Une Démonstration Elémentaire de la Conjecture de BEAL

Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Ingénieur Général Géographe

Octobre 2015

Version 2.

abenhadjsalem@gmail.com

Table des matières

Une Démonstration Elémentaire de la Conjecture de BEAL

Abdelmajid Ben Hadj Salem, Ing. Géographe Général

abenhadjsalem@gmail.com [1]

Résumé

En 1997, Andrew Beal [1] avait annoncé la conjecture suivante : *Soient $A, B, C, m, n,$ et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si $A^m + B^n = C^l$ alors $A, B,$ et C ont un facteur commun.* Nous commençons par construire le polynôme $P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) = x^3 - px + q$ avec p, q des entiers qui dépendent de A^m, B^n et C^l. Nous résolvons $x^3 - px + q = 0$ et nous obtenons les trois racines x_1, x_2, x_3 comme fonctions de p, q et d'un paramètre θ. Comme $A^m, B^n, -C^l$ sont les seules racines de $x^3 - px + q = 0$, nous discutons les conditions pourque x_1, x_2, x_3 soient des entiers. Des exemples numériques sont présentés.

O my Lord! Increase me further in knowledge.
(Holy Quran, Surah Ta Ha, 20 :114.)

To my Wife Wahida

1 Introduction

En 1997, Andrew Beal [1] avait annoncé la conjecture suivante :

Conjecture 1.1. *Soient $A, B, C, m, n,$ et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si :*

$$A^m + B^n = C^l \tag{1}$$

alors $A, B,$ et C ont un facteur commun.

Dans cette communication, nous donnons une démonstration élémentaire de la conjecture de Beal. Notre idée est de construire le polynôme $P(x)$ de degré trois ayant comme racines A^m, B^n et $-C^l$. Dans la section suivante, nous effectuerons des calculs préliminaires pour obtenir les expressions des trois racines de $P(x) = 0$. La démonstration de la conjecture (1.1) fera l'objet de la section 3. Dans la section 4, nous présenterons quelques exemples numériques.

Nous commençons avec le cas trivial où $A^m = B^n$. L'équation (1) devient :

$$2A^m = C^l \tag{2}$$

1. 6, Rue du Nil, Cité Soliman Erriadh, 8020 Soliman, TUNISIA.

alors $2|C^l \Longrightarrow 2|C \Longrightarrow \exists\, c \in \mathbb{N}^*/\ C = 2c$, d'où $2A^m = 2^l c^l \Longrightarrow A^m = 2^{l-1}c^l$. Comme $l > 2$,alors $2|A^m \Longrightarrow 2|A \Longrightarrow 2|B^n \Longrightarrow 2|B$. La conjecture (1.1) est vérifiée.

Nous supposons dans la suite que $A^m > B^n$.

2 Calculs Préliminaires

Soient $m, n, l \in \mathbb{N}^* \ > 2$ et $A, B, C \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$A^m + B^n = C^l \tag{3}$$

Nous appelerons :

$$\begin{aligned} P(x) = (x - A^m)(x - B^n)(x + C^l) = x^3 - x^2(A^m + B^n - C^l) \\ + x[A^m B^n - C^l(A^m + B^n)] + C^l A^m B^n \end{aligned} \tag{4}$$

Utilisant l'équation (3), $P(x)$ peut s'écrire :

$$\boxed{P(x) = x^3 + x[A^m B^n - (A^m + B^n)^2] + A^m B^n (A^m + B^n)} \tag{5}$$

nous introduisons les notations :

$$p = (A^m + B^n)^2 - A^m B^n \tag{6}$$

$$q = A^m B^n (A^m + B^n) \tag{7}$$

Comme $A^m \neq B^n$, nous obtenons :

$$p > (A^m - B^n)^2 > 0 \tag{8}$$

L'équation (5) devient :

$$P(x) = x^3 - px + q \tag{9}$$

en utilisant l'équation (4), $P(x) = 0$ a trois racines réelles différentes : A^m, B^n et $-C^l$.

Maintenant, occupons-nous de la résolution de l'équation :

$$P(x) = x^3 - px + q = 0 \tag{10}$$

Pour résoudre (10), posons :

$$x = u + v \tag{11}$$

Alors $P(x) = 0$ donne :

$$P(x) = P(u+v) = (u+v)^3 - p(u+v) + q = 0 \Longrightarrow u^3 + v^3 + (u+v)(3uv - p) + q = 0 \tag{12}$$

Pour déterminer u et v, nous obtenons les conditions :

$$u^3 + v^3 = -q \tag{13}$$

$$uv = p/3 > 0 \tag{14}$$

Alors u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré :

$$X^2 + qX + p^3/27 = 0 \tag{15}$$

Son descriminant Δ s'écrit :

$$\Delta = q^2 - 4p^3/27 = \frac{27q^2 - 4p^3}{27} = \frac{\bar{\Delta}}{27} \tag{16}$$

Soit :

$$\begin{aligned}\bar{\Delta} = 27q^2 - 4p^3 &= 27(A^m B^n (A^m + B^n))^2 - 4[(A^m + B^n)^2 - A^m B^n]^3 \\ &= 27A^{2m} B^{2n} (A^m + B^n)^2 - 4[(A^m + B^n)^2 - A^m B^n]^3 \end{aligned} \tag{17}$$

Notons :

$$\alpha = A^m B^n > 0 \tag{18}$$

$$\beta = (A^m + B^n)^2 \tag{19}$$

Nous pouvons écrire l'équation (17) comme :

$$\bar{\Delta} = 27\alpha^2\beta - 4(\beta - \alpha)^3 \tag{20}$$

Comme $\alpha \neq 0$, nous pouvons aussi re-écrire l'équation (20) comme :

$$\bar{\Delta} = \alpha^3 \left(27\frac{\beta}{\alpha} - 4\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)^3 \right) \tag{21}$$

Nous appelons t le paramètre :

$$t = \frac{\beta}{\alpha} \tag{22}$$

$\bar{\Delta}$ devient :

$$\bar{\Delta} = \alpha^3 (27t - 4(t-1)^3) \tag{23}$$

Appelons :

$$y = y(t) = 27t - 4(t-1)^3 \tag{24}$$

Comme $\alpha > 0$, le signe de $\bar{\Delta}$ est aussi le signe de $y(t)$. Etudions le signe de y. Nous obtenons $y'(t)$:

$$y'(t) = y' = 3(1+2t)(5-2t) \tag{25}$$

$y' = 0 \Longrightarrow t_1 = -1/2$ et $t_2 = 5/2$, alors le tableau de variations de y est donné ci-dessous :

Le tableau de variations de la fonction y montre que $y < 0$ pour $t > 4$. Dans notre cas, nous sommes intéressés à $t > 0$. Pour $t = 4$ nous obtenons $y(4) = 0$ et pour $t \in]0, 4[\Longrightarrow y > 0$. Comme nous avons $t = \frac{\beta}{\alpha} > 4$ parceque $A^m \neq B^n$:

$$(A^m - B^n)^2 > 0 \Longrightarrow \beta = (A^m + B^n)^2 > 4\alpha = 4A^m B^n \tag{26}$$

Alors $y < 0 \Longrightarrow \bar{\Delta} < 0 \Longrightarrow \Delta < 0$. Alors l'équation (15) n'a pas de racines réelles u^3 et v^3. Retrouvons les solutions u et v avec $x = u + v$ un réel positif ou négatif et $u.v = p/3$.

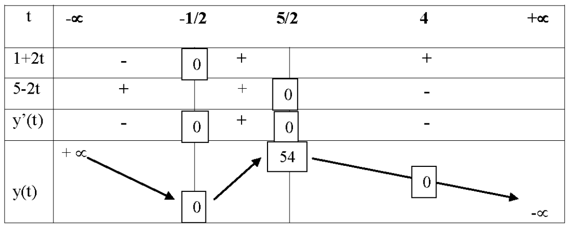

Fig. 1: Le Tableau de variations

2.1 Démonstration

Démonstration. Les solutions de l'équation (15) sont :

$$X_1 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2} \tag{27}$$

$$X_2 = \overline{X_1} = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2} \tag{28}$$

