REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EQUIPEMENT
Office de la Topographie et du Cadastre

Note de Géométrie Différentielle - Application de la Méthode du Repère Mobile à l'ellipsoïde de Référence-

Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Ingénieur Général à l'Office de la Topographie et du Cadastre
(abenhadjsalem@gmail.com)

Octobre 2012

Version 1.

Office de la Topographie et du Cadastre
www.otc.nat.tn

Table des matières

Note de Géométrie Différentielle - Application de la Méthode du Repère Mobile à l'ellipsoïde de Référence-

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

1 Le Repère Mobile

1.1 Introduction

Soit E l'ellipsoïde de référence géodésique défini par les paramètres a, e respectivement le demi grand axe et la première excentricité. Soit $\mathcal{R}(O, X, Y, Z)$ le référentiel géocentrique associé à cet ellipsoïde. Un point A est défini par ses coordonnées cartésiennes tridimensionnelles (X, Y, Z) par :

$$X = (N+h)cos\varphi cos\lambda \tag{1}$$

$$Y = (N+h)cos\varphi sin\lambda \tag{2}$$

$$Z = (N(1-e^2)+h)sin\varphi \tag{3}$$

avec :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}} \tag{4}$$

Au point $A(\varphi, \lambda, h)$, considérons le repère local défini par le repère orthonormé $(e_\lambda, e_\varphi, e_n)$ défini dans la base orthonormée (i, j, k) de $\mathcal{R}$ par :

$$e_\lambda = \left| \begin{array}{l} -sin\lambda \\ cos\lambda \\ 0 \end{array} \right. ; e_\varphi = \left| \begin{array}{l} -sin\varphi cos\lambda \\ -sin\varphi sin\lambda \\ cos\varphi \end{array} \right. ; e_n = \left| \begin{array}{l} cos\varphi cos\lambda \\ cos\varphi sin\lambda \\ sin\varphi \end{array} \right. \tag{5}$$

Pour faciliter les notations, posons :

$$e_1 = e_\lambda \tag{6}$$

$$e_2 = e_\varphi \tag{7}$$

$$e_3 = e_n \tag{8}$$

Quand les coordonnées géodésiques (φ, λ, h) du point A varient, le repère local en A se déplace ce qu'on appelle le repère mobile du point A.

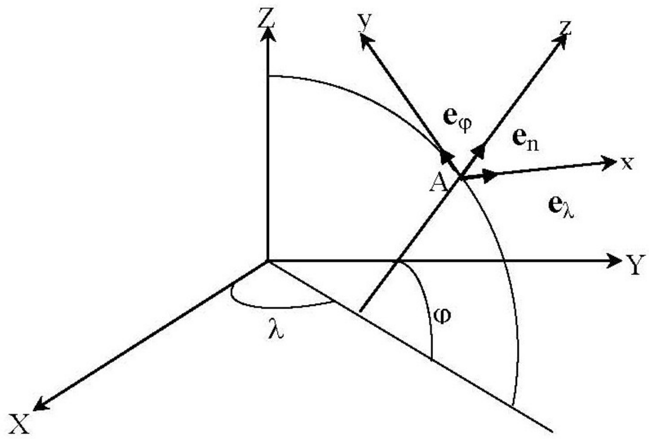

FIGURE 1 – Le Repère Mobile

2 Ecriture Différentielle de dA et de_i

Le point A est défini dans $\mathcal{R}$ par :

$$OA = Xi + Yj + Zk \tag{9}$$

avec (i, j, k) la base canonique de $\mathcal{R}$. Comme (e_1, e_2, e_3) est aussi une base orthonormée de $\mathcal{R}$, on peut passer de (i, j, k) à (e_1, e_2, e_3) (A. Ben Hadj Salem, 2010) par :

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin\lambda & -sin\varphi cos\lambda & cos\varphi cos\lambda \\ cos\lambda & -sin\varphi sin\lambda & cos\varphi sin\lambda \\ 0 & cos\varphi & sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

La différentielle de (9) donne :

$$dA = idX + jdY + kdZ$$

en remplaçant i, j et k en fonction de e_1, e_2 et e_3, on arrive à l'expression différentielle :

$$\boxed{dA = \sum_{i=1}^{i=3} \omega_i e_i} \tag{11}$$

De même, la différentielle d'un vecteur e_i s'exprime dans la base (i, j, k) qui sera transformée dans la base (e_i) utilisant la matrice inverse de (10), on aura alors :

$$\boxed{de_i = \sum_{j=1}^{j=3} \omega_{ij} e_j} \tag{12}$$

Les deux formules (11) et (12) définissent le déplacement infinitésimal du repère mobile au point A quand ce dernier se déplace.

