Sobre la Paradoja de los Gemelos

A. Blato

(2015) Buenos Aires
Argentina

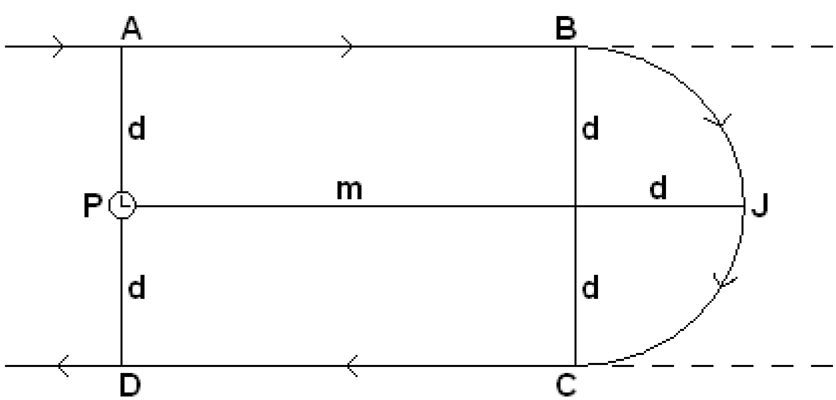
Introducción

Este artículo presenta un ejemplo didáctico y relativamente sencillo que podría ser muy útil para examinar la paradoja de los gemelos.

Por otro lado, este ejemplo podría también ser muy útil para examinar la geometría espacial desde un sistema no inercial.

Procedimiento

En este ejemplo hay dos observadores: **P**epe (que siempre es un observador inercial) y **J**uan (que no siempre es un observador inercial)



Sistemas de Referencia Pepe, Juan y Auxiliares

Unidades de medida

Velocidad: 100000 km/s

Distancia: 100000 km

Tiempo: 1 s

Sistema de Referencia Inercial Pepe

Datos Iniciales

$\overline{\mathrm{AB}} + \widehat{\mathrm{BJC}} + \overline{\mathrm{CD}} = 24$

$\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{CD}} = 2\ \mathrm{m}$

$\widehat{\mathrm{BJC}} = \pi\ \mathrm{d}$

Ecuación Base

$\mathrm{m} = 12 - 0.5\ \pi\ \mathrm{d}$

Variable d

$0 < \mathrm{d} < 24/\pi$

Notas

En este ejemplo la única variable independiente es **d**.

Si **d** tiende a **0** entonces **m** tiende a **12**. Es principalmente en esta opción donde el reloj pulsera de Pepe avanza de una manera vertiginosa respecto al sistema (no inercial) de Juan.

Si **d** tiende a $24/\pi$ entonces **m** tiende a **0**. Es principalmente en esta opción donde este ejemplo podría también ser muy útil para examinar la geometría espacial desde el sistema (no inercial) de Juan.

- - - - - - - - - - - - - - -

Antes de comenzar el experimento Pepe determina el valor de la variable **d** y coloca una estrella (o un meteoroide) en cada uno de los puntos **A**, **B**, **J**, **C** y **D** que permanecen fijos (en reposo) respecto al sistema de Pepe.

Cuando comienza el experimento el reloj pulsera de Pepe siempre indica 0 Seg. en el punto **P** (respecto al sistema de Pepe) y el reloj pulsera de Juan siempre indica 0 Seg. en el punto **A** (respecto al sistema de Pepe)

Cuando finaliza el experimento el reloj pulsera de Pepe siempre indica 10 Seg. en el punto **P** (respecto al sistema de Pepe) y el reloj pulsera de Juan siempre indica 6 Seg. en el punto **D** (respecto al sistema de Pepe)

- - - - - - - - - - - - - - -

La velocidad del reloj pulsera de Juan respecto al sistema de Pepe es siempre de: $v = |\,2.4\,|$ (constante)

La velocidad del reloj pulsera de Pepe respecto al sistema de Juan es siempre de: $v = |\,2.4\,|$ (constante)

Por lo tanto, tanto para Pepe y como para Juan el factor gamma es: $\gamma = 1.\widehat{6}$ y su inverso es: $\gamma^{-1} = 0.6$

El sistema de Pepe en todo el experimento es siempre un sistema inercial.

El sistema de Juan es siempre un sistema inercial en el recorrido que va desde del punto **A** hasta el punto **B** y el sistema de Juan es siempre también un sistema inercial en el recorrido que va desde del punto **C** hasta el punto **D**.

El sistema de Juan es siempre un sistema no inercial en el recorrido que va desde el punto **B** hasta el punto **C** (pero en los puntos **B** y **C** el sistema de Juan es siempre un sistema inercial)

\- - - - - - - - - - - - - -

El sistema de Juan puede ser representado por otro sistema inercial auxiliar en el recorrido que va desde el punto **A** hasta el punto **B**. Este sistema inercial auxiliar será llamado sistema inercial de la Nave 1 (la Nave 1 luego del punto **B** sigue su viaje según como indican las rayas suspensivas de arriba)

El sistema de Juan puede ser representado por otro sistema inercial auxiliar en el recorrido que va desde el punto **C** hasta el punto **D**. Este sistema inercial auxiliar será llamado sistema inercial de la Nave 2 (la Nave 2 antes del punto **C** viene de su viaje según como indican las rayas suspensivas de abajo)

El sistema de Juan puede ser representado por otros sistemas inerciales auxiliares en el recorrido que va desde el punto **B** hasta el punto **C**. En este recorrido cada sistema inercial auxiliar será llamado sistema inercial de la Nave X (donde $1 < X < 2$)

\- - - - - - - - - - - - - -

Acto A: Cuando el reloj pulsera de Juan pasa por el punto **A**.