Nous devons résoudre :

$$u^3 = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2} \tag{29}$$

$$v^3 = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2} \tag{30}$$

Ecrivant X_1 sous la forme :

$$X_1 = \rho e^{i\theta} \tag{31}$$

avec :

$$\rho = \frac{\sqrt{q^2 - \Delta}}{2} = \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}} \tag{32}$$

$$\text{et } \; sin\theta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\rho} > 0 \tag{33}$$

$$cos\theta = -\frac{q}{2\rho} < 0 \tag{34}$$

alors $\theta\,[2pi] \in]+\frac{\pi}{2}, +\pi[$, soit :

$$\boxed{\frac{\pi}{2} < \theta < +\pi \Rightarrow \frac{\pi}{6} < \frac{\theta}{3} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} < cos\frac{\theta}{3} < \frac{\sqrt{3}}{2}} \tag{35}$$

et :

$$\boxed{\frac{1}{4} < cos^2\frac{\theta}{3} < \frac{3}{4}} \tag{36}$$

d'où l'expression de X_2 :

$$X_2 = \rho e^{-i\theta} \tag{37}$$

Soit :

$$u = re^{i\psi} \tag{38}$$

$$\text{et } j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \tag{39}$$

$$j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \bar{j} \tag{40}$$

j est une racine complexe cubique de l'unité $\Longleftrightarrow$ $j^3 = 1$. Alors les solutions u et v sont :

$$u_1 = re^{i\psi_1} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta}{3}} \tag{41}$$

$$u_2 = re^{i\psi_2} = \sqrt[3]{\rho}je^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}} \tag{42}$$

$$u_3 = re^{i\psi_3} = \sqrt[3]{\rho}j^2e^{i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{+i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{\theta+4\pi}{3}} \tag{43}$$

et similairement :

$$v_1 = re^{-i\psi_1} = \sqrt[3]{\rho}e^{-i\frac{\theta}{3}} \tag{44}$$

$$v_2 = re^{-i\psi_2} = \sqrt[3]{\rho}j^2e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi}{3}}e^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{4\pi-\theta}{3}} \tag{45}$$

$$v_3 = re^{-i\psi_3} = \sqrt[3]{\rho}je^{-i\frac{\theta}{3}} = \sqrt[3]{\rho}e^{i\frac{2\pi-\theta}{3}} \tag{46}$$

Nous devons choisir u_k et v_h de façon que $u_k + v_h$ soit réel. Dans ce cas, nous avons nécessairement :

$$v_1 = \overline{u_1} \tag{47}$$

$$v_2 = \overline{u_2} \tag{48}$$

$$v_3 = \overline{u_3} \tag{49}$$

Nous obtenons comme solutions réelles de l'équation (12) :

$$x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta}{3} > 0 \tag{50}$$

$$x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta+2\pi}{3} = -\sqrt[3]{\rho}\left(cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}\right) < 0 \tag{51}$$

$$x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta+4\pi}{3} = \sqrt[3]{\rho}\left(-cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}\right) > 0 \tag{52}$$

Utilisant les expressions de x_1 et x_3, nous comparons x_1 et x_3 :

$$2\sqrt[3]{p}cos\frac{\theta}{3} \overbrace{>}^{?} \sqrt[3]{p}\left(-cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}\right)$$

$$3cos\frac{\theta}{3} \overbrace{>}^{?} \sqrt{3}sin\frac{\theta}{3} \tag{53}$$

comme $\frac{\theta}{3} \in]+\frac{\pi}{6},+\frac{\pi}{3}[$, alors $sin\frac{\theta}{3}$ et $cos\frac{\theta}{3}$ sont > 0. Prenons le carré des deux membres de la dernière équation, nous obtenons :

$$\frac{1}{4} < cos^2\frac{\theta}{3} \tag{54}$$

ce qui est vrai puisque $\frac{\theta}{3} \in]+\frac{\pi}{6},+\frac{\pi}{3}[$ alors $x_1 > x_3$. Comme A^m, B^n et $-C^l$ sont les seules solutions réelles de (10), nous considérons, comme A^m est supposé supérieur à B^n, les expressions :

$$\boxed{\begin{cases} A^m = x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta}{3} \\ \\ B^n = x_3 = u_3 + v_3 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta+4\pi}{3} = \sqrt[3]{\rho}\left(-cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}\right) \\ \\ -C^l = x_2 = u_2 + v_2 = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta+2\pi}{3} = -\sqrt[3]{\rho}\left(cos\frac{\theta}{3} + \sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}\right) \end{cases}} \tag{55}$$

□

3 La Démonstration du Principal Théorème

Principal Théorème : *Soient $A, B, C, m, n,$ et l des entiers positifs avec $m, n, l > 2$. Si :*

$$A^m + B^n = C^l \tag{56}$$

alors $A, B,$ et C ont un facteur commun.

Démonstration. $A^m = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta}{3}$ est un entier $\Rightarrow A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}cos^2\frac{\theta}{3}$ est un entier. Mais :

$$\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3} \tag{57}$$

Alors :

$$A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}cos^2\frac{\theta}{3} = 4\frac{p}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = p.\frac{4}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} \tag{58}$$

Comme A^{2m} est un entier, et p est un entier, alors $cos^2\frac{\theta}{3}$ doit être écrit sous la forme :

$$\boxed{cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{1}{b} \quad ou \quad cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b}} \tag{59}$$

avec $b \in \mathbb{N}^*$, pour la dernière condition $a \in \mathbb{N}^*$ et a, b copremiers.

3.1 Cas $cos^2\dfrac{\theta}{3}=\dfrac{1}{b}$

Nous obtenons :

$$A^{2m}=p.\frac{4}{3}.cos^2\frac{\theta}{3}=\frac{4.p}{3.b} \tag{60}$$

Comme $\dfrac{1}{4}<cos^2\dfrac{\theta}{3}<\dfrac{3}{4}\Rightarrow\dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{3}{4}\Rightarrow b<4<3b\Rightarrow b=1,2,3.$

3.1.1 $b=1$

$b=1\Rightarrow 4<3$ ce qui est impossible.

3.1.2 $b=2$

$b=2\Rightarrow A^{2m}=p.\dfrac{4}{3}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{2.p}{3}\Rightarrow 3|p\Rightarrow p=3p'$ avec $p'\neq 1$ parceque $3\ll p$, et $b=2$, nous obtenons :

$$A^{2m}=\frac{2p}{3}=2.p' \tag{61}$$

mais :

$$B^nC^l=\sqrt[3]{\rho^2}\left(3-4cos^2\frac{\theta}{3}\right)=\frac{p}{3}\left(3-4\frac{1}{2}\right)=\frac{p}{3}=\frac{3p'}{3}=p' \tag{62}$$

d'un côté :

$$\begin{aligned}A^{2m}=(A^m)^2=2p'\Rightarrow 2|p'\Rightarrow p'=2p"^2\Rightarrow A^{2m}=4p"^2\\ \Rightarrow A^m=2p"\Rightarrow 2|A^m\Rightarrow 2|A\end{aligned}$$

et de l'autre côté :

$B^nC^l=p'=2p"^2\Rightarrow 2|B^n$ or $2|C^l$. Si $2|B^n\Rightarrow 2|B$. Comme $C^l=A^m+B^n$ et $2|A$ et $2|B$, il s'ensuit $2|A^m$ et $2|B^n$, alors $2|(A^m+B^n)\Rightarrow 2|C^l\Leftrightarrow 2|C$.

Alors, nous avons : A,B et C solutions de (3) ont un facteur commun. De même si $2|C^l$, nous obtenons le même résultat : A,B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

3.1.3 $b=3$

$b=3\Rightarrow A^{2m}=p.\dfrac{4}{3}.\dfrac{1}{3}=\dfrac{4p}{9}\Rightarrow 9|p\Rightarrow p=9p'$ avec $p'\neq 1$ comme $9\ll p$ then $A^{2m}=4p'\Longrightarrow p'$ n'est pas premier. Soit μ un entier premier avec $\mu|p'\Rightarrow\mu|A^{2m}\Rightarrow\mu|A$.

D'autre part :

$$B^nC^l=\frac{p}{3}\left(3-4cos^2\frac{\theta}{3}\right)=5p'$$

Alors $\mu|B^n$ ou $\mu|C^l$. Si $\mu|B^n\Rightarrow\mu|B$. Comme $C^l=A^m+B^n$ et $\mu|A$ et $\mu|B$, il s'ensuit $\mu|A^m$ et $\mu|B^n$, alors $\mu|(A^m+B^n)\Rightarrow\mu|C^l\Longrightarrow\mu|C$.

Alors, nous avons : A,B et C solutions de (3) ont un facteur commun. De même si $\mu|C^l$, nous obtenons le même résultat : A,B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

3.2 Cas $a > 1,\ cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{a}{b}$

Nous avons donc :

$$cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} \tag{63}$$

$$A^{2m} = p.\frac{4}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4.p.a}{3.b} \tag{64}$$

où a, b vérifient l'une des deux conditions :

$$\boxed{\{3|p \quad et \quad b|4p\}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\{3|a \quad et \quad b|4p\}} \tag{65}$$

et en utilisant l'équation (36), nous obtenons une troisième condition :

$$\boxed{b < 4a < 3b} \tag{66}$$

Pour ces conditions, $A^{2m} = 4\sqrt[3]{\rho^2}cos^2\frac{\theta}{3} = 4\dfrac{p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3}$ est un entier.

Etudions alors les conditions données par l'équation (65).

3.2.1 Hypothèse : $\{3|p \quad et \quad b|4p\}$

3.2.1.1. Cas $b = 2$ et $3|p$: $3|p \Rightarrow p = 3p'$ avec $p' \neq 1$ parceque $3 \ll p$, et $b = 2$, nous obtenons :

$$A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4.3p'.a}{3b} = \frac{4.p'.a}{2} = 2.p'.a \tag{67}$$

Comme :

$$\frac{1}{4} < cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{2} < \frac{3}{4} \Rightarrow a < 2 \Rightarrow a = 1 \tag{68}$$

mais $a > 1$ alors le cas $b = 2$ et $3|p$ est impossible.

