The solution of the integrality for all diagonals of a rectangular parallelepiped (Euler), and a new feature of the complex three-dimensional space.

REUVEN TINT[1], MICHAEL TINT[2]

Number Theorist, Israel[1]

Software Engineer, Israel[2]

Email: reuven.tint@gmail.com, tintmisha@gmail.com

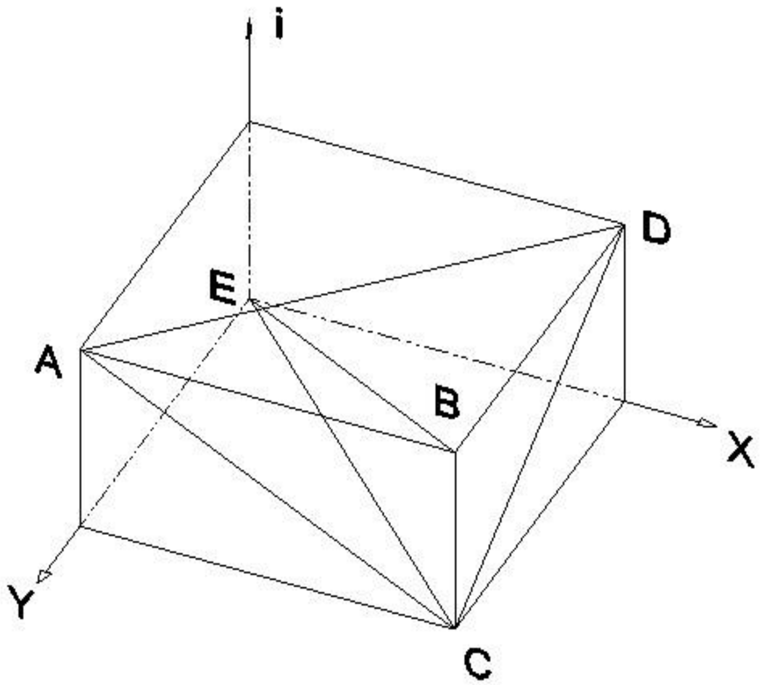
http://ferm-tint.blogspot.co.il/

Abstract. In this article, we'll present and solve problem of Euler: there are countless cuboids whose diagonal all the faces and the main diagonal are integer. Discovered a new feature of three-dimensional complex space (with respect to the metric), wherein the sum of the two sides of the triangle is less than or equal to the third, in particular, on that basis is we obtain a concise version of the proof of the Fermat's Last Theorem.

Problem: Is there a parallelepiped of Euler (a parallelepiped with all the integer diagonals), whose main space diagonal is also an integer? (List of unsolved problems in mathematics).

Solution

1.1. Consider the following cuboid (fully correspond condition problems - has not been solved for this case):



1.2. In the equation

$$BC^2 = AB^2 + BC^{\mathbf{2}} + BD^{\mathbf{2}} \quad [\mathbf{1}]$$

must be

$$+\begin{cases} AB^2 + BC^2 = AC^2\ [\mathbf{2}] \\ BD^2 + BC^2 = DC^2\ [\mathbf{3}] \\ AB^2 + BD^2 = EC^2\ [\mathbf{4}] \end{cases}$$

1.3.

$$[\mathbf{2}] + [\mathbf{3}] + [\mathbf{4}] =$$
$$= 2(AB^2 + BC^2 + BD^2) =$$
$$= AC^2 + DC^2 + EC^2 \quad [\mathbf{5}]$$

and

$$BE^2 = \frac{AC^2 + DC^2 + EC^2}{2}\ [\mathbf{6}].$$

i.e. square cuboid main diagonal equal to the sum of the squares of all its edges without repetitions; half the sum of the squares of the diagonals of all its facets without repetition.

