

ÉCOLE SUPÉRIEURE PRIVÉE D' AÉRONAUTIQUE ET DES  
TECHNOLOGIES DE TUNIS  
- OPTION TOPOGRAPHIE ET GÉOMATIQUE -

---

**Cours de Cartographie Mathématique  
et les Transformations de Passage entre les  
Systèmes Géodésiques**

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM  
INGÉNIEUR GÉNÉRAL GÉOGRAPHE**

Version 1.

Tunis, Février 2015  
November 23, 2015

---

Abdelmajid BEN HADJ SALEM  
6, rue du Nil, Cité Soliman Erriadh  
8020 Soliman, Tunisia  
e-mail: abenhadsalem@gmail.com

© 2015 Abdelmajid BEN HADJ SALEM

# *Préface*

Ce cours comprend deux parties comme suit:

## **- Partie I: Les Représentations Planes:**

Après une introduction, on traite les représentations planes et principalement celles qui sont conformes. Dans ce chapitre, on donne une démonstration de la condition de conformité d'une représentation plane. On présente aussi ce qu'on appelle en langage mathématique les représentations quasi-conformes en présentant un exemple.

Par suite, on étudie en détail les représentations planes Lambert et l'UTM en démontrant pour chacune, les différentes formules des expressions des coordonnées rectangulaires  $(X, Y)$  et du module linéaire.

## **- Partie II: Les Transformations de Passage entre les Systèmes Géodésiques:**

Les modèles de passage entre les systèmes géodésiques sont traités dans le septième chapitre à savoir les modèles tridimensionnels de Burša-Wolf, de Molodensky et le modèle bidimensionnel de Helmert. On présente une méthode de détermination directe des paramètres du modèle de Burša-Wolf.

Tunis,  
Janvier 2015

*Abdelmajid  
Ben Hadj Salem, Dipl.-Ing.  
Ingénieur Général Géographe*



# Contents

Préface . . . . .	i
<b>I Les Systèmes des Représentations Planes</b>	<b>1</b>
<b>1 Les Représentations Planes</b>	<b>3</b>
1.1 INTRODUCTION . . . . .	3
1.2 ELÉMENTS CORRESPONDANTS . . . . .	4
1.3 CANEVAS . . . . .	5
1.4 LES REPRÉSENTATIONS CYLINDRIQUES . . . . .	6
1.5 LES REPRÉSENTATIONS CONIQUES ET AZIMUTALES . . . . .	7
1.6 LES ALTÉRATIONS . . . . .	7
1.6.1 L'Altération Angulaire . . . . .	7
1.6.2 Le Module Linéaire dans une direction $\delta$ . . . . .	7
1.6.3 L'Altération Linéaire . . . . .	8
1.6.4 Le Module aréolaire . . . . .	8
1.7 INDICATRICE DE TISSOT . . . . .	8
1.7.1 Le Lemme de Tissot . . . . .	8
1.7.2 Altération Angulaire . . . . .	10
<b>2 Les Représentations Planes et les Fonctions Analytiques</b>	<b>11</b>
2.1 RAPPELS MATHÉMATIQUES . . . . .	11
2.1.1 Logarithme Complexe . . . . .	11
2.2 LES FONCTIONS ANALYTIQUES . . . . .	12
2.3 AUTRE DÉFINITION DE LA FONCTION ANALYTIQUE . . . . .	13
<b>3 Représentation conforme d'une surface sur une autre</b>	<b>17</b>
<b>4 Les Représentations ou Transformations Quasi-Conformes</b>	<b>23</b>
4.1 DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN UN POINT $z_0$ . . . . .	24
4.1.1 Etude de la Transformée d'un cercle . . . . .	24
4.1.2 Calcul d'un élément de longueur sur le Plan . . . . .	25
4.2 EXEMPLE DE TRANSFORMATION QUASI-CONFORME . . . . .	26
4.3 EXERCICES ET PROBLÈMES . . . . .	28
<b>5 La Représentation Plane Lambert</b>	<b>33</b>
5.1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS . . . . .	33
5.2 INDICATRICE DE TISSOT . . . . .	35
5.3 CALCUL DES MODULES PRINCIPAUX . . . . .	35
5.4 ETABLISSEMENT DES FORMULES $R(\varphi)$ ET $\Omega(\lambda)$ . . . . .	35
5.5 DÉTERMINATION DES CONSTANTES $R_0$ ET $n$ . . . . .	36

5.6	EXPRESSION DES COORDONNÉES CARTÉSIENNES . . . . .	38
5.7	PASSAGE DES COORDONNÉES $(R, \Omega)$ AUX COORDONNÉES $(x, y)$ . . . . .	39
5.8	PASSAGE DES COORDONNÉES $(x, y)$ AUX COORDONNÉES $(R, \Omega)$ . . . . .	39
5.9	ETUDE DE L'ALTÉRATION LINÉAIRE . . . . .	40
5.9.1	Calculs numériques . . . . .	41
5.10	CONVERGENCE DES MÉRIDIENS . . . . .	42
5.11	CALCUL DE LA RÉDUCTION DE LA CORDE . . . . .	42
5.12	EXERCICES ET PROBLÈMES . . . . .	43
<b>6</b>	<b><i>La Représentation Plane UTM</i></b> . . . . .	<b>45</b>
6.1	DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS . . . . .	45
6.2	DÉTERMINATION DES COORDONNÉES UTM . . . . .	46
6.3	ANNEXE: CALCUL DE LA LONGUEUR D'UN ARC DE LA MÉRIDIENNE D'UN EL- LIPSOÏDE DE RÉVOLUTION . . . . .	53
6.4	EXERCICES ET PROBLÈMES . . . . .	55
<b>II</b>	<b><i>Les Transformations de Passage entre Les Systèmes Géodésiques</i></b> . . . . .	<b>57</b>
<b>7</b>	<b><i>Les Transformations Entre Les Systèmes Géodésiques</i></b> . . . . .	<b>59</b>
7.1	INTRODUCTION . . . . .	59
7.2	LE MODÈLE DE BURSA - WOLF . . . . .	60
7.2.1	Matrices de Rotation . . . . .	61
7.2.2	Calcul des Paramètres du Modèle de Burša-Wolf par les Moindres Carrés	63
7.3	LES FORMULES DE MOLODENSKY . . . . .	64
7.4	LES FORMULES DE MOLODENSKY STANDARD . . . . .	66
7.5	LES FORMULES DE MOLODENSKY ABRÉGÉES . . . . .	67
7.6	LA RECHERCHE DES PARAMÈTRES DE PASSAGE PAR LES FORMULES DE MOLO- DENSKY . . . . .	67
7.7	LA DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE BURŠA-WOLF . . . . .	68
7.7.1	Détermination de l'échelle $1 + m$ . . . . .	68
7.7.2	Détermination des rotations $(rx, ry, rz)$ . . . . .	69
7.8	DÉTERMINATION DES COMPOSANTES DE LA TRANSLATION $T$ . . . . .	70
7.9	LA TRANSFORMATION DE HELMERT BIDIMENSIONNELLE . . . . .	70
7.9.1	Résolution par les Moindres Carrés . . . . .	71
7.9.2	La Solution par les Moindres Carrés . . . . .	73
7.10	EXERCICES ET PROBLÈMES . . . . .	75

## **Part I**

# *Les Systèmes des Représentations Planes*



# Chapter 1

## *Les Représentations Planes*

### 1.1 INTRODUCTION

On a vu dans les chapitres précédents qu'un point géodésique est représenté par ses coordonnées géodésiques  $(\varphi, \lambda)$  dans un système géodésique donné relatif à un ellipsoïde donné.

Les calculs géodésiques sur l'ellipsoïde étant compliqués d'une part et que l'homme a cherché toujours à visualiser le monde extérieur où il vit par des graphiques et des plans représentés sur des surfaces planes d'autre part.

Le géodésien, par le moyen des représentations planes appelées incorrectement projections, donne une représentation du modèle terrestre (sphère ou ellipsoïde) sur le plan où il est plus facile d'effectuer les calculs d'angles, de distances et de gisements.

Cependant, ces représentations subissent des déformations dues aux propriétés géométriques des surfaces modèles et images. Le problème fondamental ici est de définir des représentations minimisant ces déformations compte tenu d'un objectif déterminé.

Dans la suite du cours, on étudie les représentations dites conformes en général et plus en détail: la représentation Lambert Tunisie et la représentation UTM (Universal Transverse Mercator).

On va établir une correspondance entre les points d'une surface modèle  $\sigma$  et les points d'une surface image  $\Sigma$ , dans le cas particulier où:

- la surface  $\sigma$  est sphérique ou ellipsoïdique,
- la surface  $\Sigma$  est plane.

## 1.2 ELÉMENTS CORRESPONDANTS

Représenter la surface  $\sigma$  sur  $\Sigma$  consiste à définir une bijection  $B$  de  $\sigma \Rightarrow \Sigma$ :

à  $m(u, v) \in (\sigma) \Rightarrow M(U, V) \in (\Sigma)$  avec:

$(u, v) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $U = U(u, v)$ ,  $V = V(u, v)$  et  $OM = B(om)$

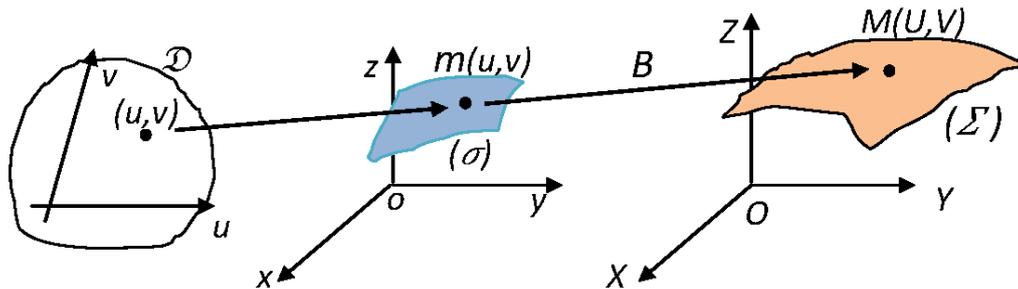


Figure 1.1: Représentation Plane

$(u, v)$  les paramètres qui définissent la surface  $(\sigma)$  et  $U, V$  sont ceux de la surface  $(\Sigma)$ .

Les points  $m(u, v)$  et  $M(U, V)$  sont appelés points correspondants. Si le point  $m$  décrit une courbe  $(\gamma)$  sur  $(\sigma)$ , son image  $M$  décrit une courbe  $(\Gamma)$ , on dit que les courbes  $(\gamma)$  et  $(\Gamma)$  sont dites courbes correspondantes.

De même, on appelle tangentes correspondantes, les tangentes à deux courbes correspondantes en deux points correspondants. L'angle de deux tangentes à deux courbes sur  $(\sigma)$  et l'angle des tangentes correspondantes sont dites angles correspondants.

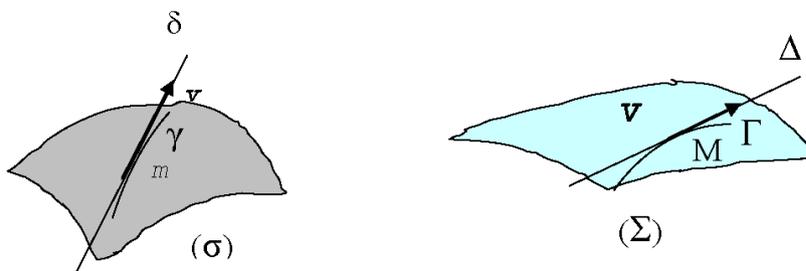


Figure 1.2: Tangentes correspondantes

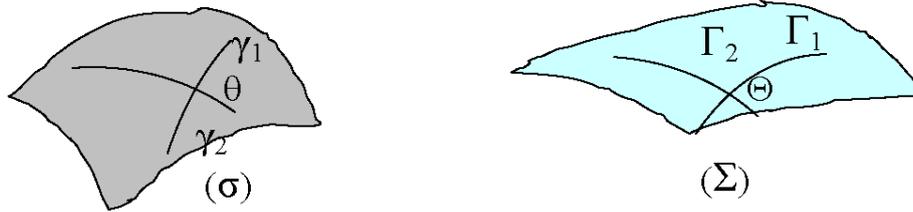


Figure 1.3: Angles Correspondants

### 1.3 CANEVAS

Les représentations sont différenciées par deux aspects qui sont :

- la nature des courbes coordonnées du modèle et celles de l'image qui définissent le caractère du canevas,
- le type de l'altération: longueurs et/ou angles et/ou surfaces.

**Définition 1.1** On appelle canevas les images des courbes coordonnées du modèle.

Pour passer au plan, on peut considérer le passage du modèle ellipsoïdique au plan ou celui du modèle ellipsoïdique au plan via le modèle sphérique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{l'ellipsoïde} \implies \text{au plan} \\ \text{l'ellipsoïde} \implies \text{à la sphère} \implies \text{au plan} \end{array} \right.$$

Les représentations peuvent être classées selon la nature des courbes coordonnées  $(u, v)$  et  $(U, V)$ . Pour le modèle sphérique, les courbes coordonnées  $(u, v)$  déterminent toujours deux familles de courbes orthogonales, méridiens et parallèles ou pseudo-méridiens et pseudo-parallèles.

Soit  $DD'$  le diamètre de référence du modèle, le point  $D$  est le pivot de la représentation.

La représentation est dite :

- directe, si le diamètre de référence est choisi sur la ligne des pôles  $PP'$ ,
- transverse si le diamètre de référence est perpendiculaire à  $PP'$ ,
- oblique: les autres cas, le pivot n'est ni pôles, ni sur l'équateur. Quant aux courbes coordonnées de l'image plane, elles sont :
  - soit deux familles de droites perpendiculaires;  $U, V$  sont alors les coordonnées cartésiennes  $X$  et  $Y$  du plan,

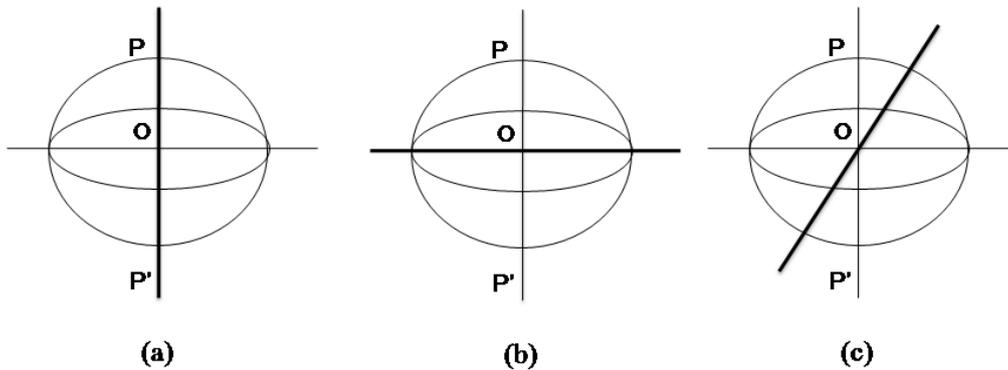


Figure 1.4: Types de représentation

- soit une famille de droites concourantes ( $\Omega$ ) et la famille de cercles orthogonaux ( $R$ ) définissant des coordonnées polaires.

## 1.4 LES REPRÉSENTATIONS CYLINDRIQUES

Les représentations cylindriques sont définies par les représentations ayant comme courbes coordonnées images les coordonnées cartésiennes  $X, Y$  correspondantes aux courbes coordonnées du modèle.

Leurs équations sont pour les représentations cylindriques quelconques :

$$\begin{aligned} X &= X(u) \\ Y &= Y(v) \end{aligned} \iff \begin{aligned} u &= u(X) \\ v &= v(Y) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Cas des représentations cylindriques directes : les paramètres du modèle sont  $\varphi, \lambda$  respectivement la latitude et la longitude et les équations de la représentations sont de la forme :

$$\begin{aligned} X &= X(\varphi) \\ Y &= Y(\lambda) \end{aligned} \iff \begin{aligned} \varphi &= \varphi(X) \\ \lambda &= \lambda(Y) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Cas des représentations cylindriques transverses : les paramètres du modèle sont les coordonnées de Cassini-Soldner ( $L, H$ ) et les équations sont de la forme :

$$\begin{aligned} X &= X(L) \\ Y &= Y(H) \end{aligned} \iff \begin{aligned} L &= L(X) \\ H &= H(Y) \end{aligned} \quad (1.3)$$

En remplaçant  $L$  et  $H$  en fonction de  $\varphi$  et de  $\lambda$ , on obtient :

$$\begin{aligned} X &= X(\varphi, \lambda) \\ Y &= Y(\varphi, \lambda) \end{aligned} \iff \begin{aligned} \varphi &= \varphi(X, Y) \\ \lambda &= \lambda(X, Y) \end{aligned} \quad (1.4)$$

## 1.5 LES REPRÉSENTATIONS CONIQUES ET AZIMUTALES

Ce sont les représentations planes telles que les courbes coordonnées images sont définies par les coordonnées polaires  $R, \Omega$ . Les courbes  $R = \text{Constante}$  et  $\Omega = \text{constante}$  sont les courbes correspondantes des courbes coordonnées  $u$  et  $v$  du modèle.

Les équations générales de ces représentations sont de la forme :

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega(u) \\ R = R(v) \end{aligned} \iff \begin{aligned} u = u(\Omega) \\ v = v(R) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$u = \text{cte} \implies \Omega = \text{cte} \implies$  les images de  $u = \text{cte}$  sont des droites concourantes.

$v = \text{cte} \implies R = \text{cte} \implies$  les images de  $v = \text{cte}$  sont des arcs de cercles concentriques.

Parmi les représentations coniques, on trouve un groupe particulier de représentations où l'angle  $\Omega$  est égal à l'angle du cercle méridien correspondant soit l'azimut de la tangente au méridien au pôle  $D$  de la représentation, ces représentations sont dites **représentations azimutales** :

$$\begin{aligned} \Omega = Az \\ R = R(v) \end{aligned} \iff \begin{aligned} Az = \Omega \\ v = v(R) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Les représentations **coniques directes** ont leurs équations comme suit :

$$\begin{aligned} R = R(\varphi) \\ \Omega = \Omega(\lambda) \end{aligned} \iff \begin{aligned} \varphi = \varphi(R) \\ \lambda = \lambda(\Omega) \end{aligned} \quad (1.7)$$

## 1.6 LES ALTÉRATIONS

### 1.6.1 L'Altération Angulaire

**Définition 1.2** On appelle altération angulaire la différence des deux angles correspondants soit:

$$\boxed{\Theta - \theta} \quad (1.8)$$

### 1.6.2 Le Module Linéaire dans une direction $\delta$

Soit  $\delta$  la direction de la tangente en un point donné  $m$  du modèle  $(\sigma)$ ,  $s$  et  $S$  les abscisses curvilignes sur les 2 courbes correspondantes  $(\sigma)$  et  $(\Sigma)$ .

**Définition 1.3** On appelle module linéaire dans la direction  $\delta$  le rapport :

$$m_\delta(u, v) = \frac{dS}{ds} = \frac{\|d\mathbf{M}(U, V)\|}{\|d\mathbf{m}(u, v)\|} = \frac{\|\mathbf{V}\|}{\|\mathbf{v}\|} \quad (1.9)$$

où  $\mathbf{V}$  est l'image du vecteur  $\mathbf{v}$  unitaire dans la direction  $\delta$ .

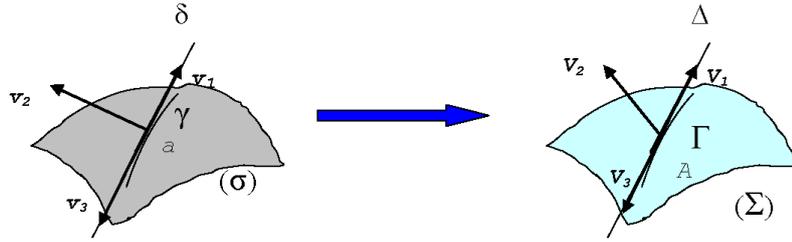


Figure 1.5: Les Directions Principales

En utilisant les éléments de la 1ère forme fondamentale des surfaces  $(\sigma)$  et  $(\Omega)$ , on a alors:

$$m_\delta^2 = \left( \frac{dS}{ds} \right)^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{EdU^2 + 2FdUdV + GdV^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}$$

soit:

$$m_\delta = \sqrt{\frac{EdU^2 + 2FdUdV + GdV^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}} \quad (1.10)$$

### 1.6.3 L'Altération Linéaire

**Définition 1.4** On appelle altération linéaire la quantité sans unité:

$$\epsilon = m_\delta - 1 \quad (1.11)$$

### 1.6.4 Le Module aréolaire

Soient  $da(\sigma)$  et  $dA(\Sigma)$  des aires de domaines limités par des contours correspondants alors:

**Définition 1.5** Le module aréolaire ou rapport des aires est donné par :

$$m_a = \frac{dA(\Sigma)}{da(\sigma)} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{eg - f^2}} \quad (1.12)$$

## 1.7 INDICATRICE DE TISSOT

### 1.7.1 Le Lemme de Tissot

**Lemme 1.1** En 2 points correspondants, il existe au moins deux 2 vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  orthogonaux sur  $(\sigma)$  admettant deux vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  correspondants orthogonaux sur  $(\Sigma)$ .

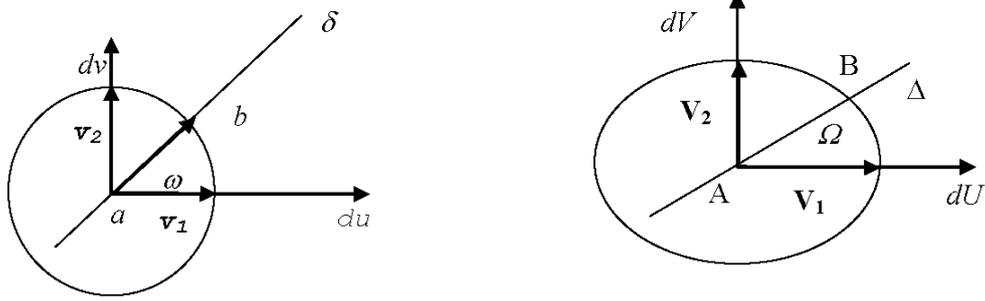


Figure 1.6: Indicatrice de Tissot

Le couple de directions correspondantes orthogonales à la fois sur la surface image ( $\Sigma$ ) et sur la surface modèle ( $\sigma$ ) sont appelées directions principales (au sens de Tissot<sup>1</sup>).