Les coefficients ω_i et ω_{ij} respectivement dans les deux formules précédentes sont des formes différentielles de degré 1 en fonction des formes différentielles $d\lambda, d\varphi$ et dh (A. Ben Hadj salem, 2012).

3 Les Relations Satisfaites par les Formes Différentielles ω_i et ω_{ij}

Revenons aux dernières formules (11) et (12), elles représentent des différentielles de fonctions vectorielles, par suite, on a alors :

$$d(dA) = 0 \tag{13}$$

$$d(de_i) = 0 \quad i = 1,3 \tag{14}$$

La formule (13) donne :

$$d(dA) = d(\sum_i \omega_i e_i) = \sum_i d(\omega_i e_i) = \sum_i (d\omega_i e_i - \omega_i \wedge de_i) = \sum_i d\omega_i e_i - \sum_i \omega_i \wedge de_i = 0 \tag{15}$$

Soit :

$$\sum_i d\omega_i e_i = \sum_i \omega_i \wedge de_i$$

Remplaçons maintenant de_i par son expression (12), on obtient :

$$\sum_i d\omega_i e_i = \sum_i \omega_i \wedge de_i = \sum_i \omega_i \wedge \sum_k \omega_{ik} e_k = \sum_k \sum_i \omega_i \wedge \omega_{ik} e_k$$

Ce qui donne en changeant les indices i et k pour le terme à droite :

$$\sum_i d\omega_i e_i = \sum_i \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} e_i$$

Soit :

$$\boxed{d\omega_i = \textstyle\sum_{k=1}^{k=3} \omega_k \wedge \omega_{ki}} \tag{16}$$

Revenons maintenant à la formule (14) :

$$d(de_i) = 0 = d(\sum_{j=1}^{j=3} \omega_{ij} e_j) = \sum_{j=1}^{j=3} d(\omega_{ij} e_j) \tag{17}$$

Or :

$$\sum_j d(\omega_{ij} e_j) = \sum_j d\omega_{ij} e_j - \sum_j \omega_{ij} \wedge d(e_j) = \sum_j d\omega_{ij} e_j - \sum_j \omega_{ij} \wedge (\sum_{k=1}^{k=3} \omega_{jk} e_k) = 0$$

Soit :

$$\sum_j d\omega_{ij} e_j = \sum_{j=1}^{j=3} \sum_{k=1}^{k=3} \omega_{ij} \wedge \omega_{jk} e_k \tag{18}$$

Les (e_i) forment une base de $\mathcal{R}$, les coefficients de e_j doivent être égaux, ce qui donne après manipulation :

$$\boxed{d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{k=3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \quad 1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 3} \tag{19}$$

Les formes différentielles données par (16) et (19) constituent les formules d'Elie Cartan (H. Cartan, 1979).

3.1 Cas de repère mobile orthonormé

Dans le cas étudié dans cette note, la base (e_i) est une base orthonormée c'est-à-dire :

$$e_i.e_j = \delta_{ij} \qquad \begin{cases} = 1 \text{ si} & i = j = 1 \\ = 0 \text{ si} & i \neq j \end{cases} \tag{20}$$

En différentiant (20), on a :

$$de_i.e_j + e_i.de_j = 0 \tag{21}$$

En utilisant la formule donnant de_i c'est-àdire (12), l'expression ci-dessous devient :

$$(\sum_{k=1}^{k=3} \omega_{ik} e_k).e_j + e_i.(\sum_{k=1}^{k=3} \omega_{jk} e_k) = 0 \tag{22}$$

