Уравнения Власова в концепции скалярно-векторного потенциала

Ф. Ф. Менде

В настоящее время уравнения Власова являются основными уравнениями электродинамики плазмы, в которых электромагнитные поля самосогласованы с полями зарядов, представляющих плазму. В эти уравнения входит сила Лоренца, которая в концепции скалярно-векторного потенциала может быть выражена через свойства заряженных частиц, окружающих точку наблюдения. Такой подход, реализованный в данной статье, в полной мере реализует идею дальнодействия кулоновских полей, которая является основой уравнений Власова.

Ключевые слова: плазма, уравнений Власова, функция распределения, сила Лоренца, скалярно-векторный потенциал,

1 Введение

Идея Власова по введению самосогласованного поля, заключалась в том, что электромагнитные поля в плазме и поля, создаваемые заряженными частицами должны быть самосогласованными. Этот принцип легко понять на примере объёмного резонатора. Его резонансную частоту определяют переменные электромагнитные поля, подчиняющиеся уравнениям Максвелла, на которые наложены граничные условия. И если внутри резонатора появляется любой объект, в том числе и свободные заряды, то его резонансная частота меняется таким образом, чтобы его электромагнитные поля были согласованы с полями индуцированными посторонним объектом. Руководствуясь этим принципом, Власов изначально рассматривал систему общих уравнений плазмы, включающих три компоненты (электроны, ионы и нейтральные атомы), и записывал уравнение Больцмана для *s*-ой компоненты плазмы в виде

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + div_r \vec{v} f_s + \frac{e_s}{m_s}\left(\vec{E} + \left[\vec{v}\times\vec{B}\right]\right) grad_v f_s = \left[\frac{\partial f_s}{\partial t}\right]_{s\,1}^{st} + \left[\frac{\partial f_s}{\partial t}\right]_{s2}^{st} + \left[\frac{\partial f_s}{\partial t}\right]_{s3}^{st} \qquad (1.1)$$

где $f_s(\vec{r}, \vec{p}, t)$ - функция распределения.

Правая часть уравнения (1) представляет интегралы столкновений. Эта система уравнений включала также уравнения Максвелла, и уравнения для заряда и тока, выраженные через функции распределения . Так как Власов интересовался только волновыми решениями, то он пренебрёг вкладами интегралов столкновений, поскольку по его оценкам выходило, что частоты плазменных волн много больше частот парных столкновений частиц в плазме. То есть вместо описания взаимодействия заряженных частиц в плазме посредством столкновений, он предложил использовать самосогласованное поле, созданное заряженными частицами плазмы для описания дальнодействующего потенциала. Вместо уравнения Больцмана Власов предложил использовать следующую систему уравнений для описания заряженных компонент плазмы (электронов с функцией распределений $f_e(\vec{r},\vec{p},t)$ и положительных ионов с функцией распределения $f_i(\vec{r},\vec{p},t)$):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f_e}{\partial t}+\vec{v}\frac{\partial f_e}{\partial \vec{x}}-\left(e\vec{E}+e\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]\right)\frac{\partial f_e}{\partial \vec{p}}=0\\
&\frac{\partial f_i}{\partial t}+\vec{v}\frac{\partial f_i}{\partial \vec{x}}+\left(e\vec{E}+e\left[\vec{v}\times\vec{B}\right]\right)\frac{\partial f_i}{\partial \vec{p}}=0\\
&rot\vec{H}=\vec{j}+\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\quad rot\vec{E}=-\frac{\partial \vec{B}}{dt}\\
&div\vec{E}=\rho,\quad div\vec{B}=0\\
&\rho=e\int(f_i-f_e)d^3\vec{p},\quad \vec{j}=e\int(f_i-f_e)\vec{v}d^3\vec{p}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

В соотношении (2) в первых двух уравнениях в скобках стоит сила действующая на движущуюся частицу в электрическом и магнитном поле, создаваемом окружающими заряженными частицами. Неподвижные движущиеся частицы создают электрическое поле, а движущиеся – создают магнитное поле. Но для записи уравнений Власова можно воспользоваться и концепцией скалярно-векторного потенциала, предполагающей зависимость скалярного потенциала заряда от скорости.