Soient  $\delta_1$  et  $\delta_2$  les directions principales sur ( $\sigma$ ). Les modules linéaires dans les directions  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont dits modules principaux:

$$m_{\delta_1} = m_1$$

$$m_{\delta_2} = m_2$$

**Indicatrice de Tissot** Soit  $a$  un point de ( $\sigma$ ), dans le plan tangent à ( $\sigma$ ) au point  $a$ , le repère orthonormé  $(a, du, dv)$  de vecteurs unitaires  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ . Soit  $b$  un point voisin de  $a$  tel que  $\|\mathbf{ab}\| = 1$ . Au repère  $(a, du, dv)$  correspond le repère orthonormé  $(A, dU, dV)$  sur la surface  $\Sigma$ , et au point  $b$  correspond le point  $B$  (Fig. 1.6).

Par définition, on a :

$$m_\delta = \frac{\|\mathbf{AB}\|}{\|\mathbf{ab}\|} = \|\mathbf{AB}\|$$

Et:

$$m_1 = \frac{\|\mathbf{V}_1\|}{\|\mathbf{v}_1\|} = \|\mathbf{V}_1\|$$

$$m_2 = \frac{\|\mathbf{V}_2\|}{\|\mathbf{v}_2\|} = \|\mathbf{V}_2\|$$

Par les définitions des modules linéaires  $m_1$  et  $m_2$ , on peut écrire:

$$m_1 = \frac{\|\mathbf{AB}\| \cos \Omega}{\|\mathbf{ab}\| \cos \omega} = \frac{m_\delta \cos \Omega}{1 \cdot \cos \omega} \Rightarrow m_1 \cos \omega = m_\delta \cos \Omega \quad (1.13)$$

$$m_2 = \frac{\|\mathbf{AB}\| \sin \Omega}{\|\mathbf{ab}\| \sin \omega} = \frac{m_\delta \sin \Omega}{1 \cdot \sin \omega} \Rightarrow m_2 \sin \omega = m_\delta \sin \Omega \quad (1.14)$$

Les coordonnées du point  $B$  dans  $(A, dU, dV)$  sont:

$$\begin{aligned} dU &= AB \cos \Omega = m_\delta \cdot \cos \Omega = m_1 \cdot \cos \omega \\ dV &= AB \sin \Omega = m_\delta \cdot \sin \Omega = m_2 \cdot \sin \omega \end{aligned} \quad (1.15)$$

<sup>1</sup>Nicolas Auguste Tissot (1824 - 1897): Cartographe français.

**Théorème 1.1 (Indicatrice de Tissot)** Quand le point  $b$  varie c'est-à-dire  $\omega$  varie, l'image de  $b$  soit  $B$  décrit une ellipse d'équation:

$$\boxed{\frac{dU^2}{m_1^2} + \frac{dV^2}{m_2^2} = 1} \quad (1.16)$$

Cette ellipse est appelée **indicatrice de Tissot**.

Elle est l'image du cercle de rayon unité dans le plan tangent au point  $a$  de  $(\sigma)$ . Les longueurs des demis grands et petits axes sont les modules principaux  $m_1$  et  $m_2$ . La longueur d'un demi-diamètre est le module linéaire dans la direction  $\delta$  soit  $m_\delta$ .

Dans le cas général, il existe un seul couple de vecteurs orthogonaux correspondants.

**Corollaire** S'il y'a une infinité de couples de vecteurs orthogonaux correspondants, l'indicatrice de Tissot est un cercle quelque soit la direction  $\delta$  et le module linéaire est indépendant de la direction:

$$\boxed{m_\delta = m_1 = m_2 = m} \quad (1.17)$$

## 1.7.2 Altération Angulaire

L'altération angulaire est donnée par  $\Omega - \omega$ . Or d'après les coordonnées de  $B$  données par les équations (1.13) et (1.14), on a :

$$tg\Omega = \frac{m_2}{m_1} tg\omega$$

On calcule:

$$\frac{tg\Omega - tg\omega}{tg\Omega + tg\omega} = \frac{\left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right) tg\omega}{\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) tg\omega} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$$

Or:

$$\frac{tg\Omega - tg\omega}{tg\Omega + tg\omega} = \frac{\sin(\Omega - \omega)}{\sin(\Omega + \omega)} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}$$

Si l'altération angulaire est nulle  $\implies \Omega - \omega = 0 \implies \Omega = \omega$  D'où  $m_2 = m_1$  et l'indicatrice de Tissot est un cercle. D'où l'équivalence :

$$\boxed{\text{Altération angulaire nulle} \Leftrightarrow m_2 = m_1 \text{ pour toute } \delta \text{ et } m_\delta = m = \text{cte}} \quad (1.18)$$

La représentation est dite dans ce cas **conforme**.

## Chapter 2

# *Les Représentations Planes et les Fonctions Analytiques*

### 2.1 RAPPELS MATHÉMATIQUES

On considère le plan complexe tel que à un point de coordonnées  $(x, y)$ , on associe le nombre complexe  $z = x + iy$  et on peut écrire:

$$z = |z| e^{i \cdot \arg(z)} = |z| (\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z))) \quad (2.1)$$

où  $|z|$  est le module et  $\arg(z)$  est l'argument du nombre complexe  $z$  défini à  $2k\pi$  avec:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}(\arg(z)) &= \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

#### 2.1.1 Logarithme Complexe

Soit  $t$  un nombre complexe donné, on cherche tous les nombres complexes  $z$  tels que  $e^z = t$ . Il n'en existe que si  $t \neq 0$ . Supposons  $t \neq 0$ , on a alors:

$$z = x + iy \implies e^z = t \implies e^x e^{iy} = t = |t| e^{i \cdot \arg(t)} \implies x = \operatorname{Log} |t| \quad \text{et} \quad y = \arg(t) \text{ à } 2k\pi \text{ près}$$

On a donc:

$$z = x + iy = \operatorname{Log} |t| + i \cdot \arg(t)$$

Par définition, on pose:

$$\boxed{z = \operatorname{Log} t = \operatorname{Log} |t| + i \cdot \arg(t)} \quad (2.3)$$

**Définition 2.1** On appelle détermination de  $\operatorname{Log} t$  dans un ouvert connexe  $\mathcal{D}$  du plan complexe toute fonction  $g$  continue de  $t$  définie dans  $\mathcal{D}$  et telle que:

$$\boxed{\forall t \in \mathcal{D}, e^{g(t)} = t} \quad (2.4)$$

## 2.2 LES FONCTIONS ANALYTIQUES

A tout nombre complexe  $z = x + iy$  on peut faire correspondre un nombre complexe  $Z = X + iY$  par l'intermédiaire d'une fonction  $f$ . On note, en appelant  $P$  et  $Q$  les parties réelle et imaginaire de  $f$  :

$$Z = f(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \quad (2.5)$$

Cette correspondance entre  $z$  et  $Z$  définit une représentation d'un plan ( $p$ ) sur un plan ( $P$ ) dans laquelle le point  $A$  d'affixe  $Z$  du plan ( $P$ ) est l'image d'un point  $a$  d'affixe  $z$  du plan ( $p$ ). L'extension des propriétés concernant les limites et la continuité, pour la fonction  $f$ , se déduit

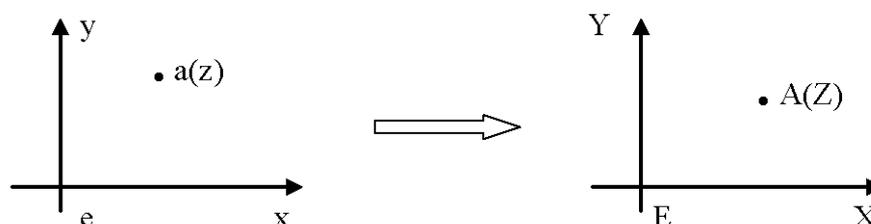


Figure 2.1: Correspondance

immédiatement des propriétés analogues concernant les fonctions  $P$  et  $Q$  des deux variables  $(x, y)$ .

Pour étendre à la fonction  $f$  la notion de dérivée, il faut étudier la limite, lorsque  $z \rightarrow 0$ , du rapport  $\frac{dZ}{dz}$ , qui s'écrit :

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{dX + idY}{dx + idy} = \frac{P'_x dx + P'_y dy + i(Q'_x dx + Q'_y dy)}{dx + idy} = \frac{(P'_x + iQ'_x)dx + (P'_y + iQ'_y)dy}{dx + idy}$$

Ce rapport dépend en général de  $\frac{dy}{dx}$ ; sa limite dépend de la manière dont  $dz$  tend vers zéro, ou encore de la façon dont le point  $a'$  d'affixe  $z + dz$  tend vers le point  $a$  d'affixe  $z$  : si  $a'$  tend vers  $a$  en décrivant une spirale dont  $a$  est le point asymptotique, par exemple, la limite n'existe pas.

Mais le rapport  $\frac{dZ}{dz}$  est une fonction homographe de  $(dx, dy)$ . La limite quand  $dz \rightarrow 0$ , est indépendante de la façon dont  $dz \rightarrow 0$ , c'est-à-dire dont  $dx$  et  $dy$  tendent (indépendamment) vers 0, si :

$$P'_x + iQ'_x = \frac{P'_y + iQ'_y}{i} \quad (2.6)$$

C'est-à-dire si :

$$\boxed{P'_x = Q'_y \quad \text{et} \quad P'_y = -Q'_x} \quad (2.7)$$

ou en revenant à  $X$  et  $Y$  :

$$\boxed{\text{Conditions de Cauchy} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} \\ \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x} \end{array} \right.} \quad (2.8)$$

relations connues sous le nom de **conditions de Cauchy**<sup>1</sup>. Lorsque ces conditions sont satisfaites, la fonction  $f$  admet, en tout point de son domaine de définition, une dérivée notée :

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = \frac{dZ}{dz} = P'_x + iQ'_x = Q'_y - iP'_y \quad (2.9)$$

La fonction  $f$  est dite **analytique**.

### 2.3 AUTRE DÉFINITION DE LA FONCTION ANALYTIQUE

Soit  $F(x, y)$  une fonction complexe donc une application de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ . On suppose que  $F$  soit différentiable entraîne que:

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy \quad (2.10)$$

On pose:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy \end{aligned}$$

qui sont 2 fonctions différentiables en  $x$  et  $y$ , d'où:

$$\begin{aligned} dz &= dx + idy \\ d\bar{z} &= dx - idy \end{aligned}$$

Par suite:

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \quad (2.11)$$

$$dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \quad (2.12)$$

On les remplace dans l'équation (2.10), on obtient:

$$dF(x, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} - i \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

En remplaçant  $x$  par  $(z + \bar{z})/2$  et  $y$  par  $(z - \bar{z})/2i$ ,  $F(x, y)$  devient une fonction  $G(z, \bar{z})$ , ce qui donne en posant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ dF(x, y) = dG(z, \bar{z}) &= \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial z} dz + \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \end{aligned} \quad (2.13)$$

<sup>1</sup>Augustin-Louis Cauchy (1789-1857): Mathématicien français.

On considère maintenant le cas où la fonction  $F$  est analytique. De l'équation précédente, on a:

$$dF(x, y) = dG(z, \bar{z}) = \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial z} dz + \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = F'(z) dz$$

C'est-à-dire:

$$\frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.14)$$

On vérifie bien si ce terme là est nul:

$$\frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) G = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial G}{\partial x} + i \frac{\partial G}{\partial y} \right) \quad (2.15)$$

On introduit la notation suivante:

$$F(x, y) = G(z, \bar{z}) = P(x, y) + iQ(x, y) = P + iQ$$

On a donc de (2.15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial G}{\partial x} + i \frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(P + iQ)}{\partial x} + i \frac{\partial(P + iQ)}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Comme la fonction  $F$  ou  $G$  est analytique, et en utilisant les conditions de Cauchy (2.7), on a finalement:

$$\frac{\partial G(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.16)$$

**Définition 2.2** Une fonction  $f(z, \bar{z})$  est analytique en  $z$  si elle ne dépend que de  $z$  soit:

$$\boxed{\frac{\partial f(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0} \quad (2.17)$$

Avec les notations de l'équation (2.5), au point  $a$  du plan ( $p$ ), quelle que soit la direction du vecteur  $a_0 a$ , d'affixe  $dz$ , on peut écrire :

$$dZ = f'(z_0) dz = |f'(z_0)| e^{i \cdot \arg f'(z_0)} dz$$

relation qui exprime que le vecteur  $A_0 A$  se déduit du vecteur  $a_0 a$  par une similitude, dont le rapport est  $|f'(z_0)|$  et l'angle  $\arg f'(z_0)$ .

La représentation du plan ( $p$ ) sur le plan ( $P$ ) est donc conforme. On peut écrire :

$$dS = |dZ| \quad \text{et} \quad ds = |dz| \quad (2.18)$$

Le module linéaire de la représentation est :

$$\begin{aligned} m &= \left| \frac{dZ}{dz} \right| \\ \text{et} \quad \arg \left( \frac{dZ}{dz} \right) &= \text{Arctg} \left( \frac{\frac{\partial Y}{\partial x}}{\frac{\partial X}{\partial x}} \right) = \alpha \end{aligned} \quad (2.19)$$

$\alpha$  angle de la tangente en  $A_0$  à l'image  $y_0$  de la droite  $y = y_0$  du plan  $(p)$  (Fig. 2.2). En effet, cette image est définie en fonction du paramètre  $x$ , par :

$$\begin{cases} X = X(x, y_0) \\ Y = Y(x, y_0) \end{cases} \quad (2.20)$$

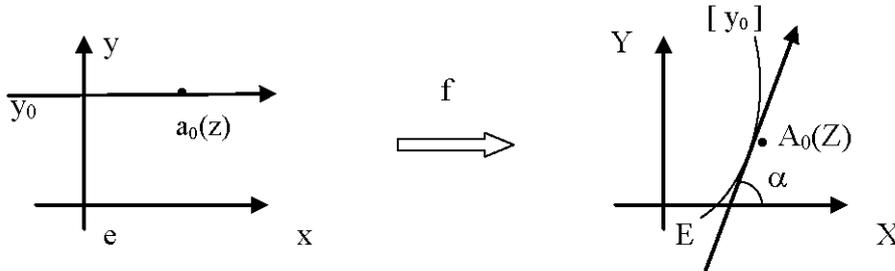


Figure 2.2: Image de  $y = y_0$

Les conditions de Cauchy données par (2.8) se traduisent aussi en disant que les fonctions  $P$  et  $Q$  sont des fonctions harmoniques, c'est-à-dire qu'elles satisfont chacune l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

On démontre les propriétés suivantes (J. Dieudonné<sup>2</sup>, 1970):

- si  $f$  est une fonction analytique, elle admet des dérivées de tous les ordres : elle est donc développable en série entière en tout point de son domaine de définition,
- une fonction analytique est déterminée dans tout son domaine d'existence, si elle est définie dans une région, aussi petite qu'on la suppose, entourant un point  $a$ ; ou même tout le long d'un arc de courbe, aussi petit qu'on le suppose, aboutissant au point  $a$ .

En effet, la connaissance de  $f$  au voisinage de  $a$  permet (théoriquement tout au moins) de former la suite des dérivées de  $f$  au point  $a$ , donc, d'écrire son développement en série de Taylor. Si  $b$  est un point intérieur au cercle de convergence de cette série, on peut alors calculer les dérivées successives de  $f$  au point  $b$ , et ainsi de suite. L'opération est dite prolongement analytique de  $f$ .

<sup>2</sup>Jean Dieudonné (1906 - 1992): Mathématicien français.



## Chapter 3

# Représentation conforme d'une surface sur une autre

Conformal mappings play also a fundamental role in modern physics, namely, in string theory and conformal quantum field theory.

(E. Zeidler<sup>1</sup>, 2011)

La représentation d'une surface modèle ( $\sigma$ ) sur une surface image ( $\Sigma$ ) est définie en établissant une correspondance entre les coordonnées curvilignes  $a(u, v)$  de ( $\sigma$ ) et  $A(U, V)$  de ( $\Sigma$ ) :

$$U = U(u, v) \quad (3.1)$$

$$V = V(u, v) \quad (3.2)$$

Le module linéaire est alors :

$$m(u, v) = \frac{dS}{ds} \Rightarrow m^2(u, v) = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{EdU^2 + 2FdU.dV + GdV^2}{edu^2 + 2fdv.du + gdv^2}$$

En remplaçant  $dU$  et  $dV$  en fonction de  $du$  et  $dv$  en utilisant (3.1) et (3.2), on peut écrire  $dS^2$  sous la forme:

$$dS^2 = \mathcal{E}du^2 + 2\mathcal{F}du.dv + \mathcal{G}dv^2 \quad (3.3)$$

Soient le plan tangent à ( $\sigma$ ) au point  $a(u, v)$ , et deux courbes ( $\gamma_1$ ) et ( $\gamma_2$ ) passant par  $a$  dont les tangentes respectivement à ( $\gamma_1$ ) et ( $\gamma_2$ ) appartiennent au plan tangent.  $(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v})$  est une base du plan tangent.

Soit la direction de la tangente à ( $\gamma_1$ ) de direction:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} dv$$

De même, soit la direction de la tangente à ( $\gamma_2$ ) de direction:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} \delta v$$

La forme fondamentale de ( $\sigma$ ) est :

$$ds^2 = edu^2 + 2fdv.du + gdv^2$$

---

<sup>1</sup>E. Zeidler (1905 - ): Eminent physicien allemand.

En notant  $\Omega$  l'angle des deux tangentes en  $a$ , on a la relation:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} dv\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} \delta v\right) = \left\| \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} dv \right\| \cdot \left\| \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} \delta v \right\| \cdot \cos \Omega$$

En posant:

$$ds = \left\| \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} dv \right\| \Rightarrow ds^2 = e du^2 + 2f du \cdot dv + g dv^2$$

et:

$$\delta s = \left\| \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial u} \delta u + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial v} \delta v \right\| \Rightarrow \delta s^2 = e \delta u^2 + 2f \delta u \cdot \delta v + g \delta v^2$$

Ce qui donne:

$$\cos \Omega = \frac{e du \delta u + f(du \delta v + \delta u dv) + g \delta v \delta v}{ds \delta s}$$

On pose:

$$\begin{cases} p = \frac{dv}{du} \Rightarrow dv = pdu \\ q = \frac{\delta v}{\delta u} \Rightarrow \delta v = q \delta u \end{cases} \quad (3.4)$$

D'où:

$$\cos \Omega = \frac{e du \delta u + f(du \cdot q \delta u + \delta u \cdot pdu) + g \cdot pdu \cdot q \cdot \delta u}{ds \delta s}$$

ou encore:

$$\cos \Omega = \frac{e du \delta u + f(p + q) du \delta u + g p q du \delta u}{ds \delta s}$$

En utilisant les notations  $p$  et  $q$ , on a:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (e + 2fp + gp^2) du^2 \\ \delta s^2 &= (e + 2fq + gq^2) \delta u^2 \end{aligned}$$

On obtient finalement:

$$\boxed{\cos \Omega = \frac{e + f(p + q) + gpq}{\sqrt{e + 2fp + gp^2} \sqrt{e + 2fq + gq^2}}} \quad (3.5)$$

Sur la surface image ( $\Sigma$ ), l'expression de  $dS^2$  s'écrit (3.3):

$$dS^2 = \mathcal{E} du^2 + 2\mathcal{F} du \cdot dv + \mathcal{G} dv^2$$

Soit  $\Omega'$  l'angle des tangentes correspondantes à  $(\gamma_1)$  et  $(\gamma_2)$ , on a aussi:

$$\boxed{\cos \Omega' = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{F}(p + q) + \mathcal{G}pq}{\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}p + \mathcal{G}p^2} \sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}q + \mathcal{G}q^2}}} \quad (3.6)$$

Il y'a conservation des angles si  $\forall p, q$  on a:

$$\boxed{\cos \Omega = \cos \Omega'} \quad (3.7)$$

En particulier si :

$$q = \frac{\delta v}{\delta u} = 0$$

c'est-à-dire, on prend  $\Omega$  l'angle d'une tangente avec la courbe coordonnée  $v = \text{constante} \Rightarrow \delta v = 0$  et cela suffit. Alors l'équation (3.7) devient  $\forall p = \frac{dv}{du}$ :

$$\frac{e + fp}{\sqrt{e^2 + 2efp + egp^2}} = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{F}p}{\sqrt{\mathcal{E}^2 + 2\mathcal{E}\mathcal{F}p + \mathcal{E}\mathcal{G}p^2}}$$

Elevant au carré, les deux membres de l'équation précédente s'écrivent:

$$1 + \frac{f^2p^2 - egp^2}{e^2 + 2efp + egp^2} = 1 + \frac{\mathcal{F}^2p^2 - \mathcal{E}\mathcal{G}p^2}{\mathcal{E}^2 + 2\mathcal{E}\mathcal{F}p + \mathcal{E}\mathcal{G}p^2}$$

En éliminant le 1 et simplifiant par  $p \neq 0$ , on obtient:

$$\frac{f^2 - eg}{e^2 + 2efp + egp^2} = \frac{\mathcal{F}^2 - \mathcal{E}\mathcal{G}}{\mathcal{E}^2 + 2\mathcal{E}\mathcal{F}p + \mathcal{E}\mathcal{G}p^2}$$

Si:

$$f^2 - eg = 0 \Rightarrow \mathcal{F}^2 - \mathcal{E}\mathcal{G} = 0$$

On a donc:

$$\cos\Omega = \cos\Omega' = \pm 1$$

Maintenant on suppose que :

$$f^2 - eg \neq 0 \Rightarrow \mathcal{F}^2 - \mathcal{E}\mathcal{G} \neq 0$$

On doit avoir  $\forall p$  le rapport :

$$\frac{e^2 + 2efp + egp^2}{\mathcal{E}^2 + 2\mathcal{E}\mathcal{F}p + \mathcal{E}\mathcal{G}p^2}$$

égal à  $\frac{f^2 - eg}{\mathcal{F}^2 - \mathcal{E}\mathcal{G}}$ .

