

# Функция Лагранжа заряда в концепции скалярно-векторного потенциала

Ф. Ф. Менде

Одним из методов решения задач механики является лагранжево-формализм. Под функцией Лагранжа или лагранжианом в механике понимают разность между кинетической и потенциальной энергией рассматриваемой системы. Если проинтегрировать лагранжиан по времени, то получим первую главную функцию Гамильтона, называемую действием. В общем случае кинетическая энергия системы зависит от скорости, а потенциальная энергия зависит от координат. При условии консерватизма системы лагранжево-формализм предполагает принцип наименьшего действия, когда система при своём движении выбирает путь, при котором действие является минимальным. Однако запись лагранжиана, принятая в электродинамике не в полной мере удовлетворяет условию консерватизма системы. Векторный потенциал, в котором движется заряд, создают сторонние движущиеся заряды, и движущийся заряд взаимодействует не с полем векторного потенциала, а с движущимися зарядами, влияя на их движение. Но существующие модели это обстоятельство не учитывают, т.к. векторный потенциал выступает самостоятельной субстанцией, с которой и взаимодействует движущийся заряд. Более того, в обобщённый импульс движущегося заряда вводится скалярное произведение его скорости и векторного потенциала, в котором заряд движется. Но этот член представляет не кинетическую, а потенциальную энергию, что противоречит определению импульса в механике. С этими обстоятельствами и связаны те ошибки, которые имеют место в трудах по электродинамике. В работе показано, что использование концепции скалярно-векторного потенциала для вычисления

лагранжиана движущегося заряда даёт возможность исключить ошибки, имеющиеся в современной электродинамике.

Ключевые слова: функция Лагранжа, скалярный потенциал, функция Гамильтона, обобщённый импульс, скалярно-векторный потенциал.

## 1. Введение

Одним из методов решения задач механики является лагранжево-формализм. Под функцией Лагранжа или лагранжианом в механике понимают разность между кинетической и потенциальной энергией рассматриваемой системы

$$L = W_k(t) - W_p(t).$$

Если проинтегрировать лагранжиан по времени, то получим первую главную функцию Гамильтона, называемую действием. Поскольку в общем случае кинетическая энергия системы зависит от скорости, а потенциальная энергия зависит от координат, то действие может быть записано как

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, v_i) dt$$

При условии консерватизма системы лагранжево-формализм предполагает принцип наименьшего действия, когда система при своём движении выбирает путь, при котором действие является минимальным. В электродинамике лагранжиан заряда, движущегося с релятивистской скоростью, записывается следующим образом [1]:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q(\varphi + \mu_0(\vec{v}\vec{A}_H)). \quad (1.1)$$

Для нерелятивистских скоростей это выражение запишется:

$$L = \frac{mv^2}{2} - q(\varphi + \mu_0(\vec{v}\vec{A}_H))$$

где  $q$ ,  $m$  и  $\vec{v}$  - заряд, масса и скорость заряда,  $c$  - скорость света,  $\mu_0$  - магнитная проницаемость вакуума,  $\varphi$  - скалярный потенциал электрического поля,  $\vec{A}_H$  - векторный потенциал магнитного поля, в котором движется заряд. Данное выражение и далее все соотношения записываются в системе единиц СИ. Однако такая запись не в полной мере удовлетворяет условию консерватизма системы. Векторный потенциал, в котором движется заряд, создают сторонние движущиеся заряды, и движущийся заряд взаимодействует не с полем векторного потенциала, а с движущимися зарядами, влияя на их движение. Но представленная модель это обстоятельство не учитывает, т.к. векторный потенциал выступает самостоятельной субстанцией, с которой и взаимодействует движущийся заряд.

В работе [2] имеются недоразумения, на стр. 279 читаем: «Поэтому даже в релятивистском приближении функцию Лагранжа в электромагнитном поле не может быть представлена в виде разности кинетической и потенциальной энергии» (конец цитаты).

В соотношении (1.1), автора смущает член, содержащий скалярное произведение скорости заряда и векторного потенциала, и он не знает, к какому виду энергии его отнести.

