# DEMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE C.GOLDBACH

BERKOUK Mohamed

Email: bellevue-2011@hotmail.com

En 1742, Christian Goldbach adressa une lettre à Leonhard Euler dans laquelle il proposait la conjecture faible suivante :

***Tout nombre impair supérieur à 5 peut être écrit comme une somme de trois nombres premiers.***

Euler, lui répondit avec la version plus forte de la conjecture :

***Tout nombre pair plus grand que deux peut être écrit comme une somme de deux nombres premiers.*** [1]

Le « Tout nombre » de la réponse d'Euler qui a écarté 2 aussi, laisse entendre que Euler ou Goldbach, ou les deux à la fois ne considéraient pas que 1 est premier...

C'est ces deux dernières versions actuelles que nous allons essayer de démontrer

## I - INTRODUCTION

La démonstration repose essentiellement sur trois théorèmes que je vais développer par la suite , le premier dite « théorème 1 » qui définit nécessairement tout nombre premier sous forme de 6m ± 1 , ∀ m ∈ N* , et suffisamment quand m ne soit pas sous forme (6xy+x+y) ou (6xy-x-y) pour tout nombre 6m+1 , et différent de la forme (6xy-x+y) pour tout nombre 6m-1. Nous appliquerons le « théorème 2 » qui définit la primalité de 6m ± 1 sans avoir à déterminer x et y de la forme. (v. la multimorielle).
Le troisième théorème dite « théorème 3 » traite de la propriété de la parité en ce qui concerne le produit puis la somme de deux nombres entiers. Enfin le « théorème 4 » évoquant le postulat de Bertrand démontré par le TFNP.
Après avoir passé en revue tout les cas possibles de la somme de deux, puis de trois nombres premiers et de vérifier leurs conformité avec les deux conjectures. La démonstration de la réciproque nous a conduites par une analyse logique, tout droit à celles des deux conjectures de C.GOLDBACH.

### <u>1° THEOREME -1 :</u>

Avec m ∈ N* ;
6m+1 soit premier, il faut points que m soit compris sous la forme (6xy+x+y) ou (6xy-x-y).
6m-1 pour être premier, il faut points que m soit compris sous la forme (6xy-x+y)
(x et y permutables).

### DEMONSTRATIONS :

Soit n > 6 ; ∈ à N ; l'ensemble des entiers naturels.
Divisons n par 6 ==> n=6m+r, m et r ∈ à N. r prend les valeurs des restes de la division soit 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.
n ne peut **être** premier si r=0, 2, 3 ou 4 car il sera respectivement divisible par ces derniers
Pour **être** premier, le reste de sa division devra nécessairement **ê**tre égale à 1 ou 5,
C'est-à-dire que n soit de la forme 6m+1 ou 6m+5.

Si on considère la suite 6m+5 et si on définit son premier terme par 5, il sera la même chose que 6m-1, m commençant par la valeur entière 1.
Néant moins cette condition que le nombre premier soit de la forme $6m \pm 1$ n'est pas suffisante étant donné qu'il existe des entiers non premiers respectant la forme $6m \pm 1$.
Mr **Krafft**, le 12 avril 1798 devant l'académie des sciences impériales en Europe ; présenta son « essai sur les nombres premiers » [1]. Il s'en sort qu'il fallait une deuxième condition suffisante pour que tout nombre de la forme $6m \pm 1$ soit premier :

a) Prenant le premier cas 6m+1 , la proposition se résume que **pour être premier , il faut points que m soit compris sous la forme 6xy+x+y ou 6xy-x-y** , (autrement dit ,il faut que le nombre (6m+1) ne soit pas un nombre composé ( produit de (6x+1)(6y+1) ou (6x-1)(6y-1) .)

*Démonstration :*

. Si N=6m+1 est un nombre composé de deux facteurs quelconques

$6m+1 = (u+t)(v+z)$

$= uv + uz + tv + tz$ ; on suppose que l'un de ces quatre produis soit = 1

Soit $tz = 1$ ; $\Rightarrow t=1$ et $z=1$ ou $t=-1$ et $z=-1$.