Pour cela, il faudra donc  $\forall p$ :

$$\boxed{\frac{e^2 + 2efp + egp^2}{\mathcal{E}^2 + 2\mathcal{E}\mathcal{F}p + \mathcal{E}\mathcal{G}p^2} = \frac{f^2 - eg}{\mathcal{F}^2 - \mathcal{E}\mathcal{G}} = \mu^2(u, v)} \quad (3.8)$$

Ce qui donne (avec  $\mu > 0$ ) :

$$e^2 + 2efp + egp^2 = \mu^2\mathcal{E}^2 + 2\mu^2\mathcal{E}\mathcal{F}p + \mu^2\mathcal{E}\mathcal{G}p^2 \Rightarrow e^2 - \mu^2\mathcal{E}^2 + 2p(ef - \mu^2\mathcal{E}\mathcal{F}) + p^2(eg - \mu^2\mathcal{E}\mathcal{G}) = 0$$

Soit:

$$\begin{cases} e^2 - \mu^2\mathcal{E}^2 = 0 \Rightarrow \mu^2 = \frac{e^2}{\mathcal{E}^2} \\ ef - \mu^2\mathcal{E}\mathcal{F} = 0 \Rightarrow \mu^2 = \frac{ef}{\mathcal{E}\mathcal{F}} \\ eg - \mu^2\mathcal{E}\mathcal{G} = 0 \Rightarrow \mu^2 = \frac{eg}{\mathcal{E}\mathcal{G}} \end{cases}$$

Comme  $\frac{e}{\mathcal{E}} \neq 0$ , on a:

$$\frac{e}{\mathcal{E}} = \frac{f}{\mathcal{F}} = \frac{g}{\mathcal{G}} \Rightarrow \mu^2 = \frac{f^2 - eg}{\mathcal{F}^2 - \mathcal{E}\mathcal{G}}$$

La condition (3.8) est vérifiée si et seulement si :

$$\frac{e}{\mathcal{E}} = \frac{f}{\mathcal{F}} = \frac{g}{\mathcal{G}} \Rightarrow \cos\Omega = \cos\Omega' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{la représentation est conforme} \\ \text{et le module linéaire } m = m(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\mu(u, v)}} \\ \text{est indépendant de la direction} \end{array} \right. \quad (3.9)$$

- Si les coordonnées  $(u, v)$  sont orthogonales ( $f = 0$ ), les deux conditions précédentes à gauche deviennent :

$$\mathcal{F} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{E}}{e} = \frac{\mathcal{G}}{g} \quad (3.10)$$

- Si les coordonnées  $(u, v)$  sont symétriques, alors  $e = g$ , les conditions de conformité s'écrivent :

$$\mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{E} = \mathcal{G} \implies \text{les coordonnées } U \text{ et } V \text{ sont symétriques} \quad (3.11)$$

Or :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} = 0 \implies U'_u U'_v + V'_u V'_v = 0 \\ \mathcal{E} = \mathcal{G} \implies U'^2_u + V'^2_u = U'^2_v + V'^2_v \end{array} \right. \quad (3.12)$$

De la première relation de (3.12), on tire en supposant  $V'_v \neq 0$ :

$$V'_u = -\frac{U'_u U'_v}{V'_v} \quad (3.13)$$

D'où :

$$U'^2_u \left(1 + \frac{U'^2_v}{V'^2_v}\right) = U'^2_v + V'^2_v \implies (U'^2_u - V'^2_v)(U'^2_v + V'^2_v) = 0$$

Soit :

$$\boxed{U'_u = \pm V'_v} \quad (3.14)$$

L'équation (3.13) donne:

$$\boxed{U'_v = \mp V'_u} \quad (3.15)$$

Les équations (3.14), (3.15) sont, pour les fonctions  $U$  et  $V$ , les conditions de Cauchy.

La correspondance entre le plan des  $(u, v)$  et celui des  $(U, V)$  est une représentation conforme (G. Julia, 1955) et on peut poser :

$$Z = U + iV, \quad z = u + iv$$

Toute fonction analytique  $f$  définit une représentation conforme de  $(\sigma)$  sur  $(\Sigma)$ .

$(u, v)$  et  $(U, V)$  étant des coordonnées symétriques, les éléments linéaires  $ds$  et  $dS$  s'écrivent :

$$ds^2 = h^2(u, v)(du^2 + dv^2) \quad \text{ou} \quad ds = |h(u, v)||dz|$$

et:

$$dS^2 = H^2(U, V)(dU^2 + dV^2) \quad \text{ou} \quad dS = |H(U, V)||dZ|$$

Alors le module linéaire est donné par :

$$\boxed{m = \left| \frac{H(U, V)}{h(u, v)} \right| \left| \frac{dZ}{dz} \right|} \quad (3.16)$$

L'argument de  $\frac{dZ}{dz}$  s'interprète d'une manière analogue à ce qui se passe dans la représentation d'un plan sur un plan.

Si en particulier, la surface image est un plan :

$$dS^2 = dX^2 + dY^2$$

et:

$$m = \left| \frac{1}{h(u,v)} \right| \left| \frac{dZ}{dz} \right| \quad (3.17)$$

Si la surface modèle est un modèle de la terre, on a :

$$ds^2 = r^2(d\lambda^2 + dL^2) \quad (3.18)$$

- pour un ellipsoïde :  $r = N \cos \varphi$  et  $L$  est la latitude isométrique,

- pour une sphère :  $r = a \cos \varphi$  et  $L$  est la latitude croissante ou variable de Mercator.

Pour une représentation plane conforme, le modèle linéaire est :

$$m = \frac{1}{r} \left| \frac{dZ}{dz} \right| \quad (3.19)$$

avec  $z = \lambda + iL$  et  $Z = X + iY$  ou  $z = L + i\lambda$  et  $Z = Y + iX$ . Dans ce dernier cas, on a :

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{\partial Y}{\partial L} + i \frac{\partial X}{\partial L} \quad (3.20)$$

Donc :

$$\arg \left( \frac{dZ}{dz} \right) = \text{Arctg} \left( \frac{\frac{\partial X}{\partial L}}{\frac{\partial Y}{\partial L}} \right) \quad (3.21)$$

qui n'est autre que le gisement de l'image du méridien (J. Commiot, 1980).



## Chapter 4

### *Les Représentations ou Transformations Quasi-Conformes*

Dans les paragraphes précédents, on a étudié les représentations de la sphère avec les variables  $(L_M, \lambda)$  ou celles de l'ellipsoïde de révolution avec les coordonnées  $(L, \lambda)$  vers le plan  $(X, Y)$  avec:

$$\begin{cases} X = X(L_M, \lambda) \\ Y = Y(L_M, \lambda) \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} X = X(L, \lambda) \\ Y = Y(L, \lambda) \end{cases} \quad (4.2)$$

en notant:

$$\begin{aligned} L_M &= \text{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) && \text{latitude de Mercator} \\ L &= \text{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} && \text{latitude isométrique} \end{aligned}$$

En posant:

$$z = L_M + i\lambda \quad (4.3)$$

$$\text{ou} \quad z = L + i\lambda \quad (4.4)$$

$$Z = X + iY \quad (4.5)$$

on a considéré les représentations conformes (c'est-à-dire qui conservent les angles) ou encore définies par :

$$Z = Z(z) \quad (4.6)$$

avec  $Z(z)$  une fonction dite holomorphe de  $z$  soit:

$$\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = 0$$

où  $\bar{z}$  est le conjugué de  $z$  soit  $\bar{z} = L - i\lambda$ .

**Définition 4.1** Une fonction  $f(z) = Z = Z(z)$  définie et dérivable sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  (l'ensemble des nombres complexes) est dite quasi-conforme si elle vérifie (L. Bers, 1977):

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial \bar{z}} = \mu(z) \cdot \frac{\partial Z}{\partial z} \quad \text{avec} \quad |\mu(z)| < 1} \quad (4.7)$$

Le coefficient  $\mu$  s'appelle coefficient de Beltrami<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Eugenio Beltrami (1835-1899): Mathématicien italien.

## 4.1 DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN UN POINT $z_0$

Soit  $f$  une fonction quasi-conforme et un point  $z_0 \in \mathcal{D}$ . En écrivant un développement de  $f$  au point  $z_0$ , on a alors:

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + (\bar{z} - \bar{z}_0) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z}_0) + \dots \quad (4.8)$$

Par un changement de variables, on peut prendre  $z_0 = 0$ , d'où:

$$f(z) = f(z_0) + z \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \bar{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\bar{z}_0) + \dots$$

Utilisant (4.7), l'équation précédente s'écrit en négligeant les termes du deuxième degré:

$$f(z) = f(z_0) + z \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \bar{z} \mu(z_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$$

Donc  $f(z)$  s'écrit localement:

$$f(z) = \alpha + \beta z + \gamma \bar{z} \quad (4.9)$$

$$\text{où } \alpha, \beta, \gamma \text{ des constantes complexes avec } \left| \frac{\gamma}{\beta} \right| < 1 \quad (4.10)$$

### 4.1.1 Etude de la Transformée d'un cercle

On sait que pour une transformation conforme, l'image d'un cercle autour d'un point est un cercle (ou encore l'indicatrice de Tissot est un cercle). Soit un point  $z_0$  qu'on peut prendre égal à 0. Par un changement de l'origine des axes, la fonction  $f$  s'écrit:

$$f(z) = \beta z + \mu \beta \bar{z} \quad (4.11)$$

Par abus, on garde la même notation. On considère autour de l'origine  $z_0 = 0$  un point  $M(x = a \cdot \cos\theta, y = a \cdot \sin\theta)$  qui décrit un cercle infiniment petit de rayon  $a$ . On étudie ci-après l'image du point  $M$  par  $f$ .

De l'équation précédente, on a:

$$\begin{aligned} z &= a \cos\theta + i a \sin\theta = a e^{i\theta} \\ \mu &= |\mu| e^{ik} \\ \beta &= |\beta| e^{il} \\ f(z) &= a |\beta| e^{il} (e^{i\theta} + |\mu| e^{i(k-\theta)}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Si  $\theta_1 = \frac{k}{2} = \frac{\arg(\mu)}{2}$ , on a:  $z_1 = a e^{ik/2}$  et :

$$f(z_1) = a |\beta| e^{il} e^{ik/2} (1 + |\mu|) \quad (4.13)$$

$$|f(z_1)| = a |\beta| (1 + |\mu|) \quad (4.14)$$

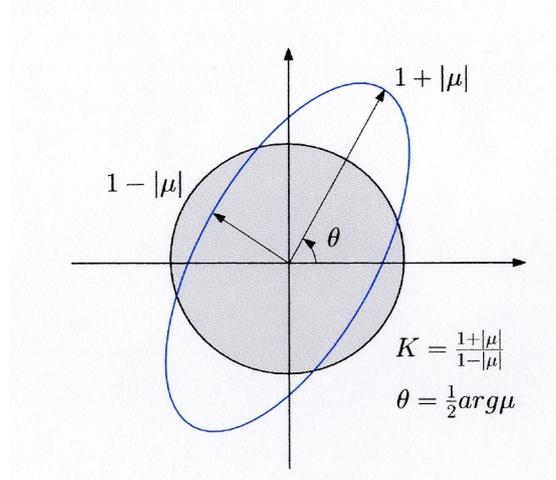


Figure 4.1: L'Image d'un cercle

Maintenant on prend  $\theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{k}{2} + \frac{\pi}{2}$ , alors  $z_2 = ae^{i\theta_2} = ae^{ik/2}e^{i\pi/2} = iae^{ik/2}$  et on obtient:

$$\begin{aligned} f(z_2) &= ia|\beta|e^{il}e^{ik/2}(1 - |\mu|) \\ |f(z_2)| &= a|\beta|(1 - |\mu|) \end{aligned} \quad (4.15)$$

en tenant compte que  $|\mu| < 1$ .

Des équations (4.12),(4.14) et (4.15), on déduit que l'image de  $M$  décrit une ellipse de demi-grand axe et demi-petit axe respectivement (Fig. 4.1) :

$$\begin{cases} a' = a|\beta|(1 + |\mu|) \\ b' = a|\beta|(1 - |\mu|) \end{cases} \quad (4.16)$$

On appelle:

$$K = \frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|} \quad (4.17)$$

coefficient de distortion ou de dilatation.

#### 4.1.2 Calcul d'un élément de longueur sur le Plan

Un élément de longueur sur le plan est donné par:

$$dS^2 = dX^2 + dY^2 = |df|^2 = df \cdot \bar{d}f \quad (4.18)$$

Comme  $df = \beta dz + \gamma d\bar{z}$  et  $\bar{d}f = \bar{\beta} d\bar{z} + \bar{\gamma} dz$ , on a alors:

$$\begin{aligned} dS^2 &= dX^2 + dY^2 = |df|^2 = df \cdot \bar{d}f = (\beta dz + \gamma d\bar{z})(\bar{\beta} d\bar{z} + \bar{\gamma} dz) \\ &= \beta\bar{\beta} dz d\bar{z} + \gamma\bar{\gamma} d\bar{z} dz + dz d\bar{z} \left( \beta\bar{\gamma} \frac{dz}{d\bar{z}} + \gamma\bar{\beta} \frac{d\bar{z}}{dz} \right) \end{aligned}$$

On pose:

$$ds^2 = dz.d\bar{z}$$

Le carré du module linéaire de la transformation quasi-conforme s'écrit:

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2 + |\gamma|^2 + \left( \beta\bar{\gamma} \frac{dz}{d\bar{z}} + \gamma\bar{\beta} \frac{d\bar{z}}{dz} \right) \quad (4.19)$$

Dans l'équation (4.19), on considère  $z = ae^{i\theta}$  varie le long d'un cercle de rayon  $a$  infiniment petit et on fait tendre  $\theta \rightarrow 2\pi$ . Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\bar{z}} &= \frac{aie^{i\theta}d\theta}{-aie^{-i\theta}d\theta} = -e^{2i\theta} = -1 \\ \frac{d\bar{z}}{dz} &= -e^{-2i\theta} = -1 \end{aligned}$$

L'équation (4.19) devient:

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2 + |\gamma|^2 - (\beta\bar{\gamma} + \gamma\bar{\beta})$$

Comme:

$$\gamma = \mu\beta$$

on obtient:

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2 + |\beta|^2|\mu|^2 - (\beta\bar{\beta}\bar{\mu} + \mu\beta\bar{\beta}) \quad (4.20)$$

or  $\mu + \bar{\mu} = 2|\mu|\cos\arg(\mu)$ , par suite l'équation (4.20) s'écrit:

$$m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = |\beta|^2(1 + |\mu|^2 - 2|\mu|\cos\arg(\mu)) \quad (4.21)$$

Remplaçant  $\beta$  par  $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ , (4.21) devient:

$$\boxed{m^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \left| \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) \right|^2 (1 + |\mu|^2 - 2|\mu|\cos\arg(\mu))} \quad (4.22)$$

## 4.2 EXEMPLE DE TRANSFORMATION QUASI-CONFORME

Lors de passage de coordonnées planes  $(X, Y)_i$  d'un système géodésique  $S_1$  à des coordonnées planes  $(X', Y')_j$  dans un autre système géodésique  $S_2$ , on utilise souvent une transformation du type:

$$\begin{cases} X' = X_0 + aX + bY \\ Y' = Y_0 + cX + dY \end{cases} \quad (4.23)$$

ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

En posant  $Z = X' + iY'$  et  $z = X + iY$ , on obtient:

$$Z = (X_0 + iY_0) + X(a + ic) + Y(b + id) \quad (4.25)$$

On note par :

$$Z_0 = X_0 + iY_0$$

Comme  $X = (z + \bar{z})/2$  et  $Y = (z - \bar{z})/2i$ , alors l'équation (4.25) s'écrit:

$$Z = Z_0 + z \left( \frac{a+d}{2} + i \frac{c-b}{2} \right) + \bar{z} \left( \frac{a-d}{2} + i \frac{b+c}{2} \right) \quad (4.26)$$

On pose :

$$\beta = \frac{a+d}{2} + i \frac{c-b}{2} \quad (4.27)$$

$$\gamma = \frac{a-d}{2} + i \frac{b+c}{2} \quad (4.28)$$

Alors (4.26) s'écrit:

$$Z = Z_0 + \beta z + \gamma \bar{z} \quad (4.29)$$

Pour quelles valeurs de  $a, b, c, d$  la transformation (4.24) est quasi-conforme? En comparant (4.26) avec (4.9), il faut que  $|\gamma| < |\beta|$  soit:

$$|\gamma| < |\beta| \Rightarrow |\gamma|^2 < |\beta|^2 \Rightarrow \frac{(a-d)^2 + (b+c)^2}{4} < \frac{(a+d)^2 + (c-b)^2}{4} \\ \Rightarrow ad - bc > 0 \quad (4.30)$$

C'est-à-dire que le déterminant de la matrice (4.24) soit positif.

**Note historique:** La représentation stéréographique de la sphère au plan est l'une des représentations la plus utilisée depuis l'antiquité (voir exercices n° 1 et n° 5 ci-dessous). Elle était connue par l'astronome et mathématicien Hipparque (190-120 avant J.C) ainsi que Claude Ptolémée (80-168). Ce dernier connaît que la représentation stéréographique transforme les cercles en cercles ou en droites, mais on ignore s'il savait que l'image de tout cercle de la sphère est un cercle ou une droite. Cette propriété fut démontrée par l'astronome et ingénieur arabe Abul Abbas Al-Farghani (805-880), qui vivait entre le Caire et Bagdad au milieu du 9ème siècle. Cette représentation était employée dans la confection des astrolabes.

C'était Thomas Harriot (1560-1621) mathématicien et astronome anglais qui avait montré que la représentation stéréographique est conforme et approuvée par un papier présenté par l'astronome Edmond Halley (1656-1742) à la Société Royale de Londres.

Le terme "projection stéréographique" fut donné par le mathématicien Belge et d'origine espagnole François d'Aiguillon (1567-1617) en 1613 dans le sixième chapitre concernant les projections de son livre d'optique "Opticorum liber extus de proiectionibus".

Rappelons que l'histoire des représentations conformes a été le point de départ de la géométrie différentielle moderne avec le papier de Carl Friedrich Gauss de 1827 sur la théorie générale des surfaces. Un autre apport considérable était venu du travail du mathématicien Français Gaspard Monge (1746-1818) spécialement son livre sur l'application de l'analyse à la géométrie. (H.A. Kastrup, 2008)

### 4.3 EXERCICES ET PROBLÈMES

**Problème 4.1** Soit  $S^2$  la sphère de rayon  $R$ , au point  $P(\varphi, \lambda)$  on lui fait correspondre le point  $p(X, Y)$  du plan  $OXY$  par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) = \begin{cases} X = 2R.tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).sin\lambda \\ Y = -2R.tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).cos\lambda \end{cases}$$

1. Montrer que l'image d'un méridien ( $\lambda = \text{constante}$ ) est une droite dont on donne l'équation.
2. Montrer que l'image d'un parallèle ( $\varphi = \text{constante}$ ) est un cercle dont on précise l'équation.
3. En utilisant le lemme de Tissot, déterminer les directions principales.
4. Soit  $dS$  la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, calculer  $dS$ .
5. Sachant que sur la sphère  $ds^2 = R^2d\varphi^2 + R^2\cos^2\varphi.d\lambda^2$ , calculer le module linéaire  $m$ .
6. En déduire le module linéaire  $m_1$  le long du méridien.
7. En déduire le module linéaire  $m_2$  le long d'un parallèle.
8. Comparer  $m_1$  et  $m_2$ . Conclure sur la conformité ou la non conformité de la représentation plane.

**Problème 4.2** Soit  $\Sigma$  la sphère de rayon  $R$ , au point  $P(\varphi, \lambda)$  on lui fait correspondre le point  $p(X, Y)$  du plan  $OXY$  par la représentation plane suivante définie par les formules :

$$p(X, Y) = \begin{cases} X = R.\lambda \\ Y = R.Logtg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

où  $Log$  désigne le logarithme népérien.

1. Quelles sont les images des méridiens ( $\lambda = \text{constante}$ ) et des parallèles ( $\varphi = \text{constante}$ ).
2. Soit  $dS$  la longueur infinitésimale correspondante sur le plan, calculer  $dS$  en fonction de  $\varphi$  et de  $\lambda$  et calculer le module linéaire  $m$ .
3. En déduire les modules linéaires  $m_1$  le long du méridien et  $m_2$  le long du parallèle.
4. Comparer  $m_1$  et  $m_2$  et conclure sur la conformité ou la non conformité de la représentation plane.
5. On suppose que  $P$  décrit sur la surface  $\Sigma$  une courbe ( $\gamma$ ) telle que  $\varphi$  et  $\lambda$  sont liées par la relation :  $tg\varphi = \sin\lambda$ . Pour  $\varphi = 0 \text{ gr}, 2 \text{ gr}, 4 \text{ gr}, 6 \text{ gr}, 8 \text{ gr}$  et  $10 \text{ gr}$ , dresser un tableau donnant les valeurs de  $\lambda$  correspondantes.
6. Sachant que  $R = 1000 \text{ m}$ , calculer les coordonnées  $(X, Y)$  de la représentation plane donnée ci-dessus pour les valeurs de  $\varphi$  et  $\lambda$  de la question 5.
7. Reporter à l'échelle  $1/100$  sur le plan  $OXY$ , les positions  $(X, Y)$  des points. Que pensez-vous de l'image de la courbe ( $\gamma$ ).

**Problème 4.3** Sur une sphère de rayon unité, modèle de la terre, on désigne :

- par  $p$  le pôle nord,
- par  $(C)$  un grand cercle qui coupe l'équateur au point  $i$  de longitude nulle,
- par  $q$  le pôle de ce grand cercle, de latitude  $\varphi_0$  positive,
- par  $\omega$  et  $h$  respectivement les points d'intersection de  $(C)$  et du méridien de  $q$  et du grand cercle issu de  $q$ , passant par le point  $a(\varphi, \lambda)$ .

On pose :  $\omega h = x$ ,  $ha = y$

1.  $q$  est le pivot d'une représentation cylindrique conforme oblique tangente, dont  $(C)$  est le "pseudo-équateur". Le plan est rapporté aux axes  $\Omega X, \Omega Y$  images respectives de  $(C)$  et du grand cercle  $\omega pq$ . Exprimer en fonction de  $\varphi, \lambda$  et  $\varphi_0$  les coordonnées  $X, Y$  du point  $A$  image de  $a$  (vérifier que pour  $\varphi_0 = 0$ , on retrouve les expressions de  $X, Y$  d'une représentation transverse).
2. Montrer que l'équation de l'image plane du parallèle de latitude  $\varphi_0$  peut s'écrire :

$$e^Y \cos X = \operatorname{tg} \varphi_0$$

Indications :  $b$  désignant un point de latitude  $\varphi_0$ , le triangle  $pqb$  est isocèle, décomposer ce triangle en deux triangles rectangles égaux. Etudier qualitativement les images des autres parallèles.