Между прочим, эта неопределённость не миновала и работ Ландау [3]. Вопросам введения действия и функции Лагранжа движущегося заряда в этой работе посвящены параграфы 16 и 17. При введении этих понятий в параграфе 16 делается следующее замечание: «Следующие ниже утверждения нужно рассматривать в значительной степени как результат опытных данных. Вид действия для частицы в электромагнитном поле не может быть установлен на основе только общих соображений, таких как требование релятивистской инвариантности. (последнее допускало бы в действии также и член вида интеграл от  $A ds$ , где  $A$  скалярная функция)» (конец цитаты).

Но при дальнейшем рассмотрении этого вопроса никаких опытных данных автор не приводит и совершенно не понятно, на каких основаниях вводит функция Лагранжа в виде (1.1). Дальше - ещё хуже. Не понимая физической сущности лагранжиана, и по сути дела угадав его (см. соотношение (17.4) в [3]), автор сразу же включает потенциальную часть (скалярное произведение скорости и векторного потенциала) в обобщённый импульс, а затем для нахождения силы берёт производную по координате от лагранжиана, вычисляя градиент от этой величины (см. соотношение после равенства (18.1) [3]). Но, находя градиент от указанного произведения, автор тем самым признаёт его потенциальный статус.

В механике под импульсом понимают произведение массы частицы на её скорость. Умножая импульс на скорость, получают механическую энергию. В электродинамике, в связи с тем, что заряд имеет массу, также вводится понятие кинетического импульса. Но это не всё. Вводится также понятие обобщённого импульса

$$\vec{P} = m\vec{v} + q\vec{A},$$

когда к кинетическому импульсу добавляют произведение заряда на векторный потенциал магнитного поля, в котором движется заряд. Причём даже при незначительных магнитных полях эта добавка значительно превосходит кинетический импульс. Если обобщённый импульс скалярно умножить на скорость

$$\vec{v}\vec{P} = m(\vec{v})^2 + q\vec{v}\vec{A}, \quad (1.2)$$

то кинетический импульс даст кинетическую энергию. Скалярное произведение скорости и векторного потенциала также даст энергию, вот только эта энергия оказывается не кинетической, а потенциальной. Вот и получается сборная солянка, когда в состав энергии движущегося заряда входит и кинетическая, и потенциальная энергия. С этим и связано то

непонимание физической природы последнего члена в соотношении (1.2), имеющее место в работе [2].

Мы уже сказали, что запись лагранжиана в форме (1.1) не удовлетворяет условию консерватизма системы. Это связано с тем, что векторный потенциал, входящий в это соотношение, связан с движением сторонних зарядов, с которыми и взаимодействует движущийся заряд. Изменение скорости заряда, для которого находится лагранжиан, повлечёт за собой изменение скорости этих зарядов, и на это будет потрачена энергия движущегося заряда. Для того, чтобы обеспечить консерватизм системы, необходимо знать энергию взаимодействия движущегося заряда со всеми сторонними зарядами, в том числе и с теми, от которых зависит векторный потенциал. Это можно сделать путём использования концепции скалярно-векторного потенциала [4-7].

## 2. Концепция скалярно-векторного потенциала.

Законы индукции имеют симметричный характер [2-5]:

$$\begin{aligned} \oint \vec{E}' dl' &= - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{s} + \oint [\vec{v} \times \vec{B}] dl' \\ \oint \vec{H}' dl' &= \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{s} - \oint [\vec{v} \times \vec{D}] dl' \end{aligned} \quad (2.1)$$

или

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E}' &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} [\vec{v} \times \vec{B}] \\ \text{rot} \vec{H}' &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \text{rot} [\vec{v} \times \vec{D}] \end{aligned} \quad (2.2)$$

В этих соотношениях:  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  - электрическое и магнитное поле,  $\vec{D}$  и  $\vec{B}$  - электрическая и магнитная индукция,  $\vec{v}$  - относительная скорость между штрихованной и исходной системой отсчёта (ИСО).