$\Rightarrow \quad 6m+1 = uv + u + v + 1$ ou $6m+1 = uv - u - v + 1$

$\Rightarrow \quad 6m = uv + u + v$ ou $6m = uv - u - v$

Vu que m est un entier > 0 $\Rightarrow$ u et v doivent tous les deux être > 0 ou tous les deux < 0.

Soit $6m = uv + u + v$ divisible par 2 & 3. uv +u+v d'abord divisible par 2 $\Rightarrow$ u & v doivent étre pairs, donc $u=2p$ & $v=2q$

$\Rightarrow \; 6m = 2p2q + 2p + 2q$ c'est-à-dire $3m=2pq+p+q$

$\Rightarrow$ 2pq+p+q doit être divisible aussi par 3 donc $2pq+p+q = 3x$

$2pq+p+q = pq + p(q+1) + q = 3x$, $\Rightarrow$ $p=3x$ et $q=3x$ et $(q+1)=3x$ c'est-à-dire $q= 3x-1$

Soit $6m = uv - u - v$ divisible par 2 & 3. uv -u-v aussi divisible par 2 $\Rightarrow$ u & v doivent étre pairs , donc $u=2p$ & $v=2q$

$2pq-p-q = pq + q(p-1) - p = 3y$ , $\Rightarrow$ $p=3y$ et $q=3y$ et $(p-1)=3y$ c'est-à-dire $p= 3y+1$

**Donc trois suppositions ; soit p=3x & q=3y ou p=3x-1 & q=3y-1 ou p=3x+1 & q=3y+1**

(x étant permutable avec y)

1°-supposition $p=3x$ & $q=3y$ :

$3m=2pq+p+q \Rightarrow 3m= 2.3x.3y +3x+3y$

Donc $m=6xy+x+y$ .

$3m=2pq-p-q \Rightarrow 3m= 2.3x.3y -3x-3y$

Donc $m=6xy-x-y$

2°-supposition $p=3x-1$ & $q=3y-1$

$3m=2pq+p+q \quad \Rightarrow \quad 3m = 2.(3x-1).(3y-1) + (3x-1) + (3y-1)$

$3m = 6x-2\ (3y-1) +3x -1 +3y-1$

$3m = 18xy-6x-6y+2 +3x+3y-2 = 18xy+3x+3y +2-2$

$\Rightarrow \quad m=6xy+x+y$

$3m=2pq-p-q \quad \Rightarrow \quad 3m = 2.(3x-1).(3y-1) + (3x-1) + (3y-1)$

$3m = 6x-2\ (3y-1) +3x -1 +3y -1$

$3m = 18xy-6x-6y+2 +3x+3y-2 = 18xy-3x-3y +2-2$

$\Rightarrow \quad m=6xy-x-y$

3°-supposition $p=3x+1$ & $q=3y+1$

$3m=2pq+p+q \Rightarrow 3m = 2.(3x+1).(3y+1) -(3x+1)-(3y+1)$

$3m = 6x+2\ (3y+1) -(3x+1) - (3y+1)$

$3m = 18xy +6x+6y +2 -3x-1-3y-1 = 18xy+3x+3y +2-2$

$\Rightarrow \quad m=6xy+x+y$

$3m=2pq-p-q \quad \Rightarrow \quad 3m = 2.(3x+1).(3y+1) -(3x+1)-(3y+1)$

$3m = 6x+2\ (3y+1) -3x +1 -3y -1$

$3m = 18xy+6x+6y+2 -3x-1-3y-1 = 18xy+3x+3y +2-2$

$\Rightarrow \quad m=6xy-x-y$

**Finalement $N=6m+1$ pour être premier, il faut points que m soit compris sous la forme $6xy+x+y$ ou $6xy-x-y$** -fin de démonstration- .

b) Prenant le deuxième cas $6m-1$ , la proposition dit que **pour être premier , il faut point que m soit compris sous la forme $6xy+x-y$** , autrement dit ,il faut que $(6m-1)$ ne soit pas un nombre composé ( produit de $(6x+1)(6y-1)$ ou $(6x-1)(6y+1)$ ).