3. Montrer que l'image plane de l'équateur a pour équation :

$$\cos X + \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \operatorname{sh} Y = 0$$

Ecrire d'une manière analogue, l'équation de l'image du méridien  $\lambda = 0$ .

4. Exprimer le gisement du méridien en fonction de  $\varphi, \lambda$  et  $\varphi_0$ . Déterminer la valeur du module linéaire, en particulier en  $p$ , en un point de l'équateur, en un point du méridien origine.

**Problème 4.4** Etude de la représentation conforme d'une sphère de rayon unité dite représentation de Littrow<sup>2</sup> définie par :

$$Z = \operatorname{sinz}$$

avec  $z = \lambda + iL$  et  $Z = X + iY$ .

1. Préciser le canevas, les images des méridiens et celle de l'équateur.
2. Vérifier que les points  $f$  et  $f'$  ( $\varphi = 0, \lambda = \pm\pi/2$ ) sont des points singuliers.
3. Etudier les images plans des cercles de diamètre  $ff'$  et des petits cercles orthogonaux.
4. Soit  $s$  le point ( $\varphi = \varphi_0, \lambda = 0$ ). On appelle segment capable sphérique l'ensemble des points  $b$  tels que l'angle  $\widehat{bp, bs} = \alpha$ . Quelle est l'image plane de cette courbe dans cette représentation plane.

<sup>2</sup>En hommage à **Joseph Johann Littrow** (1781-1840) astronome autrichien.

**Problème 4.5** Soit l'application  $F(u, v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 1)$  définie par:

$$OM(u, v) = F(u, v) \begin{cases} x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \\ y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \\ z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \end{cases}$$

1. Calculer la forme fondamentale  $ds^2$ .
2. Montrer que  $OM(u, v)$  appartient à la sphère  $S^2$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .
3. Calculer  $u, v$  en fonction de  $x, y$  et  $z$ .
4. Soit le point  $N(0, 0, 1)$  de  $S^2$ , calculer les coordonnées  $(X, Y)$  du point  $p$  intersection de la droite  $NM$  avec la plan  $z = 0$  en fonction de  $x, y$  et  $z$ .
5. Soit  $\sigma$  l'application  $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \longrightarrow (X, Y) = (X(x, y, z), Y(x, y, z))$ . Montrer que  $(\sigma \circ F)(u, v) = \sigma(F(u, v)) = (u, v)$ . En déduire que  $F = \sigma^{-1}$ .
6. Trouver le rapport de ce problème avec le problème 4.1.

**Problème 4.6** Soit un ellipsoïde de révolution  $E(a, e)$  avec  $a$  et  $e$  respectivement le demi-grand axe de l'ellipsoïde de révolution et  $e$  la première excentricité. Soit  $S^2$  une sphère de rayon  $R$ . On veut étudier le passage suivant:

$$p(\varphi, \lambda) \text{ de l'ellipsoïde } E \Rightarrow P(\psi, \Lambda) \text{ de la sphère } S^2$$

1. Exprimer  $m$  le module linéaire de cette représentation.
2. On pose:

$$z = \mathcal{L} + i\lambda, \quad Z = L + i\Lambda$$

$\mathcal{L}$  est la latitude isométrique de l'ellipsoïde de révolution et  $L$  la latitude de Mercator. Une transformation conforme entre  $E$  et  $S^2$  est donnée par  $Z = f(z)$  où  $f$  est une fonction analytique. On propose le cas le plus simple à savoir:

$$Z = \alpha z + \beta$$

avec  $\begin{cases} \alpha = c_1 + ic_2 \\ \beta = b_1 + ib_2 \end{cases}$

les  $c_1, c_2, b_1, b_2$  sont des constantes réelles. Donner les expressions de  $L$  et  $\Lambda$  en fonction de  $\mathcal{L}$  et  $\lambda$ .

3. On veut que représentation transforme les méridiens et les parallèles de l'ellipsoïde respectivement en méridiens et parallèles de la sphère et que l'image du méridien origine  $\lambda = 0$  soit le méridien origine de la sphère  $\Lambda = 0$ . Montrer que  $c_2 = b_2 = 0$  et  $L = c_1\mathcal{L} + b_1, \quad \Lambda = c_1\lambda$ .
4. Pour avoir la même orientation en longitude, on prendra  $c_1 > 0$ . On cherchera la transformation à déformation minimale autour d'un parallèle  $\varphi = \varphi_0$  tel que le parallèle  $\varphi = \varphi_0$  est automécoïque et le

module linéaire  $m$  est stationnaire pour  $\varphi = \varphi_0$ , c'est-à-dire  $m(\varphi_0) = 1$  et  $\left(\frac{dm}{d\varphi}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$ , en plus on considère aussi la condition:

$$\left(\frac{d^2m}{d\varphi^2}\right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

Pour faciliter les notations, on prendra  $b = b_1, c = c_1$ . Montrer que la relation liant  $\varphi_0$  et  $\Psi_0$  est:

$$\operatorname{tg}\psi_0 = \operatorname{tg}\varphi_0 \sqrt{\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi_0}}$$

5. Déterminer les constantes  $b, c$  et  $R$  en fonction de  $\varphi_0$  et  $\Psi_0$  telles que les conditions ci-dessus soient vérifiées.

6. Montrer que l'expression du développement limité de  $m(\varphi)$  de part et d'autre du parallèle  $\varphi_0$  est donnée par:

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e^2(1-e^2)\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{3(1-e^2\sin^2\varphi_0)^2}(\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4)$$

7. On fait intervenir la deuxième excentricité  $e'$ , Montrer que  $m(\varphi)$  s'écrit:

$$m(\varphi) = 1 - \frac{2e'^2\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{3(1+e'^2\cos^2\varphi_0)^2}(\varphi - \varphi_0)^3 + o((\varphi - \varphi_0)^4)$$

**Problème 4.7** Soit  $\mathcal{E}(a, b)$  un ellipsoïde de référence de paramètres  $a$  et  $e$  respectivement le demi-grand axe et la première excentricité. On considère une représentation plane  $\mathcal{P}$  de  $\mathcal{E}$  vers le plan  $(O, X, Y)$ . On pose:

$$\begin{aligned} z &= \lambda + i\mathcal{L} \\ Z &= X + iY = Z(z) \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{L}$  la latitude isoparamétrique.

1. Ecrire les expressions du carré des éléments infinitésimaux de longueur sur l'ellipsoïde et le plan. En déduire le module linéaire  $m$ .

2. On pose  $\zeta = \frac{\partial Z}{\partial z}$ . Si  $\gamma$  est le gisement de l'image du méridien passant par le point  $z = (\lambda, \mathcal{L})$ , montrer que  $\arg(\zeta) = \frac{\pi}{2} - \gamma$ .

3. On cherche une représentation plane du type  $Z = \alpha + \beta z + \omega z^2$  où  $\alpha, \beta$  et  $\omega$  des constantes complexes. On impose les conditions suivantes:

- pour  $z = 0, Z = 0$ ,

- l'axe des  $Y$  coïncide avec le méridien à l'origine.

Montrer que  $\operatorname{Re}(\beta) = 0$ .

4. En déduire que  $Z$  s'écrit:

$$Z = i\beta_1 z + (\omega_1 + i\omega_2)z^2$$

avec  $\beta_1, \omega_1, \omega_2$  sont des réels.



# Chapter 5

## *La Représentation Plane Lambert*

### 5.1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

La représentation plane Lambert est une représentation conique, conforme et directe d'un modèle ellipsoïdique :

- conique : on utilise les coordonnées polaires  $R$  et  $\Omega$ ,
- conforme : conservation des angles ou l'altération angulaire est nulle,
- directe : les coordonnées polaires sont des fonctions de la forme :

$$\begin{array}{l} R = R(\varphi) \\ \Omega = \Omega(\lambda) \end{array} \quad (5.1)$$

où  $(\varphi, \lambda)$  sont les coordonnées d'un point sur le modèle ellipsoïdique de référence.

Pour la Tunisie, on considère le cas de la représentation tangente c'est-à-dire on utilise un seul parallèle origine. Dans la suite, on va étudier en détail le cas d'un seul parallèle origine.

Une interprétation de la représentation plane Lambert est comme suit:

- on considère un cône  $(C)$  (Fig. 5.1) de sommet  $S$  tangent au parallèle origine de latitude  $\varphi_0$  de l'ellipsoïde de référence  $\mathcal{E}$ . A un point  $M(\varphi, \lambda)$  de  $\mathcal{E}$ , on lui fait correspondre son image  $m$  sur la demi-droite d'origine  $S$  tangente à la méridienne de longitude  $\lambda$  et au parallèle origine.
- on développe le cône  $(C)$  sur le plan, on obtient l'image d'une portion de l'ellipsoïde (Fig. 5.2).

Les images des parallèles sont des arcs de cercles concentriques de centre  $S$  l'image du sommet du cône  $(C)$ , celles des méridiens sont des droites concordantes passant par  $S$  (Fig. 5.2).

Les courbes coordonnées  $\varphi = \text{constante}$  et  $\lambda = \text{constante}$  sur le modèle sont orthogonales et leurs images le sont aussi dans le plan.

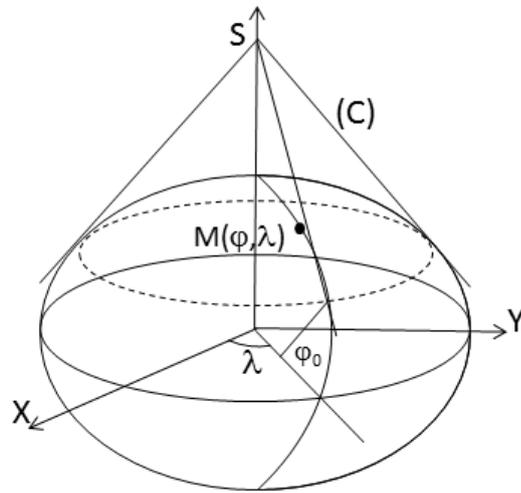


Figure 5.1: Interprétation géométrique

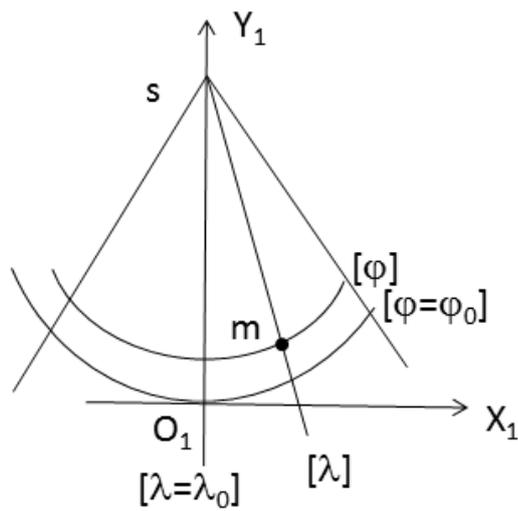


Figure 5.2: Images des parallèles et des méridiens

## 5.2 INDICATRICE DE TISSOT

D'après la propriété précédente des courbes coordonnées, on déduit que les directions principales sont les tangentes au méridien et au parallèle passant par le point.

La représentation est conforme, par suite l'altération angulaire est nulle, l'indicatrice de Tissot est un cercle et le module linéaire ne dépend pas de la direction mais seulement du point et on a l'équivalence entre :

$$\boxed{\text{Altération angulaire nulle} \Leftrightarrow m_\varphi = m_\lambda \Leftrightarrow \forall \delta, m_\delta = m} \quad (5.2)$$

où  $\delta$  désigne 'direction'.

## 5.3 CALCUL DES MODULES PRINCIPAUX

On commence par le calcul du module  $m_\varphi$ . Par définition :

$$m_\varphi = \frac{dS}{ds} \quad (5.3)$$

avec  $dS$  pris sur l'image de la méridienne et  $ds$  sur la méridienne du modèle, or  $ds = \rho d\varphi$  et  $dS = -dR$  avec  $\rho$  le rayon de courbure d'où :

$$\boxed{m_\varphi = \frac{dS}{ds} = \frac{-dR}{\rho d\varphi}} \quad (5.4)$$

Maintenant on calcule le module principal  $m_\lambda$ , on a :

$$\boxed{m_\lambda = \frac{dS}{ds} = \frac{Rd\Omega}{rd\lambda}} \quad (5.5)$$

avec  $r = N \cdot \cos\varphi$  le rayon du parallèle de latitude  $\varphi$ .

## 5.4 ETABLISSEMENT DES FORMULES $R(\varphi)$ ET $\Omega(\lambda)$

Comme on a :

$$m_\varphi = m_\lambda$$

d'où :

$$\frac{Rd\Omega}{rd\lambda} = \frac{-dR}{\rho d\varphi}$$

Le terme à gauche est une fonction de  $\lambda$  seulement car  $\Omega$  n'est que fonction que de  $\lambda$ , le terme à droite est fonction de  $\varphi$  seulement, donc l'égalité est toujours vérifiée que si les deux termes sont constants, on pose  $n$  cette constante, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\lambda} &= n \\ \frac{-rdR}{\rho rd\varphi} &= n \end{aligned}$$

Par suite :

$$\boxed{\Omega = n(\lambda - \lambda_0)} \quad (5.6)$$

où  $\lambda_0$  est la longitude du méridien origine et on a aussi :

$$\frac{dR}{R} = \frac{-n\rho d\varphi}{r} = \frac{-n\rho d\varphi}{N\cos\varphi}$$

En intégrant, on a :

$$\text{Log} \left( \frac{R}{R_0} \right) = -n \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\rho d\varphi}{N\cos\varphi} = -n(L(\varphi) - L(\varphi_0)) \quad (5.7)$$

avec:

$$\boxed{L(\varphi) = \text{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \left( \frac{1 + e\sin\varphi}{1 - e\sin\varphi} \right)} \quad (5.8)$$

$L(\varphi)$  est appelée la latitude isométrique et  $e$  la première excentricité de l'ellipsoïde de référence.

on pose:

$$L_0 = L(\varphi_0)$$

où  $\varphi_0$  est la latitude du parallèle origine, par suite:

$$R = R_0 e^{-n(L-L_0)} \quad (5.9)$$

## 5.5 DÉTERMINATION DES CONSTANTES $R_0$ ET $n$

Pour déterminer les constantes  $R_0$  et  $n$ , on impose que le parallèle origine est un isomètre automécoïque et stationnaire, c'est-à-dire :

$$m(\varphi_0) = 1 \quad (5.10)$$

$$\text{et} \left( \frac{dm}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = 0 \quad (5.11)$$

soit le module linéaire admet un minimum égal à  $m(\varphi_0)$ . On a :

$$m = m_\varphi = m_\lambda = \frac{-dR}{\rho d\varphi}$$

Or:

$$dR = nR = nR_0 e^{-n(L-L_0)} dL = -nR dL = -nR \frac{\rho d\varphi}{N\cos\varphi} \quad (5.12)$$

D'où l'expression du module linéaire:

$$m = \frac{nR}{N\cos\varphi} \quad (5.13)$$

Pour  $\varphi = \varphi_0$ , on a:

$$m(\varphi_0) = 1 = \frac{nR_0}{N_0\cos\varphi_0} \Rightarrow nR_0 = N_0\cos\varphi_0 \quad (5.14)$$

on appelle :

$$r = N \cos \varphi$$

Le calcul de  $dr/d\varphi$  donne :

$$\frac{dr}{d\varphi} = N'_\varphi \cos \varphi - N \sin \varphi \quad (5.15)$$

comme:

$$N = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$$

on obtient :

$$N'_\varphi = \frac{e^2 N \sin \varphi \cos \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{e^2 N \sin \varphi \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} - N \sin \varphi = N \sin \varphi \left( \frac{e^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} - 1 \right) \\ \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{-(1 - e^2) N \sin \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

Or:

$$\rho = \frac{(1 - e^2) N}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

Par suite:

$$\boxed{\frac{dr}{d\varphi} = -\rho \sin \varphi} \quad (5.16)$$

On revient à l'équation (5.13) :  $m = nR/r$  et en prenant sa différentielle logarithmique, d'où le résultat:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dR}{R} - \frac{dr}{r}$$

En utilisant les équations (5.12) et (5.13), on obtient :

$$\frac{dm}{m} = \frac{-n\rho d\varphi}{r} + \frac{\rho \sin \varphi d\varphi}{r} = (n - \sin \varphi) \frac{\rho d\varphi}{r}$$

Soit:

$$\frac{dm}{d\varphi} = (n - \sin \varphi) \frac{m\rho}{r} \quad (5.17)$$

Et pour  $\varphi = \varphi_0$ , on a:

$$\frac{dm}{d\varphi}_{\varphi_0} = 0 \Rightarrow (n - \sin \varphi_0) \frac{m(\varphi_0)\rho_0}{r(\varphi_0)} = 0$$

D'où:

$$\boxed{n = \sin \varphi_0} \quad (5.18)$$

L'équation (5.14) s'écrit donc:

$$\boxed{R_0 = N(\varphi_0) \cotg \varphi_0 = N_0 \cotg \varphi_0} \quad (5.19)$$

d'où les équations de la représentation plane Lambert :

$$\begin{aligned} \Omega &= (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0 \\ R &= N_0 \cotg \varphi_0 e^{-\sin \varphi_0 (L - L_0)} \end{aligned} \quad (5.20)$$

avec:

$$L(\varphi) = \text{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)$$

L'expression du module linéaire est égale à:

$$m(\varphi) = \frac{\sin \varphi_0 R(\varphi)}{N(\varphi) \cos \varphi} \quad (5.21)$$

## 5.6 EXPRESSION DES COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Dans ce paragraphe, on va décrire les coordonnées cartésiennes en fonction de  $(\Omega, R)$ . Soit un point  $M(\varphi, \lambda)$  ayant pour coordonnées polaires  $(\Omega, R)$ .

On considère un système d'axes  $(O, x, y)$  qu'on nomme repère origine, tel que l'axe  $Ox$  est la tangente à l'image du parallèle origine au point  $O$  dirigé vers l'Est et  $Oy$  est porté par l'image du méridien origine dirigé vers le Nord (Fig. 5.3). Soit le point  $S$  de  $Oy$  avec  $OS = R_0$ , on a alors:

$$\begin{aligned} x_M &= R \sin \Omega \\ y_M &= R_0 - R \cos \Omega \end{aligned}$$

ou encore :

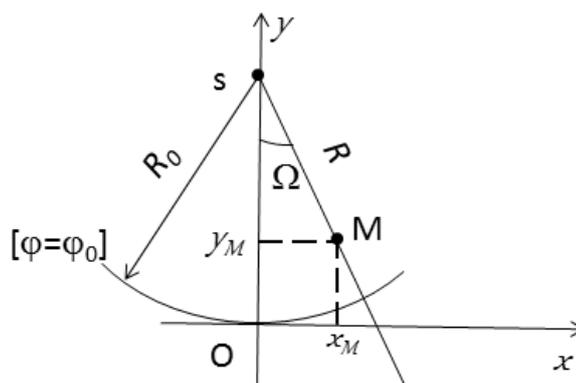


Figure 5.3: Le Repère origine

$$\begin{aligned} x_M &= R \sin((\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0) \\ y_M &= R_0 - R \cos((\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0) \end{aligned} \quad (5.22)$$

avec  $\lambda$  comptée positivement à l'Est du méridien origine des longitudes.

## 5.7 PASSAGE DES COORDONNÉES $(R, \Omega)$ AUX COORDONNÉES $(x, y)$

Ayant  $(\varphi, \lambda)$  et  $\varphi_0, \lambda_0$ , on calcule :

$$\begin{aligned}\Omega &= (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi_0 \\ L(\varphi) &= \text{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2}\text{Log}\frac{1 + e\sin\varphi}{1 - e\sin\varphi} \\ R_0 &= N_0\cotg\varphi_0 \\ R &= R_0\exp(-\sin\varphi_0(L - L_0)) \\ x &= R\sin\Omega \\ y &= R_0 - R\cos\Omega\end{aligned}$$

## 5.8 PASSAGE DES COORDONNÉES $(x, y)$ AUX COORDONNÉES $(R, \Omega)$

On donne  $\varphi_0$  et  $\lambda_0$  et ayant  $(x, y)$ , on calcule :

$$\begin{aligned}R_0 &= N_0\cotg\varphi_0 \\ R\cos\Omega &= R_0 - y\end{aligned}$$

Comme :

$$x = R\sin\Omega$$

d'où :

$$\text{tg}\Omega = \frac{x}{R_0 - y}$$

Par suite :

$$\Omega = (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi_0 = \text{Arctg}\left(\frac{x}{R_0 - y}\right)$$

D'où :

$$\boxed{\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{\sin\varphi_0}\text{Arctg}\left(\frac{x}{R_0 - y}\right)} \quad (5.23)$$

De:

$$y = R_0 - R\cos\Omega$$

on obtient :

$$R = \frac{R_0 - y}{\cos\Omega}$$

Et de:

$$R = R_0\exp(-\sin\varphi_0(L - L_0)) \Rightarrow \text{Log}\frac{R}{R_0} = -\sin\varphi_0(L - L_0)$$

d'où:

$$\boxed{L = L_0 + \frac{1}{\sin\varphi_0}\text{Log}\frac{R_0}{R}} \quad (5.24)$$

Le problème devient à calculer  $\varphi$  à partir de la donnée de la latitude isométrique  $L$ . Ce calcul se fait par itérations.

