

Б.В. Двоглазов, Н.Е. Ньюко, Ю.Н. Тухтнев

АНАЛИЗ ИНФРАКРАСНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ
В ЭЛЕМЕНТАХ КВАЗИПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим квазипотенциальное уравнение [1], описывающее систему двух частиц со спинами $1/2$ и различными массами m_1 и m_2 (например, мюоний) в системе центра масс:

$$(E - \epsilon_{1p} - \epsilon_{2p}) \Psi_E(\vec{p}) = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \cdot V(\vec{p}, \vec{q}; E) \Psi_E(\vec{q}). \quad (1)$$

Здесь $\epsilon_{ip} = \sqrt{p^2 + m_i^2}$; $E = E_1 + E_2$ — полная энергия системы, где $E_1 + E_2 = M + W$, $E_i = \eta_i E$ ($\eta_i = m_i/M$, $M = m_1 + m_2$); $W < 0$ — энергия связи.

Квазипотенциал V строится через амплитуду рассеяния T в общем случае вне массовой поверхности (МП). В этой работе рассмотрен вариант квазипотенциального подхода с равными нулю внешними относительными энергиями.

Уравнение (1), используемое для нахождения сдвигов уровней энергии системы, решается по теории возмущений. В качестве невозмущенного уравнения при этом используется нерелятивистское уравнение Шредингера с кулоновским потенциалом:

$$\left(W_c - \frac{p^2}{2\mu}\right) \psi_c(\vec{p}) = \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} V_c(\vec{p}-\vec{q}) \psi_c(\vec{q}). \quad (2)$$

При построении теории возмущений возникают специфические вклады в сдвиги уровней энергии, не анализировавшиеся ранее, насколько известно авторам. Рассмотрим один из простейших вкладов такого типа в сверхтонкое расщепление основного уровня мезония. Преобразуем левую часть уравнения (1):

$$\begin{aligned} (E - E_c + E_{1c} - \epsilon_{1p} + E_{2c} - \epsilon_{2p}) \psi = & \left(\Delta E + \frac{E_{c1}^2 - m_1^2 - p^2}{E_{c1} + \epsilon_{1p}} + \right. \\ & \left. + \frac{E_{c2}^2 - m_2^2 - p^2}{E_{c2} + \epsilon_{2p}} \right) \psi; \quad E_{ci} - m_i = \eta_i W_c. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом соотношений, связывающих E_{ci} и E нетрудно получить

$$\begin{aligned} \left[W_c - \frac{p^2}{2\mu} + \sum_i \Delta E_i \right] \psi = & \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \left\{ R(\vec{p}) V(\vec{p}, \vec{q}; E) - (2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{q}) \times \right. \\ & \left. \times \left([R(\vec{p}) - 1] \left[\sum_i \Delta E_i + W_c \left(1 - \sum_{k=1}^2 \frac{M_{p\bar{k}} \eta_k}{E_{kc} + \epsilon_{pk}} \right) \right] - W_c \sum_{k=1}^2 \frac{M_{p\bar{k}} \eta_k}{E_{kc} + \epsilon_{pk}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\sum_i \Delta E_i = \Delta E$;

$$R(\vec{p}) = \frac{1}{2\mu} \frac{(E_{c1} + \epsilon_{1p})(E_{c2} + \epsilon_{2p})}{E_c + \epsilon_{1p} + \epsilon_{2p}};$$

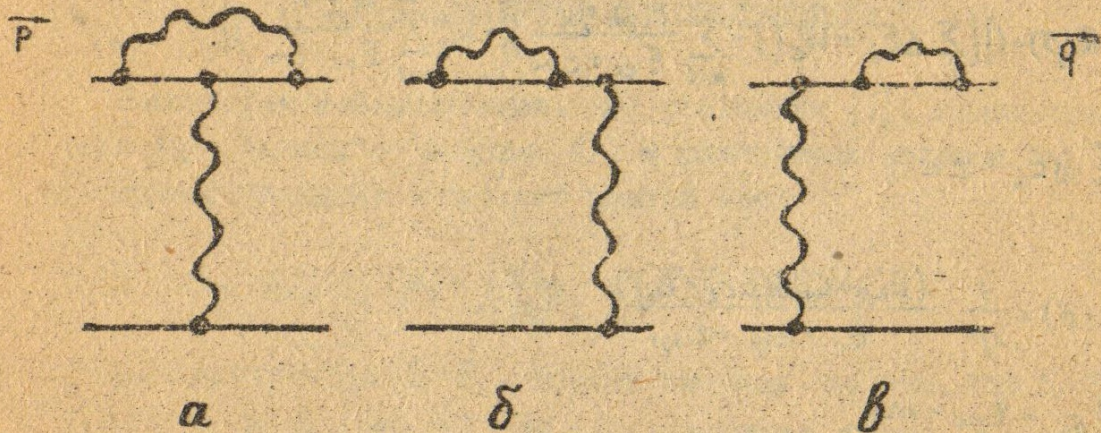
$$M_{p\bar{k}} = \epsilon_{pk} - m_k.$$

В правую часть слагаемое, пропорциональное $\delta(\vec{p}-\vec{q})$, попало из левой и теперь интерпретируется, как часть квазипотенциала. Вклад в сверхтонкое расщепление основного уровня главного порядка получим, заменив в этой части квазипотенциала величину ΔE на ее основное приближение — вклад Ферми $\Delta E_1 = E_F$. Соответствующий вклад в сдвиг уровня принимает вид:

$$\begin{aligned} \Delta E^1 &= - \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \psi_c^*(\vec{p}) \cdot (2\pi)^3 \delta(\vec{p}-\vec{q}) \cdot E_F (R(\vec{p})-1) \cdot \psi_c(\vec{q}) = \\ &= -16 \alpha^2 \mu E_F |\psi_c(0)|^2 \int_0^\infty p^2 dp (p^2 + w^2)^{-4} \cdot \left\{ 2\mu W_c + p^2 \left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} - 1 \right) \right\} \times \\ &\times [E_c + E_{1p} + E_{2p}]^{-1} = \frac{8 \alpha^2 \mu E_F}{3M} |\psi_c(0)|^2 \int_0^\infty d \left(\frac{1}{(p^2 + w^2)^3} \right) \left\{ \mu W_c p + \right. \\ &\left. + p^3 \left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} - 1 \right) \cdot \frac{1}{2} \right\} = E_F |\psi_c(0)|^2 \frac{\pi}{\mu^3 \alpha^3} \left[\left(1 - \frac{m_1}{m_2} - \frac{m_2}{m_1} \right) \mu \alpha^2 - 2W_c \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Таким образом, вклады подобного типа, как легко видеть из (5), начинаются с шестого порядка по константе взаимодействия для задачи о сверхтонком расщеплении.

Рассмотрим далее диаграммы (рисунок), связанные с недостаточностью, на наш взгляд, проанализированными элементами квазипотенциала.



Диаграммы, соответствующие элементам квазипотенциала

Первая из них (рисунок; вид а) в задачах о сдвигах уровней обычно рассматривается на МП, и дает вклад, соответствующий значению аномального магнитного момента [2], в сверхтонкое расщепление. Остальные (рисунок; вид б, в) обычно вообще выпадали из рассмотрения, поскольку на МП собственно энергетические вставки во внешних линиях приводят к занулению таких диаграмм. Рассмотренные диаграммы вне МП таким образом достаточно актуально.

Проблемы появляются при проведении перенормировки таких диаграмм в процессе построения квазипотенциала. Рассмотрим собственно энергетические электронные вставки. Соответствующий регуляризованный пропагатор электрона имеет вид [3]:

$$\Sigma^{Reg}(\rho) = \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{\rho^2 - m^2}{m^2} \left[\hat{\rho} \frac{m^2}{\rho^2} + \left(\frac{\rho^2 + m^2}{\rho^2} \hat{\rho} - 4m \right) A(\rho^2) + c_1 (\hat{\rho} - m) + c_2 \right], \right. \quad (6)$$

где
$$A(\rho^2) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda^2}{m^2}, & \vec{\rho}^2 = m^2 \\ \frac{m^2}{\vec{\rho}^2} \ln \frac{m^2 - \vec{\rho}^2}{\vec{\rho}^2}, & \vec{\rho}^2 \neq m^2. \end{cases}$$

Положим $c_2 = \Sigma^{Reg}(m) = 0$. Далее существуют две возможности проведения перенормировки: разложение в ряд Тейлора и вычитание из (6) этого ряда, взятого в точке $\hat{\rho} = m$. Используем [3] для записи (6) другую возможность

$$\Sigma^{Reg}(\hat{\rho}) = \frac{\hat{\rho} - m}{4\pi} S(\hat{\rho}),$$

$$S(\hat{\rho}) = c_1 + (\rho^2 + \hat{\rho}m)/\vec{\rho}^2 + \left(\frac{\rho^2}{m^2} + \frac{m\hat{\rho}}{\rho^2} - 3 \frac{\hat{\rho} + m}{m} \right) A(\rho^2). \quad (7)$$

Из условия $S(m) = 0$ следует $c_1 = -2 + 4A(m^2)$. Результат аналогичен вычитанию из (6) значения производной $\frac{\partial}{\partial \hat{\rho}} \Sigma(\hat{\rho})|_{\hat{\rho}=m}$. Поскольку для пропагатора электрона имеем

$$G(\rho) = [i(m - \hat{\rho})]^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{4\pi} S(\hat{\rho}) \right)^{-1} \quad (8)$$

и в окрестности МП

$$G(\rho) \sim [i(m - \hat{\rho})]^{-1} (Z_2), \quad (9)$$

то сравнение (8) и (9) при $S(m) = 0$ дает $Z_2 = 1$. Поэтому поправки во внешние линии при перенормировке на МП vanish.

