Гравитационная масса фотонов

[УФН 185 № 11, 1225 (2015)]

Р. И. Храпко*
Московский авиационный институт, Москва, 125993

Показано, что гравитационная масса фотонов или тел совпадает с их инертной массой. Рассмотрено движение мимо центра гравитационного притяжения и свободное падение на такой центр.

PACS 04.20.-q

1. Введение

Как известно, траектория импульса излучения, проходящего мимо Солнца, отклоняется в сторону Солнца от прямой линии. Это свидетельствует о наличии ускорения фотона, которое направлено перпендикулярно его скорости. А это ускорение означает, что:

1) фотон испытывает силу притяжения $\mathbf{F}$ и проявляет инерцию, то есть имеет инертную массу m_i, согласно закону

$$\mathbf{F} = m_i\,\mathbf{a}, \tag{1}$$

2) сила, действующая на фотон, есть гравитационная сила $\mathbf{F}$, подчиняющаяся закону

$$\mathbf{F} = \gamma\frac{Mm_g\mathbf{r}}{r^3} = m_g\,g\,\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{2}$$

и, соответственно, фотон имеет гравитационную массу, которую мы обозначили m_g,

Как показано в разделе **2**, ускорение фотона в днном случае равно ускорению свободного падения $a = g \equiv \gamma M / r^2$, а потому из равенства $m_i a = m_g g$ следует равенство гравитационной и инертной масс фотона $m_i = m_g$.

Существенно, что инертные свойства любого объекта (тела или фотона) правильно определяются его ускорением по формуле (1) только в двух случаях:

1) когда скорость объекта перпендикулярна его ускорению, как в случае прохождения мимо Солнца,

2) когда скорость вообще отсутствует, то есть тело покоится.

В общем же случае коэффициент пропорциональности в формуле (1) становится тензором, $\mathbf{F} = \hat{m}\mathbf{a}$, поскольку ускорение не совпадает с силой по направлению. Поэтому формула $\mathbf{F} = \hat{m}\mathbf{a}$, не дает правильного значения инерции объекта, то есть его инертной массы m_i. Это хорошо видно на примере радиально падающего фотона: гравитационная сила (2) действует на фотон, а его ускорение равно нулю, $\mathbf{a} = 0$. Так что желание пользоваться формулой $\mathbf{F} = \hat{m}\mathbf{a}$ для измерения инерции, приводит к бесконечно большому значению инерции фотона. А инерция субсветовых частиц при таком измерении оказывается чрезмерно большой. Это следует из того, что ускорение частицы под действием продольной силы уменьшается с ростом скорости слишком быстро, поскольку коэффициент пропорциональности между силой и ускорением, согласно формуле

$$F = \frac{m_0 a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^{\,3}}, \tag{3}$$

растет быстрее, чем растет инертная масса [1,2]

$$m_i = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4}$$

(здесь m_0 обозначает инвариантную массу, то есть массу покоя).

---

* Email: khrapko_ri@hotmail.com, http://khrapkori.wmsite.ru

Определению инертной массы радиально падающего объекта посвящен раздел **3**. Там показано, что ускорение при вертикальном падении зависит от скорости по формуле $a = g(1 - v^2 / c^2)$, то есть сила (3), являющаяся в данном случае гравитационной, зависит от скорости по формуле

$$F = \frac{m_0 g}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = m_i g \qquad (5)$$

(здесь использовано соотношение (4)). В силу (2), $F = m_g g$, и (5), гравитационная масса снова оказывается равна инертной массе.

Отметим здесь, что для непротиворечивого определения инертных свойства объекта следует пользоваться не формулой $\mathbf{F} = \hat{m}\mathbf{a}$, а формулой $\mathbf{p} = m_i \mathbf{v}$, которая является определением инертной массы, поскольку для скорости и импульса объекта имеются бесспорные операционные определения [3]. В частности, для определения импульса необходимо остановить движущийся объект и измерить импульс силы, $\int \mathbf{F} dt = \mathbf{p}$, переданный преграде при остановке объекта. Определенная по формуле $\mathbf{p} = m_i \mathbf{v}$ инертная масса m_i удовлетворяет закону сохранения.

