LES LIGNES GÉODÉSIQUES D'UN TORE

par

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Ingénieur Général Géographe

Table des matières

1. Introduction

Dans cet article, nous proposons d'écrire les équations des géodésiques d'un tore, et de les résoudre.

Soit le tore T défini par les équations suivantes :

$$M(\varphi,\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} x = (a+Rcos\varphi)cos\lambda \\ y = (a+Rcos\varphi)sin\lambda \\ z = Rsin\varphi \end{array} \right. \tag{1.0.1}$$

où a, R deux constantes positives avec $a > R$, $(\varphi,\lambda) \in [0,2\pi]\times[0,2\pi]$.

On introduit les notations usuelles :

$$E = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\varphi}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\varphi} = \left\|\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\varphi}\right\|^2 = R^2 \tag{1.0.2}$$

$$F = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\varphi}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\lambda} = 0 \tag{1.0.3}$$

$$G = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\lambda}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\lambda} = \left\|\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial\lambda}\right\|^2 = (a+Rcos\varphi)^2 \tag{1.0.4}$$

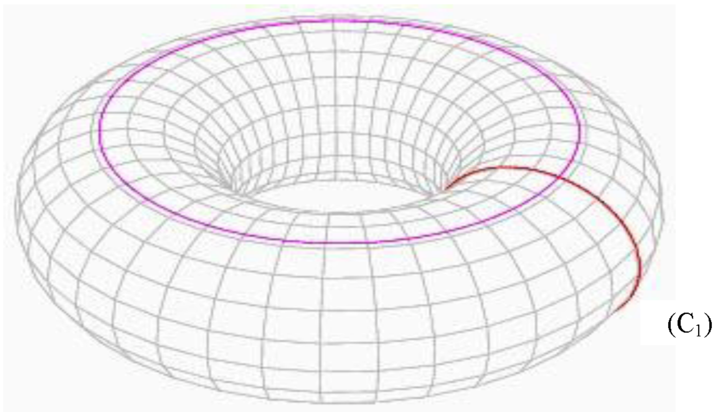

FIGURE 1. Le Tore T

On a alors :

$$ds^2 = R^2 d\varphi^2 + (a + Rcos\varphi)^2 d\lambda^2 \tag{1.0.5}$$

la première forme fondamentale du tore. Des équations (1.0.2-1.0.3-1.0.4), on obtient les équations :

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi} = E'_\varphi = 0 \tag{1.0.6}$$

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = E'_\lambda = 0 \tag{1.0.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = F'_\varphi = 0 \tag{1.0.8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = F'_\lambda = 0 \tag{1.0.9}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi} = G'_\varphi = -2Rsin\varphi(a + Rcos\varphi) \tag{1.0.10}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = G'_\lambda = 0 \tag{1.0.11}$$

2. Les Equations différentielles des lignes géodésiques

Les équations différentielles des lignes géodésiques sont données par [**1**] :
(2.0.12)
$$\frac{\partial^2\boldsymbol{M}}{\partial\varphi^2}.\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\lambda}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+F\frac{d^2\varphi}{ds^2}+2\frac{\partial^2\boldsymbol{M}}{\partial\varphi\partial\lambda}.\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\lambda}\frac{d\varphi}{ds}\frac{d\lambda}{ds}+\frac{\partial^2\boldsymbol{M}}{\partial\lambda^2}.\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\lambda}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2+G\frac{d^2\lambda}{ds^2}=0$$
et :
(2.0.13)
$$\frac{\partial^2\boldsymbol{M}}{\partial\lambda^2}.\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\varphi}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2+F\frac{d^2\lambda}{ds^2}+2\frac{\partial^2\boldsymbol{M}}{\partial\varphi\partial\lambda}.\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{ds}\frac{d\lambda}{ds}+\frac{\partial^2\boldsymbol{M}}{\partial\varphi^2}.\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial\varphi}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+E\frac{d^2\varphi}{ds^2}=0$$
Utilisons les équations (1.0.6) à (1.0.11), les équations (2.0.12) et 2.0.13) peuvent être écrites :

(2.0.14) $$(F'_\varphi-\frac{E'_\lambda}{2})\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+F\frac{d^2\varphi}{ds^2}+G'_\varphi\frac{d\varphi}{ds}\frac{d\lambda}{ds}+\frac{G'_\lambda}{2}\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2+G\frac{d^2\lambda}{ds^2}=0$$

(2.0.15) $$(F'_\lambda-\frac{G'_\varphi}{2})\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2+F\frac{d^2\lambda}{ds^2}+E'_\lambda\frac{d\lambda}{ds}\frac{d\varphi}{ds}+\frac{E'_\varphi}{2}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+E\frac{d^2\varphi}{ds^2}=0$$

Ce qui donne après substitutions :

(2.0.16) $$-2Rsin\varphi(a+Rcos\varphi)\frac{d\varphi}{ds}\frac{d\lambda}{ds}+(a+Rcos\varphi)^2\frac{d^2\lambda}{ds^2}=0$$

