Note sur l'Analyse de Structure d'un Réseau Géodésique de Base :Aspect Tridimensionnel

Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Ingénieur Général Géographe
(abenhadjsalem@gmail.com)

Novembre 2015

Version 2.

Table des matières

Note sur l'Analyse de Structure d'un Réseau Géodésique de Base :Aspect Tridimensionnel

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

1 Introduction

A partir de " Exemple de calcul géodésique, analyse de structure des résultats " de H.M. Dufour (1975) concernant l'analyse de strucure d'un réseau géodésique, on présente dans cette note une étude similaire mais dans l'option de la géodésie tridimensionnelle. Ceci a pour base l'utilisation en un point du repère géodésique local $(M, \vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{\nu})$ dans la compensation par les moindres carrés. Les relations d'observations sont celles de la géodésie tridimensionnelle.

Cette étude permettra d'analyser les fondements d'un réseau géodésique de base ou primordial et de comparer les déformations que subit le réseau en des points séparés par de longues distances.

Cette note est extraite du rapport du stage de fin d'études à l'ENSG (A. Ben Hadj Salem, 1981), effectué à l'IGN (www.ign.fr) en 1981, avec quelques développements.

2 Fonction Ecart

Le réseau réel (RR) inconnu est approché de façon aléatoire par un réseau calculé (RC). Le point M d'un point approché M_0 dans le repère (RC) ne coincide pas avec sa position dans (RR).

Soient (x, y) les coordonnées de M avec origine M_0 dans le repère (RC) et (dx_M, dy_M) les vraies coordonnées de compensation dans le réseau (RR) et (dx_0, dy_0) les inconnues de compensation dans le (RC) obtenues par les moindres carrés, on peut écrire :

$$dx_M = dx_0 + ax + by \tag{1}$$

$$dy_M = dy_0 + a'x + b'y \tag{2}$$

ou encore sous la forme :

$$dx_M = r_0 + x\frac{\partial r}{\partial x} + y\frac{\partial r}{\partial y} \tag{3}$$

$$dy_M = s_0 + x\frac{\partial s}{\partial x} + y\frac{\partial s}{\partial y} \tag{4}$$

Les fonctions $r(x,y)$ et $s(x,y)$ sont appelées **fonctions écarts**.

On définit les coefficients H,G,P et Q par :

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}\right) \tag{5}$$

$$G = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial s}{\partial x}\right) \tag{6}$$

$$P = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial s}{\partial y}\right) \tag{7}$$

$$Q = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial x}\right) \tag{8}$$

Ce qui donne :

$$dx_M = dx_0 + Hx + Gy + Px + Qy \tag{9}$$

$$dy_M = dy_0 - Gx + Hy + Qx - Py \tag{10}$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} dx_M - dx_0 \\ dy_M - dy_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & G \\ -G & H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & -P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{11}$$

Soit :

$$\Delta = A.X + B.X \tag{12}$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} H & G \\ -G & H \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & -P \end{pmatrix} \tag{13}$$

On note que les matrices A et B sont linéairement indépendantes si A et B ne sont pas nulles simultanément. Soit :

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

avec :

$$X' = A.X \tag{14}$$

En écrivant (14) en notation complexe avec $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on obtient :

$$z' = (H - iG)z \tag{15}$$

En posant :

$$\alpha = H - iG \tag{16}$$

l'équation (15) s'écrit :

$$z' = \alpha z \tag{17}$$

La foncion $f : z \longmapsto \alpha z$ est une fonction holomorphe donc analytique et par suite l'application à X associe AX est une transformation conforme c'est-à-dire conserve les angles.

Dans l'espace des vecteurs propres de A, on peut écrire la matrice A sous la forme (Voir Annexe) :

$$A = H.I + i \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -G \end{pmatrix} \tag{18}$$

avec I la matrice unité d'ordre 2.

L'application $X \longrightarrow X' = A.X$ donne :

$$X' = H.X + i \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -G \end{pmatrix} .X \tag{19}$$

Si dans (19) $G = 0$, l'application se réduit à une homothétie vectorielle de rapport H. Le facteur H est appelé **erreur relative d'échelle** et G **erreur relative d'orientement.**

Revenons à la matrice B, le deuxième terme de (12) s'écrit en notation complexe :

$$z' = \beta \bar{z} \tag{20}$$

où $\bar{z} = x - iy$ le conjugué de z avec :

$$\beta = P + iQ \tag{21}$$

La fonction $z' = \beta\bar{z}$ n'est pas une fonction holomorphe (car $\frac{\partial z'}{\partial \bar{z}} = \beta \neq 0$) donc non analytique, et par suite elle ne représente pas une transformation conforme. Cette transformation donne une déformation appelée **ovalisation** (Dufour H.M, 1977).

