Note de Géométrie Différentielle
- L'Opérateur de Peterson -

Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Ancien Ingénieur Général à l'Office de la Topographie et du Cadastre
(abenhadjsalem@gmail.com)

Novembre 2015

Version 2.

Table des matières

NOTE DE GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE - L'OPÉRATEUR DE PETERSON -

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM

> La Mesure de la Terre(sens étymologique du mot *géométrie*) est une des principales sources des mathématiques. Sans remonter jusqu'à l'Egypte ancienne, rappelons par exemple que ce sont ses travaux de géodésie qui ont conduit Carl Friedrich Gauss à développer l'étude des surfaces et, notamment, à introduire l'application qui porte aujourd'hui son nom. [1]
>
> Charles-Michel Marle et Philippe Pilibossian [1]

Résumé

L'objet de cette note de géométrie différentielle est l'application d'un théorème de la théorie des surfaces dit théorème de l'opérateur de Peterson dans les cas de la sphère et de l'ellipsoïde de révolution.

1 Introduction

Soit (Σ) une surface définie par la fonction vectorielle $\mathbf{OM}(u,v)$. Soit le repère local en $(M,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{N})$ défini par :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial u}(u,v) \tag{1}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial v}(u,v) \tag{2}$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|} \tag{3}$$

Soit g la métrique définie sur (Σ), on a ;

$$g = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2 \tag{4}$$

ou encore sous forme matricielle :

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Soient X, Y deux vecteurs du plan tangent en un point P de la surface :

$$X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

1. C'est l'application qui associe , à chaque point de la suface du globe terrestre, la direction de la verticale ascendante en ce point.

Alors $g(X,Y)$ est un réel donné par :

$$g(X,Y) = X^T.g.Y = Y^T.g.X = X^T.\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}.Y = g_{11}ac + g_{12}(ad+bc) + g_{22}bd \quad (6)$$

où T désigne la transposée de matrice. On définit la matrice $h = (h_{ij})$ par :

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial u \partial v}.\mathbf{N} \quad (7)$$

2 L'Opérateur de Peterson

L'Opérateur de Peterson est un opérateur linéaire A défini par :

$$g(AX, X) = h(X, X) \quad \forall X \neq 0 \quad (8)$$

où X est un vecteur non nul du plan tangent.

Théorème : *Soit le repère tridimensionnel local $(M, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{N})$ précédemment défini, on montre que :*

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial u_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \boldsymbol{e}_k + h_{ij}\boldsymbol{N} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial u_i} = -\sum_k A_{ki}\boldsymbol{e}_k \quad (10)$$

où $A = (A_{ij})$ est la matrice de l'opérateur linéaire de Peterson, et Γ_{ij}^k les coefficients de Christoffel donnés par :

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_l \frac{g^{kl}}{2}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_l}\right) \quad (11)$$

et g^{kl} les coefficients de l'inverse de la matrice $g = (g_{ij})$.

3 Applications :Cas de la Sphère

On considère que notre surface est une sphère de rayon a. Un point M de la surface est paramétré par :

$$\mathbf{OM}(\varphi, \lambda) = \left| \begin{array}{c} X = acos\varphi cos\lambda \\ Y = acos\varphi sin\lambda \\ Z = asin\varphi \end{array} \right. \quad (12)$$

Le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{N})$ est défini dans la base orthonormée $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ par :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \varphi} = \left| \begin{array}{c} -asin\varphi cos\lambda \\ -asin\varphi sin\lambda \\ acos\varphi \end{array} \right. \quad (13)$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \lambda} = \left| \begin{array}{c} -acos\varphi sin\lambda \\ acos\varphi cos\lambda \\ 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2\|} = \left| \begin{array}{c} -cos\varphi cos\lambda \\ -cos\varphi sin\lambda \\ -sin\varphi \end{array} \right. \tag{15}$$

Matriciellement, on peut écrire (13),(14) et (15) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{e}_1}{a} \\ \frac{\mathbf{e}_2}{acos\varphi} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin\varphi cos\lambda & -sin\varphi sin\lambda & cos\varphi \\ -sin\lambda & cos\lambda & 0 \\ -cos\varphi cos\lambda & -cos\varphi sin\lambda & -sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Avec R la matrice :

$$R = \begin{pmatrix} -sin\varphi cos\lambda & -sin\varphi sin\lambda & cos\varphi \\ -sin\lambda & cos\lambda & 0 \\ -cos\varphi cos\lambda & -cos\varphi sin\lambda & -sin\varphi \end{pmatrix} \tag{17}$$

R est une matrice de rotation, donc matrice orthogonale vérifie :

$$R^{-1} = R^T \tag{18}$$

où T désigne la transposée de matrice.