3.2.1.2. Cas $b = 4$ et $3|p$: nous avons $3|p \Longrightarrow p = 3p'$ avec $p' \in \mathbb{N}^*$, il s'ensuit :

$$A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4.3p'.a}{3 \times 4} = p'.a \tag{69}$$

et :

$$\frac{1}{4} < cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{4} < \frac{3}{4} \Rightarrow 1 < a < 3 \Rightarrow a = 2 \tag{70}$$

mais a, b sont copremiers. Alors le cas $b = 4$ et $3|p$ est impossible.

3.2.1.3. Cas : $b \neq 2, b \neq 4$, $b|p$ et $3|p$: Comme $3|p$ alors $p = 3p'$ et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3} cos^2 \frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3} \frac{a}{b} = \frac{4 \times 3p'}{3} \frac{a}{b} = \frac{4p'a}{b} \tag{71}$$

Nous considérons le cas : $b|p' \Longrightarrow p' = bp"$ et $p" \neq 1$ (si $p" = 1$, alors $p = 3b$, voir sous-paragraphe $2^{\text{ème}}$ sous-cas équation (91)). D'où :

$$A^{2m} = \frac{4bp"a}{b} = 4ap" \tag{72}$$

Calculons B^nC^l :

$$B^nC^l = \frac{p}{3}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = p'\left(3 - 4\frac{a}{b}\right) = b.p".\frac{3b - 4a}{b} = p".(3b - 4a) \tag{73}$$

Finalement, nous avons les deux équations :

$$A^{2m} = \frac{4bp"a}{b} = 4ap" \tag{74}$$

$$B^nC^l = p".(3b - 4a) \tag{75}$$

Sous-Cas 1 : p" est premier . De (74), $p"|A^{2m} \Rightarrow p"|A^m \Rightarrow p"|A$. De (75), $p"|B^n$ ou $p"|C^l$. Si $p"|B^n \Rightarrow p"|B$, comme $C^l = A^m + B^n \Rightarrow p"|C^l \Rightarrow p"|C$. If $p"|C^l \Rightarrow p"|C$, comme $B^n = C^l - A^m \Rightarrow p"|B^n \Rightarrow p"|B$.

Alors A,B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

Sous-Cas 2 : p" n'est pas premier. Soit λ un diviseur premier de $p"$. De (74), nous avons :

$$\lambda|A^{2m} \Rightarrow \lambda|A^m \quad \text{comme}\,\lambda\,\text{est premier alors} \quad \lambda|A \tag{76}$$

De (75), comme $\lambda|p"$, nous avons :

$$\lambda|B^nC^l \Rightarrow \lambda|B^n \quad \text{or}\ \lambda|C^l \tag{77}$$

Si $\lambda|B^n$, λ est premier $\lambda|B$, et comme $C^l = A^m + B^n$ alors nous avons aussi :

$$\lambda|C^l \quad \text{comme}\,\lambda\,\text{est premier, alors} \quad \lambda|C \tag{78}$$

De la même manière si $\lambda|C^l$, nous obtenons $\lambda|B$.

Alors : A, B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

Vérifions la condition (66) donnée par :

$$b < 4a < 3b$$

Dans notre cas, la dernière équation devient :

$$p < 3A^{2m} < 3p \quad avec \quad p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \tag{79}$$

et $3A^{2m} < 3p \Longrightarrow A^{2m} < p$ est vérifié.

Si :

$$p < 3A^{2m} \Longrightarrow 2A^{2m} - A^m B^n - B^{2n} > 0$$

nous posons $Q(Y) = 2Y^2 - B^n Y - B^{2n}$, les racines de $Q(Y) = 0$ sont $Y_1 = -\frac{B^n}{2}$ et $Y_2 = B^n$. $Q(Y) > 0$ pour $Y < Y_1$ et $Y > Y_2 = B^n$. Dans notre cas, nous prenons $Y = A^m$. Comme $A^m > B^n$ alors $p < 3A^{2m}$ est vérifié. Alors la condition $b < 4a < 3b$ est vraie.

Dans la suite du papier, nous vérifions facilement que la condition $b < 4a < 3b$ implique à vérifier $A^m > B^n$ ce qu'est vrai.

3.2.1.4. Cas $b = 3$ et $3|p$: comme $3|p \Longrightarrow p = 3p'$, nous écrivons :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}\frac{a}{b} = \frac{4\times 3p'}{3}\frac{a}{3} = \frac{4p'a}{3} \tag{80}$$

Comme A^{2m} est un entier et que a et b sont copremiers et $cos^2\dfrac{\theta}{3}$ ne peut pas prendre la valeur 1 en référence à l'équation (35), alors nous avons nécessairement $3|p' \Longrightarrow p' = 3p"$ avec $p" \neq 1$, si non $p = 3p' = 3\times 3p" = 9$ mais $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n > 9$, l'hypothèse $p" = 1$ est impossible, alors $p" > 1$. D'où :

$$A^{2m} = \frac{4p'a}{3} = \frac{4\times 3p"a}{3} = 4p"a \tag{81}$$

$$B^nC^l = \frac{p}{3}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = p'\left(3 - 4\frac{a}{b}\right) = \frac{3p"(9-4a)}{3} = p".(9-4a) \tag{82}$$

Comme $\dfrac{1}{4} < cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{3} < \dfrac{3}{4} \Longrightarrow 3 < 4a < 9 \Longrightarrow a = 2$ comme $a > 1$.

$a = 2$, nous obtenons :

$$A^{2m} = \frac{4p'a}{3} = \frac{4\times 3p"a}{3} = 4p"a = 8p" \tag{83}$$

$$B^nC^l = \frac{p}{3}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = p'\left(3 - 4\frac{a}{b}\right) = \frac{3p"(9-4a)}{3} = p" \tag{84}$$

Les 2 dernières équations impliquent que $p"$ n'est pas premier. Alors nous utilisons le même raisonnement décrit ci-dessus pour le cas **3.2.1.3.**, et nous avons : A,B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

3.2.1.5. Cas $3|p$ **et** $b = p$ **:** nous avons :

$$cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{a}{p}$$

et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{p} = \frac{4a}{3} \tag{85}$$

Comme A^{2m} est un entier, ce-ci implique que $3|a$, mais $3|p \Longrightarrow 3|b$. Comme a et b sont copremiers, d'où la contradiction. Alors le cas $3|p$ et $b = p$ est impossible.

3.2.1.6. Cas $3|p$ **et** $b = 4p$ **:** $3|p \Longrightarrow p = 3p'$, $p' \neq 1$ car $3 \ll p$, par suite $b = 4p = 12p'$.

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}\frac{a}{b} = \frac{a}{3} \Longrightarrow 3|a \tag{86}$$

car A^{2m} est un entier. Mais $3|p \Longrightarrow 3|\,[(4p) = b]$, ce qui en contradiction avec l'hypothèse a, b copremiers. Alors le cas $b = 4p$ est impossible.

3.2.1.7. Cas $3|p$ **et** $b = 2p$ **:** $3|p \Longrightarrow p = 3p'$, $p' \neq 1$ car $3 \ll p$, d'où $b = 2p = 6p'$.

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}\frac{a}{b} = \frac{2a}{3} \Longrightarrow 3|a \tag{87}$$

car A^{2m} est un entier, mais $3|p \Longrightarrow 3|(2p) \Longrightarrow 3|b$, ce qui en contradiction avec l'hypothèse a, b sont copremiers. Alors le cas $b = 2p$ est impossible.

3.2.1.8. Cas $3|p$ **et** $b \neq 3$ **est un diviseur de** p **:** Nous avons $b = p' \neq 3$, et p s'écrit :

$$p = kp' \quad avec \quad 3|k \Longrightarrow k = 3k' \tag{88}$$

et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4 \times 3.k'p'}{3}\frac{a}{p'} = 4ak' \tag{89}$$

Calculons B^nC^l :

$$B^nC^l = \frac{p}{3}.\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = k'(3p' - 4a) \tag{90}$$

<u>1^{er} sous-cas :</u> $k' \neq 1$, nous utilisons le même raisonnement décrit pour le cas **3.1.2.3.**, et nous obtenons : A, B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

<u>$2^{\text{ème}}$ sous-cas :</u>

$$k' = 1 \Longrightarrow p = 3b \tag{91}$$

Alors nous avons :

$$A^{2m} = 4a \Longrightarrow a \quad \text{is even} \tag{92}$$

et :

$$A^m B^n = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta}{3}.\sqrt[3]{\rho}\left(\sqrt{3}sin\frac{\theta}{3} - cos\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} - 2a \tag{93}$$

soit :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = 2b\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{94}$$

Le membre à gauche de (94) est un entier et b aussi, alors $2\sqrt{3}sin\dfrac{2\theta}{3}$ peut être écrit sous la forme :

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \tag{95}$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|b \Longrightarrow b = k_2.k_3$.

