{L} &= \frac{dZ}{a} - \frac{\mathcal{L}^2dZ}{2a} - \frac{3e^2\mathcal{L}^2dZ}{2a} - \mathcal{L}\frac{dX}{a} - \lambda\mathcal{L}\frac{dY}{a} \end{aligned} \quad (44.55)$$

Posons :

$$z = \lambda + i\mathcal{L} \quad (44.56)$$

$$Z = d\lambda + id\mathcal{L} \quad (44.57)$$

On utilise les équations (44.52) et (44.55), on obtient :

$$\begin{aligned} Z &= d\lambda + id\mathcal{L} = \frac{-dX}{a}\lambda + \frac{dY}{a} + (1+e^2)\mathcal{L}^2\frac{dY}{2a} - \frac{\lambda^2}{2a}dY \\ &+ i\left(\frac{dZ}{a} - \frac{\mathcal{L}^2dZ}{2a} - \frac{3e^2\mathcal{L}^2dZ}{2a} - \mathcal{L}\frac{dX}{a} - \lambda\mathcal{L}\frac{dY}{a}\right) \end{aligned} \quad (44.58)$$

Soit :

$$Z = \frac{dY + idZ}{a} - \frac{dX}{a}(\lambda + i\mathcal{L}) - \frac{dY}{2a}(\lambda^2 - \mathcal{L}^2 + 2i\lambda \cdot \mathcal{L}) + e^2 \mathcal{L}^2 \frac{(dY - idZ)}{2a}$$

ou :

$$Z = \frac{dY + idZ}{a} - \frac{dX}{a}(\lambda + i\mathcal{L}) - \frac{dY}{2a}(\lambda + i\mathcal{L})^2 + e^2 \mathcal{L}^2 \frac{(dY - idZ)}{2a} \quad (44.59)$$

Et en remplaçant $\lambda + i\mathcal{L}$ par z et \mathcal{L} par $-\frac{i}{2}(z - \bar{z})$, (44.59) devient :

$$\boxed{Z = \frac{dY + idZ}{a} - \frac{dX}{a}z - \frac{dY}{2a}z^2 - \frac{e^2(dY - idZ)}{8a}(z - \bar{z})^2} \quad (44.60)$$

C'est la formule de **Dufour-Ben Hadj Salem**. La transformation (44.60) est une fonction bi-holomorphe de z et de \bar{z} . L'effet d'une translation tridimensionnelle (dX, dY, dZ) au point M_0 entraîne une transformation non conforme.

Littérature

1. **C. Fezzani**. 1979. La Structure des Réseaux Astro-Géodésiques de la Tunisie. Thèse de Docteur ingénieur. Ecole Nationale des Sciences Géographiques. IGN France. pp149-169.
2. **H.M. Dufour**. 1979. Systèmes de références : Systèmes Projectifs. Conférence présentée au Colloque national sur la Localisation en mer. Brest, 1-5 octobre 1979. 27p.

CHAPITRE 45

NOTE SUR LES REPRÉSENTATIONS CONFORMES DE GAUSS

Résumé : Dans cette note, on étudie les représentations conformes de Gauss de l'ellipsoïde de révolution à la sphère.

45.1 INTRODUCTION

Soit un ellipsoïde de révolution $E(a, e)$ avec a et e respectivement le demi grand axe de l'ellipsoïde de révolution et e la première excentricité. Soit S une sphère de rayon R . On considère le passage suivant :

$$p(\varphi, \lambda) \text{ de l'ellipsoïde } E \Rightarrow P(\psi, \Lambda) \text{ de la Sphère } S$$

45.2 EXPRESSION DU MODULE LINÉAIRE

Soit m le module linéaire, on a par définition :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} \tag{45.1}$$

avec sur l'ellipsoïde :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{\rho^2 d\varphi^2}{N^2 \cos^2 \varphi} + d\lambda^2 \right) = r^2 (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2) \quad (45.2)$$

où :

$$r = r(\varphi) = N \cos \varphi = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (45.3)$$

$$\rho(\varphi) = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (45.4)$$

$$\mathcal{L} = \int_0^\varphi \frac{\rho(u) du}{N(u) \cos u} = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \quad (45.5)$$

\mathcal{L} est la latitude isométrique de l'ellipsoïde de révolution. Le couple (\mathcal{L}, λ) forme un couple de coordonnées symétriques et orthogonales sur l'ellipsoïde E .

Posons :

$$z = \mathcal{L} + i\lambda$$

avec $i^2 = -1$.

Sur la sphère S , on a :

$$dS^2 = R^2 d\psi^2 + R^2 \cos^2 \psi d\Lambda^2 = R^2 \cos^2 \psi \left(\frac{d\psi^2}{\cos^2 \psi} + d\Lambda^2 \right) = R^2 \cos^2 \psi (dL^2 + d\Lambda^2) \quad (45.6)$$

avec :

$$L = L(\psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\cos \psi} = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) \quad (45.7)$$

L est appelée la latitude de Mercator. Le couple (L, Λ) forme un couple de coordonnées symétriques et orthogonales sur la sphère S .

Posons :

$$Z = L + i\Lambda$$

45.3 EXPRESSION DE LA TRANSFORMATION CONFORME DE GAUSS

Une transformation conforme entre E et S est donnée par :

$$Z = f(z) \quad (45.8)$$

où f est une fonction analytique. Le cas le plus simple est :

$$Z = \alpha z + \beta \quad (45.9)$$

$$\alpha = c_1 + ic_2 \quad (45.10)$$

$$\beta = b_1 + ib_2 \quad (45.11)$$

les c_1, c_2, b_1, b_2 sont des constantes réelles. Ce qui donne :

$$L + i\Lambda = \alpha(\mathcal{L} + i\lambda) + \beta = (c_1 + ic_2)(\mathcal{L} + i\lambda) + b_1 + ib_2 \quad (45.12)$$

soit :

$$L = c_1\mathcal{L} - c_2\lambda + b_1 \quad (45.13)$$

$$\Lambda = c_1\lambda + c_2\mathcal{L} + b_2 \quad (45.14)$$

Pourque cette transformation transforme les méridiens et les parallèles de l'ellipsoïde respectivement en méridiens et parallèles de la sphère, on doit avoir :

$$c_2 = 0$$

D'où :

$$L = c_1\mathcal{L} + b_1 \quad (45.15)$$

$$\Lambda = c_1\lambda + b_2 \quad (45.16)$$

Et si on veut que l'image du méridien origine $\lambda = 0$ est le méridien origine de la sphère $\Lambda = 0$, alors, on obtient :

$$0 = 0 + b_2 \Rightarrow b_2 = 0$$

Il reste alors :

$$L = c_1\mathcal{L} + b_1 \quad (45.17)$$

$$\Lambda = c_1\lambda \quad (45.18)$$

Pour avoir la même orientation en longitude, on prendra :

$$c_1 > 0 \quad (45.19)$$

45.4 LE PROBLÈME POSÉ

A partir des conditions (45.17,45.18) et (45.19), on cherchera la transformation conforme de Gauss à déformation minimale :

$$L = c_1\mathcal{L} + b_1 \quad (45.20)$$

$$\Lambda = c_1\lambda, \quad c_1 > 0 \quad (45.21)$$

qui autour d'un parallèle $\varphi = \varphi_0$ telque le parallèle $\varphi = \varphi_0$ est automécoïque et le module linéaire m est stationnaire pour $\varphi = \varphi_0$, c'est-à-dire :

$$m(\varphi_0) = 1 \text{ le parallèle } \varphi = \varphi_0 \text{ est automécoïque} \quad (45.22)$$

$$\frac{dm}{d\varphi}(\varphi_0) = 0 \text{ le module linéaire est stationnaire pour } \varphi = \varphi_0 \quad (45.23)$$

Ayant trois constantes à déterminer, on considère aussi la condition :

$$\frac{d^2m}{d\varphi^2}(\varphi_0) = 0 \quad (45.24)$$

Pour faciliter les notations, on prendra $b = b_1, c = c_1$. Le problème revient donc à déterminer les constantes b, c et R telles que les conditions ci-dessus soient vérifiées :

$$L = c\mathcal{L} + b \quad (45.25)$$

$$\Lambda = c\lambda, \quad \text{avec } c > 0 \quad (45.26)$$

45.5 RECHERCHES DES SOLUTIONS

Rappelons l'expression du module linéaire m :

$$m = \frac{dS}{ds} = \sqrt{\frac{R^2 \cos^2 \psi (dL^2 + d\Lambda^2)}{r^2 (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)}}$$

avec $r = N \cos \varphi$. Or $dL = cd\mathcal{L}$ et $d\Lambda = cd\lambda$ d'où :

$$m = \frac{dS}{ds} = \sqrt{\frac{c^2 R^2 \cos^2 \psi (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)}{r^2 (d\mathcal{L}^2 + d\lambda^2)}} = \frac{cR \cos \psi}{r} = \frac{cR \cos \psi}{N \cos \varphi} \quad (45.27)$$

car $\cos \psi > 0, \cos \varphi > 0$ et $c > 0$.

45.5.1 La 1ère condition

$$m(\varphi_0) = 1 \Rightarrow cR \cos \psi_0 = N(\varphi_0) \cos \varphi_0 \quad (45.28)$$

45.5.2 La 2ème condition

Prenons la dérivée logarithmique de m :

$$\frac{dm}{m} = \frac{dcos\psi}{cos\psi} - \frac{dr}{r} = -tg\psi d\psi + \frac{\rho sin\phi d\phi}{r} \quad (45.29)$$

D'où :

$$\frac{dm}{d\phi} = m \left(\frac{\rho sin\phi}{r} - tg\psi \frac{d\psi}{d\phi} \right) \quad (45.30)$$

Comme :

$$dL = c.d\mathcal{L} \Rightarrow \frac{d\psi}{cos\psi} = c \frac{\rho d\phi}{r} \Rightarrow \frac{d\psi}{d\phi} = \frac{c\rho cos\psi}{r}$$

Ce qui donne :

$$\frac{dm}{d\phi} = m \left(\frac{\rho sin\phi}{r} - tg\psi \frac{c\rho cos\psi}{r} \right) = \frac{m\rho}{r} (sin\phi - c.sin\psi) \quad (45.31)$$

La deuxième condition (45.23) donne :

$$\frac{dm}{d\phi}(\phi_0) = 0 \Rightarrow sin\phi_0 - c.sin\psi_0 = 0 \quad (45.32)$$

45.5.3 La 3ème Condition

Calculons $\frac{d^2m}{d\phi^2}$. A partir de (45.31), on a :

$$\begin{aligned} \frac{d^2m}{d\phi^2} &= \left(\frac{dm}{d\phi} \frac{\rho}{r} + m \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\rho}{r} \right) \right) (sin\phi - c.sin\psi) + \frac{m\rho}{r} \left(cos\phi - c.cos\psi \frac{d\psi}{d\phi} \right) \\ &= \left(\frac{dm}{d\phi} \frac{\rho}{r} + m \frac{d}{d\phi} \left(\frac{\rho}{r} \right) \right) (sin\phi - c.sin\psi) + \frac{m\rho}{r} \left(cos\phi - c^2 \cdot \frac{\rho cos^2\psi}{r} \right) \end{aligned} \quad (45.33)$$

La troisième condition (45.24) donne en utilisant (45.22) et (45.23) :

$$cos\phi_0 - c^2 \cdot \frac{\rho(\phi_0)cos^2\psi_0}{r(\phi_0)} = 0 \quad (45.34)$$

De (45.32), on tire c :

$$c = \frac{sin\phi_0}{sin\psi_0} \quad (45.35)$$

En remplaçant c dans (45.34), on obtient la valeur de ψ_0 en fonction de la donnée ϕ_0 :

$$tg^2\psi_0 = \frac{\rho_0}{r_0} tg^2\phi_0 \Rightarrow tg\psi_0 = \sqrt{\frac{\rho_0}{r_0}} tg\phi_0 = tg\phi_0 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2 sin^2\phi_0}}$$

ϕ_0 et ψ_0 de même signe. Soit :

$$tg\psi_0 = tg\varphi_0 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi_0}} \quad (45.36)$$

L'équation précédente permet de calculer ψ_0 . La valeur de R est déterminée à partir de (45.28) en utilisant l'expression de c donnée par (45.35) :

$$R = \frac{N_0 \cos\varphi_0}{c \cdot \cos\psi_0} = N_0 \frac{tg\psi_0}{tg\varphi_0} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\varphi_0} \quad (45.37)$$

Or R est égal á :

$$R = \sqrt{\rho(\varphi_0)N(\varphi_0)} \quad (45.38)$$

Donc $1/R$, la courbure de la sphère image, vaut la racine carré de la courbure totale de l'ellipsoïde modèle au parallèle φ_0 .

Exprimons maintenant c en fonction de φ_0 . De (45.35), on a :

$$c^2 = \frac{\sin^2\varphi_0}{\sin^2\psi_0} = \frac{1-\cos^2\varphi_0}{1-\cos^2\psi_0} = \frac{1-\cos^2\varphi_0}{1-\frac{1}{1+tg^2\psi_0}} = \frac{1-\cos^2\varphi_0}{tg^2\psi_0} (1+tg^2\psi_0)$$

Calculons $1+tg^2\psi_0$ en utilisant (45.36) :

$$1+tg^2\psi_0 = 1+tg^2\varphi_0 \frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi_0} = \frac{1-e^2\sin\varphi_0 + (1-e^2)tg^2\varphi_0}{1-e^2\sin^2\varphi_0} = \frac{1-e^2+e^2\cos^4\varphi_0}{\cos^2\varphi_0(1-e^2\sin^2\varphi_0)}$$

D'où :

$$c^2 = \frac{1-\cos^2\varphi_0}{tg^2\psi_0} \frac{1-e^2+e^2\cos^4\varphi_0}{\cos^2\varphi_0(1-e^2\sin^2\varphi_0)}$$

En remplaçant $tg\psi_0$ par son expression (45.36), on obtient :

$$c^2 = \frac{1-e^2+e^2\cos^4\varphi_0}{1-e^2} = 1 + \frac{e^2}{1-e^2} \cos^4\varphi_0 = 1 + e'^2 \cos^4\varphi_0 \Rightarrow c = \sqrt{1+e'^2\cos^4\varphi_0} \quad (45.39)$$

avec e' la deuxième excentricité :

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \quad (45.40)$$

De la valeur de c , on constate que $c > 1$, ce qui veut dire que $\lambda \in [0, 2\pi]$ et que $\Lambda \in [0, 2c\pi] \subset [0, 2\pi]$ c'est-à-dire, il y'aura chevauchement.

c étant supérieur à 1, (45.35) montre que :

$$\varphi_0 > \psi_0 \quad (45.41)$$

La relation (45.36) vérifie aussi $\varphi_0 > \psi_0$.

45.5.4 Calcul du coefficient b

On a :

$$L = c\mathcal{L} + b$$

Pour $\varphi = \varphi_0$, on obtient b :

$$b = L(\varphi_0) - c\mathcal{L}(\varphi_0) = L_0 - c\mathcal{L}_0 \quad (45.42)$$

en notant $L_0 = L(\varphi_0)$ et $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(\varphi_0)$. Par suite, on a alors :

$$L = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0} \cdot (\mathcal{L} - \mathcal{L}_0) + L_0 \quad (45.43)$$

$$\Lambda = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0} \cdot \lambda \quad (45.44)$$

45.6 EXPRESSION DE $m(\varphi)$ DE PART ET D'AUTRE DU PARALLÈLE φ_0

L'expression de $m(\varphi)$ de part et d'autre du parallèle φ_0 est donnée par :

$$\begin{aligned} m(\varphi) = m(\varphi_0) + (\varphi - \varphi_0) \frac{dm}{d\varphi}(\varphi_0) + \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)^2 \frac{d^2m}{d\varphi^2}(\varphi_0) + \\ \frac{1}{6}(\varphi - \varphi_0)^3 \frac{d^3m}{d\varphi^3}(\varphi_0) + o((\varphi - \varphi_0)^4) \end{aligned} \quad (45.45)$$

Utilisant les 3 conditions (45.22), (45.23) et (45.24), il reste :

$$m(\varphi) = 1 + \frac{1}{6}(\varphi - \varphi_0)^3 \frac{d^3m}{d\varphi^3}(\varphi_0) + o((\varphi - \varphi_0)^4) \quad (45.46)$$

Calculons alors $\frac{d^3m}{d\varphi^3}$. On part de :

$$\frac{d^2m}{d\varphi^2} = \left(\frac{dm}{d\varphi} \frac{\rho}{r} + m \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{r} \right) \right) (\sin\varphi - c \cdot \sin\psi) + \frac{m\rho}{r} \left(\cos\varphi - c^2 \cdot \frac{\rho \cos^2\psi}{r} \right)$$

Le terme qui ne s'annule pas pour $\varphi = \varphi_0$ est le dernier terme entre parenthèses, d'où :

$$\frac{d^3m}{d\varphi^3}(\varphi = \varphi_0) = \frac{1 \cdot \rho_0}{r_0} \frac{d}{d\varphi} \left(\cos\varphi - c^2 \cdot \frac{\rho \cos^2\psi}{r} \right) (\varphi = \varphi_0) \quad (45.47)$$

D'où :

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\cos\varphi - c^2 \cdot \frac{\rho \cos^2\psi}{r} \right) = -\sin\varphi - c^2 \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{r} \right) \cos^2\psi + 2c^2 \frac{\rho}{r} \cdot \cos\psi \cdot \sin\psi \cdot \frac{d\psi}{d\varphi}$$

comme :

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1-e^2}{\cos\varphi(1-e^2\sin^2\varphi)} = \frac{1-e^2}{(1-e^2)\cos\varphi + e^2\cos^3\varphi}$$

On a alors :

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho}{r} \right) = \frac{(1-e^2)\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{(1-e^2+3e^2\cos^2\varphi)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2}$$

Or :

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{c\rho\cos\psi}{r}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \left(\cos\varphi - c^2 \cdot \frac{\rho\cos^2\psi}{r} \right) &= -\sin\varphi - c^2\cos^2\psi \frac{(1-e^2)\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \cdot \frac{(1-e^2+3e^2\cos^2\varphi)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2} \\ &\quad + 2c^3 \frac{\rho^2}{r^2} \cdot \cos^2\psi \cdot \sin\psi \end{aligned} \quad (45.48)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \frac{d^3m}{d\varphi^3}(\varphi_0) &= \frac{\rho_0}{r_0} \left[-\sin\varphi_0 - c^2\cos^2\psi_0 \frac{(1-e^2)\sin\varphi_0}{\cos^2\varphi_0} \cdot \frac{(1-e^2+3e^2\cos^2\varphi_0)}{(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2} + 2c^3 \frac{\rho_0^2}{r_0^2} \cdot \cos^2\psi_0 \cdot \sin\psi_0 \right] \\ &= \frac{-4e^2(1-e^2)\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2} \end{aligned} \quad (45.49)$$

On obtient alors la formule :

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e^2(1-e^2)\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{3(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2} (\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4) \quad (45.50)$$

Si on fait intervenir la deuxième excentricité e' , on a l'équation :

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e'^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{3(1+e'^2\cos^2\varphi_0)^2} (\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4) \quad (45.51)$$

Janvier 2013

Littérature

1. Mercedes Bermejo-Solera & Jesús Otero. 2010. Global optimization of the Gauss conformal mappings. Journal of Geodesy, Vol. 84, issue n°4. pp481-489.
2. A. Commiot & A. Ben Hadj Salem. 2007. Cours de Cartographie Mathématique pour les Ingénieurs, v1. 52p.

