Le Calcul des Géodésiques de l'Ellipsoïde de Révolution*

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Dipl.-Eng.
Email :abenhadjsalem@gmail.com
6, Rue du Nil, Cité Soliman Er-Riadh, 8020 Soliman, Tunisia.

1 Calcul des Lignes Géodésiques de L'Ellipsoide de Révolution

> " A côté de la difficulté principale, de celle qui tient au fond même des choses, il y a une foule de difficultés secondaires qui viennent compliquer encore la tâche du chercheur. Il y aurait donc intérêt à étudier d'abord un problème où l'on rencontrerait cette difficulté principale, mais où l'on serait affranchis de toutes les difficultés secondaires. Ce problème est tout trouvé, c'est celui des **lignes géodésiques** d'une surface ; c'est encore un problème de dynamique, de sorte que la difficulté principale subsiste ; mais c'est le plus simple de tous les problèmes de dynamique. "
>
> (**H. Poincaré**[1], 1905)

Après avoir défini les lignes géodésiques d'une surface, on établit les équations des géodésiques pour une surface donnée. Comme application, nous détaillons celles de l'ellipsoïde de révolution. On fera l'intégration de ces équations.

1.1 Introduction et Notations

Soit (S) une surface définie par les paramètres (u, v) avec $(u, v) \in D$ un domaine $\subset \mathbb{R}^2$. Un point $M \in (S)$ vérifie :

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OM}(u, v) \tag{1.1}$$

*07 novembre 2015.

1. **Henri Poincaré** (1854-1912) : Mathématicien français, parmi les plus grands du XIXème siècle.

On introduit les notations usuelles :

$$E = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} \right\|^2 \tag{1.2}$$

$$F = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} \tag{1.3}$$

$$G = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} \right\|^2 \tag{1.4}$$

Des équations (1.2-1.3-1.4), on obtient les équations :

$$\frac{\partial E}{\partial u} = 2\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}.\frac{\partial^2 M}{\partial u^2} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 2\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}.\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial^2 M}{\partial u^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}.\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial^2 M}{\partial v^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}.\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}.\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v} \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = 2\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}.\frac{\partial^2 M}{\partial v^2} \tag{1.10}$$

Soit $\boldsymbol{n}$ le vecteur unitaire normal en $M(u,v)$ à la surface (S), $\boldsymbol{n}$ est donné par :

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}}{H} \tag{1.11}$$

avec :

$$H = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} \right\| \tag{1.12}$$

D'où :

$$ds^2 = E.du^2 + 2.F.du.dv + G.dv^2 \tag{1.13}$$

L'équation (1.13) représente le carré infinitésimal de la longueur de l'arc.

Soit une courbe (Γ) tracée sur (S) et $\boldsymbol{N}$ est le vecteur unitaire de la normale principale le long de (Γ).

Définition : *Une courbe* (Γ) *est dite ligne géodésique de la surface* (S) *si et seulement si les vecteurs* $\boldsymbol{n}$ *et* $\boldsymbol{N}$ *sont colinéaires.*
On démontre par le calcul des variations (*P. Petersen*, 1998) que la ligne géodésique entre deux points d'une surface (S) lorsqu'elle existe est la courbe de longueur minimale joignant les deux points.

1.2 Les Equations Différentielles des Lignes Géodésiques

Calculons l'expression de $\boldsymbol{N}$, on a :

$$\boldsymbol{N} = R\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \tag{1.14}$$

Or :

$$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{M}}{ds} = \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\frac{dv}{ds} \tag{1.15}$$

D'où :

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = \frac{\partial^2 M}{\partial u^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \tag{1.16}$$

La condition $\boldsymbol{n} \,//\, \boldsymbol{N}$ peut être écrite :

$$\boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{n} = 0 \tag{1.17}$$

soit :

$$R\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \wedge \left(\frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}}{H}\right) = 0 \tag{1.18}$$

Utilisant la formule du produit vectoriel :

$$\boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{1.19}$$

On obtient :

$$\left(\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\right)\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} - \left(\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\right)\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} = 0 \tag{1.20}$$

Or $\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}$ forment une base du plan tangent en M, d'où les deux conditions :