Для постоянных полей эти соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= [\vec{v} \times \vec{B}] \\ \vec{H}' &= -[\vec{v} \times \vec{D}]\end{aligned}\quad (2.3)$$

В соотношениях (2.1-2.3), предполагающих справедливость преобразований Галилея, штрихованные и не штрихованные величины представляют поля и элементы в движущейся и неподвижной ИСО соответственно. Следует заметить, что преобразования (2.3) ранее можно было получить только из преобразований Лоренца.

Соотношения (2.3) свидетельствуют о том, что в случае относительного движения систем отсчета, между полями  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  существует перекрестная связь, т.е. движение в полях  $\vec{H}$  приводит к появлению полей  $\vec{E}$  и наоборот. Из этих соотношений вытекают дополнительные следствия, которые впервые были рассмотрены в работе [2]. Электрическое поле  $E = \frac{g}{2\pi\epsilon r}$  за пределами заряженного длинного стержня, на единицу длины которого приходится заряд  $g$ , убывает по закону  $\frac{1}{r}$ , где  $r$  - расстояние от центральной оси стержня до точки наблюдения.

Если параллельно оси стержня в поле  $E$  начать двигать со скоростью  $\Delta v$  другую ИСО, то в ней появится дополнительное магнитное поле  $\Delta H = \epsilon E \Delta v$ . Если теперь по отношению к уже движущейся ИСО начать двигать третью систему отсчета со скоростью  $\Delta v$ , то уже за счет движения в поле  $\Delta H$  появится добавка к электрическому полю  $\Delta E = \mu \epsilon E (\Delta v)^2$ . Данный процесс можно продолжать и далее, в результате чего может быть получен ряд, дающий величину электрического поля  $E'_v(r)$  в движущейся ИСО при достижении скорости  $v = n\Delta v$ , когда  $\Delta v \rightarrow 0$ , а  $n \rightarrow \infty$ . В конечном итоге в движущейся ИСО величина динамического электрического поля окажется больше, чем в исходной и определится соотношением:

$$E'(r, v_{\perp}) = \frac{gch \frac{v_{\perp}}{c}}{2\pi\epsilon r} = Ech \frac{v_{\perp}}{c}.$$

Если речь идет об электрическом поле одиночного заряда  $e$ , то его электрическое поле будет определяться соотношением:

$$E'(r, v_{\perp}) = \frac{ech \frac{v_{\perp}}{c}}{4\pi\epsilon r^2}, \quad (2.4)$$

где  $v_{\perp}$  - нормальная составляющая скорости заряда к вектору, соединяющему движущийся заряд и точку наблюдения.

Выражение для скалярного потенциала, создаваемого движущимся зарядом, для этого случая запишется следующим образом:

$$\varphi'(r, v_{\perp}) = \frac{ech \frac{v_{\perp}}{c}}{4\pi\epsilon r} = \varphi(r)ch \frac{v_{\perp}}{c}, \quad (2.5)$$

где  $\varphi(r)$  - скалярный потенциал неподвижного заряда. Потенциал  $\varphi'(r, v_{\perp})$  может быть назван скалярно-векторным, т.к. он зависит не только от абсолютной величины заряда, но и от скорости и направления его движения по отношению к точке наблюдения. Максимальное значение этот потенциал имеет в направлении нормальном к движению самого заряда.

### 3. Лагранжев формализм в концепции скалярно-векторного потенциала.

Скалярный потенциал  $\varphi(r)$  в точке нахождения заряда определяется всеми окружающими зарядами  $g_j$  и определяется соотношением:

$$\varphi(r) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{g_j}{r_j}$$

Каждый движущийся заряд создаёт в точке наблюдения потенциал, определяемый соотношением (2.5).