CHAPITRE 46

NOTE SUR LA REPRÉSENTATION STÉRÉOGRAPHIQUE CONFORME

RÉSUMÉ

Le sujet de cette note est de présenter la représentation stéréographique. C'est la représentation d'un point P d'une sphère de rayon a en un point \hat{P} du plan.

46.1 INTRODUCTION ET RAPPELS HISTORIQUES

La représentation stéréographique de la sphère au plan est l'une des représentations la plus utilisée depuis l'antiquité. Elle était connue par Hipparcos (185-120 avant J.C) ainsi que Claudius Ptolemaeus (80-160) [1]. Ptolemaeus connaît que la représentation stéréographique transforme les cercles en cercles ou en droites, mais on ignore s'il savait que l'image de *tout cercle de la sphère* est un cercle ou une droite. Cette propriété fût démontrée par l'astronome et ingénieur Arabe Al-Farghani [2],[3] qui vivait entre le Caire et Baghdad au milieu du 9ème siècle. Cette représentation était employée dans la confection des astrolabes.

C'était Thomas Harriot (1560-1620) qui avait montré que la représentation stéréographique est conforme et approuvée par un papier présenté par Edmond Halley (1656-1742) à la Société Royale de Londres.

Le terme "projection stéréographique " fût donné par le mathématicien Belge et d'origine espagnole François d'Aiguillon (1567-1617) en 1613 dans le sixième chapitre concernant les projections de son livre d'optique "Opticorum liber extus de projectionibus".

Rappelons que l'histoire des représentations conformes a été le point de départ de la géométrie différentielle moderne avec le papier de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) de 1827 sur la théorie générale des surfaces [4]. Un autre apport considérable était venu du travail du mathématicien Français Gaspard Monge (1746-1818) spécialement de son livre sur l'application de l'analyse à la géométrie [6],[7].

46.2 PRÉSENTATION

Soit le pôle sud S de la sphère coincide avec l'origine du repère (S, x, y) du plan. L'axe $S\zeta$ représente la ligne des pôles sud-nord. Un point $P(\xi, \eta, \zeta)$ de la sphère a pour image le point $\hat{P}(x, y)$ du plan. Le point \hat{P} est l'intersection de la droite NP avec le plan. N désigne le pôle nord $N(0, 0, 2a) \in \mathbb{R}^3$. La sphère a pour centre le point de coordonnées $(0, 0, \zeta = a)$. Son équation est :

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2 = a^2 \iff \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2a\zeta = 0 \quad (46.1)$$

La droite NP a pour équation :

$$\begin{cases} x = 0 + t\xi = t\xi \\ y = 0 + t\eta = t\eta \\ z = 2a + t(\zeta - 2a) \end{cases} \quad (46.2)$$

La droite NP coupe le plan $z = \zeta = 0$ au point \hat{P} telque :

$$2a + t(\zeta - 2a) = 0 \implies t = \frac{2a}{2a - \zeta} \quad (46.3)$$

D'où les coordonnées de $\hat{P}(x, y)$ avec :

$$\hat{P}(x, y) \begin{cases} x = t\xi = \frac{2a\xi}{2a - \zeta} \\ y = t\eta = \frac{2a\eta}{2a - \zeta} \\ \text{avec } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2a\zeta = 0 \end{cases} \quad (46.4)$$

46.2.1 Le calcul inverse

Ayant (x, y) , exprimons (ξ, η, ζ) en fonction de x et y . De (46.4), on tire :

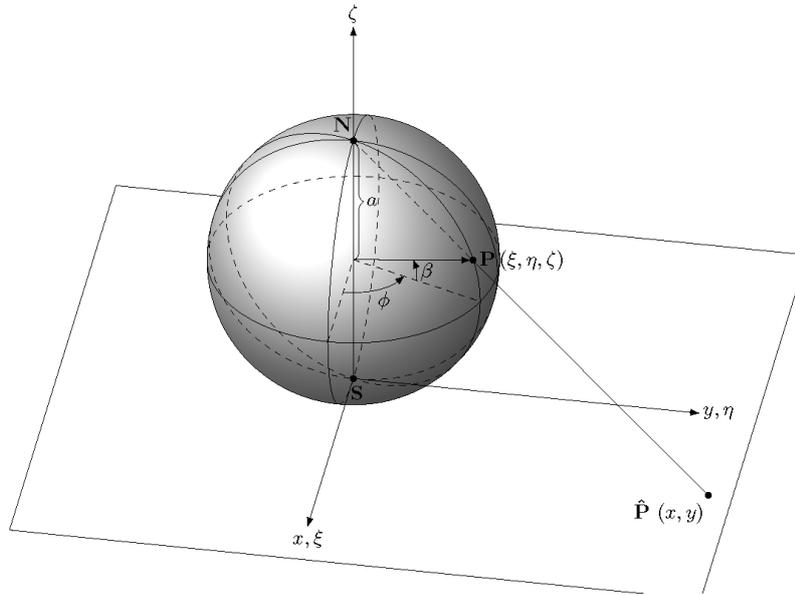


Fig. 46.1 La Représentation Stéréographique

$$\xi = (2a - \zeta) \frac{x}{2a} \quad (46.5)$$

$$\eta = (2a - \zeta) \frac{y}{2a} \quad (46.6)$$

En remplaçant (46.5) et (46.6) dans (46.1), on obtient :

$$(2a - \zeta)^2 \frac{x^2}{4a^2} + (2a - \zeta)^2 \frac{y^2}{4a^2} + \zeta^2 - 2a\zeta = 0 \quad (46.7)$$

Après calculs, on trouve l'équation suivante du second degré en ζ :

$$\zeta^2 \frac{x^2 + y^2 + 4a^2}{4a^2} - \zeta \frac{x^2 + y^2 + 2a^2}{a} + x^2 + y^2 = 0 \quad (46.8)$$

Son résolution donne les deux solutions, a étant positif :

$$\zeta_1 = 2a \quad (46.9)$$

$$\zeta_2 = \frac{2a(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4a^2} \quad (46.10)$$

ζ_1 ça correspond au point N le pôle nord de la sphère, son image le point $(\{\infty\})$. On retient donc $\zeta = \zeta_2$. Calculons $2a - \zeta$:

$$2a - \zeta = \frac{8a^3}{x^2 + y^2 + 4a^2} \quad (46.11)$$

D'où les expressions de ξ, η, ζ en fonction de x, y :

$$\xi = \frac{4a^2x}{x^2 + y^2 + 4a^2} \quad (46.12)$$

$$\eta = \frac{4a^2y}{x^2 + y^2 + 4a^2} \quad (46.13)$$

$$\zeta = \frac{2a(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4a^2} \quad (46.14)$$

46.3 APPLICATION DES COORDONNÉES GÉOGRAPHIQUES

Le point P a pour coordonnées tridimensionnelles exprimées en fonction de β, ϕ :

$$P = \begin{cases} \xi = a \cos \beta \cos \phi \\ \eta = a \cos \beta \sin \phi \\ \zeta = a + a \sin \beta \end{cases} \quad (46.15)$$

avec :

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2a\zeta = 0$$

La métrique de la sphère est donnée par :

$$ds^2 = a^2 d\beta^2 + a^2 \cos^2 \beta d\phi^2 \quad (46.16)$$

Sur l'image le plan, on a :

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 \quad (46.17)$$

D'où le module linéaire m :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{a^2 d\beta^2 + a^2 \cos^2 \beta d\phi^2} \quad (46.18)$$

Calculons alors dS^2 . Comme :

$$x = \frac{2a\xi}{2a - \zeta} = \frac{2a \cos \beta \cos \phi}{1 - \sin \beta} \quad (46.19)$$

$$y = \frac{2a\eta}{2a - \zeta} = \frac{2a \cos \beta \sin \phi}{1 - \sin \beta} \quad (46.20)$$

Ce qui donne :

$$dS^2 = \frac{4a^2(d\beta^2 + \cos^2 \beta d\phi^2)}{(1 - \sin \beta)^2} \quad (46.21)$$

Soit :

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{4}{(1 - \sin\beta)^2} \implies m = \frac{2}{1 - \sin\beta} \quad (46.22)$$

$-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \implies 1 - \sin\beta > 0$. Or l'expression (46.22) s'écrit aussi :

$$m = \frac{2}{1 - \sin\beta} = \frac{2}{1 - 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{2}{(\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\beta}{2})^2} = \frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2})} \quad (46.23)$$

La représentation stéréographique est évidemment conforme puisque son module linéaire m est indépendant de la direction [8] et ne dépend que du point (ici dépend seulement de β).

Retrouvons cette propriété de conformité autrement. Posons :

$$Z = x + iy \quad (46.24)$$

Soit

$$Z = x + iy = \frac{2a(\xi + i\eta)}{2a - \zeta} = \frac{2a\cos\beta(\cos\phi + i\sin\phi)}{1 - \sin\beta} = \frac{a\cos\beta e^{i\phi}}{\cos^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2})} \quad (46.25)$$

De (46.16), on peut écrire :

$$ds^2 = a^2 \cos^2\beta \left(\frac{d\beta^2}{\cos^2\beta} + d\phi^2 \right) = a^2 \cos^2\beta (dL_M^2 + d\phi^2) \quad (46.26)$$

où :

$$dL_M = \frac{d\beta}{\cos\beta} \implies L_M = \int_0^\beta \frac{d\theta}{\cos\theta} = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \Rightarrow e^{L_M} = \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \quad (46.27)$$

L_M est la latitude de Mercator. Les coordonnées (L_M, ϕ) sont des coordonnées symétriques et orthogonales, posons :

$$z = L_M + i\phi \quad (46.28)$$

Alors l'expression (46.25) s'écrit :

$$Z = 2ae^{L_M} e^{i\phi} = 2ae^{L_M + i\phi} = 2ae^z \quad (46.29)$$

Or l'expression Z donnée par (46.29) est une fonction holomorphe ou analytique de z . Donc elle représente une transformation conforme.

46.4 PROPRIÉTÉS

Propriété 1 : *Les cercles de la sphère ont transformés en cercles ou des droites du plan et vice-versa.*

Lemme 1 : *Tout plan intersectant une sphère donnée, on obtient un cercle.*

Démonstration du Lemme 1 : Soit la sphère \mathcal{S} d'équation :

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \quad (46.30)$$

et un plan K d'équation :

$$c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta + c_0 = 0 \quad (46.31)$$

coupant la sphère \mathcal{S} , le vecteur u ci-dessous :

$$u = \begin{cases} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{cases} \quad (46.32)$$

est perpendiculaire au plan K . Soit la droite Δ passant le centre de la sphère \mathcal{S} . Elle coupe le plan au point Ω . L'équation de la droite Δ est :

$$\Delta \begin{cases} \xi = tc_1 \\ \eta = tc_2 \\ \zeta = tc_3 \end{cases} \quad (46.33)$$

Les coordonnées de Ω sont telles que :

$$tc_1^2 + tc_2^2 + tc_3^2 + c_0 = 0 \implies t = -\frac{c_0}{\|u\|^2} \quad (46.34)$$

d'où :

$$\Omega = \begin{cases} -\frac{c_0c_1}{\|u\|^2} \\ -\frac{c_0c_2}{\|u\|^2} \\ -\frac{c_0c_3}{\|u\|^2} \end{cases} \quad (46.35)$$

Soit un point $M(\xi, \eta, \zeta)$ de l'intersection de la sphère \mathcal{S} et du plan K . Calculons la distance ΩM . Soit :

$$\Omega M \begin{cases} \xi + \frac{c_0c_1}{\|u\|^2} \\ \eta + \frac{c_0c_2}{\|u\|^2} \\ \zeta + \frac{c_0c_3}{\|u\|^2} \end{cases} \quad (46.36)$$

D'où :

$$\Omega M^2 = \left(\xi + \frac{c_0c_1}{\|u\|^2} \right)^2 + \left(\eta + \frac{c_0c_2}{\|u\|^2} \right)^2 + \left(\zeta + \frac{c_0c_3}{\|u\|^2} \right)^2 = 1 - \frac{c_0^2}{\|u\|^2} \quad (46.37)$$

Cette distance est constante, c'est-à-dire que l'ensemble des points $M = K \cap \mathcal{S}$ est un cercle de centre Ω et de rayon $r = \sqrt{1 - \frac{c_0^2}{\|u\|^2}}$. \diamond

Revenons à la propriété 1 : Soit un cercle F de la sphère S obtenu comme intersection d'un plan K d'équation :

$$c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta + c_0 = 0 \quad (46.38)$$

et de la sphère d'équation :

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2 = a^2 \iff \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2a\zeta = 0$$

Les coefficients c_i sont telque le plan K coupe ou est tangent à la sphère S . Remplaçant les formules de (46.12-46.13-46.14) dans (46.38) en prenant par exemple $a = \frac{1}{2}$, on obtient :

$$(c_0 + c_3)(x^2 + y^2) + c_1x + c_2y + c_0 = 0 \quad (46.39)$$

Si $c_0 + c_3 \neq 0$, l'équation précédente est l'équation du cercle :

$$\left(x + \frac{c_1}{2(c_0 + c_3)}\right)^2 + \left(y + \frac{c_2}{2(c_0 + c_3)}\right)^2 = \rho^2 \quad (46.40)$$

$$\text{avec } \rho^2 = \frac{c_1^2 + c_2^2}{4(c_0 + c_3)^2} - \frac{c_0}{c_0 + c_3} \quad (46.41)$$

Si $c_0 + c_3 = 0$ et $c_0 \neq 0$ les équations du plan (46.38) et du cercle (46.39) deviennent :

$$\frac{c_1}{c_0}\xi + \frac{c_2}{c_0}\eta - \zeta + 1 = 0 \quad (46.42)$$

$$\frac{c_1}{c_0}\xi + \frac{c_2}{c_0}\eta + 1 = 0 \quad (46.43)$$

Le plan donné par (46.42) passe par le pôle nord N et l'image du cercle est la droite donnée par (46.43).

Si $c_3 = c_0 = 0$, l'équation du plan est :

$$c_1\xi + c_2\eta = 0 \quad (46.44)$$

coupe la sphère suivant un méridien dont l'image est la droite passant par l'origine S :

$$c_1x + c_2y = 0 \quad (46.45)$$

Inversement, on donne le cercle d'équation :

$$(x - v)^2 + (y - w)^2 = \rho^2 \quad (46.46)$$

En utilisant (46.4) et en prenant $2a = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\xi}{1-\zeta} - v\right)^2 + \left(\frac{\eta}{1-\zeta} - w\right)^2 = \rho^2 \\ \Rightarrow \xi^2 + \eta^2 - 2\xi v(1-\zeta) - 2\eta w(1-\zeta) + (v^2 + w^2)(1-\zeta)^2 &= \rho^2(1-\zeta)^2 \end{aligned} \quad (46.47)$$

Comme le point antécédent (ξ, η) appartient à la sphère, on utilise que :

$$\xi^2 + \eta^2 = \zeta - \zeta^2 = \zeta(1-\zeta)$$

L'équation (46.47) devient pour $\zeta \neq 1$:

$$2\xi v + 2\eta w + (v^2 + w^2 - \rho^2 - 1)\zeta - v^2 - w^2 + \rho^2 = 0 \quad (46.48)$$

C'est l'équation du plan qui coupe la sphère S suivant un cercle.