Acto B: Cuando el reloj pulsera de Juan pasa por el punto **B**.

Acto J: Cuando el reloj pulsera de Juan pasa por el punto **J**.

Acto C: Cuando el reloj pulsera de Juan pasa por el punto **C**.

Acto D: Cuando el reloj pulsera de Juan pasa por el punto **D**.

\- - - - - - - - - - - - - -

1) Armando el relato del sistema de Pepe: Cada vez que sucede un Acto el sistema de Pepe debe anotar los siguientes datos:

Ubicación (x,y) del reloj pulsera de Juan (respecto al sistema de Pepe), tiempo (t) en que el sistema de Pepe hizo esa medición (x,y) y también debe anotar lo que está indicando el reloj pulsera de Juan (T)

2) Armando el relato del sistema de Juan: Cada vez que sucede un Acto el sistema de Juan debe anotar los siguientes datos:

Ubicación (x,y) del reloj pulsera de Pepe (respecto al sistema de Juan), tiempo (t) en que el sistema de Juan hizo esa medición (x,y) y también debe anotar lo que está indicando el reloj pulsera de Pepe (T)

Base

- - - - - - - - - - - - - - -

$0 < \mathrm{d} < 24/\pi$

$\mathrm{m} = 12 - 0.5\ \pi\ \mathrm{d}$

$\gamma = 1.\widehat{6} \longmapsto \gamma^{-1} = 0.6$

$\upsilon = |\, 2.4 \,| \longmapsto \upsilon^{-1} = 0.41\widehat{6}$

- - - - - - - - - - - - - - -

Acto A [En este Acto A los valores de t y de T no dependen del valor de la variable **d**]

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (0,d,0);(0)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (0,-d,0);(0)

Acto B [En este Acto B los valores de t y de T sí dependen del valor de la variable **d**]

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (m,d,υ^{-1}m);($\gamma^{-1}\upsilon^{-1}$m)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (-γ^{-1}m,-d,$\gamma^{-1}\upsilon^{-1}$m);($\gamma^{-1}\gamma^{-1}\upsilon^{-1}$m)

Acto J [En este Acto J los valores de t y de T no dependen del valor de la variable **d**]

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (m+d,0,5);(3)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (-m-d,0,3);(5)

Acto C [En este Acto C los valores de t y de T sí dependen del valor de la variable **d**]

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (m,-d,10$-\upsilon^{-1}$m);(6$-\gamma^{-1}\upsilon^{-1}$m)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (-γ^{-1}m,d,6$-\gamma^{-1}\upsilon^{-1}$m);(10$-\gamma^{-1}\gamma^{-1}\upsilon^{-1}$m)

Acto D [En este Acto D los valores de t y de T no dependen del valor de la variable **d**]

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (0,-d,10);(6)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (0,d,6);(10)

Ej. 1

- - - - - - - - - - - - - - -

$\mathrm{d} = 4.8\,\pi^{-1}$

$\longmapsto \mathrm{m} = 9.6$

$\gamma = 1.\widehat{6} \longmapsto \gamma^{-1} = 0.6$

$v = |\,2.4\,| \longmapsto v^{-1} = 0.41\widehat{6}$

- - - - - - - - - - - - - - -

Acto A

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (0,d,0);(0)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (0,-d,0);(0)

Acto B

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (9.6,d,4);(2.4)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (-5.76,-d,2.4);(1.44)

Acto J

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (9.6+d,0,5);(3)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (-9.6-d,0,3);(5)

Acto C

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (9.6,-d,6);(3.6)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (-5.76,d,3.6);(8.56)

Acto D

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (0,-d,10);(6)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (0,d,6);(10)

Ej. 2

- - - - - - - - - - - - - - -

$\mathrm{d} = 8\,\pi^{-1}$

$\longmapsto \mathrm{m} = 8$

$\gamma = 1.\widehat{6} \longmapsto \gamma^{-1} = 0.6$

$v = |\,2.4\,| \longmapsto v^{-1} = 0.41\widehat{6}$

- - - - - - - - - - - - - - -

Acto A

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (0,d,0);(0)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (0,-d,0);(0)

Acto B

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (8,d,3.33);(2.0)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (-4.8,-d,2.0);(1.2)

Acto J

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (8+d,0,5);(3)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (-8-d,0,3);(5)

Acto C

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (8,-d,6.66);(4.0)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (-4.8,d,4.0);(8.8)

Acto D

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (0,-d,10);(6)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (0,d,6);(10)

Ej. 3

- - - - - - - - - - - - - - -

$\mathrm{d} \approx 0$

$\longmapsto \mathrm{m} \approx 12$

$\gamma = 1.\overset{\frown}{6} \longmapsto \gamma^{-1} = 0.6$

$v = |\,2.4\,| \longmapsto v^{-1} = 0.41\overset{\frown}{6}$

- - - - - - - - - - - - - - -

Acto A

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (0,0,0);(0)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (0,0,0);(0)