Démonstration :

. Si $N=6m-1$ est un nombre composé de deux facteurs quelconques

$6m-1 = (u+t)(v+z)$

$6m-1 = uv + uz + tv + tz$ ; l'un de ces quatre produits peut être supposé $=-1$

Soit $tz=-1$ ; => $t=1$ et $z=-1$ ou $t=-1$ et $z=1$.

⇒ $6m-1= uv - u + v - 1$ ou $6m-1= uv + u - v - 1$

⇒ $6m = uv - u + v$ ou $6m = uv + u - v$

Sachant que m est un entier > 0 , donc u et v doivent tous les deux être > 0 ou tous les deux < 0.

Soit $6m = uv + u - v$ divisible par 2 & 3. $uv+u-v$ pour être divisible par 2 ⇒ u & v doivent être pairs , c'est-à-dire $u=2p$ & $v=2q$ .

$6m = 2p2q + 2p - 2q$ donc $3m=2pq+p-q$ .

⇒ $2pq+p-q$ doit être divisible aussi par 3, c'est-à-dire $2pq+p-q = 3x$ (ou $= 3y$)

$2pq+p-q = pq + q(p-1) + p = 3x$ ⇒ $p=3x$ et $q=3y$ et $(p-1)=3x$, donc $p= 3x+1$

Soit $6m = uv - u + v$ divisible par 2 & 3. ⇒ $uv - u + v$ divisible par 2 donc u & v doivent être pairs, c'est-à-dire $u=2p$ & $v=2q$.

$6m = 2p2q - 2p + 2q$ ⇒ $3m=2pq-p+q$ .

⇒ $2pq-p+q$ devra être divisible aussi par 3, c'est-à-dire $2pq-p+q = 3x$ (ou $= 3y$)

$2pq-p+q = pq + pq - p + q = pq + p(q+1) - q = 3y$ ⇒ $p=3x$ et $q=3y$ et $(q+1)=3y$ c'est à dire $q= 3y-1$

**Donc deux suppositions ; soit $p=3x$ & $q=3y$ ou $p=3x+1$ & $q=3y-1$**

(x étant permutable avec y)

1°-supposition $p=3x$ & $q=3y$ :

$3m=2pq-p+q$ ⇒ $3m= 2.3x.3y - 3x + 3y$

Donc $m=6xy-x+y$ (1)

2°-supposition $p=3x+1$ & $q=3y-1$

$3m=2pq-p+q$ ⇒ $3m = 2.(3x-1).(3y+1) - (3x-1) + (3y+1)$

$3m = 6x-2 (3y+1) - 3x + 1 + 3y + 1$

$3m = 18xy + 6x - 6y - 2 - 3x + 3y + 2 = 18xy + 3x - 3y - 2 + 2$

Donc $m=6xy+x-y$ (2)

A cause de la permutabilité de x & y les expressions (1) & (2) reviennent au même

**Finalement : pour que $N=6m-1$ soit premier, il faut points que m soit compris sous la forme $6xy+x-y$.**

## 2° THEOREME-2 :

Théorème sur les nombres premiers ( Berkouk )

définition :

soit n, un entier naturel, la Multimorielle de n, notée n(=), est le produit de tous les restes issus de la division respective de n par chaque nombre entier m compris entre 1 et n.

Théorème :

∀ n, un entier naturel > 2, n est premier si et seulement si sa Multimorielle **n(=) ≠0.**

Démonstration :

Soit m et n deux entiers : n(=) ⇒ $1 < m < n$

a)- si n est premier $\Rightarrow$ n/m conduit à un reste nul, si m=n ou m=1
Or 1 < m < n, donc tous les restes des n/m $\neq 0$ $\Rightarrow$ la multimorielle **n(=) ≠0**.
Ou bien
b)- si n est un nombre composé, $\Rightarrow$ n= k. p (k et p entiers)
comme k < n et p < n $\Rightarrow \exists$ m =k, ou m =p qui divise n et conduit à un reste Nul
$\Rightarrow$ **n(=) = 0.**

CQFD.