Comme $e_i.e_j = \delta_{ij}$, on obtient :

$$\boxed{\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \quad \forall i, j = 1, 3} \tag{23}$$

Et quand $i = j$, on a :

$$\boxed{\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0} \tag{24}$$

4 Application à l'ellipsoïde de Référence

4.1 Calcul des ω_i

En différentiant les formules (1-3) dans la base (i, j, k) on a :

$$dA = idX + jdY + kdZ$$

En remplaçant i, j et k par leurs expressions en fonction de e_1, e_2 et e_3 on obtient :

$$dA = cos\varphi(N + h)d\lambda e_1 + (\rho + h)d\varphi e_2 + dhe_3 \tag{25}$$

Soit :

$$\boxed{\omega_1 = cos\varphi(N + h)d\lambda; \quad \omega_2 = (\rho + h)d\varphi; \quad \omega_3 = dh} \tag{26}$$

4.2 Calcul des ω_{ij}

Le calcul de de_i en fonction des vecteurs e_i du repère mobile au point A se fait en utilisant (5) :

$$\begin{aligned}
&de_1 = -(icos\lambda + jsin\lambda)d\lambda \\
&de_2 = (-cos\varphi cos\lambda d\varphi + sin\varphi sin\lambda d\lambda)i + (-cos\varphi sin\lambda d\varphi - sin\varphi cos\lambda d\lambda)j - kcos\varphi d\varphi \\
&de_3 = (-sin\varphi cos\lambda d\varphi - cos\varphi sin\lambda d\lambda)i + (-sin\varphi sin\lambda d\varphi + cos\varphi cos\lambda d\lambda)j + kcos\varphi d\varphi
\end{aligned} \tag{27}$$

En partant de (10), on obtient donc :

$$de_1 = sin\varphi d\lambda e_2 - cos\varphi d\lambda e_3 \tag{28}$$
$$de_2 = -sin\varphi d\lambda e_1 - d\varphi e_3 \tag{29}$$
$$de_3 = cos\varphi d\lambda e_1 + d\varphi e_2 \tag{30}$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & sin\varphi d\lambda & -cos\varphi d\lambda \\ -sin\varphi d\lambda & 0 & -d\varphi \\ cos\varphi d\lambda & d\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \tag{31}$$

avec :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & sin\varphi d\lambda & -cos\varphi d\lambda \\ -sin\varphi d\lambda & 0 & -d\varphi \\ cos\varphi d\lambda & d\varphi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

D'où les éléments ω_{ij} :

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0 \tag{33}$$
$$\omega_{12} = -\omega_{21} = sin\varphi d\lambda \tag{34}$$
$$\omega_{13} = -\omega_{31} = -cos\varphi d\lambda \tag{35}$$
$$\omega_{23} = -\omega_{32} = -d\varphi \tag{36}$$

4.3 Vérification des Formules $d\omega_i$ et $d\omega_{ij}$

A- Vérifions la formule (16) soit :

$$d\omega_i = \sum_{k=1}^{k=3} \omega_k \wedge \omega_{ki}$$

Calculons par exemple $d\omega_1$:

$$d\omega_1 = d((N+h)cos\varphi d\lambda) = d(Ncos\varphi d\lambda) + d(hcos\varphi d\lambda) \tag{37}$$

Or $d(Ncos\varphi) = -\rho sin\varphi d\varphi$ ce qui donne :

$$d\omega_1 = -\rho sin\varphi d\varphi \wedge d\lambda - hsin\varphi d\varphi \wedge d\lambda + cos\varphi dh \wedge d\lambda \tag{38}$$

soit :

$$\boxed{d\omega_1 = -(\rho+h)sin\varphi d\varphi \wedge d\lambda + cos\varphi dh \wedge d\lambda} \tag{39}$$

Par la formule (16) :

$$d\omega_1 = \sum_{k=1}^{k=3} \omega_k \wedge \omega_{k1} = \omega_1 \wedge \omega_{11} + \omega_2 \wedge \omega_{21} + \omega_3 \wedge \omega_{31} =$$

$$0 + \omega_2 \wedge \omega_{21} + \omega_3 \wedge \omega_{31} = (\rho+h)d\varphi \wedge (-sin\varphi d\lambda) + dh \wedge cos\varphi d\lambda =$$
$$-(\rho+h)sin\varphi d\varphi \wedge d\lambda + cos\varphi dh \wedge d\lambda \tag{40}$$

Ce qui est identique à (39) ci-dessus.