$\diamondsuit$ - Nous supposons $k_3 \neq 1$, alors :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_3.k_1 \tag{96}$$

Soit μ un entier premier tel que $\mu|k_3$. Si $\mu = 2 \Rightarrow 2|b$ mais $2|a$ ce-ci est en contradiction avec a, b copremiers. Nous supposons donc $\mu \neq 2$ et $\mu|k_3$, alors $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

*A-1- Si $\mu|A^m \Longrightarrow \mu|A^{2m} \Longrightarrow \mu|4a \Longrightarrow \mu|a$. Comme $\mu|k_3 \Longrightarrow \mu|b$ et que a, b sont copremiers d'où la contradiction.

*A-2- Si $\mu|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous pouvons écrire :

$$A^m + 2B^n = \mu.t' \quad t' \in \mathbb{N}^* \tag{97}$$

Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \Longrightarrow A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t'\mu B^n + B^{2n}$$

En utilisant l'expression de p, nous obtenons :

$$p = t'^2\mu^2 - 2t'B^n\mu + B^n(B^n - A^m) \tag{98}$$

Comme $p = 3b = 3k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ d'où $\mu|p \Longrightarrow \; p = \mu\mu'$, alors nous avons :

$$\mu'\mu = \mu(\mu t'^2 - 2t'B^n) + B^n(B^n - A^m) \tag{99}$$

et $\mu|B^n(B^n - A^m) \Longrightarrow \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

*A-2-1- Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec *A-2.

*A-2-2- Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous obtenons :

$$\mu|3B^n \Longrightarrow \begin{cases} \mu|B^n \Longrightarrow \mu|B \text{ ce qui est impossible} \\ ou \\ \mu = 3 \end{cases} \tag{100}$$

*A-2-2-1- Si $\mu = 3 \Longrightarrow 3|k_3 \Longrightarrow k_3 = 3k_3'$, et nous avons $b = k_2k_3 = 3k_2k_3'$, il s'ensuit $p = 3b = 9k_2k_3'$ alors $9|p$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ alors :

$$9k_2k_3' - 3A^mB^n = (A^m - B^n)^2$$

que nous écrivons :

$$3(3k_2k_3' - A^mB^n) = (A^m - B^n)^2 \tag{101}$$

d'où $3|(3k_2k_3' - A^mB^n) \Longrightarrow\ 3|A^mB^n \Longrightarrow 3|A^m$ ou $3|B^n$.

*A-2-2-1-1- Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A$ et nous avons aussi $3|A^{2m}$, mais $A^{2m} = 4a \Longrightarrow\ 3|4a \Longrightarrow 3|a$. Comme $b = 3k_2k_3'$ alors $3|b$, mais a, b sont copremiers d'où la contradiction. Alors $3 \nmid A$.

*A-2-2-1-2- Si $3|B^n \Longrightarrow 3|B$, or l'équation (101) implique $3|(A^m - B^n)^2 \Longrightarrow 3|(A^m - B^n) \Longrightarrow 3|A^m \Longrightarrow 3|A$. Mais en utilisant le résultat du dernier paragraphe *A-2-2-1-1, nous obtenons $3 \nmid A$. Alors l'hypothèse $k_3 \neq 1$ est impossible.

$\diamondsuit$- Maintenant, nous supposons que $k_3 = 1 \Longrightarrow b = k_2$ et $p = 3b = 3k_2$. nous avons alors :

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{b} \tag{102}$$

avec k_1, b copremiers, nous écrivons (102) comme :

$$4\sqrt{3}sin\frac{\theta}{3}cos\frac{\theta}{3} = \frac{k_1}{b}$$

Prenons le carré des deux membres et en remplaçant $cos^2\frac{\theta}{3}$ par $\frac{a}{b}$, nous obtenons :

$$3 \times 4^2.a(b - a) = k_1^2 \tag{103}$$

ce qui implique que :

$$3|a \quad ou \quad 3|(b - a)$$

*B-1- Si $3|a$, comme $A^{2m} = 4a \Longrightarrow 3|A^{2m} \Longrightarrow 3|A$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ et que $3|p \Longrightarrow 3|(A^m - B^n)^2 \Longrightarrow 3|(A^m - B^n)$. Or $3|A$, d'où $3|B^n \Longrightarrow 3|B$, il s'ensuit $3|C^l \Longrightarrow 3|C$.

Nous obtenons : A,B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

*B-2- Considérons maintenant que $3|(b-a)$. Comme $k_1 = A^m(A^m + 2B^n)$ d'après l'équation (96) et que $3|k_1 \Longrightarrow 3|A^m(A^m+2B^n) \Longrightarrow 3|A^m$ ou $3|(A^m+2B^n)$.

*B-2-1- Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A \Longrightarrow 3|A^{2m}$ alors $3|4a \Longrightarrow 3|a$, mais $3|(b-a) \Longrightarrow 3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

*B-2-2- Si :

$$3|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow 3|(A^m - B^n) \tag{104}$$

mais $p = A^{2m}+B^{2n}+A^mB^n = (A^m-B^n)^2+3A^mB^n$ alors $p-3A^mB^n = (A^m-B^n)^2 \Longrightarrow 9|(p-3A^mB^n)$ ou $9|(3b-3A^mB^n)$, d'où $3|(b-A^mB^n)$ mais $3|(b-a) \Longrightarrow 3|(a-A^mB^n)$. Comme $A^{2m} = 4a = (A^m)^2 \Longrightarrow \exists a' \in \mathbb{N}^*$ et $a = a'^2 \Longrightarrow A^m = 2a'$. Nous arrivons à $3|(a'^2 - 2a'B^n) \Longrightarrow 3|a'(a'-2B^n)$:

*B-2-2-1- Si $3|a' \Longrightarrow 3|A^m \Longrightarrow 3|A$, mais $3|(A^m+2B^n) \Longrightarrow 3|2B^n \Longrightarrow 3|B^n \Longrightarrow 3|B$, par suite $3|C$.

D'où A,B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

*B-2-2-2- Maintenant si $3|(a'-2B^n) \Longrightarrow 3|(2a'-4B^n) \Longrightarrow 3|(A^m-4B^n) \Longrightarrow 3|(A^m - B^n)$, nous retrouvons l'hypothèse de départ (104) ci-dessus.

L'étude du cas 3.2.1.8. est achevée.

3.2.1.9 Cas $3|p$ et $b|4p$: Comme $3|p \Rightarrow p = 3p'$ et $b|4p \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^*$ et $4p = 12p' = k_1 b$.

**- $\boxed{k_1 = 1}$ donc $b = 12p'$, ($p' \neq 1$ sinon $p = 3 \ll A^{2m} + B^{2n} + A^mB^n$). Mais $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{12p'}{3}\dfrac{a}{b} = \dfrac{4p'.a}{12p'} = \dfrac{a}{3} \Rightarrow 3|a$ car A^{2m} est un entier, d'où la contradiction avec a, b copremiers.

**-$\boxed{k_1 = 3}$, d'où $b = 4p'$ et $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}.cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{k_1.a}{3} = a$.
Calculons A^mB^n :

$$A^mB^n = 2\sqrt[3]{\rho}cos\frac{\theta}{3}.\sqrt[3]{\rho}\left(\sqrt{3}sin\frac{\theta}{3} - cos\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} - \frac{a}{2} \tag{105}$$

soit :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = 2p'\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{106}$$

Le membre à gauche de (106) est un entier et p' aussi, alors $2\sqrt{3}sin\dfrac{2\theta}{3}$ peut être écrit sous la forme :

$$2\sqrt{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_2}{k_3} \tag{107}$$

où k_2, k_3 sont deux entiers copremiers et $k_3|p' \Longrightarrow p' = k_3.k_4$.

$\diamondsuit$ - Nous supposons $\boxed{k_4 \neq 1}$, alors :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_2.k_4 \tag{108}$$

Soit μ un entier premier tel que $\mu|k_4$. Alors $\mu|A^m(A^m+2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m+2B^n)$.

*A-1- Si $\mu|A^m \Longrightarrow \mu|A^{2m} \Longrightarrow \mu|a$. Comme $\mu|k_4 \Longrightarrow \mu|p' \Rightarrow \mu|(4p' = b)$. Or a, b sont copremiers d'où la contradiction.

*A-2- Si $\mu|(A^m+2B^n) \Longrightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. $\mu|(A^m+2B^n)$, nous pouvons écrire :

$$A^m + 2B^n = \mu.t' \quad t' \in \mathbb{N}^* \tag{109}$$

Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \Longrightarrow A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t'\mu B^n + B^{2n}$$

En utilisant l'expression de p, nous obtenons :

$$p = t'^2\mu^2 - 2t'B^n\mu + B^n(B^n - A^m) \tag{110}$$

Comme $p = 3p'$ et $\mu|p' \Rightarrow \mu|(3p') \Rightarrow \mu|p$, on peut écrire :$\exists \mu' \in \mathbb{N}^*$ et $p = \mu\mu'$, alors nous avons :

$$\mu'\mu = \mu(\mu t'^2 - 2t'B^n) + B^n(B^n - A^m) \tag{111}$$

et $\mu|B^n(B^n - A^m) \Longrightarrow \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$.