2. Гравитационная сила перпендикулярна скорости

Собственно, это Эйнштейн строго показал, что излучение переносит инерцию между испускающими и поглощающими телами [4]. Однако ещё раньше понимали, что излучение притягивается к Земле и, значит, имеет гравитационную массу и инертную массу. Согласно этому пониманию, в 1801 году Золднер использовал законы Ньютона

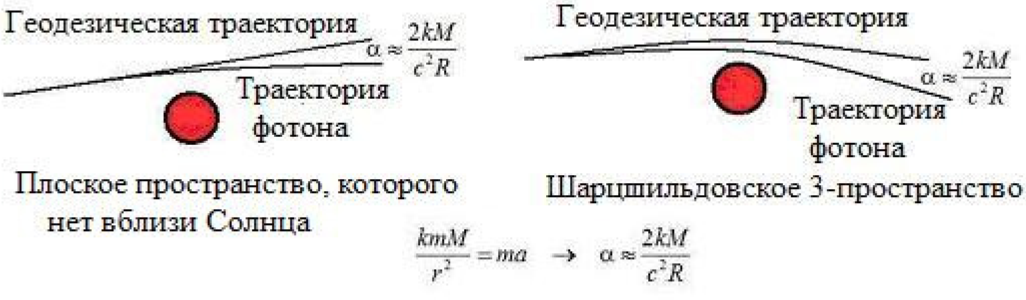
$$F = kmM / r^2, \quad F = ma\,, \qquad (6)$$

считая, что гравитационная масса равна инертной массе (цитированно по [5]). Он рассуждал так же, как 110 лет спустя рассуждал Резерфорд, наблюдая отклонение альфа частиц. Золднер нашел, что световой поток должен отклоняться, проходя мимо массы M, на угол α:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{kM}{c^2 R}, \quad \alpha \approx \frac{2kM}{c^2 R} \qquad (7)$$

(здесь R - прицельное расстояние). Однако в 1919 году экспедиция Эддингтона, наблюдавшая солнечные затмения, обнаружила, в соответствии с теорией Эйнштейна, вдвое большее отклонение.

Гинзбург [5] объяснял это реальное удвоение отклонения по сравнению с формулой (7) неевклидовостью пространства в поле тяготения. Дело в том, что притяжение Солнца отклоняет излучение или движущее тело от движения по геодезической линии трёхмерного пространства. Но сама эта геодезическая линия вблизи Солнца отклоняется от геодезической линии, проходящей вдали от Солнца, на тот же угол α. Поэтому и происходит двойное отклонение тректории вблизи Солнца по сравнению с траекторией, проходящей вдали от Солнца. При этом только половина этого двойного отклонения происходит из-за солнечного притяжения; вторая половина – есть следствие искривления трехмерного пространства Солнцем. Это явление представлено на рисунке



Траектория фотона отклоняется от геодезической траектории пространства из-за притяжения Солнца. Но сама геодезическая траектория искривлена из-за того, что Солнце искривляет пространство.

Для фактического расчета этого явления в трехмерном пространстве мы воспользуемся пространством-временем с координатами Шваршильда t, r, θ, φ, метрикой

$$ds^2 = \frac{r-1}{r}dt^2 - \frac{r}{r-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{8}$$

(мы положили $c = r_g = 2M = 1$) и уравнением для геодезических линий при использовании t как параметра ($\sin^2\theta = 1$)

$$\frac{D}{dt}\frac{dx^i}{dt} \equiv \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \alpha\frac{dx^i}{dt}, \quad \Gamma^r_{tt} = \frac{r-1}{2r^3}, \; \Gamma^r_{rr} = -\Gamma^t_{tr} = \frac{-1}{2r(r-1)}, \; \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -(r-1). \tag{9}$$

Здесь правая часть уравнения геодезических не равна нулю, а пропорциональна касательному вектору, потому что t не является каноническим параметром.

Для расчета ускорения, которое испытывает объект, пролетающий мимо Солнца, достаточно рассмотреть круговые орбиты [6,7]. Для таких орбит положим в (9) $\frac{dr}{dt} \equiv 0$ и будем иметь только уравнение для $i = r$.

$$\Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{\varphi\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0, \quad \frac{r-1}{2r^3} = (r-1)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2r^3}. \tag{10}$$

Нетрудно подсчитать, что при $r = 3/2$ геодезическая линия (10) делается изотропной, то есть представляет орбиту фотона. Действительно, из (8) с учетом (10) получается

$$ds^2 \equiv \frac{r-1}{r}dt^2 - r^2 d\varphi^2 = \left(\frac{r-1}{r} - \frac{r^2}{2r^3}\right)dt^2 = 0, \quad r = \frac{3}{2}. \tag{11}$$

Мировая линия (10) является геодезической линией пространства-времени, которая представляет движение по окружности в пространстве. Центростремительное ускорение такого движения определяется второй производной по времени радиального отклонения этой окружности, $r = \mathrm{Const}$, от *касательной геодезической* линии двумерного подпространства r, φ с метрикой

$$dl^2 = \frac{r}{r-1}dr^2 + r^2 d\varphi^2 \tag{12}$$

Уравнение такой геодезической линии, $r(\varphi)$, мы сейчас найдем. Используя в уравнении (9) φ в качестве параметра и учитывая, что для касательной линии в точке $\varphi = 0$ будет $dr/d\varphi = 0$, получаем при $\varphi = 0$, $i = r$:

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} + \Gamma^r_{rr}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \Gamma^r_{\varphi\varphi} = \alpha\frac{dr}{d\varphi}, \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = (r-1). \tag{13}$$