Littérature

1. H.A. Kastrup.2008. On the Advancements of Conformal Transformations and their Associated Symmetries in Geometry and Theoretical Physics. arxiv :physics.hist-ph/0808.2730v1. www.arxiv.org.
2. See Appendix 3 of the next Ref. [3] : Al-Farghani's Proof of the Basic Theorem of Stereographic Projection" by N.D. Sergeyeva and L.M. Karpova, pp. 210-217 ; Al-Farghani, On the Astrolabe, Arabic Text Edition with Translation and Commentary by R. Lorch (Boethius Texte u. Abhandl. Geschichte Mathem. u. Naturw. **52**, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, 2005).
3. Jordanus de Nemore and the Mathematics of Astrolabes : *De Plana Spera* ; an Edition with Introduction, Translation and Commentary by R.B. Thomson (Studies and Texts **39**, Pontifical Institute of Mediaeval Studies, Toronto, 1978).
4. C.F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Werke 4 (see Ref. [5]) pp. 217-258 ; German translation and edition by A. Wangerin : Allgemeine Flächentheorie (Disquisitiones ...) von Carl Friedrich Gauss (1827) (Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften 5, Verlag Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1889) ; English translation with notes and a bibliography by J.C. Morehead and A.M. Hildebrandt : Karl Friedrich Gauss, General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825 (The Princeton University Library, Princeton, 1902) ; available from Internet Archive : <http://www.archive.org/>. A French translation of 1852 is available from Gallica : <http://www.gallica.bnf.fr/>.
5. C.F. Gauss, Allgemeine Auflösung der Aufgabe : Die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird ; Carl Friedrich Gauss, Werke 4 (Königl. Gesellsch. Wiss. Göttingen, Göttingen, 1873) pp. 189-216 ; available from Göttinger Digitalisierungszentrum (GDZ) : <http://www.gdz.sub.uni-goettingen.de/> ; from Gallica : www.gallica.bnf.fr/ ; from Internet Archive : <http://www.archive.org/> . English translation : C.F. Gauss, General solution of the Problem : to represent the Parts of a given Surface on another given Surface, so that the smallest Parts of the Representation shall be similar to the corresponding Parts of the Surface represented ; The Philosophical Magazine and Annals of Philosophy, New Ser., IV, 104- 113 and 206-215 (1828) ; available from Internet Archive : <http://www.archive.org/> French translation by L. Laugel : Solution Générale de ce Problème : Représenter les ... [Représentation Conforme] par C.-F. Gauss (Hermann & Fils, Paris, 1915) ; available from Gallica (under Gauss) :<http://www.gallica.bnf.fr/>.
6. G. Monge, Application de l'analyse à la géométrie à l'usage de l'Ecole Impériale Polytechnique, 4ème édition (Bernard, Paris, 1809) ; previously (1795, 1800/1801, 1807) published as : Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie, à l'usage de l'Ecole Polytechnique, Paris. We shall encounter the 5th edition from 1850, newly edited by Liouville, below [7].
7. Liouville published his proof in an appendix to a new edition of Monge's book (Ref. [4]), the publication of which he had organized : G. Monge, Application de l'Analyse à la Géométrie, 5ème édition, revue,

corrigée et annotée par M. Liouville (Bachelier, Paris, 1850), Note VI (pp. 609-616) : Extension au cas des trois dimensions de la question du tracé géographique. The book is available from Google Book Search : [http://www. books.google.de/](http://www.books.google.de/) (copied from the Harvard Library).

8. A. Ben Hadj Salem. *Eléments de Géodésie*. v1. 301p.

Avril 2013

NOTE SUR LA MÉTHODE DES RÉFÉRENTIELS INVERSES RÉGIONAUX EN GÉODÉSIE

- En hommage à mon professeur de topographie Raymond D'Hollander (1918-2013), ancien directeur de l'ENSG, IGN France -

Résumé : Dans ce papier, on passe en revue la méthode des référentiels inverses régionaux et son application en géodésie pour la détermination des paramètres de passage d'un système à un autre.

Dans deux articles récents, H.M. Dufour [1],[2] propose l'emploi des référentiels régionaux inverses faisant appel à la géodésie bidimensionnelle par le biais d'une représentation stéréographique plane et d'une troisième dimension proche des altitudes.

La méthode des référentiels régionaux inverses consiste à définir un référentiel (x, y, z) en un point O par une inversion de pôle l'antipode du point O , sur une sphère tangente en ce point à l'ellipsoïde. Les coordonnées (x, y, z) d'un point M dans ce référentiel appartiennent à 2 groupes, d'une part (x, y) sont les coordonnées d'une représentation stéréographique sur le plan tangent en O (H.M. Dufour,[3]) et d'autre part z est proche de l'altitude ellipsoïdique du point.

47.1 EXPRESSION DES COORDONNÉES DANS LES RÉFÉRENTIELS RÉGIONAUX INVERSES

47.1.1 Le premier référentiel

Soient (φ_0, λ_0) la latitude et la longitude géodésiques de O dans le système $(X, Y, Z)_g$ géodésique terrestre relatif à un datum donné \mathcal{D} d'ellipsoïde $E(a, e)$, où a et e sont respectivement le demi grand-axe et la première excentricité. Soit N_0 la valeur de N en O soit :

$$N_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} \quad (47.1)$$

Soient $(X, Y, Z)_g$ les coordonnées 3-D géodésiques d'un point M dans le datum \mathcal{D} .

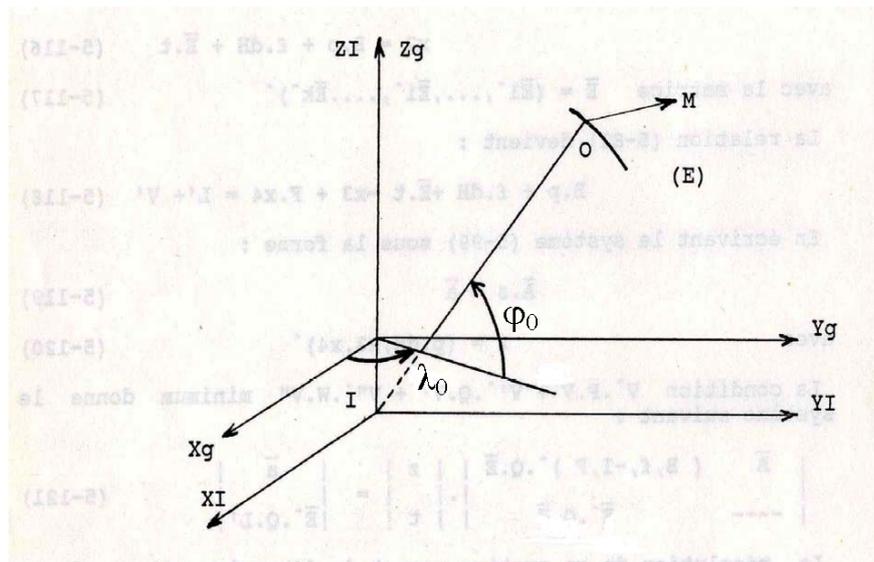


Fig. 47.1 Les Repères (X_g, Y_g, Z_g) et $I(X_I, Y_I, Z_I)$

On considère le point $I(0, 0, -N_0 e^2 \sin \varphi_0)_g$ dans $(O, X, Y, Z)_g$. Dans $I(X_I, Y_I, Z_I)$ les coordonnées de M sont Fig. (47.1) :

$$M : \begin{cases} X_I = X_g \\ Y_I = Y_g \\ Z_I = Z_g + e^2 N_0 \sin \varphi_0 \end{cases} \quad (47.2)$$

47.1.2 Le deuxième référentiel

Les coordonnées de M dans (O, XO, YO, ZO) sont obtenues par Fig.(47.2) :

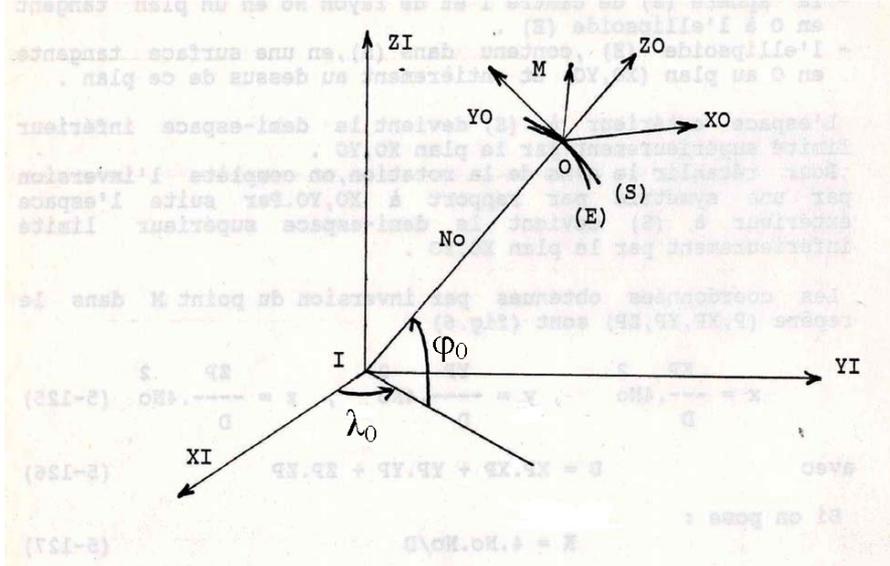


Fig. 47.2 Le Repère Local en $O (XO, YO, ZO)$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} X_I \\ Y_I \\ Z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_0 \end{pmatrix} \quad (47.3)$$

avec la matrice R_0 donnée par :

$$R_0 = \begin{pmatrix} -\sin\lambda_0 & -\cos\lambda_0 \cdot \sin\varphi_0 & \cos\lambda_0 \cdot \cos\varphi_0 \\ \cos\lambda_0 & -\sin\lambda_0 \cdot \sin\varphi_0 & \sin\lambda_0 \cdot \cos\varphi_0 \\ 0 & \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \end{pmatrix} \quad (47.4)$$

47.1.3 Le troisième référentiel

Soit P l'antipode de O , alors les coordonnées de M dans $P(XP, YP, ZP)$ sont Fig.(47.3) :

$$M : \begin{cases} X_P = X_0 \\ Y_P = Y_0 \\ Z_P = Z_0 + 2.N_0 \end{cases} \quad (47.5)$$

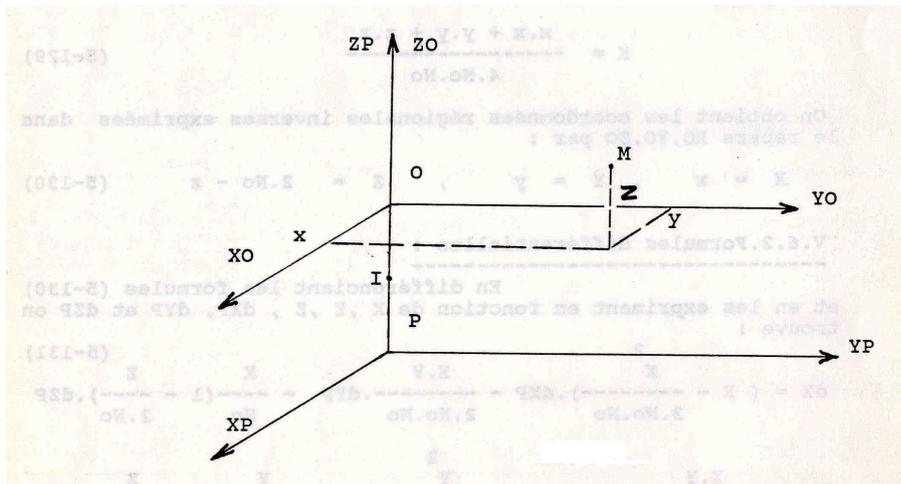


Fig. 47.3 Le Centre d'inversion P l'antipode de O

On considère alors l'inversion de centre P et de puissance $4.N_0^2$ qui transforme :

- la sphère (S) de centre I et de rayon N_0 en un plan tangent en O à l'ellipsoïde (E) ,
- l'ellipsoïde (E) , contenu dans (S) , en une surface tangente en O au plan (XO, YO) et entièrement au dessus de ce plan.

L'espace extérieur à (S) devient le demi-espace inférieur limité supérieurement par le plan (XO, YO) .

Pour rétablir le sens de la rotation, on complète l'inversion par une symétrie par rapport au plan (XO, YO) . Par suite l'espace extérieur à (S) devient le demi-espace supérieur limité inférieurement par le plan (XO, YO) .

Les coordonnées obtenues par inversion du point M dans le repère (P, XP, YP, ZP) sont Fig.(47.3) :

$$x = \frac{X_P}{D} 4N_0^2, \quad y = \frac{Y_P}{D} 4N_0^2, \quad z = \frac{Z_P}{D} 4N_0^2 \quad (47.6)$$

avec :

$$D = X_P^2 + Y_P^2 + Z_P^2 \quad (47.7)$$

Si on pose :

$$K = \frac{4N_0^2}{D} \quad (47.8)$$

alors les coordonnées s'écrivent :

$$x = K.X_P, \quad y = K.Y_P, \quad z = K.Z_P \quad (47.9)$$

K est appelé l'échelle tridimensionnelle. Il vérifie :

$$K = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4N_0^2} \quad (47.10)$$

On obtient les coordonnées régionales inverses exprimées dans le repère $O(OX, OY, OZ)$ par :

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = 2N_0 - z \quad (47.11)$$

47.2 FORMULES DIFFÉRENTIELLES

En différenciant les formules (47.11) et en les exprimant en fonction de X, Y, Z et dX_P, dY_P, dZ_P on trouve :

$$\begin{aligned} dX &= \left(K - \frac{X^2}{2N_0^2} \right) dX_P - \frac{XY}{2N_0^2} dY_P - \frac{X}{N_0} \left(1 - \frac{Z}{2N_0} \right) dZ_P \\ dY &= -\frac{XY}{2N_0^2} dX_P + \left(K - \frac{Y^2}{2N_0^2} \right) dY_P - \frac{Y}{N_0} \left(1 - \frac{Z}{2N_0} \right) dZ_P \\ dZ &= \left(1 - \frac{Z}{2N_0} \right) \left(\frac{X}{N_0} dX_P + \frac{Y}{N_0} dY_P \right) + (2-K) \left(1 - \frac{2Z}{N_0(2-K)} \right) dZ_P \end{aligned} \quad (47.12)$$

en négligeant le terme $\frac{Z^2}{2N_0^2} dZ_P$ dans dZ et pour les points d'altitudes proches de O , on a $Z \ll N_0$.

On peut écrire ces relations sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} dX_P \\ dY_P \\ dZ_P \end{pmatrix} \quad (47.13)$$

avec :

$$J = \begin{pmatrix} \left(K - \frac{X^2}{2N_0^2} \right) & -\frac{XY}{2N_0^2} & -\frac{X}{N_0} \left(1 - \frac{Z}{2N_0} \right) \\ -\frac{XY}{2N_0^2} & \left(K - \frac{Y^2}{2N_0^2} \right) & -\frac{Y}{N_0} \left(1 - \frac{Z}{2N_0} \right) \\ \left(1 - \frac{Z}{2N_0} \right) \frac{X}{N_0} & \left(1 - \frac{Z}{2N_0} \right) \frac{Y}{N_0} & (2-K) \left(1 - \frac{2Z}{N_0(2-K)} \right) \end{pmatrix} \quad (47.14)$$

La matrice covariance de $X = (X, Y, Z)$ s'obtient à partir de celle de $X_P = (X_P, Y_P, Z_P)$ par :

$$S_X^2 = J.S_{X_P}^2.J^T \quad (47.15)$$

Comme le vecteur $X_P = R_0^T.X_g +$ vecteur constant, on a alors :

$$S_X^2 = J.R_0^T.S_{X_g}^2.R_0.J^T \quad (47.16)$$

Au vecteur de position Doppler X' on lui associe son image X'' et on a aussi :

$$S_{X''}^2 = J''.R_0^T.S_{X'}^2.R_0.J''^T \quad (47.17)$$

avec J'' la matrice J calculée au point X'' .

47.3 DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DE LA TRANSFORMATION PAR LA MÉTHODE DES RÉFÉRENTIELS RÉGIONAUX INVERSE

47.3.1 Calcul des paramètres de la transformation

Au vecteur X on associe $(X_0, Y_0, Z_0)_1$ et au vecteur X' $(X_0, Y_0, Z_0)_2$, on peut écrire que :

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & rz & -ry \\ -rz & m & rx \\ ry & -rx & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}_1 \quad (47.18)$$

$$T = (Tx, Ty, Tz)^T \quad \text{le vecteur translation dans } (O, XO, YO, ZO) \quad (47.19)$$

$$m \text{ l'échelle}$$

$$\Omega = (rx, ry, rz)^T \quad \text{le vecteur rotation}$$

En omettant les indices dans (47.18) on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & rz & -ry \\ -rz & m & rx \\ ry & -rx & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \quad (47.20)$$

En remplaçant dX_P, dY_P et dZ_P par dX_0, dY_0 et dZ_0 dans les formules (47.12) et en notant $N = N_0$, on trouve après un long calcul :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} Tx \\ Ty \\ Tz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -Z - \frac{X^2 - Y^2 - Z^2}{2N} & Y & X(1 - \frac{Z}{N}) \\ -Z - \frac{Y^2 - X^2 - Z^2}{2N} & 0 & -X & Y(1 - \frac{Z}{N}) \\ -Y(1 - \frac{Z}{N}) & X(1 - \frac{Z}{N}) & 0 & Z + \frac{X^2 - Y^2 - Z^2}{2N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \\ m \end{pmatrix} \quad (47.21)$$

où la matrice J est donnée par (47.14), soit :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_i = F_{i,x_4} = \begin{pmatrix} X - X'' \\ Y - Y'' \\ Z - Z'' \end{pmatrix}_i = l_i \quad (47.22)$$

avec :

$$x_4 = (Tx, Ty, Tz, rx, ry, rz, m)^T \quad (47.23)$$

En écrivant (47.23) pour les k points Doppler, on a avec les notations :

$$F = (F_1^T, \dots, F_i^T, \dots, F_k^T)^T \quad (47.24)$$

$$L = (l_1^T, \dots, l_i^T, \dots, l_k^T)^T \quad (47.25)$$

$$F \cdot x_4 = L + V$$

La solution de (47.25) par la méthode des moindres carrés est :

$$\bar{x}_4 = (F^T \cdot F)^{-1} \cdot F^T \cdot L \quad (47.26)$$

Si P est la matrice poids de (47.25) on a alors :

$$P^{-1} = S_X^2 + S_{X''}^2 \quad (47.27)$$

La solution de (47.25) devient :

$$\bar{x}_4 = (F^T \cdot P \cdot F)^{-1} \cdot F^T \cdot P \cdot L \quad (47.28)$$

47.3.2 Exemple numérique

Dans ce paragraphe, on présente un calcul des paramètres de la transformation (47.18). On effectue les calculs avec 5 points utilisant l'ellipsoïde de Clarke Français 1880 et des coordonnées fictives Doppler dans le système NWL9D. La matrice de poids est la matrice unité.

On étudie les cas suivants :

- 3 paramètres : Tx, Ty et Tz .
- 4 paramètres : Tx, Ty, Tz et m .

- 5 paramètres : T_x, T_y, T_z, m et r_z .
- 6 paramètres : T_x, T_y, T_z, r_x, r_y et r_z .
- 7 paramètres.