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\boldsymbol{T}}{ds}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u} = 0 \tag{1.21}$$

Ce qui donne deux équations différentielles du second ordre :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + F\frac{d^2u}{ds^2} + 2\frac{\partial^2 M}{\partial u \partial v}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{\partial^2 M}{\partial v^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + G\frac{d^2v}{ds^2} = 0 \tag{1.22}$$

et :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial v^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+F\frac{d^2v}{ds^2}+2\frac{\partial^2 M}{\partial u\partial v}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}.\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+E\frac{d^2u}{ds^2}=0 \tag{1.23}$$

Posons :

$$\begin{aligned} E'_u &= \frac{\partial E}{\partial u}; \quad E'_v = \frac{\partial E}{\partial v}; \quad F'_u = \frac{\partial F}{\partial u} \\ F'_v &= \frac{\partial F}{\partial v}; \quad G'_u = \frac{\partial G}{\partial u}; \quad G'_v = \frac{\partial G}{\partial v} \end{aligned} \tag{1.24}$$

Utilisons les équations (1.5) à (1.10), (1.22) et 1.23), ces 2 dernières équations peuvent être écrites :

$$\boxed{(F'_u - \frac{E'_v}{2})\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + F\frac{d^2u}{ds^2} + G'_u\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \frac{G'_v}{2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + G\frac{d^2v}{ds^2} = 0} \tag{1.25}$$

$$\boxed{(F'_v - \frac{G'_u}{2})\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + F\frac{d^2v}{ds^2} + E'_v\frac{dv}{ds}\frac{du}{ds} + \frac{E'_u}{2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + E\frac{d^2u}{ds^2} = 0} \tag{1.26}$$

1.3 Détermination des Lignes Géodésiques de l'Ellipsoïde de révolution

Considérons maintenant comme surface l'ellipsoïde de révolution qu'on paramètre comme suit :

$$\begin{aligned} X &= N.cos\varphi cos\lambda \\ Y &= Ncos\varphi sin\lambda \\ Z &= N(1-e^2)sin\varphi \end{aligned} \tag{1.27}$$

où :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}} = aW^{-1/2}$$

est le rayon de courbure de la grande normale avec :

$$W = 1 - e^2sin^2\varphi$$

Appelons :

$$r = Ncos\varphi \tag{1.28}$$

le rayon du parallèle de latitude φ et ρ le rayon de courbure de la méridienne donné par :

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2sin^2\varphi}} = a(1-e^2)W^{-3/2}$$

Alors la première forme fondamentale s'écrit :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2 \tag{1.29}$$

En prenant comme variables $u = \varphi$ et $v = \lambda$, nous obtenons :

$$E = E(\varphi) = \rho^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \tag{1.30}$$

$$E'_\varphi = 2\rho\rho',\ E'_\lambda = 0,\ F'_\varphi = F'_\lambda = 0,\ G'_\varphi = 2rr' = -2r\rho sin\varphi,\ G'_\lambda = 0 \tag{1.31}$$

Alors les équations (1.25) et (1.26) deviennent :

$$-2r\rho sin\varphi \frac{d\varphi}{ds}\frac{d\lambda}{ds} + r^2 \frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0 \tag{1.32}$$

$$r\rho sin\varphi \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \rho\rho' \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \rho^2 \frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0 \tag{1.33}$$

La première équation s'écrit :

$$\frac{d}{ds}\left(r^2 \frac{d\lambda}{ds}\right) = 0 \tag{1.34}$$

dont l'intégration donne :

$$r^2 \frac{d\lambda}{ds} = C = constante \tag{1.35}$$

Nous retrouvons la relation de Clairaut (*J. Lemenestrel*, 1980) :[2]

$$\boxed{r.sinAz = constante = C = asinAze} \tag{1.36}$$

où Az est l'azimut de la géodésique au point M et Aze son azimut initial au point M_0 à l'équateur.