**<u>3° THEOREME-3 :</u>**

**a) Seule la multiplication de 2 nombres impairs donne un produit impair.**
**Dans tous les autres cas, le produit est pair.**
**Et**
**b) La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.**
**La somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair.**

<u>Démonstration a-:</u>

<u>Produit de deux nombres pairs :</u>

Prenons deux nombres pairs. Le premier est 2n et le second 2p. (Un nombre impair est du type 2 x+1)
Nous avons : (le symbole * est ici le signe de multiplication)

2n * 2p = 2 * n * 2 * p = 2 * (n * 2 * p)
Ce résultat est de la forme 2 x
, (Multiple de 2), donc le produit est pair.

<u>Produit de deux nombres impairs :</u>

Prenons deux nombres impairs. Le premier est 2n + 1
et le second 2p + 1. (Un nombre impair est du type 2 x + 1)

(2n + 1) * (2p + 1) = 4np + 2n + 2p + 1 = 2 (2np + n + p) + 1
Ce résultat est de la forme 2 x + 1, donc le produit est impair.

<u>Produit d'un nombre pair et d'un nombre impair :</u>

Considérons un nombre pair 2n et un nombre impair 2p + 1

2n * (2p + 1) = 4np + 2n = 2(2np + n)
Ce résultat est de la forme 2 x
, (Multiple de 2), donc le produit est pair.

**Seule la multiplication de 2 nombres impairs donne un produit impair.**
**Dans tous les autres cas, le produit est pair. CQFD.**

<u>Démonstration b-:</u>

<u>Somme de deux nombres pairs :</u>

Prenons deux nombres pairs. Le premier est 2n et le second 2p. (Un nombre impair est du type 2 x+1)
Nous avons :
2n + 2p = 2(n + p)
Ce résultat est de la forme 2 x
, (Multiple de 2), donc la somme est paire.

<u>Somme de deux nombres impairs :</u>

Prenons deux nombres impairs. Le premier est 2n + 1
et le second 2p + 1. (Un nombre impair est du type 2 x + 1)
Nous avons :
(2n + 1) + (2p + 1) = 2n + 1 + 2p + 1 = 2 n + 2p + 2 = 2( n + p + 1 )
Ce résultat est de la forme 2 x
, (Multiple de 2), donc la somme est paire.

<u>Somme d'un nombre pair et d'un nombre impair :</u>

Considérons un nombre pair 2n et un nombre impair 2p + 1
Nous avons :
2n + (2p + 1) = 2n + 2p + 1 = 2(n + p) + 1
Ce résultat est de la forme 2 x + 1, donc la somme est impaire.
Le résultat est similaire si le premier nombre est impair et le second pair.

**La somme de deux nombres de même parité est un nombre pair.**
**La somme de deux nombres de parité différente est un nombre impair. CQFD**

**<u>4° THEOREME-4 :</u>**

**le postulat de Bertrand** démontré par **Tchebychev** dit que :

Si $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2, alors il existe toujours au moins un nombre premier $p$ tel que

$n < p < 2n$ , Peut-être traduit par le théorème fondamentale des nombres premiers à savoir si $\pi(n)$ , le cardinal des nombres premiers compris dans ]1, n] , n entier avec $\pi(n) \sim \frac{n}{\log(n)}$

Alors dans [ n, 2n [ , $\pi(2n) - \pi(n) > 0$ .

$$\Rightarrow \quad \frac{2n}{\log(2n)} - \frac{n}{\log(n)} > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2n.\log(n) - n.\log(2n).}{\log(2n)\log(n)} > 0$$ comme le dénominateur $\log(2n)\log(n) > 0$

$$\Rightarrow \quad 2n\log(n) - n.\log(2n) > 0.\ \mathrm{Log}(2n)\log(n)$$

$$\Rightarrow \quad 2n\log(n) - n.\log(2n) > 0$$

$$\Rightarrow \quad 2n\log(n) > n.\log(2n)$$

$$\Rightarrow \quad 2n\log(n) > n.\log(2) + n.\log(n)$$

$$\Rightarrow \quad n.\log(n) > n.\log(2)$$

$$\Rightarrow \quad \log(n) > \log(2)$$

$$\Rightarrow \quad e^{\log(n)} > e^{\log(2)}$$

$$\Rightarrow \quad n > 2$$

Donc $\pi(2n) - \pi(n) > 0$ est vraie $\forall$, entier $> 2$ .