Numéro du Point	$X_g(m)$	$Y_g(m)$	$Z_g(m)$
	$\varphi (gr)$	$\lambda (gr)$	$H(m)$
1	5 022 480.001	955 285.981	3 801 754.673
	40.9139 4833	11.9657 1090	638.790
2	5 081 670.850	771 787.642	3 765 024.278
	40.4550 1682	9.5954 4455	742.420
3	5 148 063.534	803 912.140	3 668 492.891
	39.2580 9749	9.8616 9173	1 315.150
4	5 220 829.640	772 127.642	3 569 820.799
	38.0627 4288	9.3474 4551	164.120
5	5 234 250.679	905 000.562	3 518 873.892
	37.4475 4070	10.8993 8173	128.260

Tableau 47.1 Les Coordonnées $(X, Y, Z)_g$ et $(\varphi, \lambda, H)_g$ terrestres

Numéro du Point	$X_g(m)$	$Y_g(m)$	$Z_g(m)$
	$\varphi (gr)$	$\lambda (gr)$	$H(m)$
1	5 022 231.531	955 276.421	3 802 185.031
	40.9155 2348	11.9661 7209	679.016
2	5 081 422.741	771 778.561	3 765 455.314
	40.4566 2110	9.5957 9479	781.280
3	5 147 814.642	803 903.721	3 668 923.772
	39.2597 5527	9.8620 5931	1 350.410
4	5 220 580.276	772 118.953	3 570 251.041
	38.0644 5433	9.3477 8192	195.249
5	5 234 001.930	904 991.742	3 519 305.014
	37.4492 8110	10.8997 8550	159.325

Tableau 47.2 Les Coordonnées (X', Y', Z') et (φ', λ', H') Doppler

Les coordonnées du point O sont :

$$\varphi_0 = 39.0000 \text{ gr}; \quad \lambda_0 = 10.0000 \text{ gr}$$

Numéro du Point	$X(m)$	$Y(m)$	$Z(m)$	$H - Z(m)$
1	157 880.386	192 570.801	626.161	12.63
2	-32 663.491	145 358.343	735.021	7.40
3	-11 317.642	25 777.233	1 314.783	0.37
4	-54 098.724	-93 417.174	160.953	3.17
5	75 053.496	-154 694.354	119.510	8.75

Tableau 47.3 Les Coordonnées régionales inverses (X, Y, Z) transformées de (X, Y, Z) terrestres

Numéro du Point	$X''(m)$	$Y''(m)$	$Z''(m)$	$H' - Z''(m)$
1	157 908.504	193 063.399	687.238	-8.22
2	-32 633.382	145 851.548	792.323	-11.04
3	-11 268.946	26 271.577	1 362.292	-11.88
4	-54 067.948	-92 922.150	198.251	-3.00
5	75 083.233	-154 198.522	153.648	5.68

Tableau 47.4 Les Coordonnées régionales inverses (X'', Y'', Z'') transformées de (X', Y', Z') terrestres

Les résultats du tableau 47.3 montrent qu'en s'éloignant du point origine O , les différences $H - Z$ augmentent.

Les résultats du tableau 47.5 montrent que les composantes de la translation restent stables pour les 5 cas.

Les composantes $(-30.10m, -494.45m, -45.57m)$ sont données dans le référentiel local géodésique du point origine $O(XO, YO, ZO)$ Fig.(47.3).

Valeurs des paramètres et des écarts-types	Nbre des paramètres				
	3	4	5	6	7
$T_x(m)$	-30.104	-30.158	-30.190	-30.135	-30.190
$\sigma_{T_x}(m)$	0.447	0.454	0.459	0.452	0.459
$T_y(m)$	-494.451	-494.497	-494.460	-494.407	-494.454
$\sigma_{T_y}(m)$	0.447	0.452	0.459	0.454	0.459
$T_z(m)$	-45.567	-45.564	-45.564	-45.541	-45.537
$\sigma_{T_z}(m)$	0.447	0.447	0.447	0.474	0.474
$rx(dmgr)$				0.814	0.822
σ_{rx}				2.239	2.239
$ry(dmgr)$				0.092	0.056
σ_{ry}				3.786	3.787
$rz(dmgr)$			0.890	0.892	0.892
σ_{rz}			1.839	1.839	1.839
$m(10^{-6})$		0.202	0.202		0.203
σ_m		0.289	0.289		0.289

Tableau 47.5 Les paramètres de la transformation

Littérature

1. **H.M. Dufour.** 1986a. Les référentiels régionaux inverses : une synthèse possible entre la géodésie Tri et Bi-dimensionnelle. Cours de géodésie appliquée. CERN, 14-18 Avril.
2. **H.M. Dufour.** 1986b. Etude de l'utilisation de la projection stéréographique pour la comparaison de 2 réseaux tridimensionnels. Manuscrit. Février.
3. **H.M. Dufour.** 1971. La projection stéréographique de la sphère et de l'ellipsoïde. Sept, IGN/2, 26804.
4. **A. Ben Hadj Salem.** 1986. La Combinaison des Données Doppler et les Observations Terrestres Classiques dans la Compensation des Réseaux Géodésiques. Mémoire de fin d'études présenté en octobre 1986 pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur Géographe Civil de l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques (ENSG/IGN France).

LES LIGNES GÉODÉSIQUES D'UN TORE

48.1 INTRODUCTION

Dans cet article, nous proposons d'écrire les équations des géodésiques d'un tore, et de les résoudre.

Soit le tore T défini par les équations suivantes :

$$M(\varphi, \lambda) = \begin{cases} x = (a + R\cos\varphi)\cos\lambda \\ y = (a + R\cos\varphi)\sin\lambda \\ z = R\sin\varphi \end{cases} \quad (48.1)$$

où a, R deux constantes positives avec $a > R$, $(\varphi, \lambda) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

On introduit les notations usuelles :

$$E = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = \left\| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \right\|^2 = R^2 \quad (48.2)$$

$$F = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} = 0 \quad (48.3)$$

$$G = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} = \left\| \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} \right\|^2 = (a + R\cos\varphi)^2 \quad (48.4)$$

On a alors :

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + (a + R\cos\varphi)^2 d\lambda^2 \quad (48.5)$$

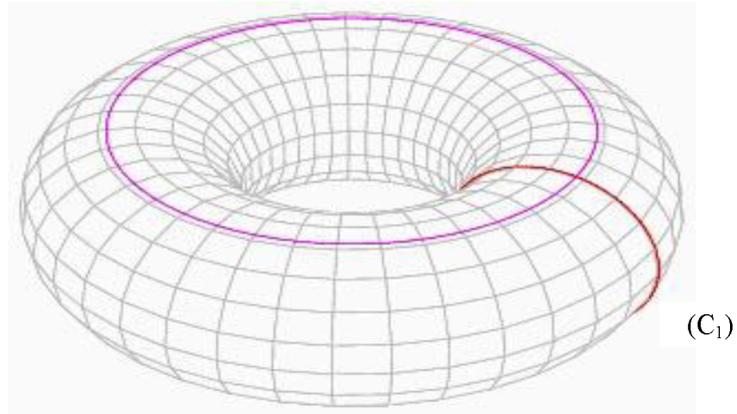


Fig. 48.1 Le Tore T

la première forme fondamentale du tore. Des équations (48.2-48.3-48.4), on obtient les équations :

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = E'_\varphi = 0 \quad (48.6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = E'_\lambda = 0 \quad (48.7)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = F'_\varphi = 0 \quad (48.8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = F'_\lambda = 0 \quad (48.9)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi} = G'_\varphi = -2R\sin\varphi(a + R\cos\varphi) \quad (48.10)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = G'_\lambda = 0 \quad (48.11)$$

48.2 Les Equations différentielles des lignes géodésiques

Les équations différentielles des lignes géodésiques sont données par [1] :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial \lambda} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + 2 \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi \partial \lambda} \cdot \frac{\partial M}{\partial \lambda} \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\lambda}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial \lambda} \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + G \frac{d^2 \lambda}{ds^2} = 0 \quad (48.12)$$

et :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \lambda^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 \lambda}{ds^2} + 2 \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi \partial \lambda} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\lambda}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial M}{\partial \varphi} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + E \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = 0 \quad (48.13)$$

Utilisons les équations (48.6) à (48.11), les équations (48.12) et 48.13) peuvent être écrites :

$$\left(F'_\varphi - \frac{E'_\lambda}{2} \right) \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + G'_\varphi \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\lambda}{ds} + \frac{G'_\lambda}{2} \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + G \frac{d^2 \lambda}{ds^2} = 0 \quad (48.14)$$

$$\left(F'_\lambda - \frac{G'_\varphi}{2} \right) \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + F \frac{d^2 \lambda}{ds^2} + E'_\lambda \frac{d\lambda}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + \frac{E'_\varphi}{2} \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + E \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = 0 \quad (48.15)$$

Ce qui donne après substitutions :

$$-2R \sin \varphi (a + R \cos \varphi) \frac{d\varphi}{ds} \frac{d\lambda}{ds} + (a + R \cos \varphi)^2 \frac{d^2 \lambda}{ds^2} = 0 \quad (48.16)$$

$$R \sin \varphi (a + R \cos \varphi) \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + R^2 \frac{d^2 \varphi}{ds^2} = 0 \quad (48.17)$$

L'équation (48.16) s'écrit :

$$\frac{d}{ds} \left((a + R \cos \varphi)^2 \frac{d\lambda}{ds} \right) = 0 \quad (48.18)$$

Ce qui donne :

$$(a + R \cos \varphi)^2 \frac{d\lambda}{ds} = C = \text{constante} \quad (48.19)$$

Posons :

$$r = a + R \cos \varphi \quad (48.20)$$

L'équation (48.19) n'est autre que l'équation de Clairaut :

$$\boxed{r \sin A z = C = (a + R) \sin A z e} \quad (48.21)$$

où $A z e$ est l'azimut de départ au point $M_0 = ((a + R) \cos \lambda_0, (a + R) \sin \lambda_0, 0)$ de la géodésique sur le plan $z = 0$.

On a alors les cas suivants :

a - $A z e = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \sin A z = 0 \Rightarrow A z = 0$, alors $\lambda = \lambda_0$ et le point M décrit le petit cercle de rayon R , soit le cercle (C_1) sur la figure 48.1.

b - $A z e = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r \sin A z = C = (a + R)$ ce qui donne :

$$\sin A z = \frac{a + R}{a + R \cos \varphi} > 1 \quad \text{Ce qui impossible sauf si } \varphi = 0 \text{ et } A z = \frac{\pi}{2} \quad (48.22)$$

Donc M décrit le grand cercle dans le plan $z = 0$ de rayon $a + R$.

48.3 RÉOLUTION DU PROBLÈME DANS LE CAS GÉNÉRAL

On suppose que au point M_0 , la géodésique a pour azimut Aze telque :

$$0 < Aze < \frac{\pi}{2}$$

L'équation(48.17) s'écrit en utilisant (48.19) :

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{C^2}{R} \frac{\sin\varphi}{(a + R\cos\varphi)^3}$$

Multiplions les deux membres par $2\frac{d\varphi}{ds}$ qu'on suppose différent de zéro, on obtient :

$$\frac{d}{ds} \left(\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right) = \frac{-C^2}{R^2} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{(a + R\cos\varphi)^2} \right) \quad (48.23)$$

Qu'on écrit sous la forme en posant $k^2 = C^2/R^2$:

$$d \left(\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right) = -d \left(\frac{k^2}{(a + R\cos\varphi)^2} \right) \quad (48.24)$$

En intégrant, on obtient :

$$\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = A - \frac{k^2}{(a + R\cos\varphi)^2} \geq 0 \quad (48.25)$$

où A est une constante strictement positive. On retrouve la valeur de A en utilisant l'expression de ds^2 donnée par (48.5) soit :

$$A = \frac{1}{R^2} \quad (48.26)$$

D'où en prenant $\frac{d\varphi}{ds} > 0$, on a alors :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R} \frac{\sqrt{(a + R\cos\varphi)^2 - C^2}}{a + R\cos\varphi} \quad (48.27)$$

La latitude φ passe par un maximum φ_m telque :

$$a + R\cos\varphi_m = C \Rightarrow \boxed{\cos\varphi_m = \frac{C - a}{R}} \quad (48.28)$$

L'équation (48.27) donne :

$$ds = \frac{R(a + R\cos\varphi)d\varphi}{\sqrt{(a + R\cos\varphi)^2 - C^2}} \quad (48.29)$$

Soit :

$$s = \int_0^\varphi \frac{R(a + R \cos t) dt}{\sqrt{(a + R \cos t)^2 - C^2}} \quad (48.30)$$

avec $s(\varphi = 0) = 0$.

Revenons à chercher l'expression de λ en fonction de φ . L'équation (48.19) donne :

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{C}{(a + R \cos \varphi)^2} \quad (48.31)$$

Soit :

$$d\lambda = \frac{C ds}{(a + R \cos \varphi)^2} = \frac{C \cdot R d\varphi}{(a + R \cos \varphi) \sqrt{(a + R \cos \varphi)^2 - C^2}} \quad (48.32)$$

D'où en intégrant :

$$\lambda - \lambda_0 = \int_0^\varphi \frac{C \cdot R dt}{(a + R \cos t) \sqrt{(a + R \cos t)^2 - C^2}} \quad (48.33)$$

Le calcul des intégrales (48.30) et (48.33) fera l'objet d'une prochaine note.

Mai 2013

Littérature

1. Abdelmajid Ben Hadj Salem. 2013. Eléments de Géodésie pour les Ingénieurs. v1. 301p.

NOTE SUR LES SURFACES ISOTHERMES DISCRÈTES

Résumé Dans ce papier, on présente les définitions des surfaces isothermes et comment on définit le cas des surfaces discrètes.

Juin 2013

49.1 INTRODUCTION

Soit \mathcal{F} une surface définie dans \mathbb{R}^3 , paramétrée par la fonction vectorielle $\mathbf{OM} = F(u, v)$ telle que :

$$F(u, v) \begin{cases} x = F_1(u, v) \\ y = F_2(u, v) \\ z = F_3(u, v) \end{cases} \quad (49.1)$$

F est dite une paramétrisation conforme de \mathcal{F} si on a les conditions suivantes [1] :

$$\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = e^{\Phi(u, v)} \quad (49.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = 0 \quad (49.3)$$

C'est-à-dire que la première forme fondamentale de \mathcal{F} s'écrit :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = e^{\Phi(u, v)}(du^2 + dv^2) \quad (49.4)$$

Le vecteur normal unitaire est donné par :

$$n = \frac{\frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial F}{\partial u} \wedge \frac{\partial F}{\partial v} \right\|} \quad (49.5)$$

avec :

$$\frac{\partial F}{\partial u} \cdot n = \frac{\partial F}{\partial v} \cdot n = 0$$

Quand le point M varie sur la surface \mathcal{F} , le repère $(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, n)$ est un repère mobile.

La deuxième forme fondamentale de \mathcal{F} est définie par [2] :

$$n \cdot d^2F = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (49.6)$$

49.2 PRÉSENTATION DES SURFACES ISOTHERMES

Définition : Si cette deuxième forme fondamentale s'écrit sous la forme :

$$-n \cdot d^2F = e^{\Phi(u,v)} \left(\frac{du^2}{\rho_1} + \frac{dv^2}{\rho_2} \right) \quad (49.7)$$

alors, la paramétrisation de \mathcal{F} est dite isotherme.

Dans ce cas, ρ_1, ρ_2 sont les rayons de courbure principaux de la surface \mathcal{F} , et les courbes $u = \text{constante}$ et $v = \text{constante}$ sont les antécédents des lignes de courbure du modèle.

Définition : Une surface qui admet des coordonnées isothermes est dite isotherme.

Exemple : soit la sphère définie par :

$$M = \begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \lambda \\ y = R \cos \varphi \sin \lambda \\ z = R \sin \varphi \end{cases} \quad R > 0 \quad (49.8)$$

On a alors :

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2 = R^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{d\varphi^2}{\cos^2 \varphi} + d\lambda^2 \right)$$

Posons :

$$d\mathcal{L}_M = \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \implies \mathcal{L}_M = \text{Log} \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (49.9)$$

\mathcal{L}_M la variable de Mercator, ds^2 s'écrit :

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \varphi (d\mathcal{L}_M^2 + d\lambda^2) = e^{\Phi(\mathcal{L}_M, \lambda)} (d\mathcal{L}_M^2 + d\lambda^2) \quad (49.10)$$

$$\text{avec } e^{\Phi(\mathcal{L}_M, \lambda)} = e^{\Phi(\mathcal{L}_M)} = R^2 \cos^2 \varphi \quad (49.11)$$

Comme :

$$\mathcal{L}_M = \text{Logtg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \implies \varphi = 2 \text{Arctg}(e^{\mathcal{L}_M}) - \frac{\pi}{2}$$

ce qui donne ($\varphi \in]-\pi/2, +\pi/2[, \cos \varphi > 0$) :

$$\Phi(\mathcal{L}_M) = 2 \text{Log} R + 2 \text{Log} \cos \varphi = 2 \text{Log} R + 2 \text{Log}(2 \sin(\text{Arctg} e^{\mathcal{L}_M})) \quad (49.12)$$

De (49.10), la sphère paramétrée par (\mathcal{L}_M, λ) est conforme. Calculons maintenant la deuxième forme fondamentale.