Acto B

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (12,0,5);(3)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (-7.2,0,3);(1.8)

Acto J

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (12,0,5);(3)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (-12,0,3);(5)

Acto C

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (12,0,5);(3)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (-7.2,0,3);(8.2)

Acto D

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (0,0,10);(6)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (0,0,6);(10)

Ej. 4

- - - - - - - - - - - - - - -

$\mathrm{d} \approx 24\,\pi^{-1}$

$\longmapsto \mathrm{m} \approx 0$

$\gamma = 1.\widehat{6} \longmapsto \gamma^{-1} = 0.6$

$v = |\,2.4\,| \longmapsto v^{-1} = 0.41\widehat{6}$

- - - - - - - - - - - - - - -

Acto A

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (0,7.64,0);(0)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (0,-7.64,0);(0)

Acto B

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (0,7.64,0);(0)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (0,-7.64,0);(0)

Acto J

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (7.64,0,5);(3)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (-7.64,0,3);(5)

Acto C

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (0,-7.64,10);(6)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (0,7.64,6);(10)

Acto D

1) Para el sistema de Pepe el reloj pulsera de Juan: (x,y,t);(T) (0,-7.64,10);(6)

2) Para el sistema de Juan el reloj pulsera de Pepe: (x,y,t);(T) (0,7.64,6);(10)

Observaciones

• Los sistemas de referencia de Pepe y de Juan nunca rotan entre sí (el eje horizontal es el eje «x» con signo «+» a la derecha del origen y el eje vertical es el eje «y» con signo «+» por encima del origen)

• «Sistema de Pepe» = «Sistema de referencia de Pepe», «Sistema de Juan» = «Sistema de referencia de Juan», «Sistema de la Nave 1» = «Sistema de referencia de la Nave 1», etc.

• El reloj pulsera de Pepe siempre coincide con el origen del sistema de referencia Pepe y el reloj pulsera de Juan siempre coincide con el origen del sistema de referencia de Juan.

• «Tiempo del reloj pulsera de Pepe» = «Tiempo propio de Pepe como persona» y «Tiempo del reloj pulsera de Juan» = «Tiempo propio de Juan como persona».

• El suceso cuando el reloj pulsera de Pepe indica 0 Seg. en el punto **P** y el suceso cuando el reloj pulsera de Juan indica 0 Seg. en el punto **A** (Acto A) siempre son sucesos simultáneos tanto para el sistema de Pepe como para el sistema de Juan.

• El suceso cuando el reloj pulsera de Pepe indica 5 Seg. en el punto **P** y el suceso cuando el reloj pulsera de Juan indica 3 Seg. en el punto **J** (Acto J) siempre son sucesos simultáneos tanto para el sistema de Pepe como para el sistema de Juan.

• El suceso cuando el reloj pulsera de Pepe indica 10 Seg. en el punto **P** y el suceso cuando el reloj pulsera de Juan indica 6 Seg. en el punto **D** (Acto D) siempre son sucesos simultáneos tanto para el sistema de Pepe como para el sistema de Juan.

• El suceso cuando el reloj pulsera de Pepe indica 5 Seg. en el punto **P** y el suceso cuando el reloj pulsera de Juan indica 3 Seg. en el punto **J** (Acto J) nunca son sucesos simultáneos tanto para el sistema de la Nave 1 como para el sistema de la Nave 2.

• El reloj pulsera de Juan se atrasa siempre respecto al sistema de Pepe debido a la dilatación del tiempo por la velocidad que tiene Juan respecto al sistema de Pepe.

• Sin embargo, este artículo fue creado principalmente para obtener un relato correcto, detallado y completo del sistema de Juan puesto que es el sistema que siempre deja de ser un sistema inercial en cualquiera de los ejemplos dados sobre la paradoja de los gemelos.

• Según este artículo, el reloj pulsera de Pepe se adelanta siempre respecto al sistema de Juan cuando el sistema de Juan es un sistema no inercial.

• Por lo tanto, según este artículo, resolver «satisfactoriamente» la paradoja de los gemelos consiste fundamentalmente en explicar correctamente por qué el reloj pulsera de Pepe se adelanta siempre respecto al sistema de Juan cuando el sistema de Juan es un sistema no inercial.

• Por otro lado, en este artículo representar al sistema de Juan (Nave de Juan) por otros sistemas inerciales auxiliares (Naves del 1 al 2) no es necesario.

• Sin embargo, de este artículo se deduce que un relato correcto, detallado y completo del sistema de Juan nunca se podrá obtener utilizando solamente dos sistemas inerciales auxiliares (o sea, el de la Nave 1 y el de la Nave 2)

• El ejemplo presentado en este artículo puede ser fácilmente simulado utilizando MatLab o algún otro programa similar (Octave, etc.)

Una Posible Resolución

En la sección Observaciones se dijo que resolver «satisfactoriamente» la paradoja de los gemelos consiste fundamentalmente en explicar correctamente por qué el reloj pulsera de Pepe se adelanta siempre respecto al sistema de Juan cuando el sistema de Juan es un sistema no inercial.