*A-2-1- Si $\mu|B^n \Longrightarrow \mu|B$ ce qui est en contradiction avec *A-2.

*A-2-2- Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous obtenons :

$$\mu|3B^n \Longrightarrow \begin{cases} \mu|B^n \Longrightarrow \mu|B \ \text{ ce qui est impossible} \\ ou \\ \mu = 3 \end{cases} \tag{112}$$

*A-2-2-1- Si $\mu = 3 \Longrightarrow 3|k_4 \Longrightarrow k_4 = 3k'_4$, et nous avons $p' = k_3k_4 = 3k_3k'_4$, il s'ensuit $p = 3p' = 9k_3k'_4$ alors $9|p$, mais $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^mB^n$ alors :

$$9k_4k'_5 - 3A^mB^n = (A^m - B^n)^2$$

que nous écrivons :

$$3(3k_4k'_5 - A^mB^n) = (A^m - B^n)^2 \tag{113}$$

d'où $3|(3k_4k'_5 - A^mB^n) \Longrightarrow\ 3|A^mB^n \Longrightarrow 3|A^m$ ou $3|B^n$.

*A-2-2-1-1- Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A^{2m} \Rightarrow 3|a$, mais $3|p' \Rightarrow 3|(4p')$ soit $3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers. Alors $3 \nmid A$.

*A-2-2-1-2- Si $3|B^n$ or $A^m = \mu t' - 2B^n = 3t' - 2B^n \Longrightarrow 3|A^m$, ce qui est contradictoire. Alors l'hypothèse $k_4 \neq 1$ est impossible.

$\diamondsuit$- Maintenant, nous supposons que $\boxed{k_4 = 1} \Longrightarrow p' = k_3 k_4 = k_3$. nous avons alors :

$$2\sqrt{3} sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_2}{p'} \tag{114}$$

avec k_2, p' co-premiers, nous écrivons (114) comme :

$$4\sqrt{3} sin\frac{\theta}{3} cos\frac{\theta}{3} = \frac{k_2}{p'}$$

Prenons le carré des deux membres et en remplaçant $cos^2\frac{\theta}{3}$ par $\frac{a}{b}$ et $b = 4p'$, nous obtenons :

$$3.a(b-a) = k_2^2 \tag{115}$$

ce qui implique que :

$$3|a \quad ou \quad 3|(b-a)$$

*B-1- Si $3|a \Rightarrow 3|A^{2m} \Rightarrow 3|A$, comme $p = (A^m - B^n)^2 + 3A^m B^n$ et que $3|p \Longrightarrow 3|(A^m - B^n)^2 \Longrightarrow 3|(A^m - B^n)$. Or $3|A$ d'où $3|B^n \Longrightarrow 3|B$, il s'ensuit $3|C^l \Longrightarrow 3|C$.

Nous obtenons : A,B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

*B-2- Considérons maintenant que $3|(b-a)$. Comme $k_2 = A^m(A^m + 2B^n)$ d'après l'équation (108) et que $3|k_2 \Longrightarrow 3|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow 3|A^m$ ou $3|(A^m + 2B^n)$.

*B-2-1- Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A^{2m} \Longrightarrow 3|a$, mais $3|(b-a) \Longrightarrow 3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

*B-2-2- Si :

$$3|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow 3|(A^m - B^n) \tag{116}$$

mais $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n = (A^m - B^n)^2 + 3A^m B^n$ alors $p - 3A^m B^n = (A^m - B^n)^2 \Longrightarrow 9|(p - 3A^m B^n)$ ou $9|(3p' - 3A^m B^n)$, d'où $3|(p' - A^m B^n) \Rightarrow 3|4(p' - 4A^m B^n) \Rightarrow 3|(b - 4A^m B^n)$ mais $3|(b-a) \Longrightarrow 3|(a - A^m B^n)$. Comme $3|(A^{2m} - 4A^m B^n) \Rightarrow 3|A^m(A^m - 4B^n)$.

*B-2-2-1- Si $3|A^m \Longrightarrow 3|A^{2m} \Longrightarrow 3|a$, mais $3|(b-a) \Longrightarrow 3|b$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

*B-2-2-2- Maintenant si $3|(A^m - 4B^n) \Longrightarrow 3|(A^m - B^n)$, nous retrouvons l'hypothèse de départ (116) ci-dessus.

**-- On suppose $k_1 \neq 3$ et $3|k_1 \Rightarrow \boxed{k_1 = 3k'1}$ avec $k'_1 \neq 1$. On a $4p = 12p' = k_1 b = 3k'_1 b \Rightarrow 4p' = k'_1 b$. A^{2m} s'écrit :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{3k'_1 b}{3}\frac{a}{b} = k'_1 a \tag{117}$$

et B^nC^l :

$$B^nC^l = \frac{p}{3}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \frac{k'_1}{4}(3b - 4a) \tag{118}$$

Comme B^nC^l est un entier, on doit avoir $4|(3b-4a)$ ou $4|k'_1$.

*** On suppose que $4|(3b-4a) \Rightarrow \dfrac{3b-4a}{4} = c \in \mathbb{N}^*$, et nous avons :

$$A^{2m} = k'_1 a$$
$$B^nC^l = k'_1 c$$

C-1- Si k'_1 est premier, alors $k'_1|A^{2m} \Rightarrow k'_1|A$ et $k'_1|B^nC^l \Rightarrow k'_1|B^n$ ou $k'_1|C^l$. Si $k'_1|B^n \Rightarrow k'_1|B$ par suite $k'_1|C^l \Rightarrow k'_1|C$. De la même manière si $k'_1|C^l$, on arrive à $k'_1|B$.

Nous obtenons : A,B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

C-2- k'_1 non premier. Soit μ un diviseur premier de k'_1, comme décrit au C-1- ci-dessus, nous obtenons : A,B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

*** On suppose que $4|k'_1$.

C-3- $k'_1 = 4$ or ce cas est traité dans le 2ème sous-cas du **3.2.1.8**.

C-4- $k'_1 = 4k"_1$ avec $k"_1 > 1$. On a donc :

$$A^{2m} = 4k"_1 a \tag{119}$$
$$B^nC^l = k"_1(3b - 4a) \tag{120}$$

On traite ce cas comme il est décrit en C-1- et en C-2-. Nous obtenons A,B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

3.2.2 Hypothèse : $\{3|a \quad et \quad b|4p\}$

Nous avons donc :

$$3|a \Longrightarrow \exists a' \in \mathbb{N}^* \ / \ a = 3a' \tag{121}$$

3.2.2.1. Cas $b = 2$ et $3|a$: A^{2m} s'écrit :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4p}{3}.\frac{a}{2} = \frac{2.p.a}{3} \tag{122}$$

En utilisant l'équation (121), A^{2m} devient :

$$A^{2m} = \frac{2.p.3a'}{3} = 2.p.a' \tag{123}$$

mais $cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{2} > 1$ ce qui est impossible, d'où $b \neq 2$.

3.2.2.2. Cas $b = 4$ et $3|a$: A^{2m} s'écrit :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4.p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4.p}{3}.\frac{a}{4} = \frac{p.a}{3} = \frac{p.3a'}{3} = p.a' \tag{124}$$

$$\text{et} \quad cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3.a'}{4} < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Longrightarrow a' < 1 \tag{125}$$

ce qui est impossible.

Alors le cas $b = 4$ est impossible.

3.2.2.3. Cas $b = p$ et $3|a$: Nous avons :

$$cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{p} \tag{126}$$

et :

$$A^{2m} = \frac{4p}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{4p}{3}.\frac{3a'}{p} = 4a' = (A^m)^2 \tag{127}$$

$$\exists a" \in \mathbb{N}^* \ / \ a' = a"^2 \tag{128}$$

Calculons A^mB^n, d'où :

$$A^mB^n = p.\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} - 2a'$$

$$ou \quad A^mB^n + 2a' = p.\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{129}$$

Le membre à gauche de (129) est un entier et p aussi, alors $2\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3}$ s'écrit sous la forme :

$$2\frac{\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \tag{130}$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|p \Longrightarrow p = b = k_2.k_3,\ k_3 \in \mathbb{N}^*$.