Это уравнение и дает искомую вторую производную радиального отклонения круговой орбиты от геодезической линии. Вторая производная по временной координате получается с использованем (10):

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{(r-1)}{2r^3}. \tag{14}$$

Теперь можем найти центростремительное ускорение на произвольной круговой орбите. Оно оказывается равным обычному g, как было упомянуто во Введении:

$$a = \frac{\sqrt{g_{rr}}}{g_{tt}}\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{2r^2}\sqrt{\frac{r}{r-1}} = g. \tag{15}$$

Дело в том, что кривизна мировой линии неподвижного тела (для которого $r = \text{Const}, \varphi = \text{Const}$) равна $\frac{D^2 r}{dt^2} = \Gamma_{tt}^r = \frac{r-1}{2r^3}$. А в рамках общей теории относительности неподвижное тело имеет ускорение свободного падения, которое и выражается формулой

$$g = \frac{\sqrt{g_{rr}}}{g_{tt}} \frac{D^2 r}{dt^2} = \frac{1}{2r^2} \sqrt{\frac{r}{r-1}} . \tag{16}$$

3. Гравитационная сила направлена по скорости

При рассмотрении вертикально падающего объекта уравнение (9) дает [8]

для $i = t$: $\Gamma_{tr}^t 2 \frac{dr}{dt} \equiv \frac{1}{r(r-1)} \frac{dr}{dt} = \alpha$,

для $i = r$: $\frac{d^2 r}{dt^2} + \Gamma_{rr}^r \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \Gamma_{tt}^r \equiv \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{1}{2r(r-1)} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r-1}{2r^3} = \alpha \frac{dr}{dt}$.

Исключая α, получаем уравнение геодезической линии:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{3}{2r(r-1)} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r-1}{2r^3} = 0 . \tag{17}$$

Производная $\frac{dr}{dt}$ связана со скоростью:

$$v = -\frac{dr}{dt} \sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{tt}}} = -\frac{dr}{dt} \frac{r}{r-1}, \quad g_{tt} = \frac{r-1}{r}, \quad g_{rr} = \frac{r}{r-1}, \tag{18}$$

а вторая производная $\frac{d^2 r}{dt^2}$ связана с ускорением:

$$a = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{g_{tt}}} \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \frac{r}{r-1} \right) = -\sqrt{\frac{r}{r-1}} \left(\frac{d^2 r}{dt^2} \frac{r}{r-1} - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \frac{1}{(r-1)^2} \right). \tag{19}$$

Подставляя сюда вторую производную из (17) и первую производную из (18), получим

$$a = \frac{1}{2r^2} \sqrt{\frac{r}{r-1}} (1 - v^2) = g(1 - v^2) . \tag{20}$$

То есть $a = g(1 - v^2 / c^2)$, как было упомянуто во Введении.

4. Заключение

Рассмотрено движение тел и излучения мимо центра гравитационного притяжения и их свободное падение на такой центр в рамках общей теории относительности для расчета трехмерного ускорения, которое сопровождает такое движение и наблюдается в трехмерном пространстве вокруг притягивающего центра. В результате показано, что гравитационная сила, действующая на гравитационную массу объекта, вызывает ускорение, соответствующее такой инертной массе объекта, которая равна его гравитационной массе. Это справедливо и для фотонов. Двойное отклонение фотонов при прохождении их вблизи притягивающего центра объясняется не их двойной гравитационной массой, а искривлением геодезической линии вблизи притягивающего центра по сравнению с удаленной геодезической линией.

Список литературы

1. Савельев И.В. *Курс общей физики*, т. 3 (1971), стр. 223
2. Савельев И.В. *Курс общей физики*, т. 1 (2007), стр. 53
3. Храпко Р. И «Что есть масса?» УФН **170** № 12, 2000

4. Эйнштейн А "Зависит ли инерция тела от содержащейся в нем энергии?" *Ann. D. Phys.* **18**, 639, (1905).
5. Гинзбург В Л "Экспериментальная проверка общей теории относительности" *УФН* **59** 33 (1956)
6. Khrapko R I "Light bending effect and space curvature" *Eur. J. Phys.* **36** (2015) 058002 http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=143&module=files
7. Khrapko R I "Gravitational mass of a photon" *ICGAC-12* (Moscow 2015) p. 48 http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=141&module=files
8. Khrapko R I "Dependence of acceleration on speed in the general relativistic Galileo experiment" *Eur. J. Phys.* **36** (2015) 038001 http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=135&module=files

Gravitational mass of photons

Radi I. Khrapko

Moscow Aviation Institute - Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russia

It is shown that the gravitational mass of photons or bodies equals their inertial mass. The movement past the center of gravitational attraction and the free fall to the center are considered

Gravitational mass of the photons

It is shown that the gravitational and inertial masses of a photon or indeed of any body are equal. Motion past and free fall onto a center of gravitational attraction are considered.