En esta sección se tratará de resolver «satisfactoriamente» la paradoja de los gemelos del ejemplo presentado en este artículo.

A tal fin, al ejemplo dado en este artículo se lo dividirá en 3 intervalos:

Intervalo 1: Entre el punto **A** y el punto **B** (aquí el sistema de Pepe es siempre un sistema inercial y el sistema de Juan es siempre un sistema inercial)

Intervalo 2: Entre el punto **B** y el punto **C** (aquí el sistema de Pepe es siempre un sistema inercial y el sistema de Juan es siempre un sistema no inercial)

Intervalo 3: Entre el punto **C** y el punto **D** (aquí el sistema de Pepe es siempre un sistema inercial y el sistema de Juan es siempre un sistema inercial)

El relato del sistema de Pepe sobre el reloj pulsera de Juan:

Intervalo 1: Dilatación del tiempo por velocidad: $\Delta\, t_{1\cdot \mathrm{j}} = \Delta\, t_{1\cdot \mathrm{p}}\ \gamma^{-1}$

Intervalo 2: Dilatación del tiempo por velocidad: $\Delta\, t_{2\cdot \mathrm{j}} = \Delta\, t_{2\cdot \mathrm{p}}\ \gamma^{-1}$

Intervalo 3: Dilatación del tiempo por velocidad: $\Delta\, t_{3\cdot \mathrm{j}} = \Delta\, t_{3\cdot \mathrm{p}}\ \gamma^{-1}$

El relato del sistema de Juan sobre el reloj pulsera de Pepe:

Intervalo 1: Dilatación del tiempo por velocidad: $\Delta\, t_{1\cdot \mathrm{p}} = \Delta\, t_{1\cdot \mathrm{j}}\ \gamma^{-1}$

Intervalo 2: Dilatación del tiempo por velocidad: $\Delta\, t_{2\cdot \mathrm{p}} = \Delta\, t_{2\cdot \mathrm{j}}\ \gamma^{-1}$

Intervalo 2: Dilatación del tiempo por gravedad: $\Delta\, t_{2\cdot \mathrm{p}} = \Delta\, t_{2\cdot \mathrm{j}}\ \gamma\ \frac{24}{\pi}\ \frac{v^2}{\mathrm{d}}\ c^{-2}$

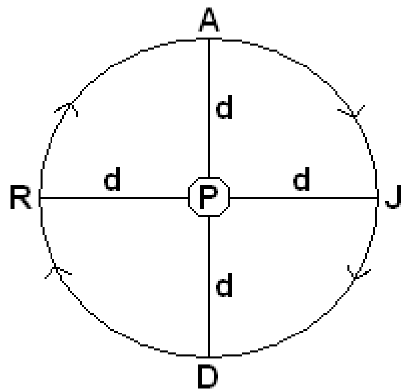
Intervalo 3: Dilatación del tiempo por velocidad: $\Delta\, t_{3\cdot \mathrm{p}} = \Delta\, t_{3\cdot \mathrm{j}}\ \gamma^{-1}$

Para obtener el relato completo del sistema de Pepe sobre el reloj pulsera de Juan hay que sumar las tres primeras ecuaciones de arriba.

Para obtener el relato completo del sistema de Juan sobre el reloj pulsera de Pepe hay que sumar las cuatro últimas ecuaciones de arriba.

Por otro lado, tratar de eliminar la dilatación del tiempo por gravedad (lo cual sería engañoso) en cualquier ejemplo sobre la paradoja de los gemelos sería como quitarle la parte más jugosa y fundamental del experimento.

La Paradoja de los Trillizos (Lite)



Sistemas de Referencia Pepe, Juan y Rafael

Unidades de medida: Velocidad: 100000 km/s, Distancia: 100000 km y Tiempo: 1 s.

Sistema de Referencia Inercial Pepe

Datos Iniciales

Recorrido de Juan : $\widehat{\mathrm{AJ}} + \widehat{\mathrm{JD}} = 24 \quad (\,\mathrm{d} = 24\,\pi^{-1}\,)$

Recorrido de Rafael : $\widehat{\mathrm{DR}} + \widehat{\mathrm{RA}} = 24 \quad (\,\mathrm{d} = 24\,\pi^{-1}\,)$

Notas

Al comenzar el experimento el reloj pulsera de Pepe siempre indica 0 Seg. en el punto **P**, el reloj pulsera de Juan siempre indica 0 Seg. en el punto **A** y el reloj pulsera de Rafael siempre indica 0 Seg. en el punto **D**.

Al finalizar el experimento el reloj pulsera de Pepe siempre indica 10 Seg. en el punto **P**, el reloj pulsera de Juan siempre indica 6 Seg. en el punto **D** y el reloj pulsera de Rafael siempre indica 6 Seg. en el punto **A**.