On a :

$$n = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (49.13)$$

$$dF = \begin{pmatrix} dF_1 = -R \sin \varphi \cos \lambda d\varphi - R \cos \varphi \sin \lambda d\lambda \\ dF_2 = -R \sin \varphi \sin \lambda d\varphi + R \cos \varphi \cos \lambda d\lambda \\ dF_3 = R \cos \varphi d\varphi \end{pmatrix} \quad (49.14)$$

et :

$$d^2 F = \begin{pmatrix} d^2 F_1 = -R \cos \varphi \cos \lambda d\varphi^2 + 2R \sin \varphi \sin \lambda d\varphi d\lambda - R \cos \varphi \cos \lambda d\lambda^2 \\ d^2 F_2 = -R \cos \varphi \sin \lambda d\varphi^2 - 2R \sin \varphi \cos \lambda d\varphi d\lambda - R \cos \varphi \sin \lambda d\lambda^2 \\ d^3 F_3 = -R \sin \varphi d\varphi^2 \end{pmatrix} \quad (49.15)$$

D'où l'expression de $n.d^2 F$ la deuxième forme fondamentale :

$$n.d^2 F = \cos \varphi \cos \lambda .d^2 F_1 + \cos \varphi \sin \lambda .d^2 F_2 + \sin \varphi .d^2 F_3 = -R d\varphi^2 - R \cos^2 \varphi d\lambda^2 \quad (49.16)$$

Soit :

$$-n.d^2 F = R d\varphi^2 + R \cos^2 \varphi d\lambda^2 = e^{\Phi(\mathcal{L}_M)} \left(\frac{d\mathcal{L}_M^2}{R} + \frac{d\lambda^2}{R} \right) \quad (49.17)$$

On retrouve l'équation (49.7) avec :

$$\rho_1 = \rho_2 = R \quad (49.18)$$

Donc la sphère est une surface isotherme.

On laisse à titre d'exercice pour le lecteur d'étudier le cas de l'ellipsoïde de révolution. En général, les surfaces de révolution de \mathbb{R}^3 sont des surfaces isothermes.

49.3 LES EQUATIONS DE GAUSS-WEINGARTEN ET GAUSS-CODAZZI

49.3.1 Les équations de Gauss-Weingarten

Considérons la base du repère mobile $(\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, n)$ et exprimons les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial u}$ et $\frac{\partial}{\partial v}$ des vecteurs de cette base dans la même base, en tenant compte que la surface est isotherme c'est-à-dire qu'on a l'équation (49.7) :

$$-n.d^2F = e^{\Phi(u,v)} \left(\frac{du^2}{\rho_1} + \frac{dv^2}{\rho_2} \right)$$

or [2], la deuxième forme fondamentale s'écrit aussi :

$$n.d^2F = L.du^2 + 2Mdu.dv + N.dv^2 \quad (49.19)$$

avec :

$$L = n. \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \quad (49.20)$$

$$M = n. \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \quad (49.21)$$

$$N = n. \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \quad (49.22)$$

Or en utilisant (49.7), on a :

$$L = -\frac{e^{\Phi}}{\rho_1} \quad (49.23)$$

$$M = 0 \quad (49.24)$$

$$N = -\frac{e^{\Phi}}{\rho_2} \quad (49.25)$$

Commençons par calculer $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)$. Posons :

$$e_1 = \frac{\partial F}{\partial u} \quad (49.26)$$

$$e_2 = \frac{\partial F}{\partial v} \quad (49.27)$$

$$e_3 = n \quad (49.28)$$

On écrit :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = a.e_1 + b.e_2 + c.e_3 \quad (49.29)$$

Il faut déterminer les coefficients, a, b et c , d'où en utilisant (49.2) et (49.3) :

$$e_1 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = a \cdot e_1 \cdot e_1 + b \cdot e_1 \cdot e_2 + c \cdot e_1 \cdot e_3 = a \cdot e^\Phi + 0 + 0 = a \cdot e^{\Phi(u,v)} \quad (49.30)$$

Or :

$$e_1 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} e^{\Phi(u,v)} = \frac{e^{\Phi(u,v)}}{2} \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u} \quad (49.31)$$

Par suite :

$$a = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi(u,v)}{\partial u} = \frac{\Phi'_u}{2} \quad (49.32)$$

De même :

$$e_2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = a \cdot e_2 \cdot e_1 + b \cdot e_2 \cdot e_2 + c \cdot e_2 \cdot e_3 = 0 + b \cdot e^\Phi + 0 + 0 = b \cdot e^{\Phi(u,v)} \implies b = e^{-\Phi} \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \quad (49.33)$$

Comme :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} \right) = 0 \implies \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0 \quad (49.34)$$

Et :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^2 = 2 \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{\partial e^\Phi}{\partial v} = e^\Phi \cdot \Phi'_v \implies \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2} e^\Phi \cdot \Phi'_v \quad (49.35)$$

D'où :

$$b = e^{-\Phi} \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = e^{-\Phi} \frac{-1}{2} e^\Phi \cdot \Phi'_v = \frac{-\Phi'_v}{2} \quad (49.36)$$

Enfin :

$$e_3 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = a \cdot e_3 \cdot e_1 + b \cdot e_3 \cdot e_2 + c \cdot e_3 \cdot e_3 = 0 + 0 + c \implies c = n \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = L = -\frac{e^\Phi}{\rho_1} \quad (49.37)$$

Finalelement :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\Phi'_u}{2} e_1 - \frac{\Phi'_v}{2} e_2 - \frac{e^\Phi}{\rho_1} e_3 \quad (49.38)$$

On a aussi :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = \frac{\Phi'_v}{2} e_2 - \frac{\Phi'_u}{2} e_1 - \frac{e^\Phi}{\rho_2} e_3 = -\frac{\Phi'_u}{2} e_1 + \frac{\Phi'_v}{2} e_2 - \frac{e^\Phi}{\rho_2} e_3 \quad (49.39)$$

Et :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 \implies \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = a_1 \cdot e^\Phi = \frac{1}{2} e^\Phi \cdot \Phi'_v \quad (49.40)$$

Par suite :

$$a_1 = \frac{\Phi'_v}{2} \quad (49.41)$$

D'une part :

$$\frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = a_2 \cdot e^\Phi \quad (49.42)$$

Comme :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)^2 = 2 \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = e^\Phi \cdot \Phi'_v \quad (49.43)$$

Ce qui donne :

$$a_2 = \frac{\Phi'_v}{2} \quad (49.44)$$

D'autre part :

$$e_3 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = n \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = a_3 = M = 0 \quad (49.45)$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) = \frac{\Phi'_v}{2} e_1 + \frac{\Phi'_v}{2} e_2 \quad (49.46)$$

Maintenant, on va déterminer $\frac{\partial n}{\partial u}$ et $\frac{\partial n}{\partial v}$. Comme $n \cdot n = n^2 = 1 \implies n \cdot \frac{\partial n}{\partial u} = 0$ c'est à-dire qu'on peut écrire :

$$\frac{\partial n}{\partial u} = b_1 \cdot e_1 + b_2 \cdot e_2 \quad (49.47)$$

Alors :

$$\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial n}{\partial u} = b_1 \cdot e^\Phi \quad (49.48)$$

Or :

$$L = n \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = n \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(n \cdot \frac{\partial F}{\partial u} \right) - \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} = - \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} = L$$

Soit :

$$\frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} = -L = \frac{e^\Phi}{\rho_1} \implies b_1 = \frac{1}{\rho_1} \quad (49.49)$$

Maintenant :

$$\frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial n}{\partial u} = b_2 \cdot e^\Phi \quad (49.50)$$

Or :

$$M = n \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = n \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left(n \cdot \frac{\partial F}{\partial v} \right) - \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = - \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = 0 = M$$

Soit :

$$\frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial v} = 0 = b_2 \cdot e^\Phi \implies b_2 = 0 \quad (49.51)$$

Donc :

$$\frac{\partial n}{\partial u} = \frac{1}{\rho_1} e_1 \quad (49.52)$$

$$\text{et de même } \frac{\partial n}{\partial v} = \frac{1}{\rho_2} e_2 \quad (49.53)$$

En résumé, on peut écrire sous forme matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial u} \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi'_u}{2} & -\frac{\Phi'_v}{2} & -\frac{e^\Phi}{\rho_1} \\ \frac{\Phi'_v}{2} & \frac{\Phi'_u}{2} & 0 \\ \frac{1}{\rho_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix} \quad (49.54)$$

De même :

$$\frac{\partial}{\partial v} \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Phi'_v}{2} & \frac{\Phi'_u}{2} & 0 \\ -\frac{\Phi'_u}{2} & \frac{\Phi'_v}{2} & -\frac{e^\Phi}{\rho_2} \\ 0 & \frac{1}{\rho_2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix} \quad (49.55)$$

Les relations (49.54) et (49.55) sont appelées les équations de Gauss-Weingarten.

Posons :

$$\sigma = \begin{pmatrix} F'_u \\ F'_v \\ n \end{pmatrix} \quad (49.56)$$

Alors, Les relations (49.54) et (49.55) peuvent être écrites sous la forme :

$$\sigma'_u = A \cdot \sigma \quad (49.57)$$

$$\sigma'_v = B \cdot \sigma \quad (49.58)$$

où A et B sont les matrices 3x3 ci-dessus.

49.3.2 Les équations de Gauss-Codazzi

Comme $\frac{\partial}{\partial v}(\sigma'_u) = \frac{\partial}{\partial u}(\sigma'_v)$, on obtient :

$$A'_v \sigma + A \cdot \sigma'_v = B'_u \sigma + B \cdot \sigma'_u \quad (49.59)$$

soit en tenant compte des relations (49.57) et (49.58) pour tout $\sigma \neq 0$:

$$A'_v - B'_u + A.B - B.A = 0 \quad (49.60)$$

Qu'on écrit sous la forme :

$$A'_v - B'_u + [A, B] = 0 \quad (49.61)$$

avec :

$$[A, B] = A.B - B.A$$

L'ensemble des équations de (49.60) constitue les équations dites de Gauss-Codazzi.

Calculons $[A, B]$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{e^\Phi}{\rho_1 \rho_2} & \frac{\Phi'_v}{2} e^\Phi \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \\ \frac{e^\Phi}{\rho_1 \rho_2} & 0 & -\frac{\Phi'_u}{2} e^\Phi \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \\ \frac{\Phi'_v}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) & \frac{\Phi'_u}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (49.62)$$

Par suite, l'équation (49.60) donne après calculs les équations suivantes de Gauss-Codazzi :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2 \frac{e^\Phi}{\rho_1 \rho_2} = 0 \\ \frac{2}{\rho_2^2} \cdot \frac{\partial \rho_2}{\partial u} - \frac{\partial \Phi}{\partial u} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) = 0 \\ \frac{2}{\rho_1^2} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) = 0 \end{cases} \quad (49.63)$$

Dans le cas de l'exemple étudié, on a :

$$e^\Phi = R^2 \cos \varphi$$

$$\rho_1 = \rho_2 = R$$

et

$$u = \mathcal{L}_M; \quad d\mathcal{L}_m = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

On vérifie facilement les trois équations ci-dessus. On laisse au lecteur d'écrire ces équations pour l'ellipsoïde de révolution.

49.4 LES SURFACES ISOTHERMES DISCRÈTES

Dans cette section, on va présenter les surfaces isothermes discrètes. On considère le cas de l'ellipsoïde de révolution. Soit $E(a, e)$ un ellipsoïde de révolution de paramètres a et e respectivement le demi grand-axe et la première excentricité.

Un point $M(\varphi, \lambda)$ est défini par ses coordonnées tridimensionnelles dans un référentiel 3D donné par :

$$\begin{cases} X = N \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = N \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = N(1 - e^2) \sin \varphi \end{cases} \quad (49.64)$$

On considère que $(\varphi, \lambda) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$. Soient l, q deux entiers positifs non nuls, on pose :

$$\varphi_i = \frac{i\pi}{2l} \quad i = 0, 1, \dots, l \quad (49.65)$$

$$\lambda_j = \frac{j\pi}{q} \quad j = 0, 1, \dots, q \quad (49.66)$$

On note le point $M_{i,j} = M(\varphi_i, \lambda_j)$.

Définition : Un quadrilatère $\mathcal{Q}_{i,j}$ de la surface discrète de l'ellipsoïde est formé par les sommets telsqu'on a le chemin fermé suivant :

$$M_{i,j} \longmapsto M_{i,j+1} \longmapsto M_{i+1,j+1} \longmapsto M_{i+1,j} \longmapsto M_{i,j}.$$

$$M_{i+1,j}(4)[d]M_{i+1,j+1}(3)[l]$$

$$M_{i,j}(1)[r]M_{i,j+1}(2)[u]$$

Définition : La surface discrète de l'ellipsoïde est formée par l'ensemble des quadrilatères $\mathcal{Q}_{i,j}$.

Etudions la position du quadrilatère $\mathcal{Q}_{i,j}$ par rapport à la surface de l'ellipsoïde E . Le quadrilatère $\mathcal{Q}_{i,j}$ est un morceau de plan passant par les quatre sommets du quadrilatère ou encore passant par $M_{i,j}$ et engendré par le vecteur $M_{i,j}M_{i,j+1}$ et le vecteur $M_{i,j}M_{i+1,j}$. Pour simplifier les notations, appelons :

$$M_{i,j} = M_1 \quad (49.67)$$

$$M_{i,j+1} = M_2 \quad (49.68)$$

$$M_{i+1,j} = M_4 \quad (49.69)$$

Le quadrilatère $\mathcal{Q}_{i,j}$ est engendré donc par les vecteurs M_1M_2 et M_1M_4 , leurs composantes sont :

$$M_1M_2 = \begin{vmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{vmatrix} ; \quad M_1M_4 = \begin{vmatrix} X_4 - X_1 \\ Y_4 - Y_1 \\ Z_4 - Z_1 \end{vmatrix} \quad (49.70)$$

49.4.1 Equation du plan passant par \mathcal{Q}_{ij}

Soit $P(X, Y, Z)$ un point quelconque du plan en question, son équation vectorielle s'écrit :

$$M_1P = \begin{vmatrix} X - X_1 = \alpha(X_2 - X_1) + \beta(X_4 - X_1) \\ Y - Y_1 = \alpha(Y_2 - Y_1) + \beta(Y_4 - Y_1) \\ Z - Z_1 = \alpha(Z_2 - Z_1) + \beta(Z_4 - Z_1) \end{vmatrix} \quad (49.71)$$

L'équation du plan est obtenu en disant que les vecteurs M_1P, M_1M_2, M_1M_4 sont coplanaires, donc le déterminant ci-dessous est nul :

$$\begin{vmatrix} X - X_1 & X_2 - X_1 & X_4 - X_1 \\ Y - Y_1 & Y_2 - Y_1 & Y_4 - Y_1 \\ Z - Z_1 & Z_2 - Z_1 & Z_4 - Z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (49.72)$$

ou encore :

$$\begin{vmatrix} X - X_1 & \Delta X_{12} & \Delta X_{14} \\ Y - Y_1 & \Delta Y_{12} & \Delta Y_{14} \\ Z - Z_1 & \Delta Z_{12} & \Delta Z_{14} \end{vmatrix} = 0 \quad (49.73)$$

avec :

$$\Delta X_{12} = X_2 - X_1; \quad \Delta X_{14} = X_4 - X_1 \quad (49.74)$$

$$\Delta Y_{12} = Y_2 - Y_1; \quad \Delta Y_{14} = Y_4 - Y_1 \quad (49.75)$$

$$\Delta Z_{12} = Z_2 - Z_1; \quad \Delta Z_{14} = Z_4 - Z_1 \quad (49.76)$$

L'équation du plan sera de la forme :

$$A.X + B.Y + C.Z = H \quad (49.77)$$

où les coefficients A, B, C, H dépendent des $\Delta(\cdot)_{kl}$ ci-dessus.

Soit un point $T(\varphi, \lambda)$ de l'ellipsoïde de coordonnées (X_T, Y_T, Z_T) , avec $\varphi_i < \varphi < \varphi_{i+1}$ et $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$. La distance de T au plan du quadrilatère est donnée par :

$$Dist(T, \mathcal{Q}) = \frac{|H - A.X - B.Y - C.Z|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (49.78)$$

49.4.2 Recherches de la distance maximale

Quand le point $T(\varphi, \lambda)$ se mouve sur la portion de l'ellipsoïde avec $\varphi_i < \varphi < \varphi_{i+1}$ et $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$, on veut chercher le maximum de la distance du point T au quadrilatère \mathcal{Q}_{ij} . Pour cela, on étudie la fonction :

$$(\varphi, \lambda) \longrightarrow g(\varphi, \lambda) = (H - A.X - B.Y - C.Z)^2 \quad (49.79)$$

Calculons $\frac{\partial g}{\partial \varphi}$ et $\frac{\partial g}{\partial \lambda}$:

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 2(H - A.X - B.Y - C.Z) \left(-A \cdot \frac{\partial X}{\partial \varphi} - B \cdot \frac{\partial Y}{\partial \varphi} - C \cdot \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad (49.80)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} = 2(H - A.X - B.Y - C.Z) \left(-A \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} - B \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \right) = 0 \quad (49.81)$$

Comme $T \notin \mathcal{Q}_{ij}$ donc $H - A.X - B.Y - C.Z \neq 0$, par suite, on a :

$$A \cdot \frac{\partial X}{\partial \varphi} + B \cdot \frac{\partial Y}{\partial \varphi} + C \cdot \frac{\partial Z}{\partial \varphi} = 0 \quad (49.82)$$

$$A \cdot \frac{\partial X}{\partial \lambda} + B \cdot \frac{\partial Y}{\partial \lambda} = 0 \quad (49.83)$$

Rappelons que :

$$d(N \cos \varphi) = -\rho \sin \varphi d\varphi$$

Donc :

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \cos \lambda \quad (49.84)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi \sin \lambda \quad (49.85)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi \quad (49.86)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = -N \cos \varphi \sin \lambda \quad (49.87)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = N \cos \varphi \cos \lambda \quad (49.88)$$

Les équations (49.82) et (49.83) deviennent :

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{B}{A} \implies \cos \lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (49.89)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{C}{A} \cos \lambda \quad (49.90)$$

D'où :

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (49.91)$$

Littérature

1. **A. Bobenko** et **U. Pinkall**. 1996. Discrete isothermic surfaces. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. N° 475, pp 187-208.
2. **A. Ben Hadj Salem**. 2013. *Elément de Géométrie pour les Ingénieurs*. En préparation. 301 p.