$\diamondsuit$ - Nous supposons que $k_3 \neq 1$, nous obtenons :

$$A^m(A^m + 2B^n) = k_1.k_3 \tag{131}$$

Soit μ un entier premier avec $\mu|k_3$, alors $\mu|b$ et $\mu|A^m(A^m+2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

* Si $\mu|A^m \Longrightarrow \mu|A$ et $\mu|A^{2m}$, mais $A^{2m} = 4a' \Longrightarrow \mu|4a' \Longrightarrow (\mu = 2$ mais $2|a')$ ou $(\mu|a')$. Alors $\mu|a$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

* Si $\mu|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors $\mu \neq 2$ et $\mu \nmid B^n$. Nous écrivons $\mu|(A^m + 2B^n)$ comme :

$$A^m + 2B^n = \mu.t' \quad t' \in \mathbb{N}^* \tag{132}$$

Il s'ensuit :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \Longrightarrow A^{2m} + B^{2n} + 2A^mB^n = \mu^2 t'^2 - 2t'\mu B^n + B^{2n}$$

En utilisant l'expression de p :

$$p = t'^2\mu^2 - 2t'B^n\mu + B^n(B^n - A^m) \tag{133}$$

Comme $p = b = k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ alors $\mu|b \Longrightarrow \exists \mu' \in \mathbb{N}^*$ et $b = \mu\mu'$, ainsi nous pouvons écrire :

$$\mu'\mu = \mu(\mu t'^2 - 2t'B^n) + B^n(B^n - A^m) \tag{134}$$

De la dernière équation, nous obtenons $\mu|B^n(B^n - A^m) \Longrightarrow \mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$. Si $\mu|B^n$ ce qui en contradiction avec $\mu \nmid B^n$. Si $\mu|(B^n - A^m)$ et utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous arrivons à :

$$\mu|3B^n \Longrightarrow \begin{cases} \mu|B^n \Longrightarrow & \text{ce qui en contradiction} \\ ou & \\ \mu = 3 & \end{cases} \tag{135}$$

Si $\mu = 3$, alors $3|b$, mais $3|a$ alors la contradiction avec a, b copremiers.

$\diamondsuit$ - Nous assumons maintenant $k_3 = 1$, alors :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = k_1 \tag{136}$$

$$b = k_2 \tag{137}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{b} \tag{138}$$

Prenons le carré de la dernière équation, nous obtenons :

$$\frac{4}{3} sin^2\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

$$\frac{16}{3}sin^2\frac{\theta}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{k_1^2}{b^2}$$
$$\frac{16}{3}sin^2\frac{\theta}{3}.\frac{3a'}{b} = \frac{k_1^2}{b^2}$$

Finalement :

$$4^2a'(p-a) = k_1^2 \tag{139}$$

mais $a' = a"^2$ alors $p-a$ est un carré. Soit :

$$\lambda^2 = p - a \tag{140}$$

L'équation (171) devient :

$$4^2a"^2\lambda^2 = k_1^2 \Longrightarrow k_1 = 4a"\lambda \tag{141}$$

en prenant la racine carrée positive. En utilisant l'équation (168), nous obtenons :

$$k_1 = 4a"\lambda \tag{142}$$

mais $k_1 = A^m(A^m + 2B^n) = 2a"(A^m + 2B^n)$, par suite :

$$A^m + 2B^n = 2\lambda \tag{143}$$

Soit λ_1 un entier premier $\neq 2$, un diviseur de λ (si non $\lambda_1 = 2|\lambda \Longrightarrow 2|\lambda^2 \Longrightarrow 2|(p-a)$ mais a is pair, then $2|p \Longrightarrow 2|b$ ce qui en contradiction avec a, b copremiers).

Nous considérons $\lambda_1 \neq 2$ et :

$$\lambda_1|\lambda \Longrightarrow \lambda_1|\lambda^2 \quad et \quad \lambda_1|(A^m + 2B^n) \tag{144}$$
$$\lambda_1|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \lambda_1 \nmid A^m \quad si\ non \quad \lambda_1|2B^n \tag{145}$$

mais $\lambda_1 \neq 2$ hence $\lambda_1|B^n \Longrightarrow \lambda_1|B$, il s'ensuit :

$$\lambda_1|(p=b) \quad et \quad \lambda_1|A^m \Longrightarrow \lambda_1|2a" \Longrightarrow \lambda_1|a \tag{146}$$

d'où la contradiction avec a, b copremiers.

Nous assumons maintenant $\lambda_1 \nmid A^m$. $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \lambda_1|(A^m + 2B^n)^2$ c'est-à-dire $\lambda_1|(A^{2m} + 4A^mB^n + 4B^{2n})$ que nous écrivons comme $\lambda_1|(p + 3A^mB^n + 3B^{2n}) \Longrightarrow \lambda_1|(p + 3B^n(A^m + 2B^n) - 3B^{2n})$. Mais $\lambda_1|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \lambda_1|(p - 3B^{2n})$, comme $\lambda_1|(p-a)$ d'où par différence, nous obtenons $\lambda_1|(a - 3B^{2n})$ ou $\lambda_1|(3a' - 3B^{2n}) \Longrightarrow \lambda_1|3(a' - B^{2n}) \Longrightarrow \lambda_1 = 3$ ou $\lambda_1|(a' - B^{2n})$.

*A-1- Si $\lambda_1 = 3$ mais $3|a \Longrightarrow 3|(p=b)$ d'où la contradiction avec a, b copremiers.

*A-2- Si $\lambda_1|(a' - B^{2n}) \Longrightarrow \lambda_1|(a"^2 - B^{2n}) \Longrightarrow \lambda_1|(a" - B^n)(a" + B^n) \Longrightarrow \lambda_1|(a" + B^n)$ ou $\lambda_1|(a" - B^n)$, car $(a" - B^n) \neq 1$ si non nous obtenons $a"^2 - B^{2n} = a" + B^n \Longrightarrow$

$a"^2 - a" = B^n - B^{2n}$. Le membre à gauche est positif et celui à droite est négatif, d'où la contradiction.

*A-2-1- Si $\lambda_1|(a" - B^n) \Longrightarrow \lambda_1|2(a" - B^n) \Longrightarrow \lambda_1|(A^m - 2B^n)$ mais $\lambda_1|(A^m + 2B^n)$ d'où $\lambda_1|2A^m \Longrightarrow \lambda_1|A^m$, $\lambda_1 \neq 2$, il s'ensuit $\lambda_1|A^m$ par suite la contradiction avec (177).

*A-2-2- Si $\lambda_1|(a" + B^n) \Longrightarrow \lambda_1|2(a" + B^n) \Longleftrightarrow \lambda_1|(A^m + 2B^n)$. Nous retrouvons la condition (176).

Alors le cas $k_3 = 1$ est impossible.

3.2.2.4. Cas $b|p \Rightarrow \; p = b.p', p' > 1$, $b \neq 2$, $b \neq 4$ et $3|a$:

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4.b.p'.3.a'}{3.b} = 4.p'a' \tag{147}$$

Calculons B^nC^l :

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3sin^2\frac{\theta}{3} - cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) \tag{148}$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2} = \dfrac{p}{3}$ d'où en utilisant $cos^2\frac{\theta}{3} = \dfrac{3.a'}{b}$:

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p}{3}\left(3 - 4\frac{3.a'}{b}\right) = p.\left(1 - \frac{4.a'}{b}\right) = p'(b - 4a') \tag{149}$$

Comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, nous avons alors :

$$B^nC^l = p'(b - 4a') \tag{150}$$
$$\text{et} \quad A^{2m} = 4.p'.a' \tag{151}$$

A - Soit λ un diviseur premier de p' (nous supposons p' non premier). De l'équation (151), nous avons :

$$\lambda|A^{2m} \Rightarrow \lambda|A^m \quad \text{comme}\, \lambda\, \text{est premier, alors} \;\; \lambda|A \tag{152}$$

De l'équation (150), comme $\lambda|p'$ nous avons :

$$\lambda|B^nC^l \Rightarrow \lambda|B^n \quad \text{ou}\ \lambda|C^l \tag{153}$$

Si $\lambda|B^n$, λ est premier $\lambda|B$, mais $C^l = A^m + B^n$, alors nous avons aussi :

$$\lambda|C^l \quad \text{comme}\, \lambda\, \text{est premier, alors}\ \lambda|C \tag{154}$$

Par le même raisonnement, si $\lambda|C^l$, nous obtenons $\lambda|B$. Alors : A, B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

B - nous supposons maintenant que p' est premier, des équations (150) et (151), nous obtenons alors :

$$p'|A^{2m} \Rightarrow p'|A^m \Rightarrow p'|A \tag{155}$$

et :

$$p'|B^nC^l \Rightarrow p'|B^n \quad \text{ou } p'|C^l \tag{156}$$

$$\text{Si} \quad p'|B^n \Rightarrow p'|B \tag{157}$$

$$\text{Comme} \quad C^l = A^m + B^n \quad \text{et que } \; p'|A, p'|B \Rightarrow p'|A^m, p'|B^n \Rightarrow p'|C^l \Rightarrow p'|C \tag{158}$$

Par le même raisonnement, si $p'|C^l$, nous arrivons à $p'|B$.

Alors : A ,B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

3.2.2.5. Cas $b = 2p$ et $3|a$: nous avons :

$$cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{2p} \Longrightarrow A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4p}{3}.\frac{3a'}{2p} = 2a' \Longrightarrow 2|A^m \Longrightarrow 2|a \Longrightarrow 2|a'$$

Alors $2|a$ et $2|b$ ce qui est en contradiction avec a, b copremiers.