Pour n =2 , $\pi(2.2) - \pi(2)$ équivaut à 1 puisqu' il existe un premier entre 4et 2, c'est 3.

⇒ ∃ un cardinal ≥ 1 de premiers entre **π(2n) - π(n)** **, c' est à dire** ∀ n ∈ **[2, +∞ [** , ∃ $p$ premier / n < $p$ < 2n

(voir aussi la démonstration classique de **Tchebychev** en 1850 aboutissant au même résultat)

CQFD.

II - CONJECTURE FORTE DE C. GOLDBACH
DEMONSTRATION

**A) Toute somme S de deux nombres premiers > 2 est pair** :

Soit deux nombres premiers de la forme 6m ± 1 Et 6n ± 1, m et n ∈ N*.
(D'après la démonstration du théorème 1),
Nous aurons les sommes possibles suivantes, qui vérifient la propriété PAIRE d'après le « théorème 3 » :

1° soit S = (6m+1) +(6n +1) = 6(m+n)+2 = 2 (3(m+n) +1) ⇒ S est PAIRE, ∀ m&n ∈ N*

2° ou S = (6m+1) + (6n -1)= 2.3 (m+n), d'après théorème 3 ⇒ S est PAIRE ∀ m& n ∈ N*

3° ou S = (6m-1) + (6n +1) = 2.3 (m+n), d'après théorème 3 ⇒ S est PAIRE ∀ m& n ∈ N*

4° ou S = (6m-1) + (6n -1) = 2.3 (m+n) -2 = 2 (3(m+n) - 1) ⇒ S est PAIRE ∀ m& n ∈ N*

**La première condition nécessaire pour qu'un nombre soit premier est la forme 6m ± 1 , ou 6n ± 1 vérifiée , la parité est établi aussi , ∀ m &,n ∈ N*, S est divisible par 2 ⇒ donc ∀ m & n ∈ N*,la somme de 2 premiers est PAIRE , y compris quand :**

**1)- m et n ≠ 6xy +x + y ou m et n ≠ 6xy -x – y ; condition suffisante pour que 6m +1, ou 6n +1 soient premiers. (D'après théorème 1)**

⇒ ∃ k et k' ∈ à **R**, tel que, k= (6m + 1)(=) et k'= (6n + 1)(=) (multimorielle)
. Si k > 0 ⇒ (m+k) et (n+k) ≠ 6xy +x + y ou (m+k) et (n+k) ≠ 6xy -x – y
. Si k' > 0 ⇒ (m+k') et (n+k') ≠ 6xy +x + y ou (m+k') et (n+k') ≠ 6xy -x – y ⇔ 6m + 1, ou 6n + 1 sont Surement Premiers sans avoir à déterminer x et y puisque k ≠0.

**2) - y compris aussi quand : m et n ≠ 6xy +x – y ; condition suffisante pour que 6m - 1, ou 6n -1 soient premiers. (D'après théorème 1)**

⇒ ∃ k et k' ∈ à **R,** tel que, k= (6m - 1)(=) et k'= (6n - 1)(=) ( multimorielle)
. si k > 0 et k' > 0 ⇒ (m+k) et (n+k') ≠ 6xy +x - y

⇔ 6m - 1, ou 6n - 1 sont surement Premiers sans avoir à déterminer x et y. (car k ≠ 0)

**PREMIERE CONCLUSION : Toute somme S de deux nombres premiers > 2 est pair**

**Soit la proposition P = Toute somme S de deux nombres premiers > 2 est pair**
**Et sa réciproque Q = Tout nombre pair > 2 est la somme de deux nombres premiers**

Regardons $P \Rightarrow Q$ et sa réciproque $Q \Rightarrow P$ selon le tableau de vérités suivant :

| P | Q | $P \Rightarrow Q$ | $Q \Rightarrow P$ | $Q \Leftrightarrow P$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F |
| F | V | V | F | F |
| F | F | V | V | V |

**Supposons que $Q$ est Fausse :**

$\Rightarrow$ $\exists$ un nombre PAIR > 2 qui n'est pas la somme de deux nombres premiers

**Démonstration :**

Soit $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels ; $\mathbb{D}$, l'ensemble des entiers pairs. $\mathbb{I}$, l'ensemble des entiers impairs.