2. Уравнения Власова в концепции скалярно-векторного потенциала

Законы индукции имеют симметричный характер [2-5]:

$$\oint \vec{E}'dl' = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} + \oint \left[\vec{v} \times \vec{B} \right] dl'$$
$$\oint \vec{H}'dl' = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s} - \oint \left[\vec{v} \times \vec{D} \right] dl' \quad , \qquad (2.1)$$

или

$$rot\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + rot\left[\vec{v} \times \vec{B} \right]$$
$$rot\vec{H}' = \frac{\partial \vec{D}}{dt} - rot\left[\vec{v} \times \vec{D} \right] \quad . \qquad (2.2)$$

В этих соотношениях: $\vec{E}$ и $\vec{H}$ - электрическое и магнитное поле, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ - электрическая и магнитная индукция, $\vec{v}$ - относительная скорость между штрихованной и исходной системой отсчёта (ИСО).

Для постоянных полей эти соотношения имеют вид:

$$\vec{E}' = \left[\vec{v} \times \vec{B} \right]$$
$$\vec{H}' = -\left[\vec{v} \times \vec{D} \right] \quad . \qquad (2.3)$$

В соотношениях (2.1-2.3), предполагающих справедливость преобразований Галилея, штрихованные и не штрихованные величины представляют поля и элементы в движущейся и неподвижной ИСО соответственно. Следует заметить, что преобразования (2.3) ранее можно было получить только из преобразований Лоренца.

Соотношения (2.3) свидетельствуют о том, что в случае относительного движения систем отсчета, между полями $\vec{E}$ и $\vec{H}$ существует перекрестная связь, т.е. движение в полях $\vec{H}$ приводит к появлению полей $\vec{E}$ и наоборот. Из этих соотношений вытекают дополнительные следствия, которые впервые были рассмотрены в работе [2]. Электрическое поле $E = \frac{g}{2\pi\varepsilon r}$ за пределами заряженного длинного стержня, на единицу длины которого приходится заряд g, убывает по закону $\frac{1}{r}$, где r - расстояние от центральной оси стержня до точки наблюдения.

Если параллельно оси стержня в поле E начать двигать со скоростью Δv другую ИСО, то в ней появится дополнительное магнитное поле $\Delta H = \varepsilon E \Delta v$. Если теперь по отношению к уже движущейся ИСО начать двигать третью систему отсчета со скоростью Δv, то уже за счет движения в поле ΔH появится добавка к электрическому полю

$\Delta E = \mu\varepsilon E\left(\Delta v\right)^2$. Данный процесс можно продолжать и далее, в результате чего может быть получен ряд, дающий величину электрического поля $E'_v\left(r\right)$ в движущейся ИСО при достижении скорости $v = n\Delta v$, когда $\Delta v \rightarrow 0$, а $n \rightarrow \infty$. В конечном итоге в движущейся ИСО величина динамического электрического поля окажется больше, чем в исходной и определиться соотношением:

$$E'\left(r, v_\perp\right) = \frac{gch\frac{v_\perp}{c}}{2\pi\varepsilon r} = Ech\frac{v_\perp}{c}.$$

Если речь идет об электрическом поле одиночного заряда e, то его электрическое поле будет определяться соотношением:

$$E'\left(r, v_\perp\right) = \frac{ech\frac{v_\perp}{c}}{4\pi\varepsilon r^2} \quad , \tag{2.4}$$

где $v_\perp$ - нормальная составляющая скорости заряда к вектору, соединяющему движущийся заряд и точку наблюдения.

Выражение для скалярного потенциала, создаваемого движущимся зарядом, для этого случая запишется следующим образом:

$$\varphi'(r, v_\perp) = \frac{ech\frac{v_\perp}{c}}{4\pi\varepsilon r} = \varphi(r)ch\frac{v_\perp}{c},$$

где $\varphi(r)$ - скалярный потенциал неподвижного заряда. Потенциал $\varphi'(r, v_\perp)$ может быть назван скалярно-векторным, т.к. он зависит не только от абсолютной величины заряда, но и от скорости и направления его движения по отношению к точке наблюдения. Максимальное значение этот потенциал имеет в направлении нормальном к движению самого заряда. Более того, если скорость заряда меняется, что связано с его ускорением, то могут быть вычислены и электрические поля, индуцируемые ускоряемым зарядом.