1.4. It follows from **1.2.** and **1.3.**

$$AB = \sqrt{\frac{EC^2 + AC^2 - DC^2}{2}} \quad [\mathbf{7}]$$

$$BC = \sqrt{\frac{AC^2 + DC^2 - EC^2}{2}} \quad [\mathbf{8}]$$

$$BD = \sqrt{\frac{DC^2 + EC^2 + AC^2}{2}} \quad [\mathbf{9}].$$

1.5. we obtain the identities:

$$a^4 + b^4 + (a \pm b)^4 \equiv 2(a^2 \pm ab + b^2)^2 \quad [\mathbf{10}],$$
$$a^2 + b^2 + (a \pm b)^2 \equiv 2(a^2 \pm ab + b^2)\ [\mathbf{11}]$$

,where - "a" and "b" -are arbitrary natural (whole) numbers

1.5.1. Using $[\mathbf{10}]$, for instance,

1)

$$AC = a^2 = 7^2, DC = b^2 = 8^2, EC = AD = (a+b)^2 = 15^2$$
$$BE = a^2 + ab + b^2 = 169$$
$$AB = \sqrt{24465}, BC = \sqrt{-22064} = i\sqrt{22064}, BD = \sqrt{26160}.$$
$$AC + DC < AD \quad 7^2 + 8^2 < 15^2$$

2)

$$AC = a = 7, DC = b = 8, EC = a + b = 15$$
$$AB = \sqrt{105}, BC = \sqrt{-56}, BD = \sqrt{120},$$
$$AC + DC = EC, 7 + 8 = 15$$
$$BE^2 = \frac{7^2 + 8^2 + 15^2}{2} = 169 = 13^2$$
$$BE = 13$$

This completes the proof of Euler problem.

1.5.1.2. The solution in integers of equations

$$a^2 \pm ab + b^2 = k^2 \ (\mathbf{3}):$$

$$a = (u^2 - \vartheta^2)t; b = \pm(2\vartheta - u)ut,$$

$$k = (u^2 - u\vartheta + \vartheta^2)t$$

$$a = \frac{(u^2 - \vartheta^2)}{\delta}; b = \frac{\pm(2\vartheta - u)u}{\delta};$$

$$k = \frac{u^2 - u\vartheta + \vartheta^2}{\delta};$$

t - is arbitrary integer

δ – is highest common factor

1.6. Let

$$AC = a = x^2, DC = b = y^2,$$
$$EC = z^2 = x^2 + y^2$$

Therefore, we obtain using $[\mathbf{6}]$ and $[\mathbf{10}]$, at least two versions of countless integer diagonals of these identities:

$$(x^4-y^4)^2+(z^4-x^4)^2+(z^4-y^4)^2 \equiv$$
$$\equiv x^8+y^8+z^8 \equiv 2(x^2z^2+y^4)^2 \equiv 2(y^2z^2+x^4)^2 \equiv$$
$$\equiv 2(z^4-x^2y^2)^2\ [\mathbf{12}].$$

1.7. Remarks. With respect to the $[\mathbf{12}]$ we have also such variant:

$$2x^4y^4+2z^4x^4+2z^4y^4 \equiv 2(x^2z^2+y^4)^2$$

and

$$AC^2=2z^4x^4, DC^2=2z^4y^4, EC^2=2x^4y^4.$$

1.8. Using $\mathbf{1.5.1.}$ and $\mathbf{1.6.}$ it follows that in the Cartesian coordinate system xiy , where $i=\sqrt{-1}$ in oblique $\Delta\ ACD$

$$AC+DC<AD\ \ 49+64<225$$
$$(AC=x^2)+(DC=y^2)=AD=z^2$$

that opens a new property of a complex three-dimensional space (in relation to the metric) in which the sum of the two sides of the triangle is less than or equal to the third.

1.8.1. All the countless parallelepipeds with all integer diagonals (4) without repetition can only be in 3 dimensional space xiy , as in ordinary three-dimensional Euclidean (metric) space in the triangle the sum of two sides is always greater than the third. (one of the axioms of a metric space). The space xiy distorts normal space.

1.9. The proof of Fermat's Last Theorem.

1.9.1. Let in the $[\mathbf{11}]$

$$a=x^n, b=y^n, a+b=x^n+y^n,$$

where $x, y, n -$ are arbitrary natural numbers.

Then, if possible, we choose x, y, n such that

$$x^n+y^n=z^n$$

,where $z-$ is natural number.

1.9.1.1. Then from $[\mathbf{11}]$

$$x^{2n} + y^{2n} + (x^n + y^n)^2 \equiv$$
$$\equiv 2(x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}) \equiv$$
$$\equiv 2[(x^{2n} + 2x^n y^n + y^{2n}) - x^n y^n] \equiv$$
$$\equiv 2[(x^n + y^n)^2 - x^n y^n] = 2(z^{2n} - x^n y^n)\ [\mathbf{13}].$$

1.9.1.2. Using $[\mathbf{11}]$ for $a = x, b = y$;

$$a + b = x + y = z.$$

It follows that,

$$x^2 + y^2 + (x + y)^2 \equiv$$
$$2(x^2 + xy + y^2) \equiv 2[(x + y)^2 - xy] \equiv 2(z^2 - xy)\ [\mathbf{14}]$$

1.9.2. Note that

$$[\mathbf{13}] = [\mathbf{14}] = 2(z^{2n} - x^n y^n) = 2(z^2 - xy),$$

is possible only when $n = 1$, since for $n > 1$

$$\mathrm{x}^{2n} + y^{2n} < (x^n + y^n)^2,$$

if only when $n = 2$

$x, y -$ are not a Pythagorean numbers (example, no 3 and 4 as 7 and 8).

1.9.3. If

$$n = 2, x = p^2 - q^2, y = 2pq, z = p^2 + q^2,$$

$p, q -$ are arbitrary natural numbers

$$x^2 + y^2 = z^2\text{- Pythagoras equation.}$$

1.9.3.1. Using $[\mathbf{11}]$ with respect to 1.9.1.

1)

$$x^{2n} + y^{2n} + (x^n + y^n)^2 =$$
$$= 2(z^{2n} - x^n y^n)\ \ [\mathbf{15}].$$

2)

$$x^4 + y^4 + (x^2 + y^2)^2 = 2(z^4 - x^2 y^2)\ \ [\mathbf{16}].$$

1.9.4.

$$[\mathbf{15}] = [\mathbf{16}] = 2(z^{2n} - x^n y^n) = 2(z^4 - x^2 y^2),$$

is possible only if $n = 2,$ since for $n > 2$

$$x^{2n} + y^{2n} < (x^n + y^n)^2.$$

Thus the equation

$$x^n + y^n = z^n$$

for $n > 2$ in natural (whole) numbers is not solvable.
This completes the proof of FLT.

References:

1. Д. Гильберт, “Основания геометрии”, ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1948, Ленинград, стр. 200-201.
2. Н.Бурбаки, “Общая топология”, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1969.
3. У.С. Давыдов, “Задачи и упражнения по теоретической арифметике целых чисел” Госучпедгиз, Минск, 1963, стр.55,NN 241, 242

P.S. The solution of the of Euler integral number of diagonals cuboid and the proof of the Fermat's Last Theorem are one of nature: stay in the three dimensional space xiy. But if the problem of Euler in ordinary space cannot be solved, but the problem of Fermat's Last Theorem in the usual three dimensional space could be overcome using the axioms of the "new" space xiy : “in a triangle the sum of two of its sides is less than or equal to the third”. (of course, in implementing the requirements of integral four basic options).

Решение проблемы цело численности всех диагоналей прямоугольного параллелепипеда (Эйлер) и новое свойство трёхмерного комплексного пространства.

REUVEN TINT[1], MICHAEL TINT[2]

Number Theorist, Israel[1]

Software Engineer, Israel[2]

Email: reuven.tint@gmail.com, tintmisha@gmail.com

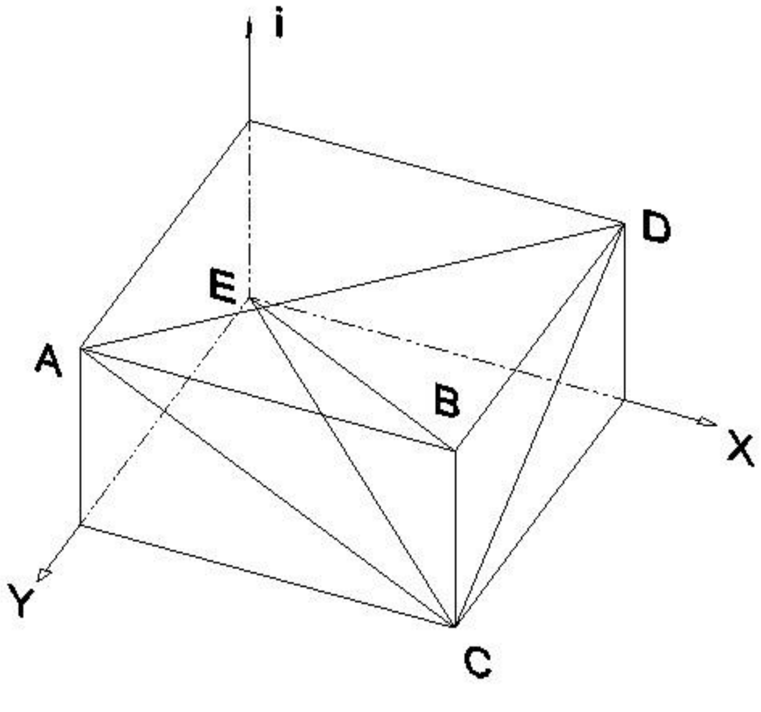
http://ferm-tint.blogspot.co.il/

Аннотация. В настоящей статье решена эта проблема Эйлера: существует бесчисленное множество прямоугольных параллелепипедов, у которых диагонали всех граней и главная диагональ целочисленные. Открыто новое свойство трёхмерного комплексного пространства (по отношению к метрическому), в котором сумма двух сторон треугольника меньше или равна третьей, в частности, на этой основе получен приведённый в этой статье лаконичный вариант доказательства "Великой" теоремы Ферма.

Проблема: Существует ли параллелепипед Эйлера (параллелепипед со всеми целочисленными диагоналями), главная диагональ которого также имеет целую длину? Википедия. "Открытые (нерешённые) математические проблемы".

Решение

1.10. Рассмотрим следующий прямоугольный параллелепипед (полностью соответствуем условию проблемы - не решена и для этого случая):



1.11. В уравнении

$$BC^2 = AB^2 + BC^{\mathbf{2}} + BD^{\mathbf{2}} \quad [\mathbf{1}]$$

должно быть

$$+\begin{cases} AB^2 + BC^2 = AC^2 \; [\mathbf{2}] \\ BD^2 + BC^2 = DC^2 \; [\mathbf{3}] \\ AB^2 + BD^2 = EC^2 \; [\mathbf{4}] \end{cases}$$

1.12.

$$[\mathbf{2}] + [\mathbf{3}] + [\mathbf{4}] =$$
$$= 2(AB^2 + BC^2 + BD^2) =$$
$$= AC^2 + DC^2 + EC^2 \quad [\mathbf{5}]$$

и

$$BE^2 = \frac{AC^2 + DC^2 + EC^2}{2} \; [\mathbf{6}].$$

т.е. квадрат главной диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов всех его рёбер без повторов; полу сумме квадратов диагоналей всех его граней без повторов.

1.13. Из п.п. **1.2.** и **1.3.**

$$AB = \sqrt{\frac{EC^2 + AC^2 - DC^2}{2}} \quad [\mathbf{7}]$$

$$BC = \sqrt{\frac{AC^2 + DC^2 - EC^2}{2}} \quad [\mathbf{8}]$$

$$BD = \sqrt{\frac{DC^2 + EC^2 + AC^2}{2}} \quad [\mathbf{9}].$$

1.14. Получены тождества:

$$a^4 + b^4 + (a \pm b)^4 \equiv 2(a^2 \pm ab + b^2)^2 \quad [\mathbf{10}],$$
$$a^2 + b^2 + (a \pm b)^2 \equiv 2(a^2 \pm ab + b^2) \; [\mathbf{11}]$$

,где - "a" и "b" -произвольные натуральные (целые) числа

1.14.1. Из $[\mathbf{10}]$, например,

1)

$$AC = a^2 = 7^2, DC = b^2 = 8^2, EC = AD = (a+b)^2 = 15^2$$
$$BE = a^2 + ab + b^2 = 169$$
$$AB = \sqrt{24465}, BC = \sqrt{-22064} = i\sqrt{22064}, BD = \sqrt{26160}.$$
$$AC + DC < AD \quad 7^2 + 8^2 < 15^2$$

2)

$$AC = a = 7, DC = b = 8, EC = a + b = 15$$
$$AB = \sqrt{105}, BC = \sqrt{-56}, BD = \sqrt{120},$$
$$AC + DC = EC, 7 + 8 = 15$$
$$BE^2 = \frac{7^2 + 8^2 + 15^2}{2} = 169 = 13^2$$
$$BE = 13$$

Решение проблемы Эйлера завершено полностью.

1.5.1.2. Решение в целых числах уравнений

$$a^2 \pm ab + b^2 = k^2 \ (\mathbf{3}):$$

$$a = (u^2 - \vartheta^2)t; b = \pm(2\vartheta - u)ut,$$

$$k = (u^2 - u\vartheta + \vartheta^2)t$$

$$a = \frac{(u^2 - \vartheta^2)}{\delta}; b = \frac{\pm(2\vartheta - u)u}{\delta};$$

$$k = \frac{u^2 - u\vartheta + \vartheta^2}{\delta};$$

t - произвольное натуральное число

δ - наибольший общий делитель

1.15. Пусть

$$AC = a = x^2, DC = b = y^2,$$
$$EC = z^2 = x^2 + y^2$$

Тогда получается из $[\mathbf{6}]$ и $[\mathbf{10}]$, по крайней мере, два варианта бесчисленного множества целочисленных диагоналей из следующих тождеств:

$$(x^4 - y^4)^2 + (z^4 - x^4)^2 + (z^4 - y^4)^2 \equiv$$
$$\equiv x^8 + y^8 + z^8 \equiv 2(x^2z^2 + y^4)^2 \equiv 2(y^2z^2 + x^4)^2 \equiv$$
$$\equiv 2(z^4 - x^2y^2)^2 \; [\mathbf{12}].$$

1.16. **Примечание.** Из $[\mathbf{12}]$ имеем и такой вариант:

$$2x^4y^4 + 2z^4x^4 + 2z^4y^4 \equiv 2(x^2z^2 + y^4)^2$$

и

$$AC^2 = 2z^4x^4, DC^2 = 2z^4y^4, EC^2 = 2x^4y^4.$$

1.17. Из п.п. $\mathbf{1.5.1.}$ и $\mathbf{1.6.}$ следует: в прямоугольной системе координат xiy , где $i = \sqrt{-1}$ в косоугольном $\Delta\, ACD$

$$AC + DC < AD \quad 49 + 64 < 225$$
$$(AC = x^2) + (DC = y^2) = AD = z^2$$

,что открывает новое свойство трёхмерного комплексного пространства (по отношению к метрическому), в котором сумма двух сторон треугольника меньше или равна третьей.

1.17.1. Всё бесчисленное множество параллелепипедов со всеми целочисленными диагоналями (4) без повторов могут находиться только в 3^x -мерном пространстве xiy ,так как в обычном трёхмерном евклидовом (метрическом) пространстве в треугольнике сумма двух сторон всегда больше третьей. (одна из аксиом метрического пространства). Пространство xiy искривляет обычное пространство.

1.18. **Доказательство “Великой” теоремы Ферма.**

1.18.1. Пусть в $[\mathbf{11}]$

$$a = x^n, b = y^n, a + b = x^n + y^n,$$

где $x, y, n -$ произвольные натуральные числа.

Тогда, если это возможно, выберем x, y, n такими, чтобы

$$x^n + y^n = z^n$$

,где $z -$ натуральное число.

1.18.1.1. Отсюда из $[\mathbf{11}]$

$$x^{2n} + y^{2n} + (x^n + y^n)^2 \equiv$$
$$\equiv 2(x^{2n} + x^n y^n + y^{2n}) \equiv$$
$$\equiv 2[(x^{2n} + 2x^n y^n + y^{2n}) - x^n y^n] \equiv$$
$$\equiv 2[(x^n + y^n)^2 - x^n y^n] = 2(z^{2n} - x^n y^n)\ [\mathbf{13}].$$

1.9.1.2. Из $[\mathbf{11}]$ при $a = x, b = y;$

$$a + b = x + y = z.$$

Отсюда,

$$x^2 + y^2 + (x + y)^2 \equiv$$
$$2(x^2 + xy + y^2) \equiv 2[(x + y)^2 - xy] \equiv 2(z^2 - xy)\ [\mathbf{14}]$$

1.18.2. Напишем

$$[\mathbf{13}] = [\mathbf{14}] = 2(z^{2n} - x^n y^n) = 2(z^2 - xy),$$

что возможно только при $n = 1$, поскольку при $n > 1$

$$\mathrm{x}^{2n} + y^{2n} < (x^n + y^n)^2,$$

если только при $n = 2$

$x, y -$ не “пифагоровы” числа (например, не 3 и 4 ,а 7 и 8).

1.18.3. При

$$n = 2, x = p^2 - q^2, y = 2pq, z = p^2 + q^2,$$

$p, q -$ произвольных натуральных числах

$$x^2 + y^2 = z^2\text{-уравнение Пифагора.}$$

1.18.3.1. Из $[\mathbf{11}]$ с учётом п. 1.9.1.

2)

$$x^{2n} + y^{2n} + (x^n + y^n)^2 =$$
$$= 2(z^{2n} - x^n y^n)\ \ [\mathbf{15}].$$

2)

$$x^4 + y^4 + (x^2 + y^2)^2 = 2(z^4 - x^2 y^2)\ \ [\mathbf{16}].$$

1.18.4.

$$[\mathbf{15}] = [\mathbf{16}] = 2(z^{2n} - x^n y^n) = 2(z^4 - x^2 y^2),$$

что возможно только при $n = 2$, поскольку для $n > 2$

$$x^{2n} + y^{2n} < (x^n + y^n)^2.$$

Таким образом, уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

при $n > 2$ в натуральных (целых) числах не разрешимо.
Доказательство завершено.

Литература:

4. Д. Гильберт, “Основания геометрии”, ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1948, Ленинград, стр. 200-201.

5. Н.Бурбаки, “Общая топология”, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1969.

6. У.С. Давыдов, “Задачи и упражнения по теоретической арифметике целых чисел” Госучпедгиз, Минск, 1963, стр.55,NN 241, 242

P.S. Решение проблемы Эйлера о цело численности диагоналей прямоугольного параллелепипеда и доказательство “Великой” теоремы Ферма одной природы: лежат в 3^x - мерном пространстве xiy. Но если проблема Эйлера в обычном пространстве не разрешима, то не разрешимость “Великой” теоремы Ферма в обычном 3^x - мерном пространстве удастся преодолеть с помощью аксиомы “нового” пространства xiy : “в треугольнике сумма двух его сторон меньше или равна третьей”. (конечно, при выполнении требований цело численности четырёх основных параметров).