Calculul razelor cercurilor Lemoine

Ion Pătrașcu, profesor, Colegiul Național "Frații Buzești", Craiova, România
Florentin Smarandache, profesor, Universitatea New Mexico, U.S.A

Pentru calculul razei primului cerc al lui Lemoine vom demonstra mai întâi:

Teorema 1 (E. Lemoine – 1873).

Laturile unui triunghi sunt împărțite de primul cerc Lemoine în segmente proporționale cu pătratele laturilor triunghiului.

Fiecare segment extrem este proporțional cu pătratul laturii căreia îi este adiacent, iar segmentul-coardă în cercul Lemoine este proporțional cu pătratul laturii care îl conține.

Demonstrație.

Vom demonstra că $\frac{BC_2}{c^2} = \frac{C_2B_1}{a^2} = \frac{B_1C}{b^2}$.

În figura 1, K este centrul simedian al triunghiului ABC, iar A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2 sunt paralelele lui Lemoine.

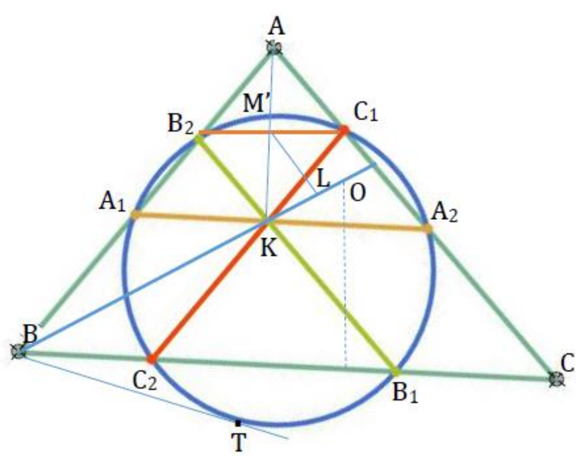

Figura 1

Triunghiurile BC_2A_1; CB_1A_2 și KC_2A_1 au înălțimile relative la laturile BC_2; B_1C și C_2B_1 egale ($A_1A_2 \parallel BC$).

Deci: $\frac{Aria_\Delta\, BA_1C_2}{BC_2} = \frac{Aria_\Delta\, KC_2A_1}{C_2B_1} = \frac{Aria_\Delta\, CB_1A_2}{B_1C}$. (1)

Pe de altă parte: A_1C_2 și B_1A_2 fiind antiparalele la AC respectiv AB, avem că $\Delta BC_2A_1 \sim \Delta BAC$ și $\Delta CB_1A_2 \sim \Delta CAB$, de asemenea $KC_2 \parallel AC$ implică: $\Delta KC_2B_1 \sim \Delta ABC$.

Obținem astfel că:

$$\frac{Aria_\Delta\, BC_2A_1}{Aria_\Delta\, ABC} = \frac{BC_2^2}{c^2}\ ;\ \frac{Aria_\Delta\, KC_2B_1}{Aria_\Delta\, ABC} = \frac{C_2B_1^2}{a^2}\ ;\ \frac{Aria_\Delta\, CB_1A_2}{Aria_\Delta\, ABC} = \frac{CB_1^2}{b^2}. \quad (2)$$

Dacă notăm $Aria_\Delta\, ABC = S$, obținem din relațiile (1) și (2) că:

$$\frac{BC_2}{c^2} = \frac{C_2B_1}{a^2} = \frac{B_1C}{b^2}.$$

Consecințe.

C1. Din teorema 1, găsim că:

$$BC_2 = \frac{ac^2}{a^2+b^2+c^2};\ B_1C = \frac{ab^2}{a^2+b^2+c^2};\ B_1C_2 = \frac{a^3}{a^2+b^2+c^2}.$$

C2. Se găsește că:

$\frac{B_1C_2}{a^3} = \frac{A_2C_1}{b^3} = \frac{A_1B_2}{c^3}$, adică:

“Coardele determinate de primul cerc Lemoine pe laturile triunghiului sunt proporționale cu cuburile laturilor.”

Datorită acestei proprietăți, primul cerc al lui Lemoine este numit în Anglia cercul raportului cuburilor (*The triplicate ratio circle*, Tucker).

Propoziția 1.

Raza primului cerc al lui Lemoine, R_{L_1} este dată de formula:

$$R_{L_1}^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{R^2(a^2+b^2+c^2) + a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}, \quad (3)$$

unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Demonstrație.

Fie L centrul primului cerc al lui Lemoine care se știe că este mijlocul segmentului (OK) – O fiind centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Ținând seama de C1, obținem $BB_1 = \frac{a\,(c^2+a^2)}{a^2+b^2+c^2}$.

Considerând puterea punctului B față de primul cerc Lemoine, avem:

$BC_2 \cdot BB_1 = BT^2 - LT^2$, ($BT$ este tangenta dusă din B la primul cerc Lemoine – vezi *Figura 1*)

Rezultă: $R_{L_1}^2 = BL^2 - BC_2 \cdot BB_1$ (4)

Teorema medianei în triunghiul BOK implică:

$BL^2 = \frac{2\cdot(BK^2+BO^2)-OK^2}{4}$.