UNIFICATION DES SYSTÈMES GÉODÉSQUES TERRESTRES PAR LE GPS

Résumé : On dispose de trois ou quatre réseaux géodésiques terrestres indépendants (c'est-à-dire non liés par des observations géodésiques), avec des points de ces réseaux observés par GPS. En déterminant les paramètres de la transformation de passage du système GPS vers les systèmes terrestres, on peut déterminer les corrections des coordonnées géodésiques des points terrestres utilisés dans le calcul de façon que l'ensemble des réseaux utilisés forme un système géodésique terrestre unifié.

50.1 INTRODUCTION

L'introduction de la technologie de positionnement par GPS (Global Positioning System) fournit à l'utilisateur sa position (X, Y, Z) tridimensionnelle dans le système géocentrique mondial dit *WGS84* (World Geodetic System 1984). Parmi les modèles de transformation de passage du système géodésique mondial au système géodésique national ou local, on cite le modèle de Bursa-Wolf à 7 paramètres. Nous présentons ci-après ce modèle de transformations de passage entre les systèmes géodésiques avec en plus la possibilité d'unifier des systèmes géodésiques terrestres.

Nous utilisons par la suite les notations suivantes :

- (X_1, Y_1, Z_1) les coordonnées cartésiennes 3D dans le système géocentrique *WGS84* (système 1),

- (X_2, Y_2, Z_2) les coordonnées cartésiennes 3D dans le système géocentrique local (système 2),
- $(\varphi_1, \lambda_1, he_1)$ les coordonnées géodésiques dans le système 1,
- $(\varphi_2, \lambda_2, he_2)$ les coordonnées géodésiques dans le système 2.

50.2 LE MODÈLE DE BURSA - WOLF

Ce modèle s'écrit sous la forme vectorielle [1] :

$$X_2 = T + (1 + m) \cdot R(rx, ry, rz) \cdot X_1 \quad (50.1)$$

Où :

- X_2 est le vecteur de composantes $(X_2, Y_2, Z_2)^T$, T désigne transposée,
- T est le vecteur translation de composantes $(T_X, T_Y, T_Z)^T$ entre les systèmes 1 et 2,
- $1 + m$ est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,
- $R(rx, ry, rz)$ est la matrice de rotation (3,3) pour passer du système 1 au système 2,
- X_1 est le vecteur de composantes $(X_1, Y_1, Z_1)^T$.

En développant (50.1), on obtient :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad (50.2)$$

avec (rx, ry, rz) les rotations comptées positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Dans l'équation (50.2), on considère que le point dans le système terrestre local représenté par X_2 est approché. On écrit alors :

$$X_2 = X_2^0 + dX_2$$

Soit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2^0 \\ Y_2^0 \\ Z_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dX_2 \\ dY_2 \\ dZ_2 \end{pmatrix} \quad (50.3)$$

Alors l'équation (50.2) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} X_2^0 \\ Y_2^0 \\ Z_2^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dX_2 \\ dY_2 \\ dZ_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad (50.4)$$

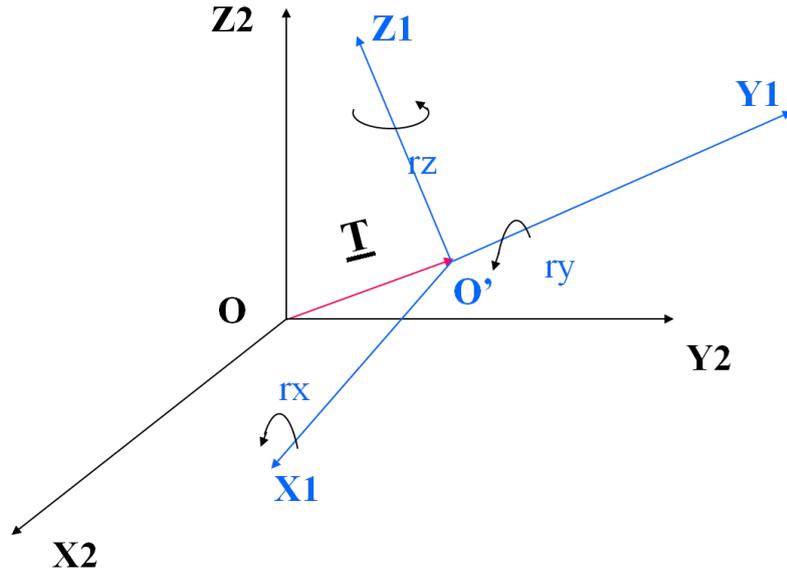


Fig. 50.1 Le Modèle de Bursa-Wolf

50.3 CALCUL DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE BURSA-WOLF PAR LES MOINDRES CARRÉS

En considérant comme inconnues les paramètres $T_X, T_Y, T_Z, m, rx, ry, rz$, et dX_2, dY_2, dZ_2 l'équation (50.4) s'écrit en gardant les termes du 1er ordre comme suit :

$$\begin{pmatrix} X_2^0 - X_1 \\ Y_2^0 - Y_1 \\ Z_2^0 - Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} dX_2 \\ dY_2 \\ dZ_2 \end{pmatrix} \quad (50.5)$$

Maintenant, on exprime les variations (dX_2, dY_2, dZ_2) en fonction des coordonnées géodésiques dans le système local c'est-à-dire $(d\lambda_2, d\varphi_2, dhe_2)$. On obtient sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} dX_2 \\ dY_2 \\ dZ_2 \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} d\lambda_2 \\ d\varphi_2 \\ dhe_2 \end{pmatrix} \quad (50.6)$$

Avec :

$$J = \begin{pmatrix} -(N+he)\cos\varphi\sin\lambda & -(\rho+he)\sin\varphi\cos\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ (N+he)\cos\varphi\cos\lambda & -(\rho+he)\sin\varphi\sin\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ 0 & (\rho+he)\cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}_2 \quad (50.7)$$

où ρ, N sont les rayons principaux de courbure de l'ellipsoïde de révolution donnés par :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad (50.8)$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \quad (50.9)$$

e^2 le carré de la première excentricité.

L'équation (50.5) devient :

$$\begin{pmatrix} X_2^0 - X_1 \\ Y_2^0 - Y_1 \\ Z_2^0 - Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} - J \cdot \begin{pmatrix} d\lambda_2 \\ d\varphi_2 \\ dhe_2 \end{pmatrix} \quad (50.10)$$

Pour permettre de résoudre par la méthode des moindres carrés le système précédent, on ne va pas considérer l'inconnue de l'altitude dhe_2 et la matrice J devient la matrice J' (3×2) donnée par :

$$J' = \begin{pmatrix} -(N+he)\cos\varphi\sin\lambda & -(\rho+he)\sin\varphi\cos\lambda \\ (N+he)\cos\varphi\cos\lambda & -(\rho+he)\sin\varphi\sin\lambda \\ 0 & (\rho+he)\cos\varphi \end{pmatrix}_2 \quad (50.11)$$

Et on a :

$$\begin{pmatrix} X_2^0 - X_1 \\ Y_2^0 - Y_1 \\ Z_2^0 - Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} - J' \cdot \begin{pmatrix} d\lambda_2 \\ d\varphi_2 \end{pmatrix} \quad (50.12)$$

Si n est le nombre des points GPS utilisés sur l'ensemble des systèmes géodésiques terrestres, le nombre des équations d'observations est $3n$. Le nombre des inconnues est $7 + 2n$. La résolution de (50.12) est possible si $3n \geq 7 + 2n \implies n \geq 7$ c'est-à-dire le nombre des points commun est supérieur à 7 ce qui est possible dans ces cas de calculs.

En utilisant l'équation (50.12) pour les n points communs dans les systèmes 1 et 2 et en posant :

$$L = \begin{pmatrix} X_{21}^0 - X_{11} \\ Y_{21}^0 - Y_{11} \\ Z_{21}^0 - Z_{11} \\ \vdots \\ X_{2i}^0 - X_{1i} \\ Y_{2i}^0 - Y_{1i} \\ Z_{2i}^0 - Z_{1i} \\ \vdots \\ X_{2n}^0 - X_{1n} \\ Y_{2n}^0 - Y_{1n} \\ Z_{2n}^0 - Z_{1n} \end{pmatrix} \quad (50.13)$$

$$U = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (50.14)$$

$$W = \begin{pmatrix} d\lambda_{21} \\ d\varphi_{21} \\ \vdots \\ d\lambda_{2i} \\ d\varphi_{2i} \\ \vdots \\ d\lambda_{2n} \\ d\varphi_{2n} \end{pmatrix} \quad (50.15)$$

A la matrice $(3n, 7)$:

$$A(3n, 7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_i & 0 & -Z_i & Y_i \\ 0 & 1 & 0 & Y_i & Z_i & 0 & -X_i \\ 0 & 0 & 1 & Z_i & -Y_i & X_i & 0 \end{pmatrix}_{i=1, n} \quad (50.16)$$

B la matrice $(3n, 2)$:

$$B(2n, 2) = \begin{pmatrix} -(N_i + he_i)\cos\varphi_i\sin\lambda_i & -(\rho_i + he_i)\sin\varphi_i\cos\lambda_i \\ (N_i + he_i)\cos\varphi_i\cos\lambda_i & -(\rho_i + he_i)\sin\varphi_i\sin\lambda_i \\ 0 & (\rho_i + he_i)\cos\varphi_i \end{pmatrix}_{2(i=1, n)} \quad (50.17)$$

et V le vecteur des résidus de la méthode des moindres carrés, la détermination des paramètres inconnus (U, W) se fait par la résolution par les moindres carrés de l'équation :

$$AU - BW = L + V \quad (50.18)$$

Posons :

$$\mathcal{M} = (A, -B) \quad (50.19)$$

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} \quad (50.20)$$

Le système (50.18) s'écrit :

$$\mathcal{M} \cdot \mathcal{X} = L + V \quad (50.21)$$

Chercher \mathcal{X} tel que $V^T \cdot V$ soit minimum ce qui donne :

$$\bar{\mathcal{X}} = (\mathcal{M}^T \cdot \mathcal{M})^{-1} \cdot \mathcal{M}^T \cdot L \quad (50.22)$$

Le vecteur résidu est donné par :

$$V = \mathcal{M} \cdot \bar{\mathcal{X}} - L = \mathcal{M} \cdot (\mathcal{M}^T \cdot \mathcal{M})^{-1} \cdot \mathcal{M}^T \cdot L - L \quad (50.23)$$

Le facteur de la variance unitaire est donné par :

$$\sigma^2 = \frac{V^T V}{3n - 7 - 2n} \quad (50.24)$$

50.4 UNIFICATION DES SYSTÈMES GÉODÉSIQUES TERRESTRES

De (50.22), on tire le vecteur des corrections ($d\lambda_i, d\varphi_i$) soit \bar{W} . On calcule par la suite les nouvelles coordonnées planimétriques $(\bar{X}_i, \bar{Y}_i)_2$. Soit $I_{(1)} = \{1, n_1\}$ l'ensemble des points communs utilisés du système terrestre $S_2^{(1)}$. On peut maintenant modéliser le passage des coordonnées $(X_i, Y_i)_2 (i \in I_{(1)})$ aux coordonnées corrigées $(\bar{X}_i, \bar{Y}_i)_2 (i \in I_{(1)})$ par des polynômes complexes conformes. Enfin, on transforme tous les autres coordonnées des points du système $S_2^{(1)}$, de même pour les autres systèmes terrestres utilisés. Ce qui permet d'unifier ces systèmes géodésiques terrestres.

Littérature

1. **Abdelmajid BEN HADJ SALEM**.2013. Eléments de Géodésie (en cours de préparation). 335p.

LA DÉTERMINATION D'UN GÉOÏDE DE HAUTE PRÉCISION PAR L'APPROCHE D'A. ARDALAN : I. RAPPELS DE LA THÉORIE DE PIZZETTI-SOMIGLIANA

Résumé : A partir d'une approche de A. Ardalán [1] sur le calcul d'un géoïde régional de haute résolution dans le système géodésique mondial 2000 (World Geodetic Datum 2000), nous proposons d'appliquer cette approche à la détermination d'un géoïde tunisien et de calculer la différence entre la position du géoïde et le zéro de référence des altitudes orthométriques.

Juin 2013

51.1 INTRODUCTION

Parmi les objectifs de la mise à niveau de la géodésie tunisienne figure la détermination du géoïde tunisien, car le territoire tunisien manque une information sur cette surface appelée géoïde qui avait été définie par C. Gauss [2] par : ” *Ce que nous appelons dans le sens géométrique la surface de la terre ce n'est que la surface qui coupe les lignes de la pesanteur sous un angle droit et qui fait partie de la surface des océans*”.

Le terme géoïde fut pour la première fois introduit par J. Listing en 1872 [3] : ” *nous appellerons la surface mathématique de la terre définie précédemment la surface à laquelle les océans font partie, surface géodale de la terre ou géoïde*”.

51.2 RAPPELS ET NOTATIONS

51.2.1 Présentation des Coordonnées Ellipsoïdiques ou de Jacobi

Soit $E(a, b)$ ou $E(a, e)$ l'ellipsoïde de référence où a, b, e désignent respectivement le demi grand-axe, le demi petit-axe et la première excentricité. Un point M est défini par ses coordonnées tridimensionnelles (x, y, z) dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, e_1, e_2, e_3)$ ou $\mathcal{R}(O, x, y, z)$. On considère une famille d'ellipsoïdes de demi petit-axe $u, u > 0$, de demi grand-axe $\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}$, avec :

$$\varepsilon^2 = a^2 - b^2 \quad (51.1)$$

Le point M appartient à l'ellipsoïde d'équation :

$$\frac{x^2 + y^2}{u^2 + \varepsilon^2} + \frac{z^2}{u^2} = 1 \quad (51.2)$$

Soit ϕ l'angle $\angle(OM, OM')$ (Fig.51.1) appelé la latitude réduite correspondante au point M , on a alors :

$$\sin\phi = \frac{HM'}{OM'} = \frac{HM'}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \quad (51.3)$$

Par définition de l'ellipse méridienne passant par M , on a le rapport d'affinité :

$$\frac{u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} = \frac{HM}{HM'} \implies HM = \frac{u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \cdot HM' \quad (51.4)$$

D'où :

$$\sin\phi = \frac{HM'}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \cdot \frac{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}}{u} \cdot HM = \frac{HM}{u} \quad (51.5)$$

Soit :

$$z = HM = u \cdot \sin\phi \quad (51.6)$$

Et :

$$x = OH \cdot \cos\lambda = OM' \cos\phi \cdot \cos\lambda \quad (51.7)$$

$$y = OH \cdot \sin\lambda = OM' \cos\phi \cdot \sin\lambda \quad (51.8)$$

En résumé, on a les coordonnées du point M exprimées en fonction des coordonnées de Jacobi (u, ϕ, λ) :

$$M = \begin{cases} x = \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \cdot \cos\phi \cos\lambda \\ y = \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \cdot \cos\phi \sin\lambda \\ z = u \cdot \sin\phi \end{cases} \quad (51.9)$$

avec $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\lambda \in [0, 2\pi]$ et $u \in \mathbb{R}^*$. Si $u = b$, on retrouve l'équation de l'ellipsoïde de référence E :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (51.10)$$

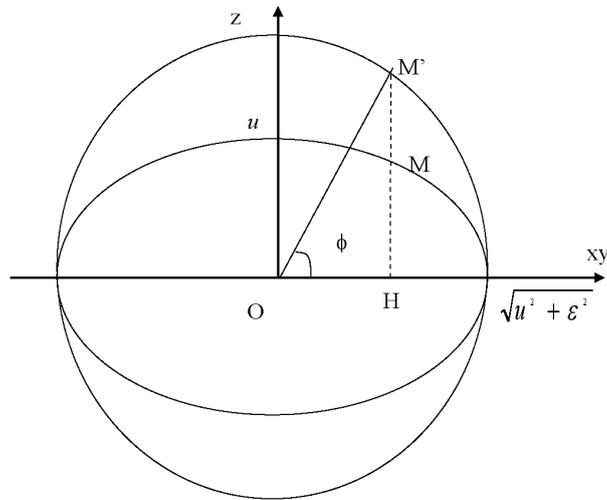


Fig. 51.1 Les Coordonnées de Jacobi

51.2.2 Passage des coordonnées (u, ϕ, λ) aux coordonnées (x, y, z)

De l'équation (51.2), on a :

$$u^2(x^2 + y^2) + z^2(u^2 + \epsilon^2) = u^2(u^2 + \epsilon^2) \Rightarrow u^4 + u^2(\epsilon^2 - x^2 - y^2 - z^2) - z^2\epsilon^2 = 0 \quad (51.11)$$

C'est une équation du second degré en u^2 . Son discriminant Δ vaut :

$$\Delta = (r^2 - \epsilon^2)^2 + 4z^2\epsilon^2 \quad (51.12)$$

$$\text{avec } r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (51.13)$$

L'équation (51.11) a deux solutions, l'une négative à rejeter et l'autre positive strictement à savoir :

$$u_2 = \left\{ \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 + z^2 - \epsilon^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - \epsilon^2)^2 + 4z^2\epsilon^2} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (51.14)$$

Si $x \neq 0$, on a :

$$\text{tg} \lambda = \frac{y}{x} \quad (51.15)$$

et :

$$\sin \phi = \frac{z}{u} \quad (51.16)$$

d'où ϕ .