## 5.9 ETUDE DE L'ALTÉRATION LINÉAIRE

L'altération linéaire est définie par:

$$\boxed{\epsilon = m - 1} \quad (5.25)$$

où  $m$  est le module linéaire. Le développement limité du module linéaire au voisinage de  $\varphi_0$  s'écrit:

$$m(\varphi) = m(\varphi_0) + (\varphi - \varphi_0) \left( \frac{dm}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} + \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2} \left( \frac{d^2m}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_0} + o((\varphi - \varphi_0)^3)$$

Or :

$$m(\varphi_0) = 1 \text{ et } \left( \frac{dm}{d\varphi} \right)_{\varphi=\varphi_0} = 0$$

car le parallèle  $\varphi = \varphi_0$  est un isomètre automécoïque et stationnaire, d'où:

$$m(\varphi) = 1 + \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2} \left( \frac{d^2m}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_0} + o((\varphi - \varphi_0)^3) \quad (5.26)$$

On est amené à calculer la valeur de la dérivée seconde de  $m$  pour  $\varphi = \varphi_0$ . Or l'équation (5.17) donne l'expression de  $m'_\varphi$ . On dérive  $m'_\varphi$ .

$$\frac{d^2m}{d\varphi^2} = \frac{dm'_\varphi}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{m\rho}{r} (\sin\varphi - n) \right] = \frac{m\rho}{r} \cos\varphi + (\sin\varphi - n) \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{m\rho}{r} \right) \quad (5.27)$$

d'où:

$$\left( \frac{d^2m}{d\varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_0} = \frac{\cos\varphi_0 m(\varphi_0) \rho(\varphi_0)}{r(\varphi_0)} = \frac{\rho_0}{N_0} \quad (5.28)$$

car  $n = \sin\varphi_0$  et  $m(\varphi_0) = 1$ . (5.26) devient:

$$m(\varphi) = 1 + \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2} \frac{\rho_0}{N_0} + o((\varphi - \varphi_0)^3) = 1 + \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2} \frac{\rho_0^2}{\rho_0 N_0} + o((\varphi - \varphi_0)^3)$$

En posant :

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$$

On a alors:

$$\boxed{m(\varphi) = 1 + \frac{1}{2N_0\rho_0} (\rho_0\Delta\varphi)^2 + o(\Delta\varphi^3)} \quad (5.29)$$

Or  $\rho_0\Delta\varphi = \rho_0(\varphi - \varphi_0)$  la distance approchée du point  $M(\varphi, \lambda)$  au parallèle origine  $\varphi = \varphi_0$ , d'où l'expression de l'altération linéaire:

$$\boxed{\epsilon = m - 1 = \frac{1}{2N_0\rho_0} (\rho_0\Delta\varphi)^2 = \frac{\ell^2}{2N_0\rho_0}} \quad (5.30)$$

où  $\ell$  est la distance du point au parallèle origine.

### 5.9.1 Calculs numériques

On considère comme exemple numérique le cas de la représentation Lambert Nord Tunisie ayant comme parallèle origine  $\varphi_0 = 40.0\text{ gr}$  et l'ellipsoïde de référence est celui de Clarke Français 1880, le facteur  $k$  est égal à :

$$k_N = 0.999\ 625\ 544 \quad (5.31)$$

On a donc les valeurs numériques du module et l'altération linéaires comme suit:

$$\begin{aligned} m(\varphi_0) &= 1 \implies \epsilon = 0 \\ m(42.5\text{ gr}) &= 1.000\ 775\ 720 \implies \epsilon = 7.75720 \times 10^{-4} \\ m(37.5\text{ gr}) &= 1.000\ 760\ 827 \implies \epsilon = 7.60827 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

Soit une distance de  $1000\text{ m}$  sur le parallèle origine, elle se transforme à  $1000\text{ m}$  sans altération. Une distance de  $1000\text{ m}$  sur le parallèle  $\varphi = 42.5\text{ gr}$  devient une distance de  $1000.776\text{ m}$  sur le plan, de même une distance de  $1000\text{ m}$  sur le parallèle  $\varphi = 37.5\text{ gr}$  devient une distance de  $1000.761\text{ m}$  sur le plan.

Pour réduire les altérations linéaires, on multiplie le module linéaire par un coefficient  $k$  dit facteur de réduction de l'échelle. Le module linéaire devient alors:

$$m' = k.m = \frac{k \sin \varphi_0 R(\varphi)}{N(\varphi) \cos \varphi} \quad (5.32)$$

Par suite, les modules linéaires et les altérations correspondantes deviennent (Cas de la Tunisie):

$$\begin{aligned} m'(\varphi_0) &= 0.999\ 625\ 544 \Rightarrow \epsilon = -0.000\ 009\ 460 \\ m'(42.5\text{ gr}) &= 1.000\ 400\ 974 \Rightarrow \epsilon = +0.400\ 974 \times 10^{-3} \\ m'(37.5\text{ gr}) &= 1.000\ 386\ 086 \Rightarrow \epsilon = +0.386\ 086 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Sur le parallèle  $\varphi = 42.5\text{ gr}$ , l'altération linéaire pour  $1000\text{ m}$  a passé de  $+0.776\text{ m}$  à  $+0.401\text{ m}$ , d'où réduction des altérations.

Avec l'introduction du facteur de réduction de l'échelle, les formules (5.22) des coordonnées rectangulaires  $(x, y)$  s'écrivent:

$$\begin{aligned} x_M &= kR \sin((\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0) \\ y_M &= k(R_0 - R \cos((\lambda - \lambda_0) \sin \varphi_0)) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Pour obtenir des coordonnées rectangulaires positives, on définit un repère  $(O', X, Y)$  tels que  $O'X$  et  $O'Y$  soient dirigés respectivement vers l'Est et le Nord (Fig. 5.4) et que:

$$\begin{aligned} X &= \text{Constante } X + x_M \\ Y &= \text{Constante } Y + y_M \end{aligned} \quad (5.34)$$

Les quantités *Constante X* et *Constante Y* sont respectivement les constantes de translation en  $X(\text{Est})$  et en  $Y(\text{Nord})$  exprimées en mètres.

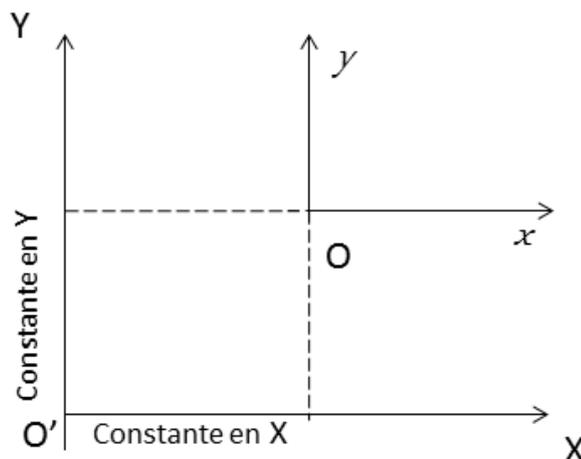


Figure 5.4: Le Repère  $(O', X, Y)$

## 5.10 CONVERGENCE DES MÉRIDIENS

Pour passer de l'azimut géodésique sur le modèle ellipsoïdique de la direction  $m_1m_2$  au gisement  $M_1M_2$  sur le plan de la représentation, on a la formule algébrique:

$$G = Az - \gamma + Dv \quad (5.35)$$

avec  $\gamma$  le gisement de l'image du méridien avec son signe positif ou négatif. Or l'image d'un méridien est une droite qui coupe l'axe  $Ox$  (du nord) sous l'angle  $\Omega = (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi_0$ , par suite:

$$\gamma = \Omega = (\lambda - \lambda_0)\sin\varphi_0 = \text{convergence des méridiens} \quad (5.36)$$

## 5.11 CALCUL DE LA RÉDUCTION DE LA CORDE

Sur le terrain, on observe une direction  $AB$ , la visée  $AB$  est très voisine de la géodésique  $AB$ . Sa transformée sur le plan de la représentation n'est pas une droite, mais une courbe tournant sa concavité vers l'image du parallèle origine.

On observe la direction  $AB$  c'est-à-dire l'arc  $ab$ . Pour passer de l'arc  $ab$  à la corde  $\overline{ab}$ , on apporte une correction à la lecture de la direction  $AB$  ou  $\overline{ab}$ . Cette correction est appelée la correction de réduction à la corde. Elle est donnée par la formule:

$$Dv = \frac{S}{2} \Gamma \left( \frac{S}{3} \right) \quad (5.37)$$

où  $S$  représente la longueur  $AB$ ,  $\Gamma\left(\frac{S}{3}\right)$  est la courbure de la transformée de la géodésique  $AB$  prise au  $1/3$  de la distance de  $A$  vers  $B$ .

En utilisant la formule de Schols-Laborde<sup>1</sup> donnant la courbure de la transformée d'une géodésique, on démontre que:

$$Dv^{(dmgr)} = K.d\lambda \quad (5.38)$$

avec  $d\lambda$  = la différence de longitude en  $km$  des 2 extrémités de la visée  $AB$  et  $K$  vaut:

$$K = \frac{1}{2} \frac{(R_0 - R)_{1/3}}{N(\varphi_0)\rho(\varphi_0)\sin 1''} \quad (5.39)$$

où  $(R_0 - R)$ ,  $N(\varphi_0)$  et  $\rho(\varphi_0)$  en  $km$ .

## 5.12 EXERCICES ET PROBLÈMES

**Exercice 5.1** En un point  $A$  de coordonnées géodésiques  $\varphi = 40.9193$  gr et  $\lambda = 11.9656$  gr à l'Est de Greenwich, on vise un point  $B$ .

1. Dans quelle zone de Lambert Tunisie se trouve le point  $A$  ? Calculer ses coordonnées planes  $(X, Y)$ .
2. L'azimut géodésique de la direction  $AB$  est  $Az_g = 55.7631$  gr. Sachant que  $Dv = 1.52$  dmgr, calculer  $G$  le gisement de la direction  $AB$ .
3. La distance  $AB$  réduite à l'ellipsoïde de référence est  $D_e = 5421.32$  m. Sachant que l'altération linéaire dans la région des points  $A$  et  $B$  vaut  $-9$  cm/km, calculer la distance  $AB$  réduite au plan.

**Exercice 5.2** D'après les coordonnées de deux points  $A$  et  $B$  vous trouvez la distance  $AB = 5427.380$  m. Sachant que :

$a$  - l'altération linéaire de la représentation dans la région de  $AB$  vaut  $+8.10^{-5}$ ,

$b$  - les altitudes des points  $A$  et  $B$  sont :  $H_A = 1000.00$  m et  $H_B = 1200.00$  m. Calculer la distance suivant la pente  $D_p$  entre les points  $A$  et  $B$  matérialisés sur le terrain.

**Problème 5.1** On a mesuré une distance suivant la pente  $D_p = 20\,130.858$  m entre deux points  $A$  et  $B$  avec  $H_A = 235.07$  m,  $H_B = 507.75$  m, on prendra comme rayon terrestre  $R = 6378$  km.

1. Calculer la distance  $D_e$  suivant l'ellipsoïde en utilisant la formule rigoureuse.
2. Sachant que le module linéaire  $m$  vaut  $0.999\,850\,371$ , calculer la distance  $D_r$  réduite au plan de la représentation plane utilisée.
3. Les coordonnées géodésiques du point  $A$  sont :  $\varphi = 10.7245\,3$  gr,  $\lambda = 41.4490\,3$  gr. Par des observations astronomiques, on a déterminé les coordonnées astronomiques  $\varphi_a = 10.7257\,4$  gr et  $\lambda_a =$

<sup>1</sup>Jean Laborde: colonel de l'armée française et géodésien cartographe. Il a défini la représentation plane qui porte son nom (représentation conforme cylindrique oblique). Celle-ci a été appliquée pour le Madagascar.

41.45052 gr du point A et l'azimut astronomique de la direction AB soit  $Aza = 89.68499$  gr. Transformer l'azimut astronomique de la direction AB en azimut géodésique en utilisant l'équation de Laplace donnée par :

$$Azg = Aza + (\lambda - \lambda_a) \cdot \sin \varphi$$

4. Calculer le gisement G de la direction AB sachant que  $Dv = 0.00188$  gr.
5. Les coordonnées Lambert Nord Tunisie de A sont  $X = 478\,022.43$  m et  $Y = 444\,702.22$  m. Déterminer alors les coordonnées de B.
6. Calculer l'azimut de B vers A sachant qu'on néglige la correction de la corde de la direction BA et que  $\lambda_B = 10.92884$  gr.

**Problème 5.2** On a mesuré une distance suivant la pente entre les points A ( $H_A = 1319.79$  m) et B ( $H_B = 1025.34$  m) avec  $D_p = 16\,483.873$  m.

1. Calculer la distance  $D_e$  distance réduite à l'ellipsoïde de référence par la formule rigoureuse, on prendra le rayon de la Terre  $R = 6378$  km.
2. Calculer la distance  $D_r$  réduite à la représentation plane Lambert si l'altération linéaire de la zone est de  $-14$  cm/km.
3. La direction AB a un azimut géodésique  $Azg = 297.56225$  gr. Donner l'expression du gisement G de AB en fonction de  $Azg$ ,  $\gamma$  la convergence des méridiens et  $Dv$  la correction de la corde, sachant que la représentation plane utilisée est le Lambert Sud Tunisie et que le point A est au nord du parallèle origine.
4. On donne  $Dv = -13.7$  dmgr et  $\lambda = 9.3474734$  gr la longitude de A, calculer G.
5. En déduire les coordonnées  $(X_B, Y_B)$  de B si  $X_A = 363\,044.79$  m et  $Y_A = 407\,020.09$  m.
6. Déterminer les coordonnées géographiques  $(\varphi, \lambda)$  de B.

On rappelle que:  $a = 6\,378\,249.20$  m et  $e^2 = 0.006\,803\,4877$ .

# Chapter 6

## *La Représentation Plane UTM*

### 6.1 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

La représentation plane UTM (Universal Transverse Mercator) est l'une des représentations la plus utilisée dans le monde.

C'est une représentation :

- conforme d'un modèle ellipsoïdique,

- transverse : c'est-à-dire l'image de l'équateur (en partie) est l'axe  $Ox$  (vers l'Est) et l'image d'un méridien appelé méridien central, de longitude  $\lambda_0$  qu'on suppose égale à 0, est l'axe  $Oy$  (vers le Nord) du plan.

Les coordonnées rectangulaires d'un point sont des fonctions de la forme :

$$\begin{array}{l} X = X(\varphi, \lambda) \\ Y = Y(\varphi, \lambda) \end{array} \quad (6.1)$$

où  $(\varphi, \lambda)$  sont les coordonnées du point sur le modèle ellipsoïdique.

Soit un point  $M(\varphi, 0)$  sur le méridien origine, alors les coordonnées de  $m$  son image sur le plan sont :

$$\begin{array}{l} X(\varphi, 0) = 0 \\ Y(\varphi, 0) = Y(\varphi) \end{array}$$

$Y(\varphi)$  sera déterminée en imposant que le long du méridien central ou origine, les longueurs sont conservées. Sur le méridien, la longueur est donnée par :

$$\beta(\varphi) = \int_0^\varphi \rho ds \quad (6.2)$$

d'où:

$$\beta(\varphi) = Y(\varphi) = Y(\varphi, 0)$$

## 6.2 DÉTERMINATION DES COORDONNÉES UTM

### 11.2.1. Calcul Direct

Sur l'ellipsoïde, on a :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$$

le carré de l'élément de longueur infinitésimale, avec :

$$N(\varphi) = a(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}$$

$$\rho(\varphi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2}$$

respectivement les rayons de courbure de la grande normale et de la méridienne,  $a$  le demi-grand axe et  $e$  la première excentricité de l'ellipsoïde de référence. On peut écrire que :

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left( \frac{\rho^2 d\varphi^2}{N^2 \cos^2 \varphi} + d\lambda^2 \right)$$

En posant :

$$dL = \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi}$$

ou  $L = \text{Log} \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}$  (6.3)

avec  $L$  la latitude isométrique, on a alors les coordonnées  $(L, \lambda)$  symétriques et orthogonales. L'expression de  $ds^2$  est égale à :

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \varphi (dL^2 + d\lambda^2)$$
 (6.4)

Sur le plan, on a :

$$dS^2 = dX^2 + dY^2$$

On pose :

$$\begin{aligned} z &= L + i\lambda \\ Z &= Y + iX \end{aligned}$$
 (6.5)

où  $i$  désigne le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ . Entre  $z$  et  $Z$ , on a la relation :

$$Z = Y + iX = f(z) = f(L + i\lambda)$$
 (6.6)

où  $f$  est une fonction à déterminer. La représentation étant conforme, la fonction  $f$  est par suite une fonction analytique dans  $\mathbb{C}$  (l'ensemble des nombres complexes). La fonction  $f$  est dérivable à tout ordre et développable en séries en tout point complexe. Considérons le point  $z_0$  tel que  $z_0 = L + i0 = L$  et  $z = L + i\lambda$ , ce qui donne  $z - z_0 = i\lambda$ .

Dans la représentation UTM, on restreint  $\lambda$  à varier dans l'intervalle  $[-3^\circ, +3^\circ]$ . Cet intervalle définit un fuseau de méridien central  $\lambda_0 = 0^\circ$  et d'amplitude  $6^\circ$ . Ainsi, la Terre est divisé en  $360^\circ / 6^\circ = 60$  fuseaux qu'on numérote de 1 à 60 ce qui explique l'utilisation mondiale de

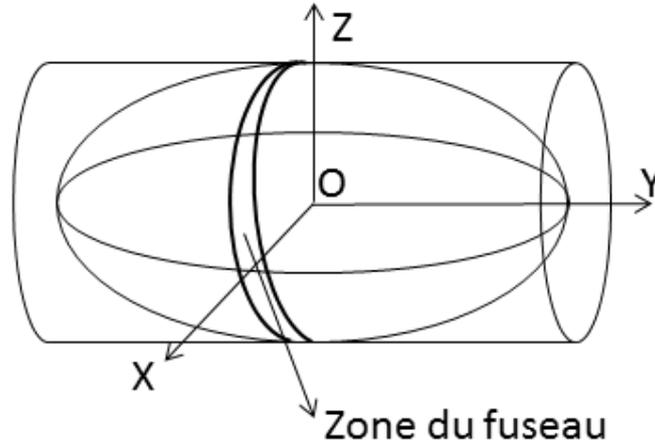


Figure 6.1: Interprétation géométrique de l'UTM

la représentation UTM. Une interprétation géométrique de la représentation UTM est comme suit:

- on considère un cylindre ayant une base elliptique, tangent à l'ellipsoïde modèle le long de la méridienne de longitude  $\lambda = \lambda_0 = 0^\circ$ . A un point  $M(\varphi, \lambda)$  appartenant au fuseau  $[-3^\circ, +3^\circ]$  on lui fait correspondre un point  $m$  du cylindre (Fig. 6.1).

- après développement du cylindre sur le plan, on obtient l'image  $m(X, Y)$ .

On revient maintenant au développement de la fonction  $f$  au voisinage de  $z_0$ , on a l'expression :

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!}f''(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!}f^{(n)}(z_0) + \dots \quad (6.7)$$

On se limite à  $n = 8$ . D'où:

$$\begin{aligned} Y + iX = f(L) + i\lambda f'(L) - \frac{1}{2!}\lambda^2 f''(L) - i\frac{1}{3!}\lambda^3 f'''(L) + \frac{1}{4!}\lambda^4 f^{(4)}(L) \\ + i\frac{1}{5!}\lambda^5 f^{(5)}(L) - \frac{1}{6!}\lambda^6 f^{(6)}(L) - i\frac{1}{7!}\lambda^7 f^{(7)}(L) + \frac{1}{8!}\lambda^8 f^{(8)}(L) + \dots \end{aligned}$$

Pour  $\lambda = 0$ , on a  $Y + iX = f(L)$  soit:

$$Y = f(L) = Y(\varphi, 0) = \beta(\varphi)$$

On pose :

$$\begin{aligned} a_0 = f(L) = \beta(\varphi) \\ a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(L) = \frac{1}{n!} \frac{d^n \beta(\varphi)}{dL^n} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ce qui donne :

$$Y + iX = a_0 + ia_1\lambda - a_2\lambda^2 - ia_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 + ia_5\lambda^5 - a_6\lambda^6 - ia_7\lambda^7 + a_8\lambda^8 + \dots$$

D'où :

$$\begin{cases} X = a_1\lambda - a_3\lambda^3 + a_5\lambda^5 - a_7\lambda^7 + \dots \\ Y = \beta(\varphi) - a_2\lambda^2 + a_4\lambda^4 - a_6\lambda^6 + a_8\lambda^8 + \dots \end{cases} \quad (6.9)$$

avec :

$$a_0 = f(L) = \beta(\varphi), \quad a_1 = f'(L) = \frac{d\beta}{dL} = \frac{d\beta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dL}$$

En posant :

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi, \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}, \quad t = tg \varphi$$

avec  $e'$  la deuxième excentricité, on obtient les coefficients :

$$\begin{aligned} a_1 &= N \cos \varphi \\ a_2 &= -\frac{1}{2} N \cos \varphi \sin \varphi \\ a_3 &= -\frac{1}{6} N \cos^3 \varphi (1 + \eta^2 - t^2) \\ a_4 &= \frac{1}{24} N \cos^3 \varphi \sin \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) \\ a_5 &= \frac{1}{120} N \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 + 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2 + 13\eta^4) \\ a_6 &= -\frac{1}{720} N \cos^5 \varphi \sin \varphi (61 - 58t^2 + t^4 + 270\eta^2 - 330t^2 \eta^2 + 200\eta^4 - 232t^2 \eta^4) \\ a_7 &= -\frac{1}{5040} N \cos^7 \varphi (61 + 131t^2 + 179t^4 + 331\eta^2 - 3298t^2 \eta^2) \\ a_8 &= \frac{1}{40320} N \cos^7 \varphi \sin \varphi (165 - 61t^2 + 537t^4 + 9679\eta^2 - 23278t^2 \eta^2 + 9244\eta^4 + \\ &\quad 358t^4 \eta^2 - 19788t^2 \eta^4) \end{aligned} \quad (6.10)$$

Le calcul de  $\beta(\varphi) = f(L) = \beta$  se calcule à partir du développement de  $\beta(\varphi)$  en fonction de  $u = e^2 \sin^2(\varphi)$  car  $u < 1$ . On exprime  $\sin^m \varphi$  en fonction de  $\sin$  de multiples de  $\varphi$  soit  $\sin p\varphi$ . En intégrant, on arrive à (voir en Annexe du présent chapitre):

$$\begin{aligned} \beta(\varphi) &= a(1 - e^2) \cdot (C_0\varphi + C_2 \sin 2\varphi + C_4 \sin 4\varphi + C_6 \sin 6\varphi \\ &\quad + C_8 \sin 8\varphi + C_{10} \sin 10\varphi + C_{12} \sin 12\varphi) \end{aligned} \quad (6.11)$$

avec:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \frac{693693}{1048576}e^{12} \\ C_2 &= -\frac{3}{8}e^2 - \frac{15}{32}e^4 - \frac{525}{1024}e^6 - \frac{2205}{4096}e^8 - \frac{72765}{131072}e^{10} - \frac{297297}{524288}e^{12} \\ C_4 &= \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \frac{2205}{16384}e^8 + \frac{10395}{65536}e^{10} + \frac{1486485}{8388608}e^{12} \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned}
C_6 &= -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{315}{12288}e^8 - \frac{31185}{786432}e^{10} - \frac{165165}{3145728}e^{12} \\
C_8 &= \frac{315}{131072}e^8 + \frac{3465}{524288}e^{10} + \frac{99099}{8388608}e^{12} \\
C_{10} &= -\frac{693}{1310720}e^{10} - \frac{9009}{5242880}e^{12} \\
C_{12} &= \frac{1001}{8388608}e^{12}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