Выражение (7) показывает, что перенормировка приводит к наличию в собственной энергии специфических логарифмических по λ вкладов:

$$2 \Sigma(\rho) \simeq \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{\lambda^2}{m^2}. \quad (10)$$

Заметим, что аналогичный вклад содержит и перенормированная вершинная часть:

$$\Lambda_\mu(\rho, \rho') \simeq -\frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{\lambda}{m}. \quad (11)$$

Следовательно, суммарный вклад от диаграмм должен содержать побочный "фиктивный" вклад:

$$T^{(2)}(\rho, \rho') \simeq \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{\lambda}{m}. \quad (12)$$

С другой стороны, такие вклады в квазипотенциале, построенном вне МП , должны отсутствовать, поскольку энергия связи конечна, хотя и мала в квантовой электродинамике. На первый взгляд заманчиво провести перенормировку вне МП . Пусть, например:

$$S(0) = 0, \quad (13)$$

тогда

$$c_1 = 2, \quad Z_2^{-1} = 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left(\ln \frac{\lambda}{m} - 1 \right). \quad (14)$$

Регуляризованная вершина и собственно энергетические части в этом случае особенностей по λ не содержат. Однако перенормировка внешних линий требует деления суммарного вклада от всех диаграмм на $\sqrt{Z_2}$ в степени, равной числу этих линий. В нашем случае это умножение на Z_2^{-1} . В результате появляется логарифмический по λ вклад, аналогичный (12).

При вычислении лямбовского сдвига, такой множитель как $\ln \frac{\lambda}{m}$, дифференцируемый с вершинной части, эффективно заменялся на $\ln \frac{m^2 - p^2}{m^2}$ [4] при $p^2 \ll m^2$. Эту замену можно исследовать с точки зрения перенормировки при $p^2 = E^2$. Пусть $S(E) = 0$. Тогда

$$c_1 = -1 - \frac{m}{E} - \left(1 - 3 \frac{m}{E} \left(1 + \frac{m}{E} - \frac{m^2}{3E^2} \right) \right) \ln \frac{m^2 - E^2}{m^2}, \quad (15)$$

или с точностью до α^2

$$C_1 \cong -2 + 4 \ln \frac{m^2 - E^2}{m^2}. \quad (16)$$

При этом получаем

$$S(\hat{p}) = -2 + 4 \ln \frac{m^2 - E^2}{m^2} - 3 \left(\frac{\hat{p} + m}{m} \right) A(\rho^2) + \left[1 + \frac{\hat{p}m}{\rho^2} + \left(\frac{\rho^2}{m^2} + \frac{m\hat{p}}{\rho^2} \right) A(\rho^2) \right],$$

$$\hat{p} \cong m$$

$$G(\hat{p}) = [i(m - \hat{p})]^{-1} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{\pi} \left(\ln \frac{m^2 - E^2}{m^2} - \ln \frac{\lambda}{m} \right) \right\},$$

$$G(\hat{p}) \cong [i(m - \hat{p})]^{-1} Z_2^{-1}; \quad Z_2^{-1} = 1 - \frac{\alpha}{\pi} \left(\ln \frac{m^2 - E^2}{m^2} - \ln \frac{\lambda}{m} \right). \quad (17)$$

Итак, перенормированные собственно энергетическая и вершинная части свободны от $\ln \frac{\lambda}{m}$. Однако такие вклады мы получаем из нормировки внешних линий.

Для устранения подобных вкладов предложим подход, основанный на приближении кулоновской функции с помощью δ -функции Дирака. Известно что трехугольсы начального и конечного состояний, а точнее, их средние значения достаточно малы. Таким образом, обнуляя один из них, например \vec{q} , мы тем самым выводим начальное состояние на МП, и одна из диаграмм (рисунок) обнуляется. Оставшиеся две в этом приближении свободны от инфракрасия, что нетрудно показать строго.

Рассмотрим соответствующий элемент квазипотенциала

$$T(\vec{p}, \vec{0}; E) = \frac{4\pi\lambda}{-p^2} \left[\left\{ \sum_1^{Reg} (p_1) S(p_1) \gamma_{1\mu} + \Gamma_{1\mu}^{Reg}(p_1, 0) \right\} \gamma_2^{\mu} \right]. \quad (18)$$

Подставляя сюда явный вид соответствующих вставок, являющихся перенормированными, получаем

$$\sum_1^{Reg} S_1 \gamma_{1\mu} + \Gamma_{1\mu}^{Reg} = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^1 2du \left[\{m(u+1)S_1 + u-1\} L_{\Sigma} \gamma_{1\mu} \right]$$

$$+ 2m^2 \left(u - \frac{\mu}{\Lambda_0^2} \right) \chi_{1\mu} + \int_0^1 u dv \left\{ \gamma_\mu L_\Gamma + \frac{M C}{\Lambda_1^2} \right\} - (u+2)m^2 \chi_{1\mu} + \frac{2u\mu^2}{\Lambda_0^2} \chi_{1\mu}. \quad (19)$$

Видно, как происходит сокращение инфракрасных вкладов, и в таком приближении ($\vec{p} \neq 0$, $\vec{q} = 0$) остальные выражения доступны для дальнейших вычислений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Фаустов Р.Н. // Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1972. Т.2. С. 38-67.
2. Karplus R., Klein A. // Phys.Rev. 1952.Vol.87. P.848-863.
3. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М., 1973. 416 с.
4. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М., 1963. 523 с.