L'équation (1.33) s'écrit :

$$\rho \left(rsin\varphi \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \rho' \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \rho \frac{d^2\varphi}{ds^2} \right) = 0 \tag{1.37}$$

Ce qui donne :

- $\rho = 0$ le point M est sur l'équateur : $\varphi = 0$ et $r = a$ le demi-grand axe de l'ellipsoïde et l'équation (1.32) devient :

$$\frac{d^2\lambda}{ds^2} = 0 \tag{1.38}$$

dont l'intégration donne :

$$\lambda - \lambda_0 = l(s - s_0) \tag{1.39}$$

2. **Alexis Claude de Clairaut** (1713-1765) : Mathématicien, astronome et géophysicien français.

le point M décrit l'équateur et la géodésique est le grand cercle de rayon a.

- $\rho \neq 0$, le point M n'est pas sur l'équateur, l'équation (1.33) s'écrit comme suit :

$$\rho\frac{d^2\varphi}{ds^2}+\rho'\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+rsin\varphi\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2=0 \tag{1.40}$$

Pour intégrer (1.40), utilisons une nouvelle fonction, soit :

$$Z=\frac{d\lambda}{d\varphi} \tag{1.41}$$

De (1.35), on obtient :

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{d\varphi}{d\lambda}\frac{d\lambda}{ds}=\frac{C}{r^2}\frac{d\varphi}{d\lambda}=\frac{C}{r^2Z}$$

soit :

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{C}{r^2Z} \tag{1.42}$$

Exprimons maintenant la dérivée seconde $d^2\varphi/ds^2$:

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)=\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)\frac{d\varphi}{ds}=\frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \tag{1.43}$$

L'équation (1.40) s'écrit en utilisant (1.35) et (1.43) :

$$\frac{\rho}{2}\frac{d}{d\varphi}\left[\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right]+\rho'\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+sin\varphi\left(\frac{C^2}{r^3}\right)=0 \tag{1.44}$$

Posons :

$$U=\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \tag{1.45}$$

L'équation (1.44) devient :

$$\frac{\rho}{2}\frac{dU}{d\varphi}+\rho'U=-\frac{C^2sin\varphi}{r^3} \tag{1.46}$$

L'équation (1.46) est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre. Sa résolution sans second membre donne :

$$U=\frac{k}{\rho^2} \tag{1.47}$$

En utilisant le second membre de (1.46), on considère que k est une fonction de φ, on a alors :

$$U=\frac{1}{\rho^2}\left(k_0-\frac{C^2}{r^2}\right)=\frac{k_0r^2-C^2}{\rho^2r^2} \tag{1.48}$$

avec k_0 la constante d'intégration. U étant une fonction positive, on doit avoir :

$$k_0 r^2 - C^2 > 0 \tag{1.49}$$

Revenant à l'équation (1.45), on obtient :

$$U = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \frac{k_0 r^2 - C^2}{\rho^2 r^2} \tag{1.50}$$

Utilisons les équations (1.42) et (1.50), on obtient :

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \frac{k_0 r^2 - C^2}{\rho^2 r^2} = \left(\frac{C}{r^2 Z}\right)^2 = \frac{C^2}{r^4 Z^2} = \frac{C^2}{r^4}\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \tag{1.51}$$

ce qui donne :

$$\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\rho^2}{r^2}\frac{C^2}{k_0 r^2 - C^2} \tag{1.52}$$

Déterminons la valeur de k_0. Pour cela, nous exprimons $\dfrac{d\lambda}{ds}$ en utilisant les équations (1.35) et (1.52). Calculons ds^2, on obtient :

$$ds^2 = \rho^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2 = \frac{r^2(k_0 r^2 - C^2)}{C^2}d\lambda^2 + r^2 d\lambda^2$$

soit :

$$ds^2 = \frac{r^4 k_0}{C^2}d\lambda^2 \Rightarrow \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \frac{C^2}{k_0 r^4} \tag{1.53}$$

Or d'après (1.35) :

$$\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 = \frac{C^2}{r^4}$$

d'où alors $k_0 = 1$ et par suite :

$$\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\rho^2}{r^2}\frac{C^2}{r^2 - C^2} \tag{1.54}$$