Если данную точку пространства окружает какое-то количество движущихся и неподвижных зарядов, то для нахождения скалярного потенциала в заданной точке необходимо произвести суммирование их потенциалов:

$$\varphi'(r) = \sum_j \varphi(r_j) ch \frac{v_{j\perp}}{c} = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{g_j}{r_j} ch \frac{v_{j\perp}}{c}$$

С учётом этого обстоятельством потенциальная часть лагранжиана заряда  $e$ , находящегося в окружении неподвижных и движущихся сторонних зарядов, запишется следующим образом:

$$L = -e \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{g_j}{r_j} ch \frac{v_{j\perp}}{c}$$

В том случае, если заряд  $e$  сам движется относительно выбранной ИСО со скоростью  $v$ , то его лагранжиан, как и ранее, определяется соотношением (2.1) с той лишь разницей, что в качестве скоростей  $v_{j\perp}$  берутся относительные скорости зарядов по отношению к заряду  $e$  и добавляется член, определяющий кинетическую энергию самого заряда. Лагранжиан для малых скоростей при этом принимает вид:

$$L = \frac{mv^2}{2} - e \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{g_j}{r_j} ch \frac{v_{j\perp}}{c}$$

Такой подход лишен указанного уже недостатка, т.к. удовлетворяет полному консерватизму системы, поскольку в лагранжиане учтены все взаимодействия заряд с окружающими его зарядами.

## Заключение

Одним из методов решения задач механики является лагранжево-формализм. Под функцией Лагранжа или лагранжианом в механике понимают разность между кинетической и потенциальной энергией рассматриваемой системы. Если проинтегрировать лагранжиан по времени, то получим первую главную функцию Гамильтона, называемую действием. В общем случае кинетическая энергия системы зависит от скорости, а потенциальная энергия зависит от координат. При условии консерватизма системы лагранжево-формализм предполагает принцип наименьшего действия, когда система при своём движении выбирает путь, при котором действие является минимальным. Однако запись лагранжиана, принятая в электродинамике не в полной мере удовлетворяет условию консерватизма системы. Векторный потенциал, в котором движется заряд, создают сторонние движущиеся заряды, и движущийся заряд взаимодействует не с полем векторного потенциала, а с движущимися зарядами, влияя на их движение. Но существующие модели это обстоятельство не учитывают, т.к. векторный потенциал выступает самостоятельной субстанцией, с которой и взаимодействует движущийся заряд. Более того, в обобщённый импульс движущегося заряда вводится скалярное произведение его скорости и векторного потенциала, в котором заряд движется. Но этот член представляет не кинетическую, а потенциальную энергию, что противоречит определению импульса в механике. С этими обстоятельствами и связаны те ошибки, которые имеют место в трудах по электродинамике. В работе показано, что использование концепции скалярно-векторного потенциала для вычисления лагранжиана движущегося заряда даёт возможность исключить ошибки, имеющиеся в современной электродинамике.

## Литература.

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. М: Мир, 1977.
2. Левич В. Г. Курс теоретической физики. М: Физматгиз, 1962. - 696 с.
3. Ландау Л. Д. Лифшиц Е. М. Теория поля. М: Наука, 1988. – 509 с.
4. Менде Ф. Ф. К вопросу об уточнении уравнений элетромагнитной индукции. - Харьков, депонирована в ВИНТИ, №774-В88 Деп., 1988.
5. Менде Ф. Ф. Существуют ли ошибки в современной физике. Харьков, Константа, 2003.
6. Mende F. F. On refinement of certain laws of classical electrodynamics, arXiv, physics/0402084.
7. Mende F. F. Conception of the scalar-vector potential in contemporary electrodynamics, arXiv.org/abs/physics/0506083.
8. F. F. Mende, Concept of Scalar-Vector Potential in the Contemporary Electrodynamic, Problem of Homopolar Induction and Its Solution, *International Journal of Physics*, 2014, Vol. 2, No. 6, 202-210
9. F. F. Mende, Consideration and the Refinement of Some Laws and Concepts of Classical Electrodynamics and New Ideas in Modern Electrodynamics, *International Journal of Physics*, 2014, Vol. 2, No. 8, 231-263.
10. F. F. Mende. What is Not Taken into Account and they Did Not Notice Ampere, Faraday, Maxwell, Heaviside and Hertz. *AASCIT Journal of Physics*. Vol. 1, No. 1, 2015, pp. 28-52.
11. F. F. Mende. Dynamic Scalar Potential and the Electrokinetic Electric Field. *AASCIT Journal of Physics*. Vol. 1, No. 1, 2015, pp. 53-57.