3.2.2.6. Cas $b = 4p$ et $3|a$: nous avons :

$$cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{a}{b} = \frac{3a'}{4p} \Longrightarrow A^{2m} = \frac{4p.a}{3b} = \frac{4p}{3}.\frac{3a'}{4p} = a'$$

Calculons A^mB^n, nous obtenons :

$$A^mB^n = \frac{p\sqrt{3}}{3}.sin\frac{2\theta}{3} - \frac{2p}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{p\sqrt{3}}{3}.sin\frac{2\theta}{3} - \frac{a'}{2} \Longrightarrow$$

$$A^mB^n + \frac{A^{2m}}{2} = \frac{p\sqrt{3}}{3}.sin\frac{2\theta}{3} \tag{159}$$

soit :

$$A^{2m} + 2A^mB^n = \frac{2p\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} \tag{160}$$

Le membre à gauche de (160) est un entier et p est un entier, alors $\frac{2\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3}$ sera écrit :

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{k_2} \tag{161}$$

où k_1, k_2 sont deux entiers copremiers et $k_2|p \Longrightarrow p = k_2.k_3$.

$\diamondsuit$ - Premièrement, nous supposons que $k_3 \neq 1$. D'où :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_3.k_1 \tag{162}$$

Soit μ un entier premier et $\mu|k_3$, alors $\mu|A^m(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu|A^m$ ou $\mu|(A^m + 2B^n)$.

* Si $\mu|A^m \Longrightarrow \mu|A$. Comme $\mu|k_3 \Longrightarrow \mu|p$ et que $p = A^{2m} + B^{2n} + A^m B^n \Longrightarrow \mu|B^{2n}$ alors $\mu|B$, il s'ensuit $\mu|C^l$, par suite A, B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

* Si $\mu|(A^m + 2B^n) \Longrightarrow \mu \nmid A^m$ et $\mu \nmid 2B^n$ alors :

$$\mu \neq 2 \quad et \quad \mu \nmid B^n \tag{163}$$

$\mu|(A^m + 2B^n)$, nous écrivons :

$$A^m + 2B^n = \mu.t' \quad t' \in \mathbb{N}^* \tag{164}$$

Alors :

$$A^m + B^n = \mu t' - B^n \Longrightarrow A^{2m} + B^{2n} + 2A^m B^n = \mu^2 t'^2 - 2t'\mu B^n + B^{2n}$$

$$\Longrightarrow p = t'^2\mu^2 - 2t'B^n\mu + B^n(B^n - A^m) \tag{165}$$

Comme $b = 4p = 4k_2.k_3$ et $\mu|k_3$ alors $\mu|b \Longrightarrow \exists \mu' \in \mathbb{N}^*$ tel que $b = \mu\mu'$, nous obtenons :

$$\mu'\mu = \mu(4\mu t'^2 - 8t'B^n) + 4B^n(B^n - A^m) \tag{166}$$

La dernière équation implique $\mu|4B^n(B^n - A^m)$, mais $\mu \neq 2$ alors $\mu|B^n$ ou $\mu|(B^n - A^m)$. Si $\mu|B^n \Longrightarrow$ c'est la contradiction avec (163). Si $\mu|(B^n - A^m)$ et en utilisant $\mu|(A^m + 2B^n)$, nous avons :

$$\mu|3B^n \Longrightarrow \begin{cases} \mu|B^n \quad \text{c'est contradictoire avec } 163 \\ ou \\ \mu = 3 \end{cases} \tag{167}$$

Si $\mu = 3$, alors $3|b$, mais $3|a$ ce qui en contradiction avec a, b copremiers.

$\diamondsuit$ - nous assumons maintenant que $k_3 = 1$, d'où :

$$A^{2m} + 2A^m B^n = k_1 \tag{168}$$

$$p = k_2 \tag{169}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} sin\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1}{p} \tag{170}$$

Prenons le carré de la dernière équation, nous obtenons :

$$\frac{4}{3} sin^2\frac{2\theta}{3} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

$$\frac{16}{3}sin^2\frac{\theta}{3}cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{k_1^2}{p^2}$$
$$\frac{16}{3}sin^2\frac{\theta}{3}.\frac{3a'}{b} = \frac{k_1^2}{p^2}$$

Finalement :

$$a'(4p-3a') = k_1^2 \tag{171}$$

mais $a' = a"^2$ alors $4p-3a'$ est un carré. Soit :

$$\lambda^2 = 4p - 3a' = 4p - a = b - a \tag{172}$$

L'équation (171) devient :

$$a"^2\lambda^2 = k_1^2 \Longrightarrow k_1 = a"\lambda \tag{173}$$

en prenons la racine carrée positive. Utilisant (168), nous obtenons :

$$k_1 = a"\lambda \tag{174}$$

mais $k_1 = A^m(A^m+2B^n) = a"(A^m+2B^n)$, par suite :

$$(A^m + 2B^n) = \lambda \tag{175}$$

Soit λ_1 un entier premier $\neq 2$ un diviseur de λ (si non $\lambda_1 = 2|\lambda \Longrightarrow 2|\lambda^2$. Comme $2|(b=4p) \Longrightarrow 2|(a=3a')$ ce qui en contradiction avec a,b copremiers).

Nous considérons donc $\lambda_1 \neq 2$ et :

$$\lambda_1|\lambda \Longrightarrow \lambda_1|(A^m+2B^n) \tag{176}$$
$$\Longrightarrow \lambda_1 \nmid A^m \quad si\ non \quad \lambda_1|2B^n \tag{177}$$

mais $\lambda_1 \neq 2$ d'où $\lambda_1|B^n \Longrightarrow \lambda_1|B$, par suite :

$$\lambda_1|(b=4p) \quad et \quad \lambda_1|A^m \Longrightarrow \lambda_1|2a" \Longrightarrow \lambda_1|a \tag{178}$$

d'où la contradiction avec a,b copremiers.

Nous assumons maintenant que $\lambda_1 \nmid A^m$. $\lambda_1|(A^m+2B^n) \Longrightarrow \lambda_1|(A^m+2B^n)^2$ c'est-à-dire $\lambda_1|(A^{2m}+4A^mB^n+4B^{2n})$, nous écrivons cela comme $\lambda_1|(p+3A^mB^n+3B^{2n}) \Longrightarrow \lambda_1|(p+3B^n(A^m+2B^n)-3B^{2n})$. Mais $\lambda_1|(A^m+2B^n) \Longrightarrow \lambda_1|(p-3B^{2n})$, Comme $\lambda_1|(4p-a)$ d'où par différence, nous obtenons $\lambda_1|(a-3(B^{2n}+p))$ ou $\lambda_1|(3a'-3(B^{2n}+p)) \Longrightarrow \lambda_1|3(a'-B^{2n}-p) \Longrightarrow \lambda_1 = 3$ ou $\lambda_1|(a'-(B^{2n}+p))$.

*A-1- Si $\lambda_1 = 3|\lambda \Rightarrow 3|\lambda^2 \Rightarrow 3|b-a$ mais $3|a \Longrightarrow 3|(p=b)$ par suite la contradiction avec a,b copremiers.

*A-2- Si $\lambda_1 \neq 3$ et $\lambda_1|(a'-B^{2n}-p) \Longrightarrow \lambda_1|(A^mB^n+B^{2n}) \Longrightarrow \lambda_1|B^n(A^m+2B^n) \Longrightarrow \lambda_1|B^n$ ou $\lambda_1|(A^m+2B^n)$. Le cas $\lambda_1|B^n$ a été étudié ci-dessus.

*A-2-1- Si $\lambda_1|(A^n+2B^n)$, nous retrouvons la condition (176).

Alors le cas $k_3 = 1$ est impossible.

3.2.2.7. Cas $3|a$ **et** $b = 2p'$ $b \neq 2$ **avec** $p'|p$ **:** $3|a \Longrightarrow a = 3a'$, $b = 2p'$ avec $p = k.p'$, d'òù :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4.k.p'.3.a'}{6p'} = 2.k.a' \tag{179}$$

Calculons B^nC^l :

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3sin^2\frac{\theta}{3} - cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) \tag{180}$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2} = \dfrac{p}{3}$ d'où en utilisant $cos^2\frac{\theta}{3} = \dfrac{3.a'}{b}$:

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p}{3}\left(3 - 4\frac{3.a'}{b}\right) = p.\left(1 - \frac{4.a'}{b}\right) = k(p' - 2a') \tag{181}$$

comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, nous avons alors :

$$B^nC^l = k(p' - 2a') \tag{182}$$

$$\text{et} \quad A^{2m} = 2k.a' \tag{183}$$

A - Soit λ un entier premier diviseur de k (nous supposons k non premier). De (183), nous avons :

$$\lambda|A^{2m} \Rightarrow \lambda|A^m \quad \text{comme}\,\lambda\,\text{est premier alors}\ \lambda|A \tag{184}$$

De l'équation (182), comme $\lambda|k$, nous avons :

$$\lambda|B^nC^l \Rightarrow \lambda|B^n \quad \text{ou} \quad \lambda|C^l \tag{185}$$

Si $\lambda|B^n$, λ est premier $\lambda|B$, et comme $C^l = A^m + B^n$ alors nous avons aussi :

$$\lambda|C^l \quad \text{comme}\,\lambda\,\text{est premier alors}\ \lambda|C \tag{186}$$

Par le même raisonnement si $\lambda|C^l$, nous obtenons $\lambda|B$. Alors : A, B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

B - nous supposons maintenant que k est premier, des équations (182) et (183), nous obtenons :

$$k|A^{2m} \Rightarrow k|A^m \Rightarrow k|A \tag{187}$$

et :

$$k|B^nC^l \Rightarrow k|B^n \quad \text{or}\ k|C^l \tag{188}$$

$$\text{si} \quad k|B^n \Rightarrow k|B \tag{189}$$

$$\text{comme} \quad C^l = A^m + B^n \quad \text{et que}\ k|A, k|B \Rightarrow k|A^m,\ k|B^n \Rightarrow k|C^l$$

$$\Rightarrow k|C \tag{190}$$

Par le même raisonnement si $k|C^l$, nous arrivons à $k|B$.