On pose:

$$\Lambda = \lambda - \lambda_0 \tag{6.14}$$

alors les formules définitives du calcul direct sont en s'arrêtant à l'ordre 8:

$$\begin{aligned}
X &= a_1\Lambda - a_3\Lambda^3 + a_5\Lambda^5 - a_7\Lambda^7 \\
Y &= \beta(\varphi) - a_2\Lambda^2 + a_4\Lambda^4 - a_6\Lambda^6 + a_8\Lambda^8
\end{aligned} \tag{6.15}$$

En général, on applique à  $X, Y$  un facteur de réduction  $k = 0.9996$  et une constante de translation en  $X$  de  $500\,000\text{ m}$ , les coordonnées obtenues sont :

$$\begin{aligned}
X' &= k.X + 500\,000.00\text{ m} \\
Y' &= k.Y
\end{aligned} \tag{6.16}$$

### 11.2.2. Calcul Inverse

Ayant les coordonnées  $(X', Y')$  en UTM et la longitude  $\lambda_0$  du méridien central, comment on calcule  $(\varphi, \lambda)$ . On commence en revenant à:

$$\begin{aligned}
X &= (X' - 500000)/k \\
Y &= Y'/k
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Par suite, en utilisant les variables :  $z = L + i(\lambda - \lambda_0)$  et  $Z = Y + iX$ , on cherche à déterminer une fonction analytique  $g$  telle que:

$$\begin{aligned}
z &= g(Z) \\
\text{ou } L + i(\lambda - \lambda_0) &= g(Y + iX)
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Pour cela, on considère sur l'axe  $OY$  le point  $P(0, Y)$  (**Fig. 6.2**), il lui correspond l'affixe  $Z_0 = Y$ , sur l'ellipsoïde il est l'image de  $L' = L'(\varphi') = g(Z_0)$ . D'où le développement de  $g$  au point  $Z_0$ :

$$g(Z) = g(Z_0) + (Z - Z_0)g'(Z_0) + \frac{(Z - Z_0)^2}{2!}g''(Z_0) + \dots + \frac{(Z - Z_0)^n}{n!}g^{(n)}(Z_0) + \dots$$

Or:  $Z - Z_0 = Y + iX - Y = iX$  ce qui donne :

$$\begin{aligned}
L + i(\lambda - \lambda_0) &= g(Z_0) + iXg'(Y) - \frac{1}{2}X^2.g''(Y) - \frac{1}{3!}iX^3g^{(3)}(Y) \\
&+ \frac{1}{4!}X^4g^{(4)}(Y) + \frac{1}{5!}iX^5g^{(5)}(Y) - \frac{1}{6!}X^6g^{(6)}(Y) + \dots
\end{aligned}$$

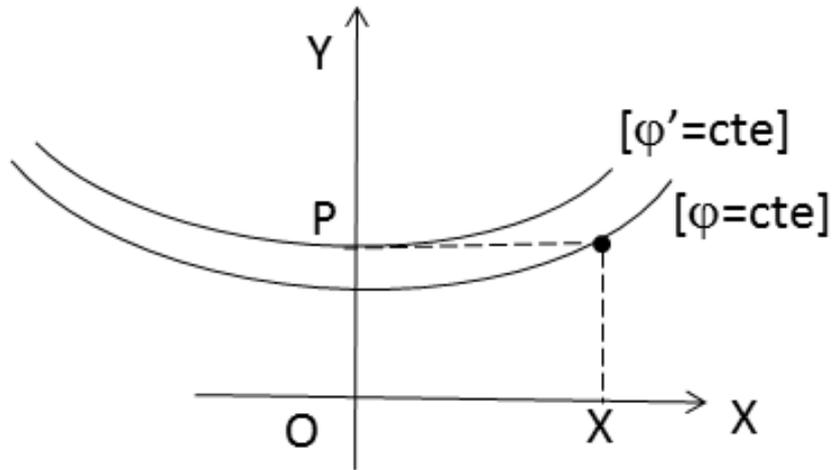


Figure 6.2: Passage de  $(X, Y)$  à  $(\varphi, \lambda)$

On pose :

$$b_0 = g(Z_0) = g(Y) = L', \quad b_n = \frac{g^{(n)}(Y)}{n!} = \frac{1}{n!} \frac{d^n L'}{dY^n} = \frac{1}{n!} \frac{d^n L'}{d\beta^n}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + b_1 X - b_3 X^3 + b_5 X^5 - b_7 X^7 + \dots \\ L(\varphi) = L &= L'(\varphi') - b_2 X^2 + b_4 X^4 - b_6 X^6 + b_8 X^8 + \dots \end{aligned} \tag{6.19}$$

avec:

$$b_0 = g(Z_0) = L', \quad b_1 = g'(Y) = \frac{dL'}{dY} = \frac{dL'}{d\beta} = \frac{dL'}{d\varphi'} \cdot \frac{d\varphi'}{d\beta}$$

En posant  $\eta'^2 = e'^2 \cos^2 \varphi'$  avec  $e'$  la deuxième excentricité  $e'^2 = e^2 / (1 - e^2)$ ,  $t' = tg \varphi'$  et  $N' = N(\varphi')$ , on obtient les coefficients:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{N' \cos \varphi'} \\
 b_2 &= \frac{tg \varphi'}{2N'^2 \cos \varphi'} \\
 b_3 &= \frac{(1 + 2t'^2 + \eta'^2)}{6N'^3 \cos \varphi'} \\
 b_4 &= \frac{tg \varphi' (5 + 6t'^2 + \eta'^2 - 4\eta'^4)}{24N'^4 \cos \varphi'} \\
 b_5 &= \frac{(5 + 28t'^2 + 6\eta'^2 + 24t'^4 + 8\eta'^2 t'^2)}{120N'^5 \cos \varphi'} \\
 b_6 &= \frac{tg \varphi' (61 + 180t'^2 + 46\eta'^2 + 120t'^4 + 48\eta'^2 t'^2)}{720N'^6 \cos \varphi'} \\
 b_7 &= \frac{(61 + 622t'^2 + 107\eta'^2 + 1320t'^4 + 1538\eta'^2 t'^2 + 46\eta'^4)}{5040N'^7 \cos \varphi'}
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Ayant  $L(\varphi)$ , on calcule  $\varphi$  en utilisant la formule:

$$L = \text{Log} tg \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{e}{2} \text{Log} \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)$$

Le calcul se fait par itérations.

### 11.2.3. Le Module linéaire

Le module linéaire  $m$  est tel que :

$$m^2 = \left( \frac{dS}{ds} \right)^2 = \frac{dS^2}{ds^2} = \frac{dX^2 + dY^2}{\rho^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2} \tag{6.21}$$

La représentation étant conforme, alors le module linéaire est indépendant de la direction, mais ne dépend que du point, on choisit de calculer  $m$  le long des parallèles, soit  $d\varphi = 0$ , ce qui donne :

$$m^2 = \frac{dX^2 + dY^2}{N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2}$$

Comme on a:

$$X = a_1 \lambda - a_3 \lambda^3 + a_5 \lambda^5 + \dots$$

$$Y = \beta(\varphi) - a_2 \lambda^2 + a_4 \lambda^4 + \dots$$

et que les coefficients  $a_i$  sont des fonctions seulement de la latitude ( $\varphi$ ), d'où :

$$dX = a_1 d\lambda - 3a_3 \lambda^2 d\lambda + 5a_5 \lambda^4 d\lambda = (a_1 - 3a_3 \lambda^2 + 5a_5 \lambda^4) d\lambda + \dots$$

et:

$$dY = -2a_2 \lambda d\lambda + 4a_4 \lambda^3 d\lambda + \dots$$

En gardant les termes en  $\lambda$  et  $\lambda^2$ , on obtient :

$$dX = N \cos \varphi [1 + (\lambda^2/2) \cos^2 \varphi (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi + \eta^2)] d\lambda$$

et:

$$dY = \lambda N \cos^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi d\lambda$$

Par suite :

$$dX^2 + dY^2 = N^2 \cos^2 \varphi \left( (1 + (\lambda^2/2) \cos^2 \varphi (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi + \eta^2))^2 + \lambda^2 \sin^2 \varphi \right) d\lambda^2$$

En simplifiant et en négligeant les termes en  $\lambda^4$ , on trouve :

$$m = \sqrt{1 + \lambda^2 (1 + \eta^2) \cos^2 \varphi} \quad (6.22)$$

Au lieu de prendre  $m$  comme module linéaire, on le multiplie par un facteur  $k$  appelé facteur de réduction de l'échelle généralement égal à 0.9996. Le module linéaire devient :

$$m' = k \sqrt{1 + \lambda^2 (1 + \eta^2) \cos^2 \varphi} \quad (6.23)$$

On remplace  $\lambda$  par  $\lambda - \lambda_0$ , on trouve la formule du module linéaire :

$$\boxed{m' = k \sqrt{1 + (\lambda - \lambda_0)^2 (1 + e'^2 \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi}} \quad (6.24)$$

#### 11.2.4. Convergence des méridiens

Le gisement de l'image du méridien appelé 'convergence des méridiens' et noté par  $\gamma$  en un point  $(\varphi, \lambda)$  est donné en première approximation par la formule :

$$\boxed{\operatorname{tg} \gamma = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi} \quad (6.25)$$

$\gamma$  est comptée dans le sens des gisements.

### 6.3 ANNEXE: CALCUL DE LA LONGUEUR D'UN ARC DE LA MÉRIDIENNE D'UN ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION

Soit  $(E)$  un ellipsoïde de révolution défini par ses paramètres:

a: le demi-grand axe,

e: la première excentricité.

L'expression de la longueur de la méridienne entre l'équateur et un point  $M$  de latitude géodésique  $\varphi$  est donnée par:

$$\beta = \beta(\varphi) = \int_0^\varphi \rho(u) du \quad (6.26)$$

avec:

$$\rho = \rho(u) = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 u)^{\frac{3}{2}}}$$

$\rho$  est le rayon de courbure de la méridienne.

L'intégrale (6.26) est une intégrale, dite elliptique, n'est pas exprimée par une formule finie. Pour la calculer, on fait l'usage d'un développement limité de l'expression  $(1 - e^2 \sin^2 u)^{-\frac{3}{2}}$ .

On utilise la formule:

$$(1 + x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-1+p)}{p!}x^p + o(x^{p+1})$$

avec  $|x| < 1$ ,  $q$  est un rationnel et  $p!$  désigne factoriel  $p$  soit  $p(p-1)\dots 3.2.1$ . Comme  $|e^2 \sin^2 u| < 1$ , on a donc à l'ordre 12:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 u)^{\frac{3}{2}}} &= (1 - e^2 \sin^2 u)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2 u + \frac{15}{8}e^4 \sin^4 u + \\ &\frac{35}{16}e^6 \sin^6 u + \frac{315}{128}e^8 \sin^8 u + \frac{693}{256}e^{10} \sin^{10} u + \frac{3003}{1024}e^{12} \sin^{12} u \end{aligned} \quad (6.27)$$

Pour pouvoir calculer les intégrales du type:

$$\int_0^\varphi \sin^p u du$$

on va exprimer les termes  $\sin^p u$  en fonction des lignes trigonométriques multiples de l'argument  $u$ . Ce qui donne:

$$\begin{aligned}
\sin^2 u &= \frac{1}{2} - \frac{\cos 2u}{2} \\
\sin^4 u &= \frac{3}{8} - \frac{\cos 2u}{2} + \frac{\cos 4u}{8} \\
\sin^6 u &= \frac{5}{16} - \frac{15\cos 2u}{32} + \frac{13\cos 4u}{16} - \frac{\cos 6u}{32} \\
\sin^8 u &= \frac{35}{128} - \frac{17\cos 2u}{16} + \frac{7\cos 4u}{32} - \frac{\cos 6u}{16} + \frac{\cos 8u}{128} \\
\sin^{10} u &= \frac{63}{256} - \frac{105\cos 2u}{256} + \frac{15\cos 4u}{64} - \frac{45\cos 6u}{512} + \frac{5\cos 8u}{256} - \frac{\cos 10u}{512} \\
\sin^{12} u &= \frac{231}{1024} - \frac{99\cos 2u}{256} + \frac{495\cos 4u}{2048} - \frac{55\cos 6u}{512} + \frac{33\cos 8u}{1024} - \frac{3\cos 10u}{512} + \frac{\cos 12u}{2048}
\end{aligned} \tag{6.28}$$

L'équation (6.27) s'écrit en utilisant les expressions de droite de (6.28):

$$(1 - e^2 \sin^2 u)^{-\frac{3}{2}} = A_0 + A_2 \cos 2u + A_4 \cos 4u + A_8 \cos 8u + A_{10} \cos 10u + A_{12} \cos 12u \tag{6.29}$$

En intégrant (6.29) entre 0 et  $\varphi$  et après multiplication par le coefficient  $a(1 - e^2)$ , on trouve l'expression ci-dessous de la longueur de la méridienne:

$$\begin{aligned}
\beta(\varphi) &= a(1 - e^2) \cdot (C_0 \varphi + C_2 \sin 2\varphi + C_4 \sin 4\varphi + C_6 \sin 6\varphi \\
&\quad + C_8 \sin 8\varphi + C_{10} \sin 10\varphi + C_{12} \sin 12\varphi)
\end{aligned} \tag{6.30}$$

où les coefficients  $A_k$  vérifient:

$$\begin{aligned}
C_0 &= A_0 & C_2 &= \frac{A_2}{2} & C_4 &= \frac{A_4}{4} & C_6 &= \frac{A_6}{6} \\
C_8 &= \frac{A_8}{8} & C_{10} &= \frac{A_{10}}{10} & C_{12} &= \frac{A_{12}}{12}
\end{aligned} \tag{6.31}$$

avec:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \frac{693693}{1048576}e^{12} \\
 C_2 &= -\frac{3}{8}e^2 - \frac{15}{32}e^4 - \frac{525}{1024}e^6 - \frac{2205}{4096}e^8 - \frac{72765}{131072}e^{10} - \frac{297297}{524288}e^{12} \\
 C_4 &= \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \frac{2205}{16384}e^8 + \frac{10395}{65536}e^{10} + \frac{1486485}{8388608}e^{12} \\
 C_6 &= -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{315}{12288}e^8 - \frac{31185}{786432}e^{10} - \frac{165165}{3145728}e^{12} \\
 C_8 &= \frac{315}{131072}e^8 + \frac{3465}{524288}e^{10} + \frac{99099}{8388608}e^{12} \\
 C_{10} &= -\frac{693}{1310720}e^{10} - \frac{9009}{5242880}e^{12} \\
 C_{12} &= \frac{1001}{8388608}e^{12}
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

CQFD

## 6.4 EXERCICES ET PROBLÈMES

**Exercice 6.1** Dans cet exercice, on voudrait justifier l'arrêt à l'ordre 8 de l'expression de  $Y(\text{UTM})$  en fonction de  $\lambda$ . On donne:  $\varphi = 40.00 \text{ gr}$  et  $a = 6\,378\,249.20 \text{ m}$ ,  $e^2 = 0.006\,803\,4877$ .

1. Calculer numériquement  $e'^2, \eta^2, t^2 = \text{tg}^2 \varphi$  et  $N(\varphi)$ .
2. Calculer numériquement le coefficient  $a_8$  de (6.10).
3. On donne  $\lambda = 1.235\,46 \text{ gr}$ , calculer  $a_8 \lambda^8$  et conclure.

**Problème 6.1** Soit le point  $A$  de coordonnées géodésiques:  $\varphi = 40.9193 \text{ gr}$  et  $\lambda = 11.9656 \text{ gr}$  à l'Est de Greenwich. On considère la représentation plane UTM tronquée suivante, de méridien central  $\lambda_0 = 9^\circ$  définie par les formules :

$$\begin{cases} X = a_1 \cdot (\lambda - \lambda_0) + a_3 \cdot (\lambda - \lambda_0)^3 \\ Y = g(\varphi) + a_2 \cdot (\lambda - \lambda_0)^2 \end{cases}$$

où  $\varphi, \lambda$  et  $\lambda_0$  sont exprimées en rd, avec:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= N(\varphi) \cdot \cos \varphi \\
 a_2 &= \frac{a_1}{2} \cdot \sin \varphi \\
 a_3 &= \frac{a_1 \cos^2 \varphi}{6} (1 - \text{tg}^2 \varphi + e'^2 \cdot \cos^2 \varphi) \\
 N(\varphi) &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi}}
 \end{aligned}$$

$$g(\varphi) = a(1 - e^2)(1.0051353 \cdot \varphi - 0.0025731 \sin 2\varphi)$$

$$a = 6\,378\,249.20 \text{ m}, \quad e^2 = 0.006\,803\,4877, \quad e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$$

1. Montrer que les coordonnées du point A sont:  $X = 157\,833.48 \text{ m}$ ,  $Y = 4\,078\,512.97 \text{ m}$ , on justifie les résultats.
2. Soit le point B de coordonnées ( $X = 160\,595.98 \text{ m}$ ;  $Y = 4\,078\,564.53 \text{ m}$ ). Sachant que B est situé sur le même parallèle que A, calculer la longitude  $\lambda'$  de B.
3. Calculer le gisement G et la distance AB.
4. Sachant que la convergence des méridiens  $\gamma$  est donnée par  $\text{tg}\gamma = (\lambda - \lambda_0) \sin \varphi$  et qu'on néglige le  $Dv$ , calculer l'azimut de la direction AB.
5. Calculer l'azimut de B vers A en négligeant le  $Dv$  de B vers A.
6. En calculant les coordonnées UTM de A et B, on trouve respectivement  $X_A = 657\,770.34 \text{ m}$ ,  $Y_A = 4\,076\,891.20 \text{ m}$ ;  $X_B = 660\,531.74 \text{ m}$ ,  $Y_B = 4\,076\,942.76 \text{ m}$ . Calculer la distance AB par les coordonnées UTM. En déduire l'erreur relative sur la distance en utilisant les coordonnées de l'UTM tronquée.

## Part II

# *Les Transformations de Passage entre Les Systèmes Géodésiques*



# Chapter 7

## *Les Transformations Entre Les Systèmes Géodésiques*

### 7.1 INTRODUCTION

Avec l'introduction de la technologie de positionnement par GPS (Global Positioning System), laquelle fournit à l'utilisateur sa position  $(X, Y, Z)$  tridimensionnelle dans le système géocentrique mondial dit WGS84 (World Geodetic System 1984), il est nécessaire de savoir la transformation de passage du système géodésique mondial au système géodésique national ou local. On présente ci-après quelques modèles de transformations de passage entre les systèmes géodésiques.

On utilise par la suite les notations suivantes :

- $(X_1, Y_1, Z_1)$  les coordonnées cartésiennes 3D dans le système local (système 1),
- $(X_2, Y_2, Z_2)$  les coordonnées cartésiennes 3D dans le système géocentrique WGS84 (système 2),
- $(\varphi_1, \lambda_1, he_1)$  les coordonnées géodésiques dans le système 1,
- $(\varphi_2, \lambda_2, he_2)$  les coordonnées géodésiques dans le système 2.

On propose d'étudier les transformations suivantes (C. Boucher, 1979b; T. Soler, 1998) :

- le modèle de Burša<sup>1</sup>- Wolf<sup>2</sup> ou Helmert à 7 paramètres,
- les formules de Molodensky<sup>3</sup>,
- les transformations bidimensionnelles.

---

<sup>1</sup>Milan Burša: Géodésien tchèque.

<sup>2</sup>Helmut Wolf (1910-1994): Géodésien allemand.

<sup>3</sup>Mikhail Sergeevich Molodensky (1909-1991): Géodésien et géophysicien russe.

## 7.2 LE MODÈLE DE BURSA - WOLF

Ce modèle s'écrit sous la forme vectorielle :

$$X_2 = T + (1 + m) \cdot R(rx, ry, rz) \cdot X_1 \quad (7.1)$$

où:

- $X_2$  est le vecteur de composantes  $(X_2, Y_2, Z_2)^T$ ,  $T$  désigne transposée,
- $T$  est le vecteur translation de composantes  $(T_X, T_Y, T_Z)^T$  entre les systèmes 1 et 2,
- $1 + m$  est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,
- $R(rx, ry, rz)$  est la matrice de rotation  $3 \times 3$  pour passer du système 1 au système 2,
- $X_1$  est le vecteur de composantes  $(X_1, Y_1, Z_1)^T$ .

En développant (7.1), on obtient:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

avec  $(rx, ry, rz)$  les rotations comptées positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Comment a-t-on obtenu cette formule?