51.2.3 Le Repère Mobile (E_u, E_ϕ, E_{lm})

On a donc :

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \begin{vmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \cos\phi \cos\lambda \\ \frac{u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \cos\phi \sin\lambda \\ \sin\phi \end{vmatrix} ; \quad \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\| = \frac{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \sin^2\phi}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}} \quad (51.17)$$

Soit :

$$E_u = \frac{\frac{\partial M}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial M}{\partial u} \right\|} = \begin{vmatrix} \frac{u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \sin^2\phi} \cos\phi \cos\lambda \\ \frac{u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \sin^2\phi} \cos\phi \sin\lambda \\ \frac{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \sin^2\phi} \sin\phi \end{vmatrix} \quad (51.18)$$

De même :

$$\frac{\partial M}{\partial \phi} = \begin{vmatrix} -\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \sin\phi \cos\lambda \\ -\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \sin\phi \sin\lambda \\ u \cos\phi \end{vmatrix} ; \quad \left\| \frac{\partial M}{\partial \phi} \right\| = \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \sin^2\phi \quad (51.19)$$

Soit :

$$E_\phi = \frac{\frac{\partial M}{\partial \phi}}{\left\| \frac{\partial M}{\partial \phi} \right\|} = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \sin^2\phi} \sin\phi \cos\lambda \\ -\frac{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2}}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \sin^2\phi} \sin\phi \sin\lambda \\ \frac{u}{\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \sin^2\phi} \cos\phi \end{vmatrix} \quad (51.20)$$

Enfin :

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda} = \begin{vmatrix} -\sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \cos\phi \sin\lambda \\ \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \cos\phi \cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \left\| \frac{\partial M}{\partial \lambda} \right\| = \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} \cos\phi \quad (51.21)$$

Soit :

$$E_\lambda = \frac{\frac{\partial M}{\partial \lambda}}{\left\| \frac{\partial M}{\partial \lambda} \right\|} = \begin{vmatrix} -\sin\lambda \\ \cos\lambda \\ 0 \end{vmatrix} \quad (51.22)$$

51.2.4 L'expression de la métrique $g = ds^2$ en coordonnées de Jacobi

A partir des formules (51.9), on obtient :

$$\begin{aligned} g = ds^2 &= \frac{u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi}{u^2 + \varepsilon^2} du^2 + (u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi) d\phi^2 + (u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi d\lambda^2 \\ &= g_{uu} du^2 + g_{\phi\phi} d\phi^2 + g_{\lambda\lambda} d\lambda^2 = (du, d\phi, d\lambda)^T . J . \begin{pmatrix} du \\ d\phi \\ d\lambda \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (51.23)$$

Avec :

$$J = \begin{pmatrix} g_{uu} & 0 & 0 \\ 0 & g_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & 0 & g_{\lambda\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi}{u^2 + \varepsilon^2} & 0 & 0 \\ 0 & u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi & 0 \\ 0 & 0 & (u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi \end{pmatrix} \quad (51.24)$$

Posons :

$$g = \text{Det}(J) = (u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi)^2 \cos^2 \phi \quad (51.25)$$

51.2.5 L'Expression du Laplacien Δ en Coordonnées Ellipsoidiques

Le laplacien en coordonnées (u, ϕ, λ) est exprimé par la formule [4] :

$$\Delta V = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{uu}} \cdot \frac{\partial V}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\phi\phi}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\sqrt{g}}{g_{\lambda\lambda}} \cdot \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) \right\} \quad (51.26)$$

En utilisant les formules (51.24) et (51.25), on obtient la formule du laplacien en coordonnées ellipsoidiques :

$$\Delta V = \frac{1}{u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi} \left\{ (u^2 + \varepsilon^2) \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + 2u \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial V}{\partial \phi} + \frac{u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi}{(u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} \right\} \quad (51.27)$$

51.3 RÉOLUTION DU LAPLACIEN EN COORDONNÉES ELLIPSOÏDIQUES

On cherche à résoudre l'équation (51.27) en considérant le potentiel Normal sous la forme :

$$V(u, \phi, \lambda) = f(u) . h(\phi) . l(\lambda) \quad (51.28)$$

où f, h, l trois fonctions lisses suffisamment différentiables respectivement des variables u, ϕ, λ .
Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Delta V = 0 \Rightarrow \\ h(\phi).l(\lambda) \left((u^2 + \varepsilon^2) \frac{d^2 f}{du^2} + 2u \frac{df}{du} \right) + \\ f(u).l(\lambda) \left(\frac{d^2 h}{d\phi^2} - tg\phi \frac{dh}{d\phi} \right) + \\ \frac{u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi}{(u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi} f(u).h(\phi). \frac{d^2 l}{d\lambda^2} = 0 \end{aligned} \quad (51.29)$$

En divisant par $f(u).h(\phi).l(\lambda) \neq 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} \Delta V = 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{f(u)} \left((u^2 + \varepsilon^2) \frac{d^2 f}{du^2} + 2u \frac{df}{du} \right) + \\ \frac{1}{h(\phi)} \left(\frac{d^2 h}{d\phi^2} - tg\phi \frac{dh}{d\phi} \right) + \\ \frac{u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi}{(u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi} \cdot \frac{d^2 l}{d\lambda^2} = 0 \end{aligned} \quad (51.30)$$

La variable λ se trouve dans le dernier terme de l'équation précédente ce qui donne premièrement :

$$\begin{aligned} \frac{(u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi}{u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi} \cdot \left[\frac{1}{f(u)} \left((u^2 + \varepsilon^2) \frac{d^2 f}{du^2} + 2u \frac{df}{du} \right) + \frac{1}{h(\phi)} \left(\frac{d^2 h}{d\phi^2} - tg\phi \frac{dh}{d\phi} \right) \right] = \\ - \frac{d^2 l}{d\lambda^2} \frac{1}{l(\lambda)} \end{aligned} \quad (51.31)$$

Le membre à gauche de (51.31) est fonction seulement de u, ϕ alors que celui à droite est fonction de λ , ce-ci n'est possible que si les deux membres sont égaux à une constante. Soit pour le membre à droite :

$$- \frac{d^2 l}{d\lambda^2} \frac{1}{l(\lambda)} = \text{constante} \quad (51.32)$$

Soit pour avoir :

$$l(\lambda = 0) = l(\lambda = 2\pi) \quad (51.33)$$

on doit choisir la constante égale à m^2 , avec $m \in \mathbb{N}$, d'où :

$$\frac{d^2 l}{d\lambda^2} + m^2 l(\lambda) = 0 \Rightarrow l(\lambda) = A.\sin m\lambda + B.\cos m\lambda \quad (51.34)$$

avec A, B deux constantes.

L'équation (51.30) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(u)} \left((u^2 + \varepsilon^2) \frac{d^2 f}{du^2} + 2u \frac{df}{du} \right) + \\ \frac{1}{h(\phi)} \left(\frac{d^2 h}{d\phi^2} - tg\phi \frac{dh}{d\phi} \right) + \\ -m^2 \frac{u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi}{(u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi} = 0 \end{aligned} \quad (51.35)$$

Or le terme :

$$\frac{u^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi}{(u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi} = \frac{1}{\cos^2 \phi} - \frac{\varepsilon^2}{u^2 + \varepsilon^2}$$

Par suite :

$$\frac{1}{f(u)} \left((u^2 + \varepsilon^2) \frac{d^2 f}{du^2} + 2u \frac{df}{du} \right) + m^2 \frac{\varepsilon^2}{u^2 + \varepsilon^2} = \frac{m^2}{\cos^2 \phi} - \frac{1}{h(\phi)} \left(\frac{d^2 h}{d\phi^2} - tg\phi \frac{dh}{d\phi} \right) \quad (51.36)$$

Le membre à gauche dépend de u , celui de droite dépend de ϕ . Les deux membres doivent être égaux à une constante qu'on prendra égale à $n(n+1)$ avec $n \in \mathbb{N}$, d'où la deuxième équation différentielle :

$$h'' \cos \phi - h' \sin \phi + \left(n(n+1) \cos \phi - \frac{m^2}{\cos \phi} \right) h = 0 \quad (51.37)$$

dont les solutions sont [4] :

$$h(\phi) = P_{nm}(\sin \phi) \quad (51.38)$$

où les $P_{nm}(\sin \phi)$ sont appelées les fonctions de Legendre associées [4] d'ordre m et de degré n . La troisième équation différentielle est :

$$\frac{1}{f(u)} \left((u^2 + \varepsilon^2) \frac{d^2 f}{du^2} + 2u \frac{df}{du} \right) + m^2 \frac{\varepsilon^2}{u^2 + \varepsilon^2} = n(n+1) \quad (51.39)$$

Soit :

$$(u^2 + \varepsilon^2) \frac{d^2 f}{du^2} + 2u \frac{df}{du} - \left(n(n+1) - m^2 \frac{\varepsilon^2}{u^2 + \varepsilon^2} \right) f(u) = 0 \quad (51.40)$$

Posons :

$$t = i \frac{u}{\varepsilon} \quad (51.41)$$

et :

$$F(t) = f\left(\frac{\varepsilon t}{i}\right) \quad (51.42)$$

Alors la troisième équation s'écrit :

$$(1-t^2) \frac{d^2 F}{dt^2} - 2t \frac{dF}{dt} + \left(n(n+1) - m^2 \frac{1}{1-t^2} \right) F(t) = 0 \quad (51.43)$$

Dont les solutions sont [4] :

$$F_1(t) = f_1(u) = P_{nm}\left(i\frac{u}{\varepsilon}\right) \quad (51.44)$$

$$F_2(t) = f_2(u) = Q_{nm}\left(i\frac{u}{\varepsilon}\right) \quad (51.45)$$

où $Q_{nm}(w)$ sont les fonctions de Legendre de seconde espèce d'ordre m et de degré n .

Alors, l'expression des solutions générales de $\Delta V = 0$ pour $V = f(u).h(\phi).l(\lambda)$ est une combinaison linéaire des chacune des solutions des trois équations différentielles. Parmi les solutions possibles (en notant b le demi petit-axe de l'ellipsoïde de référence E) on a :

$$V_i(u, \phi, \lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \frac{P_{nm}\left(i\frac{u}{\varepsilon}\right)}{P_{nm}\left(i\frac{b}{\varepsilon}\right)} [a_{nm}P_{nm}(\sin\phi)\cos m\lambda + b_{nm}P_{nm}(\sin\phi)\sin m\lambda] \quad (51.46)$$

$$V_e(u, \phi, \lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \frac{Q_{nm}\left(i\frac{u}{\varepsilon}\right)}{Q_{nm}\left(i\frac{b}{\varepsilon}\right)} [a_{nm}P_{nm}(\sin\phi)\cos m\lambda + b_{nm}P_{nm}(\sin\phi)\sin m\lambda] \quad (51.47)$$

Avec $m \leq n$ des entiers positifs et V_i, V_e sont respectivement le potentiel gravitationnel normal à l'intérieur et à l'extérieur de la Terre.

51.4 LA THÉORIE DE PIZZETTI-SOMIGLIANA

51.4.1 Le potentiel de la pesanteur en coordonnées sphériques

Le potentiel de la pesanteur en un point $M(x, y, z)$ est donné par la fonction :

$$W = V + \Phi \quad (51.48)$$

avec V le potentiel gravitationnel :

$$V = \iiint_T \frac{\rho dv}{r} \quad (51.49)$$

et Φ le potentiel centrifuge dû à la rotation de la Terre :

$$\Phi = \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \quad (51.50)$$

Le potentiel gravitationnel s'écrit sous la forme :

$$V = \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (J_{nm}\cos m\lambda + K_{nm}\sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta) \right) \quad (51.51)$$

où :

- J_{nm}, K_{nm} : sont les coefficients que nous obtenons par l'observation et ils sont connus.

- $P_{nm}(\cos\theta)$: on les appelle les harmoniques sphériques ou polynômes de Legendre de deuxième espèce.

Au lieu d'utiliser le potentiel de la pesanteur, on utilise un potentiel de référence qui soit celui d'un ellipsoïde de révolution (dans notre cas c'est l'ellipsoïde de référence $E(a, e)$), alors, on a :

$$U = \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n} P_{2n}(\cos\theta) \right) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2\theta \quad (51.52)$$

(r, θ, λ) sont les coordonnées sphériques (Fig. :51.2), c'est-à-dire :

$$M = \begin{cases} x = r \sin\theta \cos\lambda \\ y = r \sin\theta \sin\lambda \\ z = r \cos\theta \end{cases} \quad (51.53)$$

P_{nm} sont les fonctions de Legendre associés de 1er espèce de degré n et d'ordre m [4],[5].

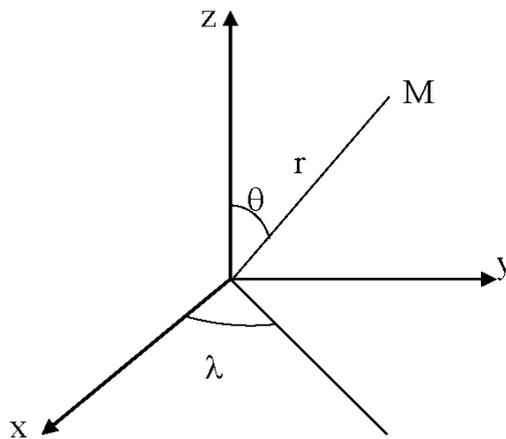


Fig. 51.2 Les Coordonnées Sphériques

51.4.2 Le Potentiel de la pesanteur en coordonnées ellipsoïdiques

Le potentiel de la pesanteur normal est donné par :

$$U = V_N + \Phi_N \quad (51.54)$$

avec en coordonnées ellipsoïdiques :

$$\Phi_N = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi \quad (51.55)$$

Le potentiel gravitationnel normal $V_N = V_e$. Comme on considère la terre comme un ellipsoïde de révolution de paramètres (a, b) , c'est un corps symétrique par rapport à l'axe z donc le potentiel gravitationnel normal V_N ne dépend pas de la longitude géodésique λ , alors V_N devient avec $m = 0$:

$$V_N = V_e(u, \phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q_{n0}(i\frac{u}{\varepsilon})}{Q_{n0}(i\frac{b}{\varepsilon})} \cdot a_{n0} P_{n0}(\sin \phi) \quad (51.56)$$

On pose :

$$P_{n0}(\sin \phi) = P_n(\sin \phi) \quad (51.57)$$

$$Q_{n0}(i\frac{u}{\varepsilon}) = Q_n(i\frac{u}{\varepsilon}) \quad (51.58)$$

$$Q_{n0}(i\frac{b}{\varepsilon}) = Q_n(i\frac{b}{\varepsilon}) \quad (51.59)$$

Les fonctions $P_n(w)$ sont appelées les polynômes de Legendre en w de degré n (voir l'Annexe ci-après). L'expression de U_N devient :

$$U_N = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q_n(i\frac{u}{\varepsilon})}{Q_n(i\frac{b}{\varepsilon})} \cdot a_n P_n(\sin \phi) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi \quad (51.60)$$

Maintenant on cherche U_N tel que pour $u = b$, la fonction U_N est égale à la valeur U_0 sur l'ellipsoïde de référence, pour tout ϕ ce qui donne :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q_n(i\frac{b}{\varepsilon})}{Q_n(i\frac{b}{\varepsilon})} \cdot a_n P_n(\sin \phi) + \frac{1}{2} \omega^2 (b^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi &= U_0 \Rightarrow \\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_n(\sin \phi) + \frac{1}{2} \omega^2 (b^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi &= U_0 \end{aligned} \quad (51.61)$$

soit en détail :

$$a_0 P_0(\sin \phi) + a_1 P_1(\sin \phi) + a_2 P_2(\sin \phi) + \sum_{n=3}^{+\infty} a_n P_n(\sin \phi) + \frac{1}{2} \omega^2 (b^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi = U_0 \quad (51.62)$$

Or :

$$P_0(\sin \phi) = 1 \quad (51.63)$$

$$P_1(\sin \phi) = \sin \phi \quad (51.64)$$

$$P_2(\sin \phi) = \frac{3 \sin^2 \phi}{2} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2} \cos^2 \phi \quad (51.65)$$

Ce qui donne :

$$a_0 + a_2 - U_0 + a_1 \sin \phi + \frac{1}{2}(\omega^2(b^2 + \varepsilon^2) - 3a_2) \cos^2 \phi + \sum_{n=3}^{+\infty} a_n P_n(\sin \phi) = 0 \Rightarrow$$

$$a_0 + a_2 - U_0 = 0 \quad (51.66)$$

$$a_1 = 0 \quad (51.67)$$

$$\omega^2(b^2 + \varepsilon^2) - 3a_2 = 0 \quad (51.68)$$

$$a_n = 0 \quad \text{pour } n \geq 3 \quad (51.69)$$

D'où :

$$a_0 = U_0 - \frac{1}{3}\omega^2(b^2 + \varepsilon^2) = U_0 - \frac{1}{3}a^2\omega^2 \quad (51.70)$$

$$a_1 = 0 \quad (51.71)$$

$$a_2 = \frac{1}{3}a^2\omega^2 \quad (51.72)$$

Par suite, U_N s'écrit :

$$U_N = \frac{Q_0(i\frac{u}{\varepsilon})}{Q_0(i\frac{b}{\varepsilon})} a_0 + \frac{Q_2(i\frac{u}{\varepsilon})}{Q_2(i\frac{b}{\varepsilon})} a_2 P_2(\sin \phi) + \frac{1}{2}\omega^2(u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi \quad (51.73)$$

Comme [4] :

$$Q_0(\zeta) = \coth^{-1} \zeta, \quad \zeta \in \mathbb{C} \quad (51.74)$$

$$Q_2(\zeta) = \left(\frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}\right) \coth^{-1} \zeta - \frac{3}{2}\zeta \quad (51.75)$$

Prenons $\zeta = i\frac{u}{\varepsilon}$ d'où :

$$Q_0(\zeta) = \coth^{-1} \zeta = \left(\frac{\operatorname{ch}(iu/\varepsilon)}{\operatorname{sh}(iu/\varepsilon)}\right)^{-1} = \left(-i\frac{\cos(u/\varepsilon)}{\sin(u/\varepsilon)}\right)^{-1} = -i\operatorname{Arcotg}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) = -i\operatorname{Arctg}\frac{\varepsilon}{u} \quad (51.76)$$

De même :

$$Q_0\left(i\frac{b}{\varepsilon}\right) = -i\operatorname{Arctg}\left(\frac{\varepsilon}{b}\right) \quad (51.77)$$

Calculons maintenant $Q_2(i\frac{u}{\varepsilon})$:

$$Q_2(\zeta) = \left(\frac{3}{2}\zeta^2 - \frac{1}{2}\right) \coth^{-1} \zeta - \frac{3}{2}\zeta = \left(-\frac{3}{2}\frac{u^2}{\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\right) \left(-i\operatorname{Arctg}\frac{\varepsilon}{u}\right) - \frac{3i}{2}\frac{u}{\varepsilon}$$

$$= \frac{i}{2} \left[\left(1 + \frac{3u^2}{\varepsilon^2}\right) \operatorname{Arctg}\frac{\varepsilon}{u} - \frac{3u}{\varepsilon} \right] \quad (51.78)$$