D'où : A ,B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

3.2.2.8. Cas $3|a$ **et** $b = 4p'$ $b \neq 2$ **avec** $p'|p$ **:** $3|a \Longrightarrow a = 3a'$, $b = 4p'$ avec $p = k.p'$, $k \neq 1$ si non $b = 4p$ ce cas a été étudié (voir paragraphe **3.2.2.6**), alors nous avons :

$$A^{2m} = \frac{4.p}{3}.\frac{a}{b} = \frac{4.k.p'.3.a'}{12p'} = k.a' \tag{191}$$

Calculons B^nC^l :

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3sin^2\frac{\theta}{3} - cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) \tag{192}$$

mais $\sqrt[3]{\rho^2} = \frac{p}{3}$, d'où en utilisant $cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{3.a'}{b}$:

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p}{3}\left(3 - 4\frac{3.a'}{b}\right) = p.\left(1 - \frac{4.a'}{b}\right) = k(p' - a') \tag{193}$$

Comme $p = b.p'$, et $p' > 1$, nous avons :

$$B^nC^l = k(p' - 2a') \tag{194}$$

$$\text{et} \quad A^{2m} = 2k.a' \tag{195}$$

A - Soit λ un diviseur premier de k (nous supposons k non premier). De (195), nous avons :

$$\lambda|A^{2m} \Rightarrow \lambda|A^m \quad \text{comme}\,\lambda\,\text{est premier, alors } \lambda|A \tag{196}$$

De (194), comme $\lambda|k$ nous obtenons :

$$\lambda|B^nC^l \Rightarrow \lambda|B^n \quad \text{ou } \lambda|C^l \tag{197}$$

Si $\lambda|B^n$, λ est premier $\lambda|B$, et comme $C^l = A^m + B^n$, alors nous avons :

$$\lambda|C^l \quad \text{comme } \lambda\,\text{est premier, alors } \lambda|C \tag{198}$$

Par le même raisonnement si $\lambda|C^l$, nous obtenons $\lambda|B$. Alors : A, B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

B - nous supposons que k is premier, des équations (194) et (195), nous avons :

$$k|A^{2m} \Rightarrow k|A^m \Rightarrow k|A \tag{199}$$

et :

$$k|B^nC^l \Rightarrow k|B^n \quad \text{ou } k|C^l \tag{200}$$

$$\text{si} \quad k|B^n \Rightarrow k|B \tag{201}$$

$$\text{comme} \quad C^l = A^m + B^n \quad \text{et que } k|A, k|B \Rightarrow k|A^m,\, k|B^n \Rightarrow k|C^l$$
$$\Rightarrow k|C \tag{202}$$

Par le même raisonnement si $k|C^l$, nous arrivons à $k|B$.

D'où : A ,B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

3.2.2.9. Cas $3|a$ **et** $b|4p$: $a = 3a'$ et $4p = k_1 b$. Comme $A^{2m} = \dfrac{4p}{3}cos^2\dfrac{\theta}{3} = \dfrac{4p}{3}\dfrac{3a'}{b} = k_1 a'$ et $B^n C^l$:

$$B^nC^l = \sqrt[3]{\rho^2}\left(3sin^2\frac{\theta}{3} - cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p}{3}\left(3 - 4cos^2\frac{\theta}{3}\right) = \frac{p}{3}\left(3 - 4\frac{3a'}{b}\right) = \frac{k_1}{4}(b - 4a') \tag{203}$$

Comme B^nC^l est un entier, on doit avoir $4|k_1$ ou $4|(b - 4a')$.

-1- Si $k_1 = 1 \Rightarrow b = 4p$: c'est le cas (3.2.2.6**).

-2- Si $k_1 = 4 \Rightarrow p = b$: c'est le cas (3.2.2.3**).

**-3- On suppose que $4|k_1$ avec $k_1 > 4 \Rightarrow k_1 = 4k'_1$, on a donc :

$$A^{2m} = 4k'_1 a'$$
$$B^nC^l = k'_1(b - 4a')$$

On montre facilement que A ,B et C solutions de (3) ont un facteur commun.

**-4- Si $4 \nmid |(b - 4a')$ et $4 \nmid k'_1$ c'est impossible. Si $4|(b - 4a') \Rightarrow (b - 4a') = 4c$, avec $c \in \mathbb{N}^*$, alors nous avons :

$$A^{2m} = k_1 a'$$
$$B^nC^l = k_1 c$$

On montre facilement que A ,B et C solutions de (3) ont un facteur commun. $\square$

Le Principal Théorème est démontré.

4 Exemples Numériques

4.1 Exemple 1

Nous considérons l'exemple suivant :

$$6^3 + 3^3 = 3^5 \tag{204}$$

avec $A^m = 6^3$, $B^n = 3^3$ et $C^l = 3^5$. Avec les notations utilisées, nous obtenons :

$$p = 3^6 \times 73, \tag{205}$$
$$q = 8 \times 3^{11}, \tag{206}$$
$$\bar{\Delta} = 4 \times 3^{11}(3^6 \times 4^2 - 73^3) < 0, \tag{207}$$
$$\rho = \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}} = \frac{3^8 \times 73\sqrt{73}}{3}, \tag{208}$$
$$cos\theta = -\frac{4 \times 3^3 \times \sqrt{3}}{73\sqrt{73}} \tag{209}$$

Comme $A^{2m} = \frac{4p}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} \Longrightarrow cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{3A^{2m}}{4p} = \frac{3\times 2^4}{73} = \frac{a}{b} \Longrightarrow a = 3\times 2^4,\ b = 73$; alors :

$$cos\frac{\theta}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{73}} \tag{210}$$

$$p = 3^6 b \tag{211}$$

Vérifions alors l'équation (209) utilisant l'équation (210) :

$$cos\theta = cos3(\theta/3) = 4cos^3\frac{\theta}{3} - 3cos\frac{\theta}{3} = 4\left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{73}}\right)^3 - 3\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{73}} = -\frac{4\times 3^3\times\sqrt{3}}{73\sqrt{73}} \tag{212}$$

Ce qui est exact. Pour cet exemple, nous pouvons utiliser les deux conditions de (65) comme $3|p$,$b|4p$ et $3|a$. Les cas **3.2.1.3** et **3.2.2.4** sont respectivement utilisés. Nous trouvons pour les deux cas que A^m, B^n et C^l de l'équation (204) ont un facteur commun ce qui est vrai.

4.2 Exemple 2

Considérons maintenant l'exemple suivant :

$$4^2 + 3^2 = 5^2 \tag{213}$$

avec $A = 4, B = 3$ et $C = 5$. Nous obtenons les valeurs :

$$p = 481 = 13\times 37, \tag{214}$$

$$q = 3^2\times 4^2\times 5^2, \tag{215}$$

$$\Delta = \frac{27q^2 - 4p^3}{27} = \frac{27\times 60^4 - 4\times 13^3\times 37^3}{27} = -\frac{95218564}{27} < 0, \tag{216}$$

$$\rho = \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}} = \frac{481\times\sqrt{481}}{3\sqrt{3}}, \tag{217}$$

$$cos\theta = -\frac{2^3\times 3^3\times 5^2\sqrt{3}}{481\times\sqrt{481}} \tag{218}$$

Comme $A^{2m} = \frac{4p}{3}.cos^2\frac{\theta}{3} \Longrightarrow cos^2\frac{\theta}{3} = \frac{3A^{2m}}{4p} = \frac{3\times 4^4}{4\times 481} = \frac{a}{b} \Longrightarrow a = 3\times 4^3,\ b = 13\times 37 = p$; alors :

$$cos\frac{\theta}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{481}} \tag{219}$$

$$p = b \tag{220}$$

On vérifie facilement l'équation (218) en utilisant l'équation (219). Comme $3|a$ et $b = p$, on est dans le cas **3.2.2.3** de la deuxième hypothèse $3|a$ et $b|4p$. Or ce cas est impossible, ce qui est attendu puisque pour notre exemple, les exposants $m, n, l = 2$. Le résultat est une preuve de la régularité de notre démonstration.

Références

[1] R. Daniel Mauldin. *A Generalization of Fermat's Last Theorem : The Beal Conjecture et Prize Problem*. Notice of AMS, Vol 44, n°11, 1997, pp 1436-1437.