La velocidad del reloj pulsera de Juan respecto al sistema de Pepe es siempre de $v_{jp} = |\,2.4\,|$ (constante)

La velocidad del reloj pulsera de Pepe respecto al sistema de Juan es siempre de $v_{pj} = |\,2.4\,|$ (constante)

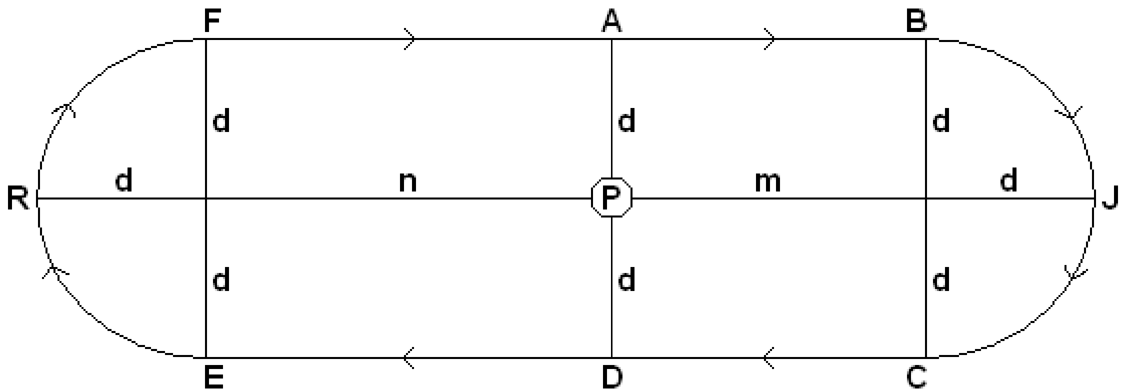
La velocidad del reloj pulsera de Rafael respecto al sistema de Pepe es siempre de $v_{rp} = |\,2.4\,|$ (constante)

La velocidad del reloj pulsera de Pepe respecto al sistema de Rafael es siempre de $v_{pr} = |\,2.4\,|$ (constante)

La velocidad del reloj pulsera de Juan respecto al sistema de Rafael es siempre de $v_{jr} = |\,2.92683\,|$ (constante)

La velocidad del reloj pulsera de Rafael respecto al sistema de Juan es siempre de $v_{rj} = |\,2.92683\,|$ (constante)

La Paradoja de los Trillizos (Full)



Sistemas de Referencia Pepe, Juan y Rafael

Unidades de medida: Velocidad: 100000 km/s, Distancia: 100000 km y Tiempo: 1 s.

Sistema de Referencia Inercial Pepe

Datos Iniciales

Recorrido de Juan : $\overline{\mathrm{AB}} + \widehat{\mathrm{BJC}} + \overline{\mathrm{CD}} = \mathrm{m} + \pi\ \mathrm{d} + \mathrm{m} = 24$

Recorrido de Rafael : $\overline{\mathrm{DE}} + \widehat{\mathrm{ERF}} + \overline{\mathrm{FA}} = \mathrm{n} + \pi\ \mathrm{d} + \mathrm{n} = \mu$

Ecuación Base

$\mathrm{m} = 12 - 0.5\ \pi\ \mathrm{d}$

Variables n y **d**

$\mathrm{m} \leq \mathrm{n} \leq 3 + \mathrm{m}$

$0 < \mathrm{d} < 24/\pi$

Notas

Antes de comenzar el experimento Pepe determina los valores de las variables **d** y **n**.

Al comenzar el experimento el reloj pulsera de Pepe siempre indica 0 Seg. en el punto **P**, el reloj pulsera de Juan siempre indica 0 Seg. en el punto **A** y el reloj pulsera de Rafael siempre indica 0 Seg. en el punto **D**.

La velocidad del reloj pulsera de Juan respecto al sistema de Pepe es siempre de $v_{jp} = |\,24/10s\,|$ (constante)

La velocidad del reloj pulsera de Rafael respecto al sistema de Pepe es siempre de $v_{rp} = |\,\mu/10s\,|$ (constante)

Una Posible Resolución (General)

Si un reloj A de un sistema inercial A y un conjunto de relojes de un conjunto de sistemas no inerciales (no rotantes respecto al sistema inercial A) indican simultáneamente para todos estos sistemas de referencia un tiempo inicial y luego indican también simultáneamente para todos estos sistemas de referencia un tiempo final y si además el módulo de velocidad de cada uno de todos estos relojes es siempre constante respecto a todos estos sistemas de referencia (es decir, en todo el recorrido cada uno de todos estos relojes respecto a todos estos sistemas de referencia puede tener velocidad lineal constante o aceleración normal constante pero nunca puede tener aceleración tangencial) entonces:

A.1) La dilatación total del tiempo por velocidad $(\Delta\, t_{\mathrm{XA \cdot v}})$ de cualquier reloj X respecto al reloj A $(\Delta\, t_{\mathrm{A}})$ para el sistema inercial A está siempre dada por la siguiente ecuación:

$$\Delta\, t_{\mathrm{XA \cdot v}} = \Delta\, t_{\mathrm{A}}\ \gamma_{\mathrm{XA}}^{-1}$$

donde γ_{XA} es el factor gamma según la velocidad v_{XA} del reloj X respecto al sistema inercial A.

B.1) La dilatación total del tiempo por velocidad $(\Delta\, t_{\mathrm{XB \cdot v}})$ de cualquier reloj X respecto a un reloj B $(\Delta\, t_{\mathrm{B}})$ para un sistema no inercial B está siempre dada por la siguiente ecuación:

$$\Delta\, t_{\mathrm{XB \cdot v}} = \Delta\, t_{\mathrm{B}}\ \gamma_{\mathrm{XB}}^{-1}$$

donde γ_{XB} es el factor gamma según la velocidad v_{XB} del reloj X respecto al sistema no inercial B.