On peut écrire alors :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = R^T \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{e}_1}{a} \\ \frac{\mathbf{e}_2}{acos\varphi} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -sin\varphi cos\lambda & -sin\lambda & -cos\varphi cos\lambda \\ -sin\varphi sin\lambda & cos\lambda & -cos\varphi sin\lambda \\ cos\varphi & 0 & -sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{e}_1}{a} \\ \frac{\mathbf{e}_2}{acos\varphi} \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \tag{19}$$

On peut écrire (16) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -asin\varphi cos\lambda & -asin\varphi sin\lambda & acos\varphi \\ -acos\varphi sin\lambda & acos\varphi cos\lambda & 0 \\ -cos\varphi cos\lambda & -cos\varphi sin\lambda & -sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \bar{R} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Avec $\bar{R}$ la matrice :

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} -asin\varphi cos\lambda & -asin\varphi sin\lambda & acos\varphi \\ -acos\varphi sin\lambda & acos\varphi cos\lambda & 0 \\ -cos\varphi cos\lambda & -cos\varphi sin\lambda & -sin\varphi \end{pmatrix} \tag{21}$$

De même (19) s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-sin\varphi cos\lambda}{a} & \frac{-sin\lambda}{acos\varphi} & -cos\varphi cos\lambda \\ \frac{-sin\varphi sin\lambda}{a} & \frac{cos\lambda}{acos\varphi} & -cos\varphi sin\lambda \\ \frac{cos\varphi}{a} & 0 & -sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{N} \end{pmatrix} \tag{22}$$

3.1 L'Expression des dérivées des vecteurs du repère local

Maintenant, on veut calculer $\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda}$ en fonction des vecteurs du repère local au point $M(\varphi, \lambda)$ de la sphère.

Pour les dérivées par rapport à φ, on utilise (20) :

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{N}\end{pmatrix} = \frac{\partial\bar{R}}{\partial\varphi}\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix} \tag{23}$$

En utilisant l'équation (22), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{N}\end{pmatrix} = \frac{\partial\bar{R}}{\partial\varphi}\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix} = \frac{\partial\bar{R}}{\partial\varphi}Q\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{N}\end{pmatrix} \tag{24}$$

Après calculs, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{N}\end{pmatrix} = U\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{N}\end{pmatrix} \tag{25}$$

avec U la matrice :

$$U = \begin{pmatrix}0 & 0 & a\\ 0 & -tg\varphi & 0\\ \frac{-1}{a} & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{26}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial\varphi} &= a\mathbf{N}\\ \frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial\varphi} &= -tg\varphi\mathbf{e}_2\\ \frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\varphi} &= -\frac{1}{a}\mathbf{e}_1\end{aligned} \tag{27}$$

De même, on a :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{N}\end{pmatrix} = \frac{\partial\bar{R}}{\partial\lambda}\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\\ \mathbf{k}\end{pmatrix} = \frac{\partial\bar{R}}{\partial\lambda}Q\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{N}\end{pmatrix} \tag{28}$$

Après calculs, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{N}\end{pmatrix} = V\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{N}\end{pmatrix} \tag{29}$$

avec V la matrice :

$$V = \begin{pmatrix}0 & -tg\varphi & 0\\ sin\varphi cos\varphi & 0 & acos^2\varphi\\ 0 & \frac{-1}{a} & 0\end{pmatrix} \tag{30}$$

Soit :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \lambda} = -tg\varphi \mathbf{e}_2$$
$$\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \lambda} = sin\varphi cos\varphi \mathbf{e}_1 + acos^2\varphi \mathbf{N} \tag{31}$$
$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \lambda} = -\frac{1}{a}\mathbf{e}_2$$

3.2 Utilisation du Théorème de l'opérateur de Peterson

Maintenant on va déterminer les coefficients des équations (9) et (10) et de les comparer aux précédentes équations (27) et (31). Pour cela, on va calculer les coefficients de Christoffel et les coefficients h_{ij}.