Posons :

$$q = q(u) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{\varepsilon^2} \right) \operatorname{Arctg} \frac{\varepsilon}{u} - 3 \frac{u}{\varepsilon} \right] \quad (51.79)$$

$$q_0 = q(u = b) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{b^2}{\varepsilon^2} \right) \operatorname{Arctg} \frac{\varepsilon}{b} - 3 \frac{b}{\varepsilon} \right] \quad (51.80)$$

Alors, on a :

$$U = (U_0 - \frac{1}{3} a^2 \omega^2) \frac{\operatorname{Arctg}(\frac{\varepsilon}{u})}{\operatorname{Arctg}(\frac{\varepsilon}{b})} + \frac{1}{3} a^2 \omega^2 \frac{q}{q_0} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \phi \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi \quad (51.81)$$

On a :

$$\frac{\varepsilon}{b} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} = \sqrt{e'^2} = e' \quad (51.82)$$

où e' est la deuxième excentricité. Au premier ordre, on a :

$$\operatorname{Arctg} \frac{\varepsilon}{u} = \frac{\varepsilon}{u} \quad (51.83)$$

Si on considère la terre comme point ponctuel de masse M , le potentiel gravitationnel sera donné par :

$$V' = \frac{G.M}{u} \quad (51.84)$$

où G est la constante universelle de gravitation. En se référant au premier terme de l'expression de U donnée par (51.81), On peut écrire :

$$U = \frac{GM}{\varepsilon} \operatorname{Arctg} \frac{\varepsilon}{u} + \frac{1}{3} a^2 \omega^2 \frac{q}{q_0} \left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \phi \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi \quad (51.85)$$

ou encore :

$$U = \frac{GM}{\varepsilon} \operatorname{Arctg} \frac{\varepsilon}{u} + \frac{1}{2} \omega^2 a^2 \frac{q}{q_0} \left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \omega^2 (u^2 + \varepsilon^2) \cos^2 \phi \quad (51.86)$$

avec :

$$q = q(u) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{u^2}{\varepsilon^2} \right) \operatorname{Arctg} \frac{\varepsilon}{u} - 3 \frac{u}{\varepsilon} \right] \quad (51.87)$$

$$q_0 = q(u = b) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + 3 \frac{b^2}{\varepsilon^2} \right) \operatorname{Arctg} \frac{\varepsilon}{b} - 3 \frac{b}{\varepsilon} \right] \quad (51.88)$$

$$U_0 = \frac{GM}{\varepsilon} \operatorname{Arctg} e' + \frac{1}{3} \omega^2 a^2 \quad (51.89)$$

La dernière équation lie la masse de la Terre M au potentiel U_0 et aux paramètres a, b, ω, G .

Littérature

1. **A. A. Ardalán & A. Safari.** 2005. Global height datum unification : a new approach in gravity potential space. *Journal of Geodesy*. Vol 79, pp 512-523.
2. **M. Bursa, K. Pec.** 1993. *Gravity Field and Dynamics of the Earth*. Springer-Verlag, 385p.
3. **J.B. Listing.** 1873. Über unsere jetzige Kenntnis der Gestalt und Grösse der Erde. *Nachr kgl GesWiss3*; Verlag J Dieterischen Buchhandlung, Göttingen.
4. **W.A. Heiskanen, H. Moritz.** 1967. *Physical Geodesy*. Freeman, San Francisco. Reprint, 1979. Institute of Physical Geodesy, Technical University, Graz, Austria. 364p.
5. **C. Le Cocq.** 1984. *Introduction à la Géodésie Physique*. Cours ENSG, IGN France. 85 p.

CHAPITRE 52

LE KRIGEAGE

Note : Ce chapitre est extrait du cours de Géostatistique enseigné à la faculté des Sciences de Tunis pour les étudiants de la licence Géomatique, Terre et Environnement.

Puisqu'on peut calculer la variance d'estimation pour tout estimateur linéaire, pourquoi ne pas choisir celui qui assure la variance d'estimation minimale ? C'est précisément ce qu'effectue le krigeage. Dans le cas stationnaire, on en reconnaît 2 types principaux :

a- la moyenne du processus est connue, c'est le **krigeage simple**.

b- la moyenne est inconnue, c'est le **krigeage ordinaire**. Ce dernier est, de loin, le plus fréquemment utilisé.

52.1 LE KRIGEAGE ORDINAIRE

Supposons que l'on veuille estimer un bloc v centré au point x_0 . Notons Z_v la vraie valeur (inconnue) de ce bloc et Z_v^* l'estimateur que l'on obtient. L'estimateur est linéaire à savoir :

$$Z_v^* = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i Z_i \quad (52.1)$$

où les Z_i désignent les v.a. correspondant aux points échantillons. On veut minimiser :

$$\sigma_e^2 = \text{Var}(Z_v - Z_v^*) = \text{Var}[Z_v - Z_v^*] = \text{Var}[Z_v] + \text{Var}[Z_v^*] - 2\text{Cov}[Z_v, Z_v^*] \quad (52.2)$$

Substituant l'expression de l'estimateur dans cette équation, on obtient :

$$\sigma_e^2 = \text{Var}[Z_v] + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(Z_i, Z_j) - 2 \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \text{Cov}[Z_v, Z_i] \quad (52.3)$$

Pour que l'estimateur soit sans biais, il faut que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (52.4)$$

En effet, dans ce cas,

$$E[Z_v^*] = E\left[\sum_i \lambda_i Z_i\right] = \sum_i \lambda_i E[Z_i] = \sum_i \lambda_i m = m \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = m = E[Z_i] \Rightarrow \sum_i \lambda_i = 1$$

On a donc un problème de minimisation d'une fonction avec une contrainte ou condition que l'on solutionne par la méthode de Lagrange \mathcal{L} . On forme le lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu) &= \sigma_e^2 + 2\mu \left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i - 1\right) \\ &= \text{Var}[Z_v] + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(Z_i, Z_j) - 2 \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \text{Cov}[Z_v, Z_i] + 2\mu \left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i - 1\right) \end{aligned} \quad (52.5)$$

où μ est le multiplicateur de Lagrange. Le minimum est atteint lorsque toutes les dérivées partielles de \mathcal{L} par rapport à chacun des λ_i et par rapport à μ s'annulent. Ceci conduit au système de krigeage ordinaire, soit :

$$\sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j \text{Cov}[Z_i, Z_j] + \mu = \text{Cov}[Z_v, Z_i] \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (52.6)$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j = 1 \quad (52.7)$$

La variance d'estimation minimale σ_{ko}^2 , appelée variance de krigeage, est obtenue en substituant les équations de krigeage (52.6) dans l'expression générale pour la variance d'estimation (équation 52.3) :

$$\sigma_{ko}^2 = \text{Var}[Z_v] - \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \text{Cov}[Z_v, Z_i] - \mu \quad (52.8)$$

Note : Cette variance de krigeage ne depend pas des valeurs observées, elle ne depend que du variogramme et de la configuration des points servant à l'estimation par rapport au point (ou bloc) à estimer.

Ecrivons le système de krigeage en utilisant le variogramme $\gamma(h) = \gamma(x_i, x_j)$ avec $h =$ distance $x_i x_j$: Comme la variance d'estimation s'écrit aussi directement en terme du variogramme, on peut aussi écrire le système de krigeage en fonction du variogramme. Ceci tient au fait que $C(h) = \sigma^2 - \gamma(h)$ et que $\sum \lambda_i = 1$. En effet, on a :

$$\text{Var}[Z_v] = C(Z_v) = \sigma^2 - \gamma(v, v) \text{ et } \text{Cov}[Z_v, Z_i] = \sigma^2 - \gamma(v, x_i)$$

L'équation (52.8) devient alors en tenant compte que $\sum_i \lambda_i = 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{ko}^2 &= \sigma^2 - \gamma(v, v) - \sum_i \lambda_i (\sigma^2 - \gamma(v, x_i)) - \mu = \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i (\gamma(v, x_i) - \gamma(v, v)) - \mu \end{aligned} \quad (52.9)$$

Il est intéressant de visualiser le système de krigeage ordinaire donné par les équations (52.5) et (52.6) et la variance de krigeage ordinaire sous forme matricielle. Posons :

$$K = \begin{pmatrix} \text{Var}(Z_1) & \text{Cov}(Z_1, Z_2) & \cdots & \text{Cov}(Z_1, Z_n) & 1 \\ \text{Cov}(Z_2, Z_1) & \text{Var}(Z_2) & \cdots & \text{Cov}(Z_2, Z_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \text{Cov}(Z_n, Z_1) & \text{Cov}(Z_n, Z_2) & \cdots & \text{Cov}(Z_n, Z_n) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (52.10)$$

et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \text{Cov}(Z_v, Z_1) \\ \text{Cov}(Z_v, Z_2) \\ \vdots \\ \text{Cov}(Z_v, Z_n) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (52.11)$$

Les équations (52.5) et (52.6) s'écrivent sous forme matricielle :

$$\boxed{K \cdot \Lambda = \mathbf{k}} \quad (52.12)$$

Alors, la solution donnée par :

$$\Lambda = K^{-1} \mathbf{k} \quad (52.13)$$

et σ_{ko}^2 s'écrit :

$$\boxed{\sigma_{ko}^2 = \text{Var}[Z_v] - \Lambda \cdot \mathbf{k} = \sigma_v^2 - \Lambda \cdot \mathbf{k}} \quad (52.14)$$

52.2 LE KRIGEAGE SIMPLE

Parfois on connaît la moyenne "m" du champ à estimer ou du moins on en possède un estimateur fiable. On peut alors former un estimateur sans biais sans imposer la contrainte que la somme des poids soit égale à 1.

$$\boxed{Z_v^* - m = \sum_i^n \lambda_i (Z_i - m)} \quad (52.15)$$

La variance d'estimation est donnée par :

$$\sigma_e^2 = \text{Var}[Z_v] + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_i \lambda_j \text{Cov}(Z_i, Z_j) - 2 \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \text{Cov}[Z_v, Z_i] \quad (52.16)$$

Tout comme pour le krigeage ordinaire, l'idée est de choisir les λ_i de façon à minimiser la variance d'estimation σ_e^2 .

Pour trouver le minimum, on dérive σ_e^2 par rapport à chacun des λ_i et l'on pose ces dérivées partielles égales à 0.

- Le système de krigeage simple (KS) ne peut s'écrire directement en termes de variogrammes puisqu'on n'a pas $\sum_i \lambda_i = 1$.

- En termes pratiques, les estimés obtenus par krigeage ordinaire (KO) et simple (KS) sont très similaires lorsqu'on effectue le krigeage à courte distance par rapport aux points connus et par rapport à la portée du variogramme et que le variogramme montre une structure importante.

- Règle générale, le KO est préférable au KS.

Les principales propriétés et caractéristiques associées au krigeage sont :

- i. Linéaire, sans biais, à variance minimale, par construction.
- ii. Interpolateur exact : si l'on estime un point connu, on retrouve la valeur connue.
- iii. Présente un effet d'écran : les points les plus près reçoivent les poids les plus importants. Cet effet d'écran varie selon la configuration et selon le modèle de variogramme utilisé pour le krigeage. Plus l'effet de pépité est important, moins il y a d'effet d'écran.
- iv. Tient compte de la taille du champ à estimer et de la position des points entre eux.
- v. Par l'utilisation du variogramme, tient compte de la continuité du phénomène étudié (effet de pépité, anisotropie, etc...).

52.3 EXEMPLE NUMÉRIQUE DE KRIGEAGE

Soient les points suivants :

x_0

$x_2 \quad x_1 \quad x_3$

avec :

$$x_0 = (0, 1) \quad x_1 = (1, 0) \quad x_2 = (0, 0) \quad x_3 = (3, 0) \quad \text{avec } Z_1 = 9; Z_2 = 3, Z_3 = 4$$

On veut estimer la variable aléatoire Z au point x_0 situé à $(0,1)$. Supposons que l'on a un modèle sphérique, avec effet de pépité 1, palier 11 et portée 3. On calcule d'abord les distances entre toutes les paires de points :

Point	x_0	x_1	x_2	x_3
x_0	0	1.4	1	2
x_1	1.4	0	1	3.2
x_2	1	1	0	3
x_3	2	3.2	3	0

Tableau 52.1 Tableau des distances h

On évalue le variogramme sphérique à chacune de ces distances avec l'équation :

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h = 0 \\ 1 + 10 \left[1.5 \frac{h}{3} - 0.5 \left(\frac{h}{3} \right)^3 \right] & \text{si } 0 < h < 3 \\ = 11 & \text{si } h \geq 3 \end{cases} \quad (52.17)$$

Point	x_0	x_1	x_2	x_3
x_0	0	7.55	5.81	9.52
x_1	7.55	0	5.81	11
x_2	5.81	5.81	0	11
x_3	9.52	11	11	0

Tableau 52.2 Tableau de $\gamma(h)$

On calcule la covariance correspondante en utilisant la relation $C(h) = \sigma^2 - \gamma(h) = 11 - \gamma(h)$.

On obtient le tableau suivant :

Point	x_0	x_1	x_2	x_3
x_0	11.0	3.45	5.19	1.48
x_1	3.45	11	5.19	0
x_2	5.19	5.19	11	0
x_3	1.48	0	0	11

Tableau 52.3 Tableau de covariance

Ceci permet de construire le système de krigeage donné par l'équation (52.12) soit :

$$\begin{pmatrix} 11 & 5.19 & 0 & 1 \\ 5.19 & 11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.45 \\ 5.19 \\ 1.48 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (52.18)$$

Le système précédent s'écrit :

$$11\lambda_1 + 5.19\lambda_2 + 1.48\lambda_3 + \mu = 3.47 \quad (52.19)$$

$$5.19\lambda_1 + 11\lambda_2 + \mu = 5.19 \quad (52.20)$$

$$1.48\lambda_1 + 11\lambda_3 + \mu = 0.04 \quad (52.21)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad (52.22)$$

On élimine μ du système par (52.19)-(52.21) et (52.20)-(52.21), d'où :

$$9.52\lambda_1 + 5.19\lambda_2 - 9.52\lambda_3 = 3.43 \quad (52.23)$$

$$3.71\lambda_1 + 11\lambda_2 - 11\lambda_3 = 5.15 \quad (52.24)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad (52.25)$$

De la dernière équation, on a :

$$\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \quad (52.26)$$

En remplaçant λ_3 dans (52.23) et (52.24), on obtient le système linéaire à deux inconnues :

$$19.04\lambda_1 + 14.71\lambda_2 = 12.95 \quad (52.27)$$

$$14.71\lambda_1 + 22\lambda_2 = 16.15 \quad (52.28)$$

qu'on résout par substitution ou par la méthode des déterminants et on trouve (à vérifier !) :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.234 \\ 0.578 \end{pmatrix} \quad (52.29)$$

Par suite λ_3 vaut :

$$\lambda_3 = 1 - 0.234 - 0.578 = 0.188 \quad (52.30)$$

On obtient μ en utilisant par exemple (52.19) :

$$\mu = 3.47 - 11\lambda_1 - 5.19\lambda_2 - 1.48\lambda_3 \quad (52.31)$$

Soit :

$$\mu = -2.382 \quad (52.32)$$

Donc le vecteur des inconnues A s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.234 \\ 0.578 \\ 0.188 \\ -2.382 \end{pmatrix} \quad (52.33)$$

L'estimation est alors :

$$Z^* = \sum_{i=1}^{i=3} \lambda_i Z_i = (.234) \times 9 + (.578) \times 3 + (.188) \times 4 = 4.592 \quad (52.34)$$

La variance de krigeage est donnée par :

$$\sigma_{ko}^2 = \text{Var}(Z^*) - \Lambda \cdot \mathbf{k} = 11 - \Lambda \cdot \mathbf{k} \quad (52.35)$$

Soit numériquement :

$$\sigma_{ko}^2 = 11 - [(.234) \times 3.47 + (.578) \times 5.19 + (.188) \times 0.04 + 1 \times (-2.382)] = 11 - 1.437 = 9.563 \quad (52.36)$$

Littérature

1. **P. Chauvet.** Aide-Mémoire de Géostatistique Linéaire. Collection *Les cours de l'Ecole des Mines de Paris*.
2. **D. Marcotte.** Cours de Géostatistique. école Polytechnique de Montréal.
3. **D. Causeur.** 2000. Modélisation Géostatistique. Laboratoire de Mathématiques Appliquées. Pôle d'Enseignement Supérieur et de Recherche Agronomique de Rennes. 26p.

Liste des figures

39.1 Les effets de choix de (φ, λ, H) au point initial	100
39.2 Rotation autour de la normale	102
43.1 Le Repère Mobile	158
46.1 La Représentation Stéréographique	183
47.1 Les Repères (X_g, Y_g, Z_g) et $I(XI, YI, ZI)$	192
47.2 Le Repère Local en $O (XO, YO, ZO)$	193
47.3 Le Centre d'inversion P l'antipode de O	194
48.1 Le Tore T	202
50.1 Le Modèle de Bursa-Wolf	221
51.1 Les Coordonnées de Jacobi	227
51.2 Les Coordonnées Sphériques	233

Liste des tables

39.1 Les Variations de l'Azimut Géodésique	108
39.2 Les Variations du vecteur Translation	117
39.3 Influence de la latitude géodésique	119
47.1 Les Coordonnées $(X, Y, Z)_g$ et $(\varphi, \lambda, H)_g$ terrestres	198
47.2 Les Coordonnées (X', Y', Z') et (φ', λ', H') Doppler	198
47.3 Les Coordonnées régionales inverses (X, Y, Z) transformées de (X, Y, Z) terrestres	199
47.4 Les Coordonnées régionales inverses (X'', Y'', Z'') transformées de (X', Y', Z') terrestres	199
47.5 Les paramètres de la transformation	200
52.1 Tableau des distances h	243
52.2 Tableau de $\gamma(h)$	243
52.3 Tableau de covariance	243