B.2) La dilatación total del tiempo por gravedad $(\Delta\, t_{\mathrm{XB \cdot g}})$ del reloj X respecto al reloj B $(\Delta\, t_{\mathrm{B}})$ para el sistema no inercial B está siempre dada por la siguiente ecuación:

$$\Delta\, t_{\mathrm{XB \cdot g}} = \Delta\, t_{\mathrm{B}}\ (\ \gamma_{\mathrm{AB}}\ \gamma_{\mathrm{XA}}^{-1} - \gamma_{\mathrm{XB}}^{-1}\ )$$

donde γ_{AB} es el factor gamma según la velocidad v_{AB} del reloj A respecto al sistema no inercial B, γ_{XA} es el factor gamma según la velocidad v_{XA} del reloj X respecto al sistema inercial A y γ_{XB} es el factor gamma según la velocidad v_{XB} del reloj X respecto al sistema no inercial B.

El sistema no inercial B conociendo la velocidad v_{AB} del reloj A y la velocidad v_{XB} del reloj X puede obtener la velocidad v_{XA} del reloj X respecto al sistema inercial A aplicando la adición de velocidades de la teoría de relatividad especial.

Por un lado, es fácil demostrar que siempre: $(\ \gamma_{\mathrm{AB}} = \gamma_{\mathrm{AB}}\ v_{\mathrm{AB}}^2\ c^{-2} + \gamma_{\mathrm{AB}}^{-1}\ )$

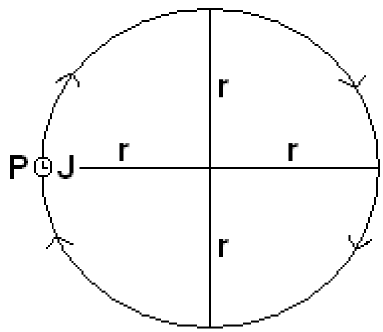
Pero, por otro lado, habría que demostrar que siempre: $(\ \gamma_{\mathrm{AB}}\ \gamma_{\mathrm{XA}}^{-1} - \gamma_{\mathrm{XB}}^{-1}\ ) > 0$

Nota

Cualquier sistema menos el sistema A puede ser en algunos tramos del recorrido total un sistema inercial o un sistema no inercial, pero nunca puede ser en todo el recorrido siempre un sistema inercial.

El Ejemplo Más Didáctico y Sencillo

El ejemplo más didáctico y sencillo que se puede dar para examinar la paradoja de los gemelos es el siguiente:



En este ejemplo hay dos observadores: **P**epe (que siempre es un observador inercial) y **J**uan (que siempre es un observador no inercial)

El reloj pulsera de Juan respecto al sistema inercial de Pepe recorre una distancia **D** (circunferencia según radio **r**) con módulo de velocidad constante v.

El módulo de velocidad del reloj pulsera de Pepe respecto al sistema no inercial de Juan es también constante e igual a v.

Por lo tanto, según los datos de arriba, los relatos de Pepe y de Juan serán los siguientes:

El relato del sistema inercial de Pepe sobre el reloj pulsera de Juan:

1) Dilatación del tiempo por velocidad: $\Delta\, t_{\mathrm{j \cdot v}} = \Delta\, t_{\mathrm{p}}\ \gamma^{-1}$

El relato del sistema no inercial de Juan sobre el reloj pulsera de Pepe:

1) Dilatación del tiempo por velocidad: $\Delta\, t_{\mathrm{p \cdot v}} = \Delta\, t_{\mathrm{j}}\ \gamma^{-1}$

2) Dilatación del tiempo por gravedad: $\Delta\, t_{\mathrm{p \cdot g}} = \Delta\, t_{\mathrm{j}}\ \gamma\ \frac{\mathrm{D}}{2\,\pi}\ \frac{v^2}{\mathrm{r}}\ c^{-2}$

donde γ es el factor gamma según velocidad v y c es la velocidad de la luz en el vacío.

Nota

Por otro lado, este ejemplo podría también ser muy útil para examinar la geometría espacial desde el sistema no inercial de Juan.

Observaciones Generales

En la dilatación del tiempo por velocidad los relojes que se mueven respecto a un sistema de referencia (inercial o no inercial) marcan el tiempo más lentamente.

La dilatación del tiempo por velocidad sí es recíproca: dos relojes que se mueven uno con respecto al otro será el reloj de la otra parte aquél en el que el tiempo se dilate.

En la dilatación del tiempo por gravedad los relojes que están sometidos a un campo gravitatorio mayor marcan el tiempo más lentamente.

La dilatación del tiempo por gravedad no es recíproca: un observador en lo alto de una torre observará que los relojes del suelo marcan el tiempo más lentamente y los observadores del suelo estarán de acuerdo.

La dilatación del tiempo por gravedad se debe considerar de manera adicional al estudio de la dilatación del tiempo por velocidad y si los observadores están sometidos a un campo gravitatorio.

Los observadores no inerciales o los sistemas de referencia no inerciales están siempre sometidos a un campo gravitatorio en un sentido generalizado.