La matrice B a une trace nulle, propriété invariante par rotation, il existe une base de vecteurs où B s'écrit :

$$B' = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} \tag{22}$$

avec :

$$v^2 = P^2 + Q^2 \tag{23}$$

v est dit **le coefficient d'ovalisation**. P et Q définissent **l'erreur relative d'ovalisation**.

3 Notion de la Fonction Ecart en Géodésie Tridimensionnelle

Nous allons essayer d'introduire la notion de fonctions écarts en géodésie tridimensionnelle. Partant de la même idée que celle pour définir le système d'équations (1) et (2), on peut écrire dans le repère orthonormé (O, X_1, Y_1, Z_1) :

$$dX_M = dX_0 + aX + bY + cZ \tag{24}$$

$$dY_M = dY_0 + a'X + b'Y + c'Z \tag{25}$$

$$dZ_M = dZ_0 + a''X + b''Y + c''Z \tag{26}$$

où dX_M, dY_M et dZ_M sont les inconnues de compensation dans le réseau réel (RR) et dX_0, dY_0 et dZ_0 les inconnues de compensation dans le réseau calculé (RC) et X, Y, Z les coordonnées de M dans le repère (M_0, X, Y, Z) parallèle à (O, X_1, Y_1, Z_1) et $a, b, c, .., c''$ sont des constantes.

Le système (24-25-26) s'écrit aussi :

$$dX_M = U_1(M_0) + X\frac{\partial U_1}{\partial X} + Y\frac{\partial U_1}{\partial Y} + Z\frac{\partial U_1}{\partial Z} \tag{27}$$

$$dY_M = U_2(M_0) + X\frac{\partial U_2}{\partial X} + Y\frac{\partial U_2}{\partial Y} + Z\frac{\partial U_2}{\partial Z} \tag{28}$$

$$dZ_M = U_3(M_0) + X\frac{\partial U_3}{\partial X} + Y\frac{\partial U_3}{\partial Y} + Z\frac{\partial U_3}{\partial Z} \tag{29}$$

Les fonctions U_1, U_2, U_3 sont appelées **Fonctions Ecarts**. On écrit le système précédent sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} dX_M \\ dY_M \\ dZ_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(M_0) \\ U_2(M_0) \\ U_3(M_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial X} & \frac{\partial U_1}{\partial Y} & \frac{\partial U_1}{\partial Z} \\ \frac{\partial U_2}{\partial X} & \frac{\partial U_2}{\partial Y} & \frac{\partial U_2}{\partial Z} \\ \frac{\partial U_3}{\partial X} & \frac{\partial U_3}{\partial Y} & \frac{\partial U_3}{\partial Z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{30}$$

Soit :

$$U = \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j}\right) \tag{31}$$

la matrice de terme général $\frac{\partial U_i}{\partial X_j}$, on peut écrire :

$$U = S + A \tag{32}$$

$$\text{avec} \quad S = \frac{1}{2}(U + U^T); \quad A = \frac{1}{2}(U - U^T) \tag{33}$$

T désigne la transposée. Alors les matrices S et A sont respectivement symétriques et antisymétriques.

Par analogie avec la théorie de l'élasticité (Landau L. et Lifchitz E.,1970 ;

Sanso F.,1982), on appelle :

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) \tag{34}$$

le **tenseur de déformation** du réseau.

La matrice S étant symétrique, elle peut être réduite en chaque point à ses axes principaux directions des vecteurs propres. Celà signifie qu'on peut choisir en chaque point donné un système de vecteurs orthogonaux telque la matrice S soit diagonale :

$$S = \begin{pmatrix} U^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & U^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & U^{(3)} \end{pmatrix} \tag{35}$$

L'effet de S se traduit par :

$$d\mathcal{X} = U^{(1)}\mathcal{X} \tag{36}$$
$$d\mathcal{Y} = U^{(2)}\mathcal{Y} \tag{37}$$
$$d\mathcal{Z} = U^{(3)}\mathcal{Z} \tag{38}$$

Le système (36-37-38) nous donne un ensemble de trois déformations indépendantes dans trois directions orthogonales. Chacune de ces déformations est une homothétie de rapport $U^{(i)}$.

Etudions maintenant la matrice antisymétrique $A = (a_{ij})$. On sait qu'il existe un vecteur Ω telque :

$$A.X = \Omega \wedge X \tag{39}$$

Soit :

$$\Omega = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{40}$$

Alors l'équation (30) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} dX_M \\ dY_M \\ dZ_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(M_0) \\ U_2(M_0) \\ U_3(M_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \tag{41}$$

Soit l'élément S_{12}, on a par définition :

$$S_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1}\right)$$

or $X_1 = X$, $X_2 = Y$ donc :

$$S_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial Y} + \frac{\partial U_2}{\partial X}\right) = Q_{XY} \tag{42}$$