(2.0.17) $$Rsin\varphi(a+Rcos\varphi)\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2+R^2\frac{d^2\varphi}{ds^2}=0$$

L'équation (2.0.16) s'écrit :

(2.0.18) $$\frac{d}{ds}\left((a+Rcos\varphi)^2\frac{d\lambda}{ds}\right)=0$$

Ce qui donne :

(2.0.19) $$(a+Rcos\varphi)^2\frac{d\lambda}{ds}=C=constante$$

Posons :

(2.0.20) $$r=a+Rcos\varphi$$

L'équation (2.0.19) n'est autre que l'équation de Clairaut :

(2.0.21) $$\boxed{rsinAz=C=(a+R)sinAze}$$

où Aze est l'azimut de départ au point $M_0=((a+R)cos\lambda_0,(a+R)sin\lambda_0,0)$ de la géodésique sur le plan $z=0$.

On a alors les cas suivants :

a - $Aze = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \; sinAz = 0 \Rightarrow \; Az = 0$, alors $\lambda = \lambda_0$ et le point M décrit le petit cercle de rayon R, soit le cercle (C_1) sur la figure 1.

b - $Aze = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow rsinAz = C = (a+R)$ ce qui donne :

(2.0.22)
$$sinAz = \frac{a+R}{a+Rcos\varphi} > 1 \quad \text{Ce qui impossible sauf si } \varphi = 0 \text{ et } Az = \frac{\pi}{2}$$

Donc M décrit le grand cercle dans le plan $z = 0$ de rayon $a+R$.

3. Résolution du problème dans le cas général

On suppose que au point M_0, la géodésique a pour azimut Aze telque :

$$0 < Aze < \frac{\pi}{2}$$

L'équation(2.0.17) s'écrit en utilisant (2.0.19) :

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = -\frac{C^2}{R}\frac{sin\varphi}{(a+Rcos\varphi)^3}$$

Multiplions les deux membres par $2\dfrac{d\varphi}{ds}$ qu'on suppose différend de zéro, on obtient :

$$\frac{d}{ds}\left(\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right) = \frac{-C^2}{R^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(a+Rcos\varphi)^2}\right) \tag{3.0.23}$$

Qu'on écrit sous la forme en posant $k^2 = C^2/R^2$:

$$d\left(\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right) = -d\left(\frac{k^2}{(a+Rcos\varphi)^2}\right) \tag{3.0.24}$$

En intégrant, on obtient :

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = A - \frac{k^2}{(a+Rcos\varphi)^2} \geq 0 \tag{3.0.25}$$

où A est une constante strictement positive. On retrouve la valeur de A en utilisant l'expression de ds^2 donnée par (1.0.5) soit :

$$A = \frac{1}{R^2} \tag{3.0.26}$$

D'où en prenant $\dfrac{d\varphi}{ds} > 0$, on a alors :

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{R}\frac{\sqrt{(a+Rcos\varphi)^2 - C^2}}{a+Rcos\varphi} \tag{3.0.27}$$

La latitude φ passe par un maximum φ_m telque :

$$a + Rcos\varphi_m = C \Rightarrow \boxed{cos\varphi_m = \frac{C-a}{R}} \tag{3.0.28}$$

L'équation (3.0.27) donne :

$$ds = \frac{R(a+Rcos\varphi)d\varphi}{\sqrt{(a+Rcos\varphi)^2 - C^2}} \tag{3.0.29}$$

Soit :

$$\boxed{s = \int_0^{\varphi} \frac{R(a+Rcost)dt}{\sqrt{(a+Rcost)^2 - C^2}}} \tag{3.0.30}$$

avec $s(\varphi = 0) = 0$.

Revenons à chercher l'expression de λ en fonction de φ. L'équation (2.0.19) donne :

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{C}{(a+Rcos\varphi)^2} \tag{3.0.31}$$

Soit :

$$d\lambda = \frac{Cds}{(a+Rcos\varphi)^2} = \frac{C.Rd\varphi}{(a+Rcos\varphi)\sqrt{(a+Rcos\varphi)^2 - C^2}} \tag{3.0.32}$$

D'où en intégrant :

$$\boxed{\lambda - \lambda_0 = \int_0^{\varphi} \frac{C.Rdt}{(a+Rcost)\sqrt{(a+Rcost)^2 - C^2}}} \tag{3.0.33}$$

Le calcul des intégrales (3.0.30) et (3.0.33) fera l'objet d'une prochaine note.

Décembre 2015

Références

[1] Abdelmajid Ben Hadj Salem. 2015. Eléments de Géodésie et de la théorie des Erreurs. 390p.

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Ingénieur Général Géographe, ,
6, Rue du Nil, Cité Soliman Er-Riadh, 8020 Soliman, Tunisia
E-mail : abenhadjsalem@gmail.com