Soit $\mathbb{N}^2$, l'ensemble des couples d' entiers naturels ( n , m ) , $\forall\, n , m \in \mathbb{N}$,

Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des premiers positifs,

Soit $\mathbb{P}^2$ l'ensemble des couples de deux premiers positifs ( p , p' ) , $\forall\, p , p' \in \mathbb{P}$,

Et $\mathbb{P}^3$ l'ensemble des triplets de premiers positifs ( p, p', p''), $\forall\, p, p', p'' \in \mathbb{P}$,

Pour cela nous allons introduire trois lemmes à partir desquels nous définissons les cardinaux de ces ensembles
Et à partir desquels aussi, nous concluons sur la réciproque Q de Goldbach.

**1° Lemme fondamentale**

**Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ est équipotent à $\mathbb{N}$**

Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ infini ; on sait que A admet un plus petit élément $a_0$.

Comme A n'est pas un singleton ; $A_1 = A \setminus \{a_0\}$ est non vide, donc admet un plus petit élément $a_1$, qui vérifie $a_0 < a_1$

Comme A n'est pas de cardinal 2 ; $A_2 = A \setminus \{a_0, a_1\}$ admet un plus petit élément $a_2$, qui vérifie $a_0 < a_1 < a_2$

Supposons que l'on ait construit n éléments $a_0 < a_1 < a_2 \dots a_n$ dans A.

Comme A n'est pas fini , l'ensemble $A_{n+1} = A \setminus \{ a_0 , a_1, \dots , a_n \}$ est non vide et admet donc un plus petit élément $A_{n+1}$ , qui vérifie $a_n < a_{n+1}$ .Par récurrence , on construit ainsi une suite $a_0 < a_1 < a_2 \dots a_n < a_{n+1}$ c'est-à-dire une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ définit par $f(n) = a_n$ , qui strictement croissante , donc injective .

Montrons que $f$ est surjective, par l'absurde, supposons $\exists\, y \in A \ /\ y \neq f(n), \forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, m \in \mathbb{N} \ /\ a_m < y < a_{m+1}$ .

Comme $a_m < y$, on a $y \in A_{m+1} = A \setminus \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$.

Comme $a_{m+1}$ est le plus petit élément de $A_{m+1}$, on doit alors, $a_{m+1} \leq y$, d'où la contradiction

$\Rightarrow f$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur A $\Rightarrow$ A est équipotent $\mathbb{N}$, donc $\mathrm{Card}\,(A) = \mathrm{Card}\,(\mathbb{N})$.

**2° Lemme 1**

**$\mathbb{N}^2$ est dénombrable, donc $\mathbb{N}^2$ est équipotent à $\mathbb{N}$**

| m \ n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 |
| 1 | 2 | 4 | 7 | 11 | 16 |
| 2 | 5 | 8 | 12 | 17 | 23 |
| 3 | 9 | 13 | 18 | 24 | 31 |
| 4 | 14 | 19 | 25 | 32 | 40 |

On peut faire la liste des couples d'entiers par diagonales Dn :

**Dn : D0** ; **D1** ; **D2** ; **D3** ; **D3** ; ....

$\mathbb{N}^2$ : (0,0) ; (1,0) (0,1) ; (2,0) (1,1) (0,2) ; (3,0) (2,1) (1,2) (0,3) ; (4,0) (3,1) (2,2) (1,3) (0,4) ; ............. (n,m)

$\mathbb{N}$ : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 ......... $\dfrac{(n+m)\,(n+m+1)}{2} + m$

Ce qui revient à constater par induction que l'application

$f : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ : (n,m) $\longrightarrow \dfrac{(n+m)(n+m+1)}{2} + m$ (fonction de couplage de Cantor ⟶ terme explicite de la bijection=y )

Est une <u>bijection</u> (strictement croissante) puisse que $\forall\ y \in \mathbb{N},\ \exists!\ (n,m) \in \mathbb{N}^2\ /\ f(n,m) = y$

$\Rightarrow$ $\mathbb{N}^2$ est équipotent à $\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ Card ($\mathbb{N}^2$) = Card ($\mathbb{N}$) .