Pour la sphère, on a :

$$g = a^2 d\varphi^2 + a^2 cos^2\varphi d\lambda^2 \tag{32}$$

soit sous forme matricielle :

$$g = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 cos^2\varphi \end{pmatrix} \tag{33}$$

Ce qui donne :

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2 cos^2\varphi} \end{pmatrix} \tag{34}$$

Appliquant (11), on a :

$$\Gamma_{11}^1 = \sum_{l=1}^{l=2} \frac{g^{1l}}{2}\left(\frac{\partial g_{l1}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{l1}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u_l}\right) = 0; \quad \Gamma_{11}^2 = 0; \quad \Gamma_{12}^1 = 0; \quad \Gamma_{12}^2 = -tg\varphi$$

$$\Gamma_{22}^1 = cos\varphi sin\varphi; \quad \Gamma_{22}^2 = 0$$

Calculons les h_{ij}. On a :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \varphi^2}\left|\begin{array}{c} -acos\varphi cos\lambda \\ -acos\varphi sin\lambda \\ -asin\varphi \end{array}\right. ; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \varphi \partial \lambda}\left|\begin{array}{c} asin\varphi sin\lambda \\ -asin\varphi cos\lambda \\ 0 \end{array}\right. ; \quad \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \lambda^2}\left|\begin{array}{c} -acos\varphi cos\lambda \\ -acos\varphi sin\lambda \\ 0 \end{array}\right. ; \tag{35}$$

Par suite :

$$h_{11} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \varphi^2}.\mathbf{N} = a \tag{36}$$

$$h_{12} = h_{21} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \varphi \partial \lambda}.\mathbf{N} = 0 \tag{37}$$

$$h_{22} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial \lambda^2}.\mathbf{N} = acos^2\varphi \tag{38}$$

D'où :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \varphi} = \Gamma^1_{11}\mathbf{e}_1 + \Gamma^2_{11}\mathbf{e}_2 + h_{11}\mathbf{N} = a\mathbf{N} \tag{39}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \varphi} = \Gamma^1_{21}\mathbf{e}_1 + \Gamma^2_{21}\mathbf{e}_2 + h_{21}\mathbf{N} = -tg\varphi\mathbf{e}_2 \tag{40}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \lambda} = \Gamma^1_{12}\mathbf{e}_1 + \Gamma^2_{12}\mathbf{e}_2 + h_{12}\mathbf{N} = -tg\varphi\mathbf{e}_2 \tag{41}$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \lambda} = \Gamma^1_{22}\mathbf{e}_1 + \Gamma^2_{22}\mathbf{e}_2 + h_{22}\mathbf{N} = cos\varphi sin\varphi\mathbf{e}_1 + acos^2\varphi\mathbf{N} \tag{42}$$

En comparant (39-42) avec (27),(31) on trouve les mêmes expressions. De (27),(31), on déduit les coefficients de la matrice de l'opérateur de Peterson, à savoir :

$$A_{11} = \frac{1}{a} \tag{43}$$

$$A_{22} = \frac{1}{a} \tag{44}$$

$$A_{12} = A_{21} = 0 \tag{45}$$

4 Calcul des Coefficients de la Matrice de l'Opérateur de Peterson

D'après la définition de l'opérateur de Peterson, on a :

$$g(AX, X) = h(X, X) \quad \forall X \neq 0$$

Posons :

$$A = (A_{ij}); \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{46}$$

respectivement la matrice de l'opérateur de Peterson et un vecteur du plan tangent non nul, on a alors en utilisant la définition de l'opérateur de Peterson :

$$AX = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \tag{47}$$

En utilisant (6), on a :

$$(r, s). \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y). \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{48}$$

Soit le système :

$$(r, s). \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2cos^2\varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y). \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & acos^2\varphi \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{49}$$

ce qui donne l'équation :

$$x^2a^2A_{11} + y^2a^2cos^2\varphi A_{22} + xya^2(A_{12} + A_{21}cos^2\varphi) = ax^2 + ay^2cos^2\varphi \tag{50}$$

D'où les coefficients A_{ij}, le point est supposé non au pôle, :

$$A_{11} = \frac{1}{a} \tag{51}$$

$$A_{12} = a_{21} = 0 \tag{52}$$

$$A_{22} = \frac{1}{a} \tag{53}$$

On retrouve les coefficients données par (43 - 44 -45).

On laisse au lecteur à titre d'exercice l'étude du cas de l'ellipsoïde de révolution.

Références

[1] . **Catherine Doss-Bachelet, Jean-Pierre Françoise, Claude Piquet**. 2000. Géométrie différentielle. Collection Mathématiques 2e Cycle, cours et exercices corrigés, dirigée par Charles-Michel Marle et Philippe Pilibossian. Ellipses, 200p.