Bibliografía

http://forum.lawebdefisica.com/threads/32970-Paradoja-de-los-gemelos

http://forum.lawebdefisica.com/threads/30556-La-relatividad-del-tiempo-puesta-a-prueba

http://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_los_gemelos

http://es.wikipedia.org/wiki/Dilatación_del_tiempo

http://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_la_relatividad_especial

http://es.wikipedia.org/wiki/Introducción_a_la_relatividad_general

http://es.wikipedia.org/wiki/Relatividad_general

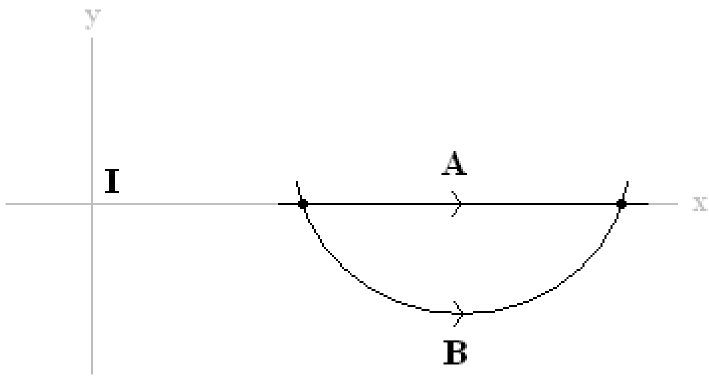
http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.com.ar

http://www.fisica-relatividad.com.ar

Una Solución Alternativa Sencilla

En esta solución alternativa sencilla el gemelo no inercial puede resolver la paradoja de los gemelos sin necesidad de recurrir a la dilatación del tiempo por gravedad tal como se indicó anteriormente.

Consideremos 3 observadores, un observador externo inercial I, un observador gemelo inercial A y un observador gemelo no inercial B, tal como se muestra en la siguiente figura:



Desde el observador externo inercial I el gemelo inercial A realiza un movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.) con módulo de velocidad constante v_{AI} y el gemelo no inercial B realiza un movimiento circular uniforme (M.C.U.) con módulo de velocidad constante v_{BI}

Por lo tanto, desde el primer punto de encuentro entre los gemelos A y B hasta el segundo punto de encuentro entre los gemelos A y B, la dilatación del tiempo ($\Delta\, t_{\mathrm{A}}$) del gemelo inercial A respecto al observador externo inercial I ($\Delta\, t_{\mathrm{I}}$) y la dilatación del tiempo ($\Delta\, t_{\mathrm{B}}$) del gemelo no inercial B respecto al observador externo inercial I ($\Delta\, t_{\mathrm{I}}$) están dadas por:

$$\Delta\, t_{\mathrm{A}} = \Delta\, t_{\mathrm{I}}\ \sqrt{1 - v_{\mathrm{AI}}^2/c^2}$$

$$\Delta\, t_{\mathrm{B}} = \Delta\, t_{\mathrm{I}}\ \sqrt{1 - v_{\mathrm{BI}}^2/c^2}$$

Despejando en ambas ecuaciones $\Delta\, t_{\mathrm{I}}$ igualando las ecuaciones obtenidas, reordenando y puesto que el cuadrado del módulo de velocidad v_{AI}^2 es igual al cuadrado del módulo de velocidad v_{IA}^2 (del observador externo inercial I respecto al gemelo inercial A) y el cuadrado del módulo de velocidad v_{BI}^2 es igual al cuadrado del módulo de velocidad v_{IB}^2 (del observador externo inercial I respecto al gemelo no inercial B) entonces resulta:

$$\frac{\Delta\, t_{\mathrm{A}}}{\Delta\, t_{\mathrm{B}}} = \frac{\sqrt{1 - v_{\mathrm{IA}}^2/c^2}}{\sqrt{1 - v_{\mathrm{IB}}^2/c^2}}$$

Por lo tanto, el gemelo cuyo reloj más se atrase será aquel que observe al observador externo inercial I con una velocidad mayor.

Es fácil ver desde el observador externo inercial I que el gemelo cuyo reloj más se atrase será aquel que tenga una velocidad mayor, o sea, el gemelo no inercial, puesto que entre los puntos de encuentro de los gemelos A y B el gemelo inercial A recorre una recta mientras que el gemelo no inercial B recorre una curva (en igual cantidad de tiempo)

Una Solución Alternativa General

Generalizando la solución alternativa sencilla dada arriba sobre la paradoja de los gemelos en la cual ahora el o los sistemas de referencia no inerciales involucrados pueden resolver la paradoja de los gemelos, trillizos, etc. sin necesidad de recurrir a la dilatación del tiempo por gravedad.

Consideremos un sistema de referencia inercial A y un conjunto de sistemas de referencia no inerciales (B, C, D, etc.) que coinciden todos simultáneamente en un punto de encuentro inicial y que luego nuevamente coinciden todos simultáneamente en un punto de encuentro final.