C'est-à-dire le coefficient défini par (8) dans le plan OXY. En utilisant les équations (3) à (8), on obtient alors :

$$\begin{pmatrix} dX_M \\ dY_M \\ dZ_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1(M_0) \\ U_2(M_0) \\ U_3(M_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial X} & Q_{XY} & Q_{ZX} \\ Q_{XX} & \frac{\partial U_2}{\partial Y} & Q_{ZX} \\ Q_{ZX} & Q_{YZ} & \frac{\partial U_3}{\partial Z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & G_{XY} & -G_{ZX} \\ -G_{XY} & 0 & G_{YZ} \\ G_{ZX} & -G_{YZ} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Le résultat remarquable est la forme de la matrice antisymétrique A. En effet, on obtient :

$$\Omega = -\begin{pmatrix} G_{YZ} \\ G_{ZX} \\ G_{XY} \end{pmatrix} \tag{43}$$

La première composante de Ω représente la correction relative d'orientement de la projection de M sur le plan OY_1Z_1. La matrice A représente la rotation infinitésimale du repère $MXYZ$ parallèle à $OX_1Y_1Z_1$. Ainsi, la définition du facteur G dans l'introduction est justifiée.

Dans (43), on peut introduire les termes $H_{XY}, P_{XY}, ...$ grâce aux éléments diagonaux de S. En effet, soit par exemple $\left(\frac{\partial U_1}{\partial X}\right)$, il peut s'écrire :

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial X}\right) = H_{XY} + P_{XY} \text{ ou } \left(\frac{\partial U_1}{\partial X}\right) = H_{ZX} - P_{ZX} \tag{44}$$

Notons que l'équation (43) nécessite pour déterminer les neuf inconnues au moins trois points.

4 Annexe

4.1 Recherches des vecteurs et valeurs propres de la matrice A

Soit A la matrice carré 2×2 définie par (13). Les vecteurs propres X' et valeurs propres λ de A vérifient :

$$A.X' = \lambda X' \tag{45}$$

Posons :

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

On peut écrire (45) :

$$(A - \lambda I)X' = 0$$

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont solutions de :

$$\text{Dét}(A - \lambda I) = 0 \Longrightarrow (H - \lambda)^2 + G^2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = H + iG; \;\; \lambda_2 = H - iG \tag{46}$$

Un vecteur propre X'_1 vérifie :

$$A.X'_1 = \lambda_1 X'_1 \tag{47}$$

En écrivant (47) en détail,on a :

$$Hx' + Gy' = \lambda_1 x' \Longrightarrow (H-\lambda_1)x' + Gy' = 0 \Longrightarrow -iGx' + Gy' = 0 \quad (48)$$
$$-Gx' + Hy' = \lambda_1 y' \Longrightarrow -Gx'(H-\lambda_1)y' = 0 \Longrightarrow -Gx' - iGy' = 0 \quad (49)$$

Les deux équations sont les mêmes au facteur i près soit :

$$-\,iGx' + Gy' = 0 \quad (50)$$

On peut choisir comme premier vecteur propre le vecteur X'_1 de composantes :

$$X'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (51)$$

Comme $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, en utilisant (47), on déduit que le deuxième vecteur propre est le conjugué de X'_1, donc X'_2 est donné par :

$$X'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (52)$$

Comment s'écrit la matrice A dans la nouvelle base (X'_1, X'_2). On sait que les deux colonnes de la matrice A représentent l'image par A des vecteurs de la base (e_1, e_2). On donc :

$$A.e_1 = He_1 - Ge_2 \quad (53)$$
$$A.e_2 = Ge_1 + He_2 \quad (54)$$

Si on prend maintenant (X'_1, X'_2) comme base, on a :

$$A.X'_1 = \lambda_1 X'_1 \quad (55)$$
$$A.X'_2 = \lambda_2 X'_2 \quad (56)$$

Donc dans la base des vecteurs propres (X'_1, X'_2), la matrice A s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H+iG & 0 \\ 0 & H-iG \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iG & 0 \\ 0 & -iG \end{pmatrix}$$
$$= H.I + i\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & -G \end{pmatrix} \quad (57)$$

On retrouve bien l'équation (18).

Références

1. **L. Landau et E. Lifschitz**. 1970. *La Théorie de l'Elasticité*. Cours de Physique Théorique, tome VII. Edition Mir.
2. **H.M. Dufour**. 1975. Exemple de calcul géodésique et analyse des structures des résultats. IGN $n°$26771.

3. **H.M. Dufour**. 1977. Evolution des méthodes géodésiques. Bulletin d'Information de l'IGN $n°34$.
4. **A. Ben Hadj Salem**. 1981. Point de Laplace, Exemple de Calcul Géodésique et Analyse des Résultats en Géodésie Tridimensionnelle. Rapport de stage IT3. ENSG. IGN.
5. **F. Sanso**. 1982. Three Lectures on Mathematical Theory of Elasticity. *Geodesy and Global Geodynamics*. Editeurs H. Moritz et H. Sünkel. Publication $n°41$ de l'Institut de Géodésie de l'Université Technique de Graz, Autriche. pp461-530.