**<u>3° Lemme 2</u>**

**Si $\mathbb{N}^2$ pour est équipotent à $\mathbb{N}$, alors l'ensemble $\mathbb{N}^3$ est équipotent à $\mathbb{N}$**

Cela se démontre par récurrence, si $\mathbb{N}^3$ est équipotent à $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{N}^{2+1}$ est équipotent à $\mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$ est donc à $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Et finalement à $\mathbb{N}$.

**B) RECAPITULATION**

$\mathbb{D}$, l'ensemble des entiers pairs et $\mathbb{P}$ l'ensemble des premiers positifs, sont des sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$

D'après le Lemme 1, ils sont donc équipotents à $\mathbb{N}$, comme selon le Lemme 2 , $\mathbb{N}^2$ est équipotents à $\mathbb{N}$

$\Rightarrow f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ qui est une <u>bijection</u> .

$\mathbb{P}^2$ est équipotents à $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ est équipotents à $\mathbb{D}$ $\Rightarrow$ Card ($\mathbb{D}$) = Card ( $\mathbb{P}^2$) .

Si Card ($\mathbb{D}$) $>$ Card ( $\mathbb{P}^2$) , alors il y aurait des nombres pairs qui ne peuvent générer des sommes de 2 premiers

Puisse que les antécédents de l'ensemble $\mathbb{P}^2$ ont déjà une image dans $\mathbb{D}$, et que pour le restant des pairs de l'ensemble $\mathbb{D}$ , la seule possibilité , est de générer des sommes de 2 nombres non premiers ; comme dans notre cas Card ($\mathbb{D}$) = Card ( $\mathbb{P}^2$) .cette possibilité selon l'argument de Cardinalité , est nulle, $\Rightarrow f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{D}$ est une <u>Bijection</u> :

Optant pour un choix non arbitraire pour <u>$f(p, p') = p + p'$</u> tant qu'on peut prouver l'injection et la surjection de $f$ :

- **$f$ est donc injective :** $\forall\ (p, p')$ et $(c, c') \in \mathbb{P}^2$, (p+p') = n et (c+c') =n' $\Rightarrow$ si (p+p') = (c+c') alors **n** = n' ,
  n et n', pairs $\in \mathbb{D}$. (*)

**Preuve :**

<u>n = n' de l'injection (*) $\Rightarrow$ n et n' de même parité</u>, or d'après la réciproque de la conjecture forte de Goldbach

$\forall\ (p, p')$ et $(c, c') \in \mathbb{P}^2$; $p+p' =$ n et $c+c' = n'$, <u>n et n' sont toujours pairs</u>.

il s'agit au fait de la proposition **P = Toute somme S de deux nombres premiers > 2 est pair** , qui se trouve la réciproque de la conjecture forte de Goldbach ,qui implique donc l'injection de $\mathbb{P}^2$ sur $\mathbb{D}$ , Et qu'on peut donc démontrer rapidement :

$\forall\ (p, p') \in \mathbb{P}^2$ sauf 2, p et p' sont IMPAIRES sauf 1 bien entendu , : la somme de deux impaires est évidemment un nombre PAIR. (Avec 2+2 =4 début des paires, en particulier).

- **$f$ est donc surjective :** <u>$\forall$ n pair $\in \mathbb{D}$, $\exists$ (p ,p') $\in \mathbb{P}^2$ , (p+p') = n .</u>

**Preuve :**

.Soit $\mathbb{P}^2$ et $\mathbb{D}$ respectivement l'ensemble des couples de premiers, et l'ensemble des entiers naturels Pairs

.Soit $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{D}$

(p, p') ⟶ $f$ (p, p') = p + p'

.Soit P(n-1) un nombre premier de rang (n-1), et son successeur Pn

## <u>1°- Cas : Pn > 2 P(n-1) , Pn est plus grand au double de son prédécesseur</u>

a) Si Pn > 2 P(n-1) , posons Pn = 2 P(n-1) + 1 :

**n1** = P(n-1) + P(n-1) = 2 P(n-1) correspond au plus **<u>grande</u>** image dans $\mathbb{D}$, généré par le couple (P(n-1) , P