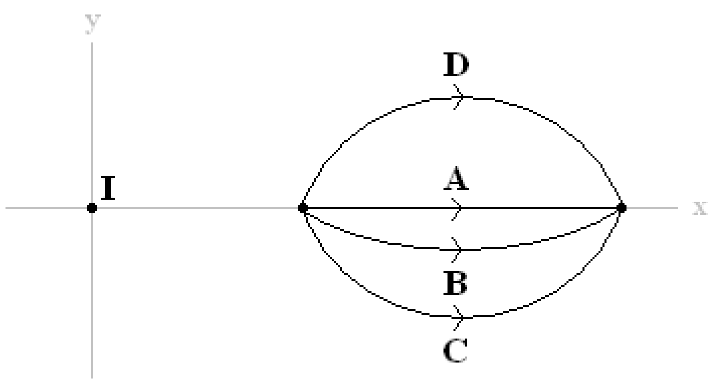
Si el sistema de referencia inercial A realiza un movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.) respecto a un sistema de referencia inercial I (cuyo origen está fijo en una partícula I libre de fuerzas externas) y si cada uno de los sistemas de referencia no inerciales (B, C, D, etc.) realiza un movimiento circular uniforme (M.C.U.) respecto al sistema de referencia inercial I entonces la relación entre la variación del tiempo $\Delta\, t_\alpha$ de un sistema de referencia α (A, B, C, D, etc.) y la variación del tiempo $\Delta\, t_\kappa$ de un sistema de referencia κ (A, B, C, D, etc.) estaría dada por:

$$\frac{\Delta\, t_\alpha}{\Delta\, t_\kappa} = \sqrt{\frac{c^2 - v_{\mathrm{I}\alpha}^2}{c^2 - v_{\mathrm{I}\kappa}^2}}$$

donde $v_{\mathrm{I}\alpha}$ es la velocidad de la partícula I respecto al sistema de referencia α (A, B, C, D, etc.) $v_{\mathrm{I}\kappa}$ es la velocidad de la partícula I respecto al sistema de referencia κ (A, B, C, D, etc.) y c es la velocidad de la luz en el vacío.

Por lo tanto, el sistema de referencia (A, B, C, D, etc.) cuyo reloj más se atrase será aquel que observe a la partícula I con una velocidad mayor entre los puntos de encuentro inicial y final.

• Posible representación gráfica de algunos de estos sistemas de referencia (A, B, C, y D) visto desde el sistema de referencia inercial I.



• Los sistemas de referencia no inerciales involucrados (B, C, D, etc.) deben ser no rotantes respecto al sistema de referencia inercial I puesto que si no es así entonces la ecuación de arriba dejaría de ser válida para estos sistemas de referencia.

• El módulo de velocidad del sistema de referencia α ó κ (A, B, C, D, etc.) respecto al sistema de referencia inercial I es constante.

• El módulo de velocidad del sistema de referencia α ó κ (A, B, C, D, etc.) respecto al sistema de referencia inercial I es igual al módulo de velocidad de la partícula I respecto al sistema de referencia α ó κ (A, B, C, D, etc.)

• El módulo de velocidad de la partícula I respecto al sistema de referencia α ó κ (A, B, C, D, etc.) es constante.

• El módulo de velocidad del sistema de referencia α (A, B, C, D, etc.) respecto al sistema de referencia κ (A, B, C, D, etc.) es igual al módulo de velocidad del sistema de referencia κ (A, B, C, D, etc.) respecto al sistema de referencia α (A, B, C, D, etc.)

• La partícula I debe estar libre de fuerzas externas o las fuerzas externas que actúan sobre ésta deben estar equilibradas (al menos entre los puntos de encuentro inicial y final)

Conclusiones Finales

Resolver la paradoja de los gemelos consiste principalmente en obtener un relato del gemelo inercial y un relato del gemelo no inercial.

Entre el relato del gemelo inercial y el relato del gemelo no inercial no puede haber ninguna contradicción teórica.

El relato del gemelo inercial es el más fácil de obtener ya que éste solamente debe aplicar la dilatación del tiempo por velocidad sobre el gemelo no inercial, tal como indica la teoría de relatividad especial.

El relato del gemelo no inercial es el más difícil de obtener ya que éste no sólo debe aplicar la dilatación del tiempo por velocidad sobre el gemelo inercial sino que también debe aplicar la dilatación del tiempo por gravedad sobre el gemelo inercial, tal como indica la teoría de relatividad general.

Si consideramos solamente al gemelo inercial y al gemelo no inercial entonces no es posible obtener un relato del gemelo no inercial sin tener en cuenta la dilatación del tiempo por gravedad, puesto que no es posible explicar una asimetría (lo que marcan los relojes de ambos gemelos al finalizar el experimento) con una simetría (la velocidad relativa entre ambos gemelos)

Sin embargo, si consideramos también a una partícula I (libre de fuerzas externas) entonces sí es posible obtener un relato del gemelo no inercial sin tener en cuenta la dilatación del tiempo por gravedad.

La velocidad de la partícula I respecto al gemelo inercial es siempre distinta a la velocidad de la partícula I respecto al gemelo no inercial.

Por lo tanto, existe otra asimetría (la velocidad de la partícula I) que también puede ser utilizada para obtener un relato del gemelo inercial y un relato del gemelo no inercial.

Como conclusión final, una asimetría solamente puede ser explicada con otra asimetría (tal como se intento hacer siempre en este artículo)