B- Vérifions maintenant la formule des $d\omega_{ij}$:
soit :

$$d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{k=3} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}$$

Calculons par exemple $d\omega_{12}$:

$$\boxed{d\omega_{12} = d(sin\varphi d\lambda) = cos\varphi d\varphi \wedge d\lambda} \tag{41}$$

D'autre part, d'après la formule (19), on a :

$$d\omega_{12} = \sum_{k=1}^{k=3} \omega_{1k} \wedge \omega_{k2} = \omega_{11} \wedge \omega_{12} + \omega_{21} \wedge \omega_{22} + \omega_{13} \wedge \omega_{32}$$

Or :

$$\omega_{11} = \omega_{22} = 0$$

Par suite, on a finalement :

$$d\omega_{12} = \sum_{k=1}^{k=3} \omega_{1k} \wedge \omega_{k2} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = -cos\varphi d\lambda \wedge d\varphi = cos\varphi d\varphi \wedge d\lambda \tag{42}$$

C'est le résultat de (41).

5 Etude du cas $h = 0$

Quand $h = 0$, le point A est sur le plan tangent à l'ellipsoïde, dans ce cas, on a alors :

$$\omega_1 = Ncos\varphi d\lambda \tag{43}$$
$$\omega_2 = \rho d\varphi \tag{44}$$
$$\omega_{12} = sin\varphi d\lambda \tag{45}$$

Or d'après le théorème fondamental de la géométrie riemannienne locale, il existe une unique forme différentielle ω_{12} définie dans le plan tangent qui satisfait aux équations (S.S Chern, 1985) :

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 \quad (46)$$
$$d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} \quad (47)$$
$$\text{et} \quad d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2 \quad (48)$$

avec K la courbure de Gauss ou la courbure totale au point A.

Vérifions alors les équations (46-48). Des équations (43-45), obtient :

$$d\omega_1 = -\rho sin\varphi d\varphi \wedge d\lambda \quad (49)$$
$$d\omega_2 = \rho' d\varphi \wedge d\varphi = 0 \quad (50)$$
$$d\omega_{12} = cos\varphi d\varphi \wedge d\lambda \quad (51)$$

Par suite :

$$d\omega_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2 = sin\varphi d\lambda \wedge \rho d\varphi = \rho sin\varphi d\lambda \wedge d\varphi \quad (52)$$
$$d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12} = Ncos\varphi d\lambda \wedge sin\varphi d\lambda = 0 \quad (53)$$
$$\text{et} \quad d\omega_{12} = cos\varphi d\varphi \wedge d\lambda \quad (54)$$

Or :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = Ncos\varphi d\lambda \wedge \rho d\varphi = -\rho Ncos\varphi d\varphi \wedge d\lambda \quad (55)$$

En comparant (51) et (55), on trouve que :

$$d\omega_{12} = -\frac{1}{\rho N}\omega_1 \wedge \omega_2 = -K\omega_1 \wedge \omega_2 \quad (56)$$

avec :

$$K = \frac{1}{\rho N} = \text{la courbure totale ou courbure de Gauss}$$
$$\text{c'est l'inverse du produit des 2 rayons de courbure de l'ellipsoïde} \quad (57)$$

CQFD

Références

H. Cartan. 1979. Cours de Calcul Différentiel. Nouvelle édition refondue et corrigée. Hermann Paris. Collection Méthodes. 365p.

S.S Chern. 1985. Moving Frames. Société Mathématique de France. Astérisque, numéro hors série "Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui". Lyon, 25-29 juin 1984. p 67-77.

A. Ben Hadj Salem. 2010. Note de Géométrie Différentielle - Le Repère Local -. v1. 7p.

A. Ben Hadj Salem. 2012. Selected Papers. v1. En préparation. 421 p.