Se știe că $BK = \frac{(a^2+c^2)\cdot S_b}{a^2+b^2+c^2}$; $S_b = \frac{2ac\cdot m_b}{a^2+c^2}$, unde S_b și m_b sunt lungimile simedianei și medianei din B, iar $OK^2 = R^2 - \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)}$, vezi (3).

Rezultă: $BK^2 = \frac{2a^2c^2(a^2+c^2)-a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$, și

$4BL^2 = R^2 + \frac{4a^2c^2(a^2+c^2)+a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$.

Deoarece: $BC_2 \cdot BB_1 = \frac{a^2c^2(a^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2}$, înlocuind în (4) se obține formula (3).

Propoziția 2.

Raza celui de-al doilea cerc al lui Lemoine, R_{L_2}, este dată de formula:

$R_{L_2} = \frac{abc}{a^2+b^2+c^2}$ (5)

Demonstrație.

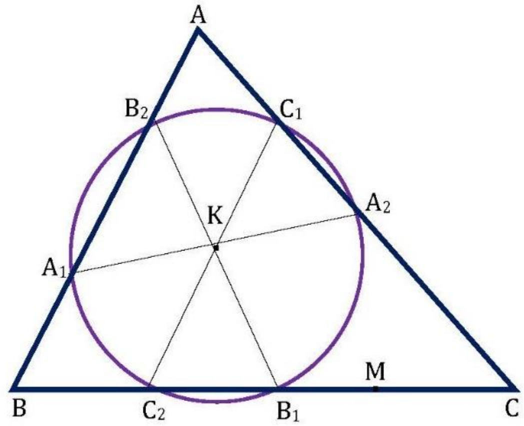

Figura 2

În *Figura 2*, A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2 sunt antiparalelele lui Lemoine duse prin centrul simedian K, care este centrul celui de-al doilea cerc Lemoine, deci:

$R_{L_2} = KA_1 = KA_2$.

Dacă notăm cu S și M picioarele simedianei și medianei din A, se știe că:

$\frac{AK}{KS} = \frac{b^2+c^2}{a^2}$.

Din asemănarea triunghiurilor AA_2A_1 și ABC, avem: $\frac{A_1A_2}{BC} = \frac{AK}{AM}$.

Dar: $\frac{AK}{AS} = \frac{b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}$ și $AS = \frac{2bc}{b^2+c^2} \cdot m_a$.

$A_1A_2 = 2R_{L_2}$, $BC = a$, rezultă:

$R_{L_2} = \frac{AK \cdot a}{2m_a}$, și cum $AK = \frac{2bc \cdot m_a}{a^2+b^2+c^2}$ rezultă formula (5).

Observații.

1. Dacă folosim $tg\omega = \frac{4S}{a^2+b^2+c^2}$, ω fiind unghiul lui Brocard (vezi [2]), obținem:

$R_{L_2} = R \cdot tg\omega$.

2. Dacă, în *Figura 1*, notăm cu M_1 mijlocul antiparalelei B_2C_1, care este egală cu R_{L_2} (din motive de asemănare), avem din triunghiul dreptunghic LM_1C_1 că:

$LC_1^2 = LM_1^2 + M_1C_1^2$, dar $LM_1^2 = \frac{1}{4}a^2$ și $M_1C_2 = \frac{1}{2}R_{L_2}$; rezultă:

$R_{L_1}^2 = \frac{1}{4}\left(R^2 + R_{L_2}^2\right) = \frac{R^2}{4}(1 + tg^2\omega)$.

Obținem:

$R_{L_1} = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{1 + ty^2\omega}$.

Propoziția 3.

Coardele determinate de laturile triunghiului în al doilea cerc al lui Lemoine sunt respectiv proporționale cu cosinusurile unghiurilor opuse.

Demonstrație.

Triunghiul KC_2B_1 este isoscel, $\sphericalangle KC_2B_1 = \sphericalangle KB_1C_2 = \sphericalangle A$; cum $KC_2 = R_{L_2}$ avem că $\cos A = \frac{C_2B_1}{2R_{L_2}}$, deci $\frac{C_2B_1}{\cos A} = 2R_{L_2}$, analog:

$\frac{A_2C_1}{\cos B} = \frac{B_2A_1}{\cos C} = 2R_{L_2}$.

Remarcă.

Drept consecință a acestei proprietăți al celui de-al doilea cerc al lui Lemoine, în Anglia acest cerc este cunoscut sub denumirea cercul cosinusilor (*cosine circle*).

Bibliografie.

[1] D. Efremov, *Noua geometrie a triunghiului*, traducere din limba rusă de Mihai Micuțițe, Editura GIL, Zalău, 2010.

[2] F. Smarandache și I. Pătrașcu, *The geometry of Homological Triangles*, The Education Publisher, Ohio, USA, 2012.

[3]I. Pătrașcu și F. Smarandache, *Variance on Topics of Plane Geometry*, Educational Publisher, Ohio, USA, 2013.