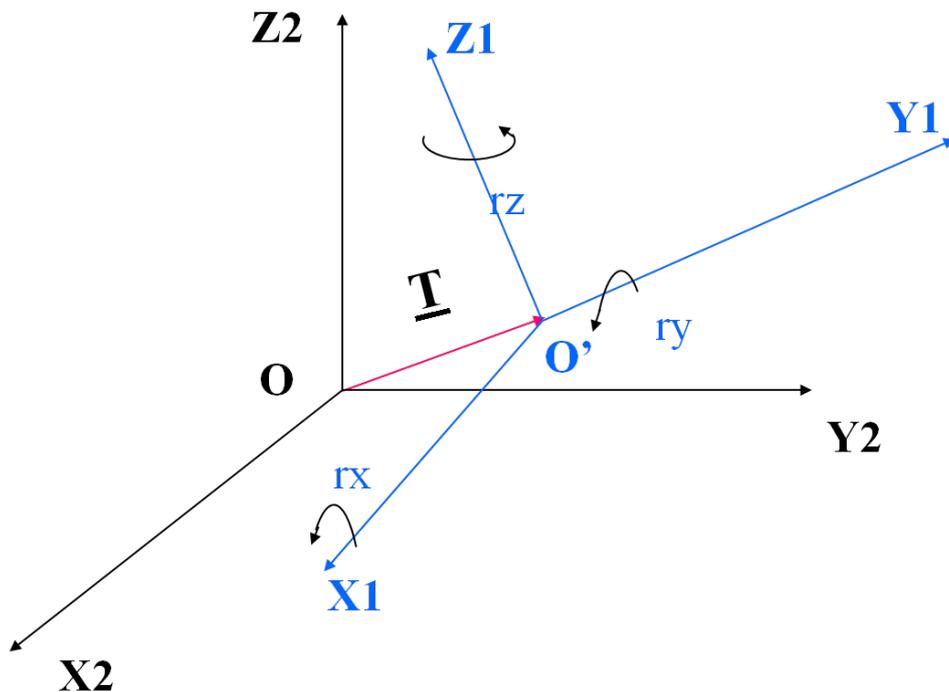


Figure 7.1: Le Modèle de Burša-Wolf

Posons:

$$\alpha = rx \quad (7.3)$$

$$\beta = ry \quad (7.4)$$

$$\gamma = rz \quad (7.5)$$

### 7.2.1 Matrices de Rotation

Dans (7.2),  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont les angles de rotation respectivement pour ramener les axes  $O'X_1, O'Y_1$  et  $O'Z_1$  parallèles aux axes  $OX_2, OY_2$  et  $OZ_2$ . Faisant abstraction de la translation entre les systèmes 1 et 2, soit un point  $M$  dans le plan  $OX'_1Y'_1$  d'affixe  $\zeta_1 = X_1 + iY_1$ , dans le plan  $O'X_2Y_2$  le point  $M$  a l'affixe  $\zeta_2 = X_2 + iY_2$ . On peut écrire:

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= X_2 + iY_2 = \rho e^{i\theta} \\ \zeta_1 &= \rho e^{i(\theta+\gamma)} = \rho e^{i\theta} e^{i\gamma} = \zeta_2 e^{i\gamma} \end{aligned}$$

En passant aux coordonnées, on a:

$$\begin{aligned} X_1 + iY_1 &= e^{i\gamma}(X_2 + iY_2) \\ \Rightarrow X_2 + iY_2 &= e^{-i\gamma}(X_1 + iY_1) = (\cos\gamma - i\sin\gamma)(X_1 + iY_1) \end{aligned}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires de l'équation précédente, on obtient:

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 \cos\gamma + Y_1 \sin\gamma \\ Y_2 &= -X_1 \sin\gamma + Y_1 \cos\gamma \\ \text{et } Z_2 &= Z_1 \end{aligned}$$

En les écrivant sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = R(\gamma) \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad (7.6)$$

avec :

$$R(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Appelons  $R(\alpha), R(\beta)$  les autres matrices de rotation. On a alors:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

$$R(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

Le modèle de Burša-Wolf est obtenu comme suit:

- on fait subir une rotation autour de  $O'X_1$  d'angle  $\alpha$  de matrice de rotation  $R(\alpha)$ ,

- on fait subir une rotation autour de  $O'Y_1$  d'angle  $\beta$  de matrice de rotation  $R(\beta)$ ,
- on fait subir une rotation autour de  $O'Z_1$  d'angle  $\gamma$  de matrice de rotation  $R(\gamma)$ .

Le résultat est la matrice :

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = R(\gamma).R(\beta).R(\alpha) \quad (7.10)$$

Comme les angles de rotations sont petits  $\leq 3^\circ$ , on va exprimer chaque matrice  $R$  en gardant seulement les termes du deuxième ordre. On utilise les développements limités à l'ordre deux :

$$\begin{aligned} \sin \alpha &\approx \alpha \\ \cos \alpha &\approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} \end{aligned}$$

Alors les formules (7.7-7.9) deviennent:

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\alpha^2}{2} & \alpha \\ 0 & -\alpha & 1 - \frac{\alpha^2}{2} \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

$$R(\beta) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\beta^2}{2} & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 - \frac{\beta^2}{2} \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

$$R(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma^2}{2} & \gamma & 0 \\ -\gamma & 1 - \frac{\gamma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.13)$$

En revenant à la formule (7.10), on obtient pour la matrice  $R(\alpha, \beta, \gamma)$  l'expression suivante à l'ordre 2:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\beta^2}{2} & \gamma + \alpha\beta & -\beta + \alpha\gamma \\ -\gamma & 1 - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} & \alpha + \beta\gamma \\ \beta & -\alpha & 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\beta^2}{2} \end{pmatrix} \quad (7.14)$$

Maintenant, comme les trois angles sont petits, on va considérer que les termes du premier ordre ce qui donne pour  $R(\alpha, \beta, \gamma)$ :

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

Revenons à  $(rx, ry, rz)$ , on trouve:

$$R(rx, ry, rz) = \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

La formule (7.2) s'écrit:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1+m) \begin{pmatrix} 0 & rz & -ry \\ -rz & 0 & rx \\ ry & -rx & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

## 7.2.2 Calcul des Paramètres du Modèle de Burša-Wolf par les Moindres Carrés

En considérant comme inconnues les paramètres  $T_X, T_Y, T_Z, m, rx, ry, rz$ , l'équation (7.2) s'écrit en gardant les termes du 1er ordre comme suit :

$$\begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_1 & 0 & -Z_1 & Y_1 \\ 0 & 1 & 0 & Y_1 & Z_1 & 0 & -X_1 \\ 0 & 0 & 1 & Z_1 & -Y_1 & X_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \\ m \\ rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

En utilisant l'équation (7.18) pour les  $n$  points communs dans les systèmes 1 et 2 et en posant :

$$L = (X_{2i} - X_{1i})_{i=1,n}$$

$$U = (T_X, T_Y, T_Z, m, rx, ry, rz)^T$$

A la matrice  $3n \times 7$ :

$$A = {}_{3n}A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & X_i & 0 & -Z_i & Y_i \\ 0 & 1 & 0 & Y_i & Z_i & 0 & -X_i \\ 0 & 0 & 1 & Z_i & -Y_i & X_i & 0 \end{pmatrix}_{i=1,n} \quad (7.19)$$

et  $V$  le vecteur des résidus de la méthode des moindres carrés, la détermination des paramètres inconnus se fait par la résolution par les moindres carrés de l'équation :

$$AU = L + V \quad (7.20)$$

Soit :

$$\boxed{\bar{U} = (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot L} \quad (7.21)$$

Le vecteur résidu est donné par :

$$V = A \cdot \bar{U} - L = A \cdot (A^T \cdot A)^{-1} \cdot A^T \cdot L - L$$

Le facteur de la variance unitaire est exprimé par la formule:

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{V^T V}{3n - 7}} \quad (7.22)$$

et la matrice variance-covariance du vecteur  $\bar{U}$  est donnée par:

$$\boxed{\sigma_{\bar{U}} = \sigma_0^2 (A^T A)^{-1}} \quad (7.23)$$

### 7.3 LES FORMULES DE MOLODENSKY

Un point  $M$  a ses coordonnées géodésiques cartésiennes 3D dans un référentiel donné comme suit:

$$\begin{aligned} X &= (N + he) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda \\ Y &= (N + he) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ Z &= (N(1 - e^2) + he) \cdot \sin\varphi \end{aligned} \quad (7.24)$$

avec :

-  $N = a \cdot (1 - e^2 \cdot \sin^2\varphi)^{-1/2}$  : le rayon de courbure de la grande normale,

-  $a$  : le demi-grand axe de l'ellipsoïde de référence,

-  $e^2 = f(2 - f)$  : le carré de la 1ère excentricité,

-  $f = (a - b)/a$  : l'aplatissement de l'ellipsoïde de référence.

On pose :

$$w = (1 - e^2 \cdot \sin^2\varphi)^{-1/2}$$

Le rayon de courbure  $\rho$  de la méridienne s'écrit:

$$\rho = a(1 - e^2)w^3$$

Soit:

$$dX = \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}, \quad d\Phi = \begin{pmatrix} d\lambda \\ d\varphi \\ dhe \end{pmatrix}, \quad dF = \begin{pmatrix} da \\ df \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

En calculant  $(dX, dY, dZ)$  des équations (7.24) en fonction de  $d\varphi, d\lambda, dhe, da$  et  $df$  et sachant que  $d(N \cos\varphi) = -\rho \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi$ , on trouve :

$$dX = J \cdot d\Phi + K \cdot dF \quad (7.26)$$

où les matrices  $J$  et  $K$  sont les suivantes :

$$J = \begin{pmatrix} -(N + he) \cos\varphi \sin\lambda & -(\rho + he) \sin\varphi \cos\lambda & \cos\varphi \cos\lambda \\ (N + he) \cos\varphi \cos\lambda & -(\rho + he) \sin\varphi \sin\lambda & \cos\varphi \sin\lambda \\ 0 & (\rho + he) \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

$$K = \begin{pmatrix} w \cos\varphi \cos\lambda & \rho \sin^2\varphi \cos\varphi \cos\lambda / (1 - f) \\ w \cos\varphi \sin\lambda & \rho \sin^2\varphi \cos\varphi \sin\lambda / (1 - f) \\ w(1 - e^2) \sin\varphi & (1 - f) \sin\varphi (\rho \sin^2\varphi - 2N) \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

De l'équation (7.26), on tire:

$$d\Phi = J^{-1} \cdot dX - J^{-1} \cdot K \cdot dF \quad (7.29)$$

avec:

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin\lambda}{(N + he) \cos\varphi} & \frac{\cos\lambda}{(N + he) \cos\varphi} & 0 \\ \frac{-\sin\varphi \cos\lambda}{\rho + he} & \frac{-\sin\varphi \sin\lambda}{\rho + he} & \frac{\cos\varphi}{\rho + he} \\ \frac{\cos\varphi \cos\lambda}{\cos\varphi \cos\lambda} & \frac{\cos\varphi \sin\lambda}{\cos\varphi \sin\lambda} & \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi} \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

$$J^{-1}K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-\omega e^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\rho + he} & \frac{-\rho \sin \varphi \cos \varphi (2 - e^2 \sin^2 \varphi)}{(\rho + he)(1 - f)} \\ \frac{1}{w} & -N(1 - f) \sin^2 \varphi \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

Or, en prenant:

$$dX = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix} \quad (7.32)$$

on a d'après l'équation (7.18)  $dX = A.U$ , par suite en posant:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 \\ d\lambda &= \lambda_2 - \lambda_1 \\ dhe &= he_2 - he_1 \\ da &= a_2 - a_1 \\ df &= f_2 - f_1 \end{aligned}$$

avec  $(a_1, f_1)$  et  $(a_2, f_2)$  sont respectivement les demi-grands axes et les aplatissements des ellipsoïdes des systèmes 1 et 2, on a alors :

$$d\Phi = J^{-1}.A.U - J^{-1}.K.dF \quad (7.33)$$

avec  $J^{-1}A$  la matrice  $3 \times 7$  donnée ci-dessous. En développant l'équation (7.33), nous obtenons les formules de MOLODENSKY de passage du système 1 au système 2.

$$J^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{-\sin \lambda}{(N + he) \cos \varphi} & \frac{\cos \lambda}{(N + he) \cos \varphi} & 0 & 0 \\ \frac{-\sin \varphi \cos \lambda}{\rho + he} & \frac{-\sin \varphi \sin \lambda}{\rho + he} & \frac{\cos \varphi}{\rho + he} & \frac{-e^2 N \cos \varphi \sin \varphi}{\rho + he} \\ \frac{\cos \varphi \cos \lambda}{\cos \varphi \cos \lambda} & \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\cos \varphi \sin \lambda} & \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi} & \frac{N(1 - e^2 \sin^2 \varphi) + he}{N(1 - e^2 \sin^2 \varphi) + he} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{(N(1 - e^2) + he) \operatorname{tg} \varphi \cos \lambda}{N + he} & \frac{(N(1 - e^2) + he) \operatorname{tg} \varphi \sin \lambda}{N + he} & -1 \\ \frac{-(N(1 - e^2 \sin^2 \varphi) + he) \sin \lambda}{\rho + he} & \frac{(N(1 - e^2 \sin^2 \varphi) + he) \cos \lambda}{\rho + he} & 0 \\ \frac{-e^2 N \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda}{-e^2 N \sin \varphi \cos \varphi \sin \lambda} & \frac{e^2 N \cos \varphi \sin \varphi \cos \lambda}{e^2 N \cos \varphi \sin \varphi \cos \lambda} & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient les formules de **MOLODENSKY**:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -\frac{\sin \lambda_1}{(N_1 + he_1) \cos \varphi_1} T_X + \frac{\cos \lambda_1}{(N_1 + he_1) \cos \varphi_1} T_Y +$$

$$\frac{(N_1(1 - e_1^2) + he_1) \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \lambda_1}{N_1 + he_1} r_x + \frac{(N_1(1 - e_1^2) + he_1) \operatorname{tg} \varphi_1 \sin \lambda_1}{N_1 + he_1} r_y - r_z \quad (7.34)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2 - \varphi_1 = & -\frac{\sin\varphi_1\cos\lambda_1}{\rho_1 + he_1}T_X - \frac{\sin\varphi_1\sin\lambda_1}{\rho_1 + he_1}T_Y + \frac{\cos\varphi_1}{\rho_1 + he_1}T_Z - \frac{e_1^2N_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1}{\rho_1 + he_1}m \\
& - \frac{(N_1(1 - e_1^2\sin^2\varphi_1) + he_1)\sin\lambda_1}{\rho_1 + he_1}rx - \frac{(N_1(1 - e_1^2\sin^2\varphi_1) + he_1)\cos\lambda_1}{\rho_1 + he_1}ry \\
& + \frac{w_1e_1^2\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{\rho_1 + he_1}\Delta a + \frac{\rho_1\sin 2\varphi_1(2 - e_1^2\sin^2\varphi_1)}{2(\rho_1 + he_1)(1 - f_1)}\Delta f
\end{aligned} \tag{7.35}$$

$$\begin{aligned}
he_2 - he_1 = & \cos\varphi_1\cos\lambda_1T_X + \cos\varphi_1\sin\lambda_1T_Y + \sin\varphi_1T_Z + (N_1(1 - e_1^2\sin^2\varphi_1) + he_1)m \\
& - e_1^2N_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1\sin\lambda_1rx + e_1^2N_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1\cos\lambda_1ry - \frac{\Delta a}{w_1} + N_1(1 - f_1)\sin^2\varphi_1\Delta f
\end{aligned} \tag{7.36}$$

Des équations (7.34), (7.36), nous remarquons que :

- \*  $\lambda_2 - \lambda_1$  est indépendante de  $T_Z, m, a_1$  et  $f_1$ ,
- \*  $\varphi_2 - \varphi_1$  est indépendante de  $rz$ ,
- \*  $he_2 - he_1$  est indépendante de  $rz$ .

On trouve souvent dans la littérature géodésique des formules de MOLODENSKY dites Standard et Abrégées qu'on donne ci-dessous.

## 7.4 LES FORMULES DE MOLODENSKY STANDARD

Elles sont obtenues en ne tenant pas compte du facteur d'échelle et des rotations c'est-à-dire  $m = 0$  et  $rx = ry = rz = 0$  dans les formules (7.34-7.36) et on obtient alors les formules suivantes en posant :

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi'' &= \varphi_2 - \varphi_1 \text{ en secondes sexagésimales} \\
\Delta\lambda'' &= \lambda_2 - \lambda_1 \text{ en secondes sexagésimales} \\
\Delta he &= he_2 - he_1 \\
\Delta X &= T_X \\
\Delta Y &= T_Y \\
\Delta Z &= T_Z
\end{aligned} \tag{7.37}$$

et en omettant les indices:

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi'' &= (-\Delta X \sin\varphi \cos\lambda - \Delta Y \sin\varphi \sin\lambda + \Delta Z \cos\varphi + \\
 &N e^2 \sin\varphi \cos\varphi \cdot \frac{\Delta a}{a} + \Delta f \left(\rho \frac{a}{b} + N \frac{b}{a}\right) \cdot \sin\varphi \cos\varphi) \cdot ((\rho + h e) \cdot \sin 1'')^{-1} \\
 \Delta\lambda'' &= (-\Delta X \sin\lambda + \Delta Y \cos\lambda) \cdot ((N + h e) \cos\varphi \sin 1'')^{-1} \\
 \Delta h e &= \Delta X \cos\varphi \cos\lambda + \Delta Y \cos\varphi \sin\lambda + \Delta Z \sin\varphi - a \frac{\Delta a}{N} + \Delta f \cdot N (1 - f) \sin^2\varphi
 \end{aligned}
 \tag{7.38}$$

avec  $b$  le demi-petit axe de l'ellipsoïde 1.

## 7.5 LES FORMULES DE MOLODENSKY ABRÉGÉES

On fait  $h e = 0$  et garde les termes du 1er ordre en  $f$  dans les formules Standard, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \Delta\varphi'' &= \frac{-\Delta X \sin\lambda + \Delta Y \cos\lambda}{N \cos\varphi \sin 1''} \\
 \Delta\lambda'' &= \frac{-\Delta X \sin\varphi \cos\lambda - \Delta Y \sin\varphi \sin\lambda + \Delta Z \cos\varphi + (a\Delta f + f\Delta a) \sin 2\varphi}{\rho \sin 1''} \\
 \Delta h e &= \Delta X \cos\varphi \cos\lambda + \Delta Y \cos\varphi \sin\lambda + \Delta Z \sin\varphi - \Delta a + (a\Delta f + f\Delta a) \sin^2\varphi
 \end{aligned}
 \tag{7.39}$$

## 7.6 LA RECHERCHE DES PARAMÈTRES DE PASSAGE PAR LES FORMULES DE MOLODENSKY

A partir de l'équation (7.33) on a :

$$d\Phi = J^{-1} \cdot A \cdot U - J^{-1} \cdot K \cdot dF$$

soit :

$$J^{-1} \cdot A \cdot U = d\Phi + J^{-1} \cdot K \cdot dF \tag{7.40}$$

où  $U$  est le vecteur des inconnues  $(T_X, T_Y, T_Z, m, r_x, r_y, r_z)^T$ . En écrivant l'équation précédente pour les  $n$  points communs et en posant :

$$L = (d\Phi_i + J_i^{-1} \cdot K_i \cdot dF)_{i=1,n} \tag{7.41}$$

le vecteur des observations  $3n \times 1$  et

$$B = (J_i^{-1} A_i)_{i=1,n} \tag{7.42}$$

La matrice des coefficients  $3n \times 7$  et  $V$  le vecteur des résidus de la méthode des moindres carrés, la détermination des paramètres inconnus se fait par résolution par les moindres carrés de l'équation :

$$B \cdot U = L + V \tag{7.43}$$

Le vecteur solution est :

$$\bar{U} = (B^T \cdot B)^{-1} B^T L \quad (7.44)$$

Le vecteur résidu est :

$$V = B \cdot \bar{U} - L = B \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \cdot B^T \cdot L - L \quad (7.45)$$

Le facteur de la variance unitaire est donné par :

$$\sigma^2 = \frac{V^T V}{3n - 7} \quad (7.46)$$

La matrice variance-covariance du vecteur  $\bar{U}$  est donnée par :

$$\sigma_{\bar{U}} = \sigma^2 \cdot (B^T \cdot B)^{-1} \quad (7.47)$$

## 7.7 LA DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE DE BURŠA-WOLF

Dans ce paragraphe, on veut calculer manuellement les paramètres du modèle de Burša-Wolf vu précédemment:

$$X_2 = T + (1 + m) \cdot R(rx, ry, rz) \cdot X_1 \quad (7.48)$$

En développant (7.48), on obtient:

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_X \\ T_Y \\ T_Z \end{pmatrix} + (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad (7.49)$$

avec  $(rx, ry, rz)$  les rotations comptées positivement dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Comment déterminer les paramètres modèle (7.48)?

### 7.7.1 Détermination de l'échelle $1 + m$

On suppose donné un ensemble de points  $P_i$  pour  $i = 1, n$  connus dans les deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$ . On écrit l'équation (7.48) pour deux points  $P_j$  et  $P_k$ , d'où:

$$X(P_j)_2 = T + (1 + m) \cdot R(rx, ry, rz) \cdot X(P_j)_1 \quad (7.50)$$

$$X(P_k)_2 = T + (1 + m) \cdot R(rx, ry, rz) \cdot X(P_k)_1 \quad (7.51)$$

Par différence, on obtient :

$$(P_j P_k)_2 = (1 + m) \cdot R(rx, ry, rz) \cdot (P_j P_k)_1 \quad (7.52)$$

On prend la norme des deux membres de (7.52) et que  $1 + m > 0$ :

$$\|(P_j P_k)_2\| = \|(1 + m) \cdot R(rx, ry, rz) \cdot (P_j P_k)_1\| = (1 + m) \|R(rx, ry, rz) \cdot (P_j P_k)_1\| \quad (7.53)$$

Comme  $R$  est une matrice de rotation, donc son application à un vecteur est une isométrie, c'est-à-dire qu'elle laisse invariant la norme ou la longueur du vecteur soit:

$$\|R.X\| = \|X\| \quad \forall X \quad (7.54)$$

On a donc:

$$\|(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_2\| = (1 + m)\|(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_1\| \quad (7.55)$$

Soit:

$$\boxed{1 + m = \frac{1}{N} \sum \frac{\|(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_2\|}{\|(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_1\|}} \quad (7.56)$$

$N$  désigne le nombre de couples de points  $P_jP_k, j \neq k$ .