При движении в магнитном поле, применяя уже рассмотренный метод, получаем:

$$H'(v_\perp) = Hch\frac{v_\perp}{c}.$$

где $v_\perp$ - скорость нормальная к направлению магнитного поля.

Если применить полученные результаты к электромагнитной волне и обозначить компоненты полей параллельные скорости ИСО, как $E_\uparrow$ и $H_\uparrow$, а $E_\perp$ и $H_\perp$, как компоненты нормальные к ней, то при преобразовании полей компоненты, параллельные скорости не изменятся, а компоненты, нормальные направлению скорости преобразуются по правилу

$$\vec{E}'_\perp = \vec{E}_\perp ch\ \frac{v}{c} + \frac{v}{c}\vec{v}\times\vec{B}_\perp sh\frac{v}{c},$$
$$\vec{B}'_\perp = \vec{B}_\perp ch\ \frac{v}{c} - \frac{1}{vc}\vec{v}\times\vec{E}_\perp sh\frac{v}{c}, \qquad (2.5)$$

где $c = \sqrt{\dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}}$ – скорость света.

Преобразования полей (2.5) были впервые получены в работе [2].
Однако, итерационный метод, используемый для получения приведенных соотношений, нельзя считать строгим, поскольку не выяснена его сходимость

Приведём более строгий вывод в матричной форме и покажем, что вид преобразований целиком определяется типом используемого закона сложения скоростей — классического или релятивистского. Этот метод предложен участником научного форума Движения за возрождения отечественной науки Николаем Александровичем Дробышевым.

Рассмотрим совокупность ИСО таких, что ИСО K_1 движется со скоростью Δv относительно ИСО К, ИСО K_2 движется с такой же скоростью Δv относительно K_1 и т.д. Если модуль скорости Δv мал (по сравнению со скоростью света с), то для поперечных составляющих полей в ИСО K_1 K_2, . . . имеем:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1\perp} &= \vec{E}_\perp + \Delta\vec{v}\times\vec{B}_\perp & \qquad \vec{B}_{1\perp} &= \vec{B}_\perp - \Delta\vec{v}\times\vec{E}_\perp / c^2 \\ \vec{E}_{2\perp} &= \vec{E}_{1\perp} + \Delta\vec{v}\times\vec{B}_{1\perp} & \qquad \vec{B}_{2\perp} &= \vec{B}_{1\perp} - \Delta\vec{v}\times\vec{E}_{1\perp} / c^2 \end{aligned} \qquad (2.6)$$

и т. д. При переходе к каждой следующей ИСО поля получают приращения $\Delta\vec{E}$ и $\Delta\vec{B}$

$$\Delta\vec{E} = \Delta\vec{v}\times\vec{B}_\perp, \qquad \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{v}\times\vec{E}_\perp / c^2 \qquad (2.7)$$

где поля $\vec{E}_\perp$ и $\vec{B}_\perp$ относятся к текущей ИСО. Направляя декартову ось x вдоль $\Delta\vec{v}$, перепишем (2.7) в компонентах вектора

$$\Delta E_y = -B_z\Delta v, \qquad \Delta E = B_y\Delta v, \qquad \Delta B_y = E_z\Delta v / c^2 \qquad (2.8)$$

Соотношение (2.8) можно представить в матричной форме

$$\Delta U = AU\Delta v \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/c^2 & 0 & 1 \\ -1/c^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

Если предположить, что скорость системы суммируется по классическому закону сложения скоростей, т.е. скорость конечной ИСО $K' = K_N$ относительно исходной K есть $v = N\Delta v$, то получим матричную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dU(v)}{dv} = AU(v) \tag{2.9}$$