Pour pouvoir intégrer l'équation précédente, exprimons $r^2 - C^2$, d'où :

$$\begin{aligned} r^2 - C^2 = N^2 cos^2\varphi - C^2 = \frac{a^2 cos^2\varphi}{1 - e^2 sin^2\varphi} - C^2 = \\ \frac{(a^2 - C^2)\left(1 - \frac{a^2 - C^2 e^2}{a^2 - C^2} sin^2\varphi\right)}{W} \end{aligned} \tag{1.55}$$

Posons :

$$k^2 = \frac{a^2 - C^2 e^2}{a^2 - C^2} \tag{1.56}$$

D'où :

$$r^2 - C^2 = (a^2 - C^2)(1 - k^2 sin^2\varphi)/W \tag{1.57}$$

Remarquons que le coefficient k est supérieur à 1, donc la latitude géodésique φ reste inférieure à la latitude φ_1 définie par $sin\varphi_1 = 1/k$.

Alors l'équation (1.54) s'écrit :

$$\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)^2 = \frac{(1-e^2)^2C^2}{(a^2-C^2)cos^2\varphi(1-e^2sin^2\varphi)(1-k^2sin^2\varphi)} \tag{1.58}$$

D'où en remplaçant C par $a.sin(Aze)$ et comme $tg(Aze)$ est de même signe que $(d\lambda/d\varphi)$, on peut écrire alors :

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \frac{(1-e^2)tg(Aze)}{cos\varphi\sqrt{(1-e^2sin^2\varphi)(1-k^2sin^2\varphi)}} \tag{1.59}$$

Soit en intégrant entre 0 et φ :

$$\lambda - \lambda_e = \int_0^{\varphi} \frac{(1-e^2)tg(Aze)}{cost\sqrt{(1-e^2sin^2t)(1-k^2sin^2t)}}dt =$$

$$(1-e^2)tg(Aze)\int_0^{\varphi} \frac{dt}{cost\sqrt{(1-e^2sin^2t)(1-k^2sin^2t)}}$$

ou encore :

$$\lambda - \lambda_e = (1-e^2)tg(Aze)\int_0^{\varphi} \frac{dt}{cost\sqrt{(1-e^2sin^2t)(1-k^2sin^2t)}} \tag{1.60}$$

En prenant comme variable $w = sint$, l'intégrale (1.60) devient :

$$\boxed{\lambda - \lambda_e = (1-e^2)tg(Aze)\int_0^{sin\varphi} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-e^2w^2)(1-k^2w^2)}}} \tag{1.61}$$

Cherchons à exprimer l'abscisse curviligne s en fonction de φ. Or l'expression de ds^2 est égale à :

$$ds^2 = \rho^2d\varphi^2 + r^2d\lambda^2 = \rho^2d\varphi^2 + \frac{C^2}{r^2}ds^2$$

soit :

$$ds^2 = \frac{r^2\rho^2d\varphi^2}{r^2-C^2} = \frac{a^2(1-e^2)^2cos^2\varphi d\varphi^2}{cos^2(Aze)(1-e^2sin^2\varphi)^3(1-k^2sin^2\varphi)} \tag{1.62}$$

D'où :

$$ds = \frac{a(1-e^2)cos\varphi d\varphi}{cos(Aze)(1-e^2sin^2\varphi)\sqrt{(1-k^2sin^2\varphi)(1-e^2sin^2\varphi)}} \tag{1.63}$$

En prenant $t = sin\varphi$ comme nouvelle variable, l'intégrale de (1.63) donne en prenant comme origine de l'abscisse curviligne s un point de l'équateur :

$$\boxed{s = \frac{a(1-e^2)}{cosAze}\int_0^{sin\varphi} \frac{dt}{(1-e^2t^2)\sqrt{(1-k^2t^2)(1-e^2t^2)}}} \tag{1.64}$$

Les intégrales (1.61) et (1.64) sont des intégrales elliptiques de troisième espèce.

2 Applications aux Problèmes Direct et Inverse du Calcul des Lignes Géodésiques

Dans cette deuxième partie, on va traiter numériquement l'application des formules précédentes dans la résolution des problèmes dits direct et inverse du calcul des lignes géodésiques.

2.1 Le Problème Direct

On donne :
- (φ_1, λ_1) d'un point M_1,
- la longueur s de la géodésique de M_1 à M_2,
- l'azimut géodésique Az_1 de la ligne géodésique de M_1 à M_2.

On demande de calculer :
- les coordonnées géodésiques (φ_2, λ_2) de M_2,
- l'azimut géodésique Az_2 en M_2.

Solution : 1. Calcul de la constante C, $C = N(\varphi_1).cos\varphi_1.sinAz_1 = a.sin(Aze)$ d'où Aze et k.

2. Détermination de φ_2 à partir de :

$$\Delta s = \frac{a(1-e^2)}{cosAze}\frac{cos\varphi_1\Delta\varphi}{(1-e^2sin^2\varphi_1)\sqrt{(1-k^2sin^2\varphi_1)(1-e^2sin^2\varphi_1)}}$$

avec $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

3. Ayant φ_2, on calcule λ_2 par :

$$\lambda_2 - \lambda_1 = (1-e^2)tg(Aze)\int_{sin\varphi_1}^{sin\varphi_2}\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-e^2w^2)(1-k^2w^2)}}$$

4. Le calcul de Az_2 se fait par $sin(Az_2) = C/r(\varphi_2)$.

2.2 Le Problème Inverse

On donne les coordonnées (φ_1, λ_1) et (φ_2, λ_2) de deux points M_1 et M_2. On demande de calculer :
- la longueur s de la ligne géodésique de M_1 à M_2,
- l'azimut Az_1 en M_1,
- l'azimut géodésique Az_2 en M_2.

Solution :

1. On doit calculer la constante C. A partir de l'équation (1.54), on peut écrire que :

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}\right)^2 = \frac{\rho^2(\varphi_1)}{r^2(\varphi_1)}\frac{C^2}{(r^2(\varphi_1)-C^2)} = \frac{(\lambda_2-\lambda_1)^2}{(\varphi_2-\varphi_1)^2}$$

ce qui donne C :

$$C = \frac{\frac{r^2}{\rho}\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}}{\sqrt{1+\frac{r^2}{\rho^2}\left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}\right)^2}}$$

En considérant l'azimut compris entre 0 et π, donc Az est positif, C est positif. En le calculant pour φ_1 et φ_2, on obtient C par la valeur moyenne :

$$C = \frac{C_1(\varphi_1)+C_2(\varphi_2)}{2}$$

2. Par suite, on obtient la valeur de k par (1.56) :

$$k = \frac{a^2 - C^2e^2}{a^2 - C^2}$$

3. Ayant C, on a par (1.36), Az_1 et Az_2 :

$$sinAz_1 = \frac{C}{r(\varphi_1)} \quad \text{et} \quad sinAz_2 = \frac{C}{r(\varphi_2)}$$

4. Par suite, on a aussi Az_e :

$$sinAz_e = \frac{C}{a}$$

5. Enfin, l'équation (1.64) détermine s.
   On itère le processus.

2.3 Calcul de l'Expression (1.64)

Dans ce paragraphe, on calcule en détails :

$$s = \frac{a(1-e^2)}{cosAz_e}\int_0^{sin\varphi}\frac{dt}{(1-e^2t^2)\sqrt{(1-k^2t^2)(1-e^2t^2)}}$$

Pour $|x| < 1$, on a les développements limités suivants :

$$\frac{1}{(1+x)^{3/2}} = 1 - \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 - \frac{35}{16}x^3 + \frac{315}{128}x^4 + ... \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} + ... \tag{2.2}$$

En prenant $x = -e^2t^2$ et $x = k^2t^2$, on obtient :

$$\frac{1}{(1-e^2t^2)^{3/2}} = 1 + \frac{3}{2}e^2t^2 + \frac{15}{8}e^4t^4 + \frac{35}{16}e^6t^6 + \frac{315}{128}e^8t^8 + ...$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2t^2}} = 1 + \frac{k^2t^2}{2} + \frac{3k^4t^4}{8} + \frac{5k^6t^6}{16} + \frac{35k^8t^8}{128} + ... \tag{2.3}$$

Par suite :

$$\frac{1}{(1-e^2t^2)\sqrt{(1-k^2t^2)(1-e^2t^2)}} = 1 + \frac{k^2+3e^2}{2}t^2 + \frac{3k^4+6e^2k^2+15e^4}{8}t^4 + \frac{5k^6+9k^4e^2+15k^2e^4+35e^6}{16}t^6 + \frac{35k^8+60k^6e^2+90k^4e^4+140k^2e^6+315e^8}{128}t^8 + ... \tag{2.4}$$

ou encore à l'ordre 4 :

$$\frac{1}{(1-e^2t^2)\sqrt{(1-k^2t^2)(1-e^2t^2)}} = 1 + mt^2 + nt^4 + ...$$

$$m = \frac{k^2+3e^2}{2}; \quad n = \frac{3k^4+6e^2k^2+15e^4}{8}$$

2.4 Calcul de l'expression (1.61)

On a :

$$\lambda - \lambda_e = (1-e^2)tg(Aze)\int_0^{sin\varphi} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-e^2w^2)(1-k^2w^2)}}$$

soit dans notre cas :

$$\lambda_2 - \lambda_1 = (1-e^2)tg(Aze)\int_{sin\varphi_1}^{sin\varphi_2} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-e^2t^2)(1-k^2t^2)}}$$

Or d'après (2.2) :

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^2t^2}} = 1 + \frac{1}{2}e^2t^2 + \frac{3}{8}e^4t^4 + \frac{5}{16}e^6t^6 + \frac{35}{128}e^8t^8 + ...$$

et :

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2t^2}} = 1 + \frac{k^2t^2}{2} + \frac{3k^4t^4}{8} + \frac{5k^6t^6}{16} + \frac{35k^8t^8}{128} + ...$$

de même :

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{3t^4}{8} + \frac{5t^6}{16} + \frac{35t^8}{128} + ... \tag{2.5}$$

D'où :

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-e^2t^2)(1-k^2t^2)}} = 1 + \frac{1+k^2+e^2}{2}t^2 + \frac{3+2k^2+2e^2+3k^4+2e^2k^2+3e^4}{8}t^4 + \frac{5+3k^2+3e^2+3k^4+2e^2k^2+3e^4+5k^6+3k^4e^2+3k^2e^4+5e^6}{16}t^6 + ...$$

Qu'on écrit sous la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-e^2t^2)(1-k^2t^2)}} = 1 + \alpha t^2 + \beta t^4 + \gamma t^6 + ... \tag{2.6}$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1+k^2+e^2}{2} \\ \beta = \dfrac{3+2k^2+2e^2+3k^4+2e^2k^2+3e^4}{8} \\ \gamma = \dfrac{5+3k^2+3e^2+3k^4+2e^2k^2+3e^4+5k^6+3k^4e^2+3k^2e^4+5e^6}{16} \end{cases} \tag{2.7}$$

2.5 Traitement d'un exemple

2.5.1 Le Problème direct

Soit le point M_1 avec :
- $\varphi_1 = 10.4549\,8299\,gr$,
- $\lambda_1 = 9.5954\,2429\,gr$,
- $Az_1 = 249.3101\,68\,gr$,
- $s = 16255.206\,m$.

Solution :
- $C = N(\varphi_1).cos\varphi_1.sinAz_1 = -3'594\,478.080\,m$,
- $Az_e = 238.1131\,471\,gr$,
- $k = \sqrt{\dfrac{a^2-C^2e^2}{a^2-C^2}} = 1.209227584$

-Pour calculer φ_2, on pose $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, et $s = \Delta s$ on a alors l'équation :

$$\frac{s.cosAz_e}{a(1-e^2)} = \frac{\Delta\varphi cos\varphi_1}{(1-e^2sin^2\varphi_1)\sqrt{(1-k^2sin^2\varphi_1)(1-e^2sin^2\varphi_1)}}$$

Références

H. Poincaré. 1905. Sur les Lignes géodésiques des surfaces convexes. Transactions of the American Mathematical Society. n°6, pp. 237-274 ; Œuvres 6, pp. 38-84.

P. Petersen. 1998. *Riemannian Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, n°171. Springer-Verlag. 435p.

J. Lemenestrel. 1980. *Cours de Géodésie Elémentaire*, ENSG, IGN France.