### 7.7.2 Détermination des rotations $(rx, ry, rz)$

Connaissant  $(1 + m)$ , pour un couple de points  $P_j, P_k$ , on a :

$$(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_2 = (1 + m).R(rx, ry, rz).(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_1$$

On détaille la matrice  $R$ :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & rz & -ry \\ -rz & 1 & rx \\ ry & -rx & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & rz & -ry \\ -rz & 0 & rx \\ ry & -rx & 0 \end{pmatrix} = I_3 + Q \quad (7.57)$$

avec  $I_3$  la matrice unité et  $Q$  la matrice:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & rz & -ry \\ -rz & 0 & rx \\ ry & -rx & 0 \end{pmatrix} \quad (7.58)$$

Alors l'équation (7.52) devient:

$$(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_2 = (1 + m).(I_3 + Q(rx, ry, rz)).(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_1 \quad (7.59)$$

Soit comme  $m \ll 1$  et  $m^2 \ll 1$ :

$$Q(rx, ry, rz).(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_1 = (1 - m).(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_2 - (\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_1 \quad (7.60)$$

En posant:

$$(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_2 = \begin{pmatrix} \Delta X'_{jk} \\ \Delta Y'_{jk} \\ \Delta Z'_{jk} \end{pmatrix} ; \quad (\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_1 = \begin{pmatrix} \Delta X_{jk} \\ \Delta Y_{jk} \\ \Delta Z_{jk} \end{pmatrix} ; \quad v = \begin{cases} v_1 = (1 - m)\Delta X'_{jk} - \Delta X_{jk} \\ v_2 = (1 - m)\Delta Y'_{jk} - \Delta Y_{jk} \\ v_3 = (1 - m)\Delta Z'_{jk} - \Delta Z_{jk} \end{cases} \quad (7.61)$$

Alors, on obtient l'équation:

$$Q(rx, ry, rz).(\mathbf{P}_j\mathbf{P}_k)_1 = v \quad (7.62)$$

ou encore:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Delta Z_{jk} & \Delta Y_{jk} \\ \Delta Z_{jk} & 0 & -\Delta X_{jk} \\ -\Delta Y_{jk} & \Delta X_{jk} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (7.63)$$

Or le déterminant de la matrice  $Q'$  :

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta Z_{jk} & \Delta Y_{jk} \\ \Delta Z_{jk} & 0 & -\Delta X_{jk} \\ -\Delta Y_{jk} & \Delta X_{jk} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.64)$$

est nul. Pour passer de cette conséquence, on utilise pour chaque ligne du système (7.63) un couple de points  $ij$  ce qui donne le système:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\Delta Z_{jk} & \Delta Y_{jk} \\ \Delta Z_{lm} & 0 & -\Delta X_{lm} \\ -\Delta Y_{in} & \Delta X_{in} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{jk1} \\ v_{lm2} \\ v_{in3} \end{pmatrix} \quad (7.65)$$

Le système (7.65) devient résolvable ce qui permet de déterminer les trois rotations  $rx, ry$  et  $rz$ .

## 7.8 DÉTERMINATION DES COMPOSANTES DE LA TRANSLATION $T$

Les composantes  $T_x, T_y, T_z$  du vecteur translation sont déterminées à partir des coordonnées des points  $P_j$  communs dans les deux systèmes à partir de:

$$Tx_j = X_{2j} - (1 + m)(X_{1j} - rxY_{1j} + ryZ_{1j}) \quad (7.66)$$

$$Ty_j = Y_{2j} - (1 + m)(rxX_{1j} + Y_{1j} - rzZ_{1j}) \quad (7.67)$$

$$Tz_j = Z_{2j} - (1 + m)(-ryX_{1j} + rzY_{1j} + Z_{1j}) \quad (7.68)$$

Les composantes  $T_x, T_y, T_z$  sont obtenues par une moyenne sur les  $N$  points communs à savoir:

$$\begin{aligned} Tx &= \frac{\sum^N Tx_j}{N} \\ Ty &= \frac{\sum^N Ty_j}{N} \\ Tz &= \frac{\sum^N Tz_j}{N} \end{aligned} \quad (7.69)$$

## 7.9 LA TRANSFORMATION DE HELMERT BIDIMENSIONNELLE

Cette transformation s'écrit sous la forme vectorielle :

$$X_2 = T + s.R(\theta).X_1 \quad (7.70)$$

où:

- $X_2$  est le vecteur de composantes  $(X_2, Y_2)^T$ ,  $(X_2, Y_2)$  désignent les coordonnées planimétriques du système 2,
- $T$  est le vecteur translation de composantes  $(T_x, T_y)^T$  entre les systèmes 1 et 2,
- $s$  est le facteur d'échelle entre les 2 systèmes,

- $R(\theta)$  est la matrice de rotation  $2 \times 2$  pour passer du système 1 au système 2,
- $X_1$  est le vecteur de composantes  $(X_1, Y_1)^T$  où  $X_1, Y_1$  désignent les coordonnées dans le système 1.

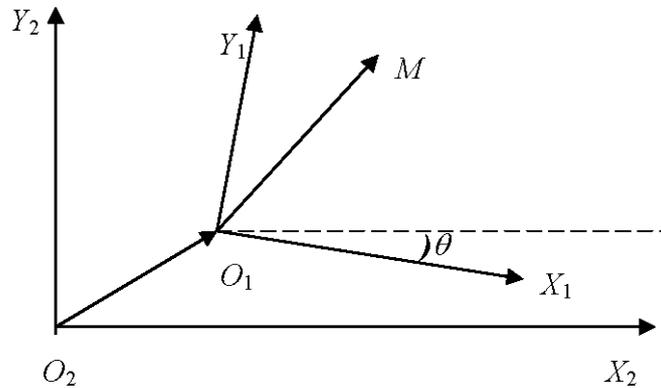


Figure 7.2: Modèle de Helmert

En développant (7.70), on obtient :

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} \quad (7.71)$$

En prenant comme inconnues auxiliaires :

$$v = s \cdot \sin\theta \quad (7.72)$$

$$u = s \cdot \cos\theta \quad (7.73)$$

Le système (7.71) devient :

$$\begin{aligned} X_2 &= T_x + X_1 \cdot u - Y_1 \cdot v \\ Y_2 &= T_y + X_1 \cdot v + Y_1 \cdot u \end{aligned} \quad (7.74)$$

Les inconnues  $T_x, T_y, u$  et  $v$  seront déterminées par la méthode des moindres carrés en utilisant des points communs dans les deux systèmes.

Ayant  $u$  et  $v$ , on déduit :

$$\boxed{\begin{aligned} s &= \sqrt{u^2 + v^2} \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{v}{u} \end{aligned}} \quad (7.75)$$

### 7.9.1 Résolution par les Moindres Carrés

On résoud par la méthode des moindres carrés le système (7.74). On suppose donné  $n$  points communs entre le système  $S_1$  et le système  $S_2$ :

-  $(X'_i, Y'_i)_{i=1,n}$  dans le système  $S_2$ ,

-  $(X_i, Y_i)_{i=1,n}$  dans le système  $S_1$ .

On pose:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{\sum_1^n X_i}{n} \\ \bar{Y} &= \frac{\sum_1^n Y_i}{n} \\ \bar{X}' &= \frac{\sum_1^n X'_i}{n} \\ \bar{Y}' &= \frac{\sum_1^n Y'_i}{n}\end{aligned}\quad (7.76)$$

les coordonnées respectives des centres de gravités des points dans  $S_1$  et  $S_2$ .

On pose de même:

$$\begin{aligned}x_i &= X_i - \bar{X} \\ y_i &= Y_i - \bar{Y} \\ x'_i &= X'_i - \bar{X}' \\ y'_i &= Y'_i - \bar{Y}'\end{aligned}\quad (7.77)$$

Dans ce cas, le système (7.74) s'écrit:

$$\begin{aligned}x'_i &= T_x + x_i \cdot u - y_i \cdot v \\ y'_i &= T_y + x_i \cdot v + y_i \cdot u\end{aligned}\quad (7.78)$$

Soit  $(T_x^0, T_y^0, u_0, v_0)$  une solution approchée du système. On note alors:

$$\begin{aligned}T_x &= T_x^0 + dt_x \\ T_y &= T_y^0 + dt_y \\ u &= u_0 + du \\ v &= v_0 + dv\end{aligned}\quad (7.79)$$

Alors les équations (7.78) deviennent:

$$\begin{aligned}x'_i &= T_x^0 + dt_x + x_i \cdot (u_0 + du) - y_i \cdot (v_0 + dv) \\ y'_i &= T_y^0 + dt_y + x_i \cdot (v_0 + dv) + y_i \cdot (u_0 + du)\end{aligned}\quad (7.80)$$

En écrivant ces équations sous la forme de l'équation des moindres carrés:

$$A \cdot X = L + W \quad (7.81)$$

avec  $X$  le vecteur des inconnues:

$$X = \begin{pmatrix} dt_x \\ dt_y \\ du \\ dv \end{pmatrix} \quad (7.82)$$

$L$  le vecteur des observables:

$$L = \begin{pmatrix} x'_1 - T_x^0 - x_1 u_0 + y_1 v_0 \\ y'_1 - T_y^0 - x_1 v_0 - y_1 u_0 \\ \vdots \\ x'_i - T_x^0 - x_i u_0 + y_i v_0 \\ y'_i - T_y^0 - x_i v_0 - y_i u_0 \\ \vdots \\ x'_n - T_x^0 - x_n u_0 + y_n v_0 \\ y'_n - T_y^0 - x_n v_0 - y_n u_0 \end{pmatrix} \quad (7.83)$$

$W$  le vecteur des résidus:

$$W = \begin{pmatrix} w_{x_1} \\ w_{y_1} \\ \vdots \\ w_{x_n} \\ w_{y_n} \end{pmatrix} \quad (7.84)$$

et  $A$  la matrice des coefficients:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & -y_1 \\ 0 & 1 & y_1 & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & x_i & -y_i \\ 0 & 1 & y_i & x_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & x_n & -y_n \\ 0 & 1 & y_n & x_n \end{pmatrix} \quad (7.85)$$

## 7.9.2 La Solution par les Moindres Carrés

La solution de (7.81) par les moindres carrés donne:

$$\bar{X} = (A^T A)^{-1} A^T L \quad (7.86)$$

On pose:

$$N = A^T A \quad (7.87)$$

qu'on appelle matrice normale du système (7.81). On obtient alors:

$$N = \begin{pmatrix} n & 0 & \sum x_i & -\sum y_i \\ 0 & n & \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum y_i & \sum (x_i^2 + y_i^2) & 0 \\ -\sum y_i & \sum x_i & 0 & \sum (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \quad (7.88)$$

Comme on travaille par rapport aux centres de gravité des coordonnées de  $S_1$  et  $S_2$ , on a alors par définition:

$$\sum x_i = \sum y_i = \sum x'_i = \sum y'_i = 0 \quad (7.89)$$

De plus on note:

$$d_i^2 = x_i^2 + y_i^2 \quad (7.90)$$

Alors la matrice  $N$  s'écrit facilement:

$$N = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum d_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum d_i^2 \end{pmatrix} \quad (7.91)$$

La matrice normale est diagonale, son inverse est donné par:

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sum d_i^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sum d_i^2} \end{pmatrix} \quad (7.92)$$

Or on sait que:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \sigma_0^2 \cdot N^{-1} \quad (7.93)$$

où  $\sigma_0^2$  est le facteur de variance unitaire donné par :

$$\sigma_0^2 = \frac{W^T W}{n-4} = \frac{\sum_i^n w_i^2}{n-4} \quad (7.94)$$

De l'équation (7.93), on voit que :

$$\boxed{\sigma_{dt_x}^2 = \sigma_{dt_y}^2 = \frac{\sigma_0^2}{n}} \quad (7.95)$$

**Propriété 13.1** Dans une transformation de Helmert bidimensionnelle, plus le nombre de points communs  $n$  entre les deux systèmes est grand, plus la détermination du vecteur translation  $T = (T_x, T_y)^T$  est précise.

Quant aux deux autres inconnues (facteur d'échelle et la rotation), on a:

$$\sigma_u^2 = \sigma_v^2 = \sigma_0^2 \frac{1}{\sum d_i^2} \quad (7.96)$$

Soit  $D = \max(d_i)$ . Si on veut imposer  $\sigma_u^2$  égal à  $\tilde{\sigma}_u^2$  donné, quelles conditions doivent vérifier les  $d_i$ . On a:

$$\tilde{\sigma}_u^2 = \sigma_0^2 \frac{1}{\sum d_i^2} \Rightarrow \sum d_i^2 = \frac{\sigma_0^2}{\tilde{\sigma}_u^2} \quad (7.97)$$

Or:

$$d_i \leq D \Rightarrow \sum_{i=1}^{i=n} d_i^2 \leq nD^2$$

Par suite:

$$\boxed{\frac{\sigma_0^2}{\tilde{\sigma}_u^2} \leq nD^2 \Rightarrow D^2 \geq \frac{\sigma_0^2}{n\tilde{\sigma}_u^2}} \quad (7.98)$$

D'où:

**Propriété 13.2** Dans une transformation de Helmert bidimensionnelle, en imposant un écart-type donné de la rotation  $\tilde{\sigma}_u$ , la distance maximale  $D$  qu'on peut prendre vaut  $\frac{\sigma_0}{\tilde{\sigma}_u \sqrt{n}}$ .

## 7.10 EXERCICES ET PROBLÈMES

**Problème 7.1** Soient les trois tableaux ci-dessous des coordonnées 3D respectivement dans les systèmes S1 et S2 et à transformer dans le système S2:

Nom	X(m)	Y(m)	Z(m)
1	4 300 244.860	1 062 094.681	4 574 775.629
2	4 277 737.502	1 115 558.251	4 582 961.996
3	4 276 816.431	1 081 197.897	4 591 886.356
4	4 315 183.431	1 135 854.241	4 542 857.520
5	4 285 934.717	1 110 917.314	4 576 361.689
6	4 217 271.349	1 193 915.699	4 618 635.464
7	4 292 630.700	1 079 310.256	4 579 117.105

Nom	X(m)	Y(m)	Z(m)
1	4 300 245.018	1 062 094.592	4 574 775.510
2	4 277 737.661	1 115 558.164	4 582 961.878
3	4 276 816.590	1 081 197.809	4 591 886.238
4	4 315 183.590	1 135 854.153	4 542 857.402
5	4 285 934.876	1 110 917.227	4 576 361.571
6	4 217 271.512	1 193 915.612	4 618 635.348
7	4 292 630.858	1 079 310.168	4 579 116.986

Nom	X(m)	Y(m)	Z(m)
A	4 351 694.594	1 056 274.819	4 526 994.706
B	4 319 956.455	1 095 408.043	4 548 544.867
C	4 303 467.472	1 110 727.257	4 560 823.460
D	4 202 413.995	1 221 146.648	4 625 014.614

1. Déterminer les paramètres du modèle de Burša-Wolf à 7 paramètres.
2. Calculer les coordonnées 3D des points du troisième tableau dans le système S2.



## Bibliographie

1. **F.R. Helmert.** 1884. *Die Mathematischen und Physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*; Vol 2, Leipzig, B.G Teubner(reprinted 1962).
2. **F. Klein.** 1928. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus*, 171. 3rd Edition. Göttingen.
3. **G. Julia.** 1955. *Cours de l'Ecole Polytechnique. Cours de Géométrie Infinitésimale.* Cinquième Fascicule, Deuxième Partie: Théorie des Surfaces. Deuxième édition entièrement refondue. Editeur Gauthier-Villars. 141p.
4. **W.A. Heiskanen & H. Moritz.** 1967. *Physical Geodesy.* Freeman, San Francisco. Reprint, 1979. Institute of Physical Geodesy, Technical University, Graz, Austria. 364p.
5. **J. Dieudonné.** 1968. *Calcul Infinitésimal.* 1ère édition. Collection Les Méthodes. Hermann, Paris. 479p.
6. **A. Fontaine.** 1969. *Rapport sur la Géodésie de la Tunisie.* OTC.
7. **A. Marussi.** 1974. *Africa and Modern Geodesy.* Proceedings of the First Symposium in Geodesy in Africa, 14-19 January. Khartoum. Soudan.
8. **L. Bers.** 1977. *Quasiconformal mappings, with applications to differential equations, function theory and topology.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol 83, n°6, pp. 1083-1100, 1977.
9. **C. Fezzani.** 1979. *Analyse de la structure des réseaux astro-géodésiques tunisiens.* Thèse de Docteur Ingénieur. Ecole Nationale des Sciences Géographiques. IGN France. 314p.
10. **C. Boucher.** 1979a. *Systèmes géodésiques de référence et autres problèmes géodésiques liés à la localisation en mer.* Colloque national sur la localisation en mer. Brest, 1-5 octobre 1979. IGN France.
11. **C. Boucher.** 1979b. *Les Transformations géométriques entre systèmes géodésiques.* Rapport Technique RT/G n°3, SGNM, IGN France.
12. **P. Dombrowski.** 1979. *150 Years after Gauss "disquisitiones generales circa superficies curvas".* Astérisque n°62. Publication de la Société Mathématique de France. 153p.
13. **H. Monge.** 1979. *L'Ellipsoïde de Clarke 1880.* Bulletin d'Information de l'IGN France n°39-1979/3, pp. 37-38.
14. **J. Lemenestrel.** 1980. *Cours de Géodésie Élémentaire,* ENSG, IGN France.
15. **J. Comriot.** 1980. *Cours de Cartographie Mathématique,* ENSG, IGN France.

16. **B. Doubrovine - S. Novikov - A. Fomenko.** 1982. *Géométrie Contemporaine: Méthodes et Application.* Première Partie: Géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs. Edition Mir, Moscou. 438p.
17. **M. Charfi.** 1983. Les Travaux de revalorisation de la Géodésie Tunisienne. OTC.
18. **P. Vaniček & E.J. Krakiwsky.** 1986. *Geodesy: the Concepts.* North Holland Compagny. 2ème Edition. 697p.
19. **Defense Mapping Agency(DMA).** 1987a. DMA Technical Report 8350.2. Dept of Defense, World Geodetic System 1984, Its definition and relationships with local geodetic systems. 121p.
20. **Defense Mapping Agency.** 1987b. DMA Technical Report 8350.2-A. Part I: Methods, Techniques, and Data used in WGS84 development. Supplement to Department of Defense World Geodetic System 1984 Technical Report. 412p.
21. **Defense Mapping Agency.** 1987c. DMA Technical Report 8350.2-A. Part II: Parameters, formulas, and graphics for the practical application of WGS84. Supplement to Department of Defense World Geodetic System 1984 Technical Report. 775p.
22. **H. Moritz & I.I. Mueller.** 1988. *Earth Rotation :Theory and Observation.* Ungar Publishing Compagny. New York. 617p.
23. **T. Soler.** 1998. A Compendium of transformation formulas useful in GPS work. Journal of Geodesy, Vol.72, n°7/8, pp. 482-490.
24. **E.W. Grafarend.** 1998. Helmut Wolf: Das Wissenschaftliche Werk/ The Scientific Work. Publication de la Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe A, Heft n°115, München 1998. 97p.
25. **A. Ben Hadj Salem.** 1999. La Mise à niveau de la Géodésie Tunisienne par l'unification Carthage2000 de ses réseaux, présentée au Premier Atelier Maghrébin de Géodésie. Tunis, 18-20 mai 2000. Publiée dans la revue Géo-Top de l'OTC numéro spécial mai 2000, pp. 6-16.
26. **H. Moritz.** 2000. Geodetic Reference System 1980. Journal of Geodesy, vol. 74 n°1, pp. 128-134.
27. **H.A. Kastrup.** 2008. On the Advancements of Conformal Transformations and their Associated Symmetries in Geometry and Theoretical Physics. arxiv:physics.hist-ph/0808.2730v1. www.arxiv.org.
28. **Arrêté du ministre de la Défense nationale du 10 février 2009.** 2009. Journal Officiel de la République Tunisienne n°14 du 17 février 2009.
29. **A.N. Pressley.** 2010. *Elementary Differential Geometry.* Springer-Verlag Heidelberg. 395p.
30. **E. Zeidler.** 2011. *Quantum Field Theory III: Gauge Theory A Bridge between Mathematicians and Physicists.* Springer-Verlag Heidelberg. 1158p.
31. **A. Ben Hadj Salem.** 2013. Histoire de la Topographie en Tunisie : Les Coordonnées Origines Fuseaux. 11p.

# Index

- Aiguillon F.**, 27  
**Al-Farghani A.A.**, 27  
**Beltrami E.**, 23  
**Bers L.**, 23, 77  
**Boucher C.**, 59, 77  
**Burša M.**, i, 59  
**Charfi M.**, 78  
**Commiot J.**, 21, 77  
**Dieudonné J.**, 15, 77  
**Dombrowski P.**, 77  
**Dobrovine B.**, 78  
**Fezzani C.**, 77  
**Fomenko A.**, 78  
**Fontaine A.**, 77  
**Gauss C.F.**, 27  
**Grafarend E.W.**, 78  
**Halley E.**, 27  
**Harriot T.**, 27  
**Heiskanen W.A.**, 77  
**Helmert F.R.**, i, 77  
**Hipparque**, 27  
**Julia G.**, 20, 77  
**Kastrup H.A.**, 27, 78  
**Klein F.**, 77  
**Krakiwsky E.J.**, 78  
**Laborde J.**, 43  
**Lemenestrel J.**, 77  
**Marussi A.**, 77  
**Molodensky M.S.**, i, 59, 64  
**Monge G.**, 27  
**Monge H.**, 77  
**Moritz H.**, 77, 78  
**Mueller I.I.**, 78  
**Novikov S.**, 78  
**Pressley A.N.**, 78  
**Ptolémée C.**, 27  
**Soler T.**, 59, 78  
**Vaniček P.**, 78  
**Wolf H.**, i, 59, 78  
**Zeidler E.**, 17, 78
- Affixe, 12  
Altération angulaire, 7  
Altération linéaire, 8, 40  
Angles correspondants, 4  
Argument, 11
- Canevas, 5  
Coefficient de Beltrami, 23  
Coefficient de distorsion, 25  
Conditions de Cauchy, 13  
Convergence des méridiens, 42  
Coordonnées de Cassini-Soldner, 6  
Courbes coordonnées, 5, 33  
Courbes correspondantes, 4
- Defense Mapping Agency, 78  
Directions principales, 9, 35
- Éléments correspondants, 4
- Facteur de réduction de l'échelle, 41, 52  
Fonction analytique, 13  
Fonction harmonique, 15  
Fonction holomorphe, 23  
Fonction homographique, 12  
Formule de Schols-Laborde, 43  
Formules de Molodensky, 64  
Formules de Molodensky abrégées, 67  
Formules de Molodensky standard, 66
- Indicatrice de Tissot, 8, 10, 35  
Intégrale elliptique, 53  
Isomètre automécoïque, 36  
Isomètre stationnaire, 36
- La représentation UTM, 45  
Latitude isométrique, 36  
Lemme de Tissot, 8

Matrice de rotation, 60, 71  
Modèle de Burša-Wolf, 60  
Module, 11  
Module aréolaire, 8  
Module linéaire, 7, 36  
Modules principaux, 10, 35

Pivot, 5  
Points correspondants, 4  
Première forme fondamentale, 8

Réduction à la corde, 42  
Rayon de courbure de la méridienne, 35  
Représentation azimutale, 7  
Représentation conforme, 10, 20, 33  
Représentation conique, 7, 33  
Représentation cylindrique, 6  
Représentation directe, 5, 33  
Représentation Lambert, 33  
Représentation oblique, 5  
Représentation quasi-conforme, 23  
Représentation tangente, 33  
Représentation transverse, 5  
Représentations planes, 3

Tangentes correspondantes, 4  
Transformation de Helmert, 70  
Transformation de passage, 59