С независящей от скорости v матрицей системы A. Решение системы выражается через матричную экспоненту $\exp(vA)$:

$$U' \equiv U(v) = \exp(vA)U, \qquad U = U(0) \tag{2.10}$$

Здесь U - матрица-столбец полей в системе K, а U' - матрица-столбец полей в системе K'. Подставляя (2.10) в систему (2.9), убеждаемся, что U' действительно является решением системы (2.9):

$$\frac{dU(v)}{dv} = \frac{d\left[\exp(vA)\right]}{dv}U = A\exp(vA)U = AU(v)$$

Остаётся найти эту экспоненту разложением её в ряд:

$$\exp(va) = E + vA + \frac{1}{2!}v^2A^2 + \frac{1}{3!}v^3A^3 + \frac{1}{4!}v^4A^4 + \ldots$$

где E - единичная матрица размером 4×4. Для этого удобно записать матрицу A в блочной форме

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha/c^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\alpha^2/c^2 & 0 \\ 0 & -\alpha/c^2 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^3/c^2 \\ -\alpha^3/c^4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} \alpha^4/c^4 & 0 \\ 0 & \alpha^4/c^4 \end{pmatrix}, \qquad A^5 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^5/c^4 \\ \alpha^5/c^6 & 0 \end{pmatrix}\ldots..$$

И элементы матричной экспоненты имеют вид

$$\left[\exp(vA)\right]_{11} = \left[\exp(vA)\right]_{22} = I - \frac{v^2}{2!c^2} + \frac{v^4}{4!c^4} - \ldots.,$$

$$\left[\exp(vA)\right]_{21} = -c^2\left[\exp(vA)\right]_{12} = \frac{\alpha}{c}\left(\frac{v}{c}I - \frac{v^3}{3!c^3} + \frac{v^5}{5!c^5} - \ldots..\right),$$

где I - единичная матрица 2×2. Нетрудно видеть, что $-\alpha^2=\alpha^4=-\alpha^6=\alpha^8=....=I$, поэтому окончательно получаем

$$\exp(vA)=\begin{pmatrix} Ich\ v/c & -c\alpha sh\ v/c \\ \left(\alpha sh\ v/c\right)/c & Ich\ v/c \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} ch\ v/c & 0 & 0 & -csh\ v/c \\ 0 & ch\ v/c & csh\ v/c & 0 \\ 0 & \left(ch\ v/c\right)/c & ch\ v/c & 0 \\ -\left(sh\ v/c\right)/c & 0 & 0 & ch\ v/c \end{pmatrix}$$

Теперь возвращаемся к (2.10) и подставляя туда $\exp(vA)$, находим

$$E'_y=E_y ch\ v/c-cB_z sh\ v/c, \qquad E'_z=E_z ch\ v/c+cB_y sh\ v/c,$$
$$B'_y=B_y ch\ v/c+\left(E_z/c\right)sh\ v/c, \quad B'_z=B_z ch\ v/c-\left(E_y/c\right)sh\ v/c,$$

или в векторной записи

$$\begin{aligned}\vec{E}'_\perp&=\vec{E}_\perp ch\ \frac{v}{c}+\frac{v}{c}\vec{v}\times\vec{B}_\perp sh\frac{v}{c},\\ \vec{B}'_\perp&=\vec{B}_\perp ch\ \frac{v}{c}-\frac{1}{vc}\vec{v}\times\vec{E}_\perp sh\frac{v}{c}\end{aligned}. \tag{2.11}$$

Это и есть преобразования (2.5)

Возникает закономерный вопрос, поэтому отличаются от соответствующих преобразований полей в классической электродинамике, ведь в ней при малых скоростях $\Delta\vec{v}$ имеют место исходные соотношения (2.6) и (2.7). Дело в том, что согласно релятивистскому закону сложения скоростей складываются не скорости ИСО, а их быстроты. (https://ru.wikipedia.org/wiki/ Быстрота). Согласно определению быстрота вводится

$$\theta=c\ arth\frac{v}{c} \tag{2.12}$$

Именно, если быстроты систем K_1 и K, K_2 и K_1, K_3 и K_2 и т.д. отличаются на $\Delta\theta$, то быстрота ИСО $K'=K_N$ относительно K есть $\theta=N\Delta\theta$. При малых скоростях $\Delta\theta\cong\Delta v$. Поэтому формулы (2.7) можно записать так

$$\Delta\vec{E}=\Delta\theta\times\vec{B}_\perp, \qquad \Delta\vec{B}=-\Delta\vec{\theta}\times\vec{E}_\perp/c^2$$

где $\vec{\theta} = \theta \dfrac{\vec{v}}{v}$. Система (2.9) с учётом аддитивности быстроты, а не скорости, заменится системой уравнений

$$\frac{dU(\theta)}{d\theta} = AU(\theta).$$

Таким образом, все выкладки будут аналогичны приведенным выше с той разницей, что вместо скоростей в выражениях будет фигурировать быстрота. В частности, формулы (2.11) принимают вид

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\perp} &= \vec{E}_{\perp} ch\ \frac{\theta}{c} + \frac{\theta}{c} \vec{\theta} \times \vec{B}_{\perp} sh \frac{\theta}{c}, \\ \vec{B}'_{\perp} &= \vec{B}_{\perp} ch\ \frac{\theta}{c} - \frac{1}{\theta c} \vec{\theta} \times \vec{E}_{\perp} sh \frac{\theta}{c}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\perp} &= \vec{E}_{\perp} ch\ \frac{\theta}{c} + \frac{v}{c} \vec{v} \times \vec{B}_{\perp} sh \frac{\theta}{c}, \\ \vec{B}'_{\perp} &= \vec{B}_{\perp} ch\ \frac{\theta}{c} - \frac{1}{vc} \vec{v} \times \vec{E}_{\perp} sh \frac{\theta}{c}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

Так как

$$ch \frac{\theta}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - th^2(\theta / c)}}, \qquad sh \frac{\theta}{c} = \frac{th(\theta / c)}{\sqrt{1 - th^2(\theta / c)}},$$

То

Подстановка (2.12) in (2.13) приводит к хорошо известным преобразованиям полей

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \left(\vec{E}_{\perp} + \vec{v} \vec{B}_{\perp} \right) \\ \vec{B}'_{\perp} &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \left(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}_{\perp} \right) \end{aligned}. \tag{2.14}$$

При малых относительных скоростях преобразования (2.11) и (2.14) различаются, начиная с членов разложения порядка v^2 / c^2.

Следовательно, если заряженная частица движется, то поля окружающих её частиц то поля в системе координат движущейся частицы преобразуются в соответствии с соотношениями (2.4,2.11).

В уравнениях Власова (1.2) члены в первых двух уравнениях, заключённые в скобки, представляют силу, действующую на движущийся заряд. Но концепция скалярно векторного потенциала даёт возможность вычислить эту силу в системе координат движущегося заряда, с учётом дальнодействующих сил, окружающих зарядов, исключив магнитное поле. Эта сила записывается следующим образом

$$\vec{F} = -e\sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{g_j}{r^2{}_j} ch\frac{v_{j\perp}}{c} \tag{2.15}$$

где g_j - один из внешних зарядов, находящийся на расстоянии r_j от заряда e, $v_{j\perp}$ нормальная составляющая относительной скорость заряда g_j по отношению к заряду e.

Подставляя выражение силы (2.15) в соотношения (1.2), получаем запись уравнений Власова в концепции скалярно-векторного потенциала.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f_e}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f_e}{\partial \vec{x}} - \left(e\sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{g_j}{r^2{}_j} ch\frac{v_{j\perp}}{c}\right)\frac{\partial f_e}{\partial \vec{p}} = 0 \\
&\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f_i}{\partial \vec{x}} + \left(e\sum_j \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{g_j}{r^2{}_j} ch\frac{v_{j\perp}}{c}\right)\frac{\partial f_i}{\partial \vec{p}} = 0 \\
&rot\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{dt} \\
&div\vec{E} = \rho, \quad div\vec{B} = 0 \\
&\rho = e\int (f_i - f_e) d^3\vec{p}, \quad \vec{j} = e\int (f_i - f_e)\vec{v} d^3\vec{p}
\end{aligned}$$

3. Заключение

В настоящее время уравнения Власова являются основными уравнениями электродинамики плазмы, в которых электромагнитные поля самосогласованы с полями зарядов, представляющих плазму. В эти уравнения входит сила Лоренца, которая в концепции скалярно-векторного потенциала может быть выражена через свойства заряженных частиц, окружающих точку наблюдения. Такой подход, реализованный в данной статье, в полной мере реализует идею дальнодействия кулоновских полей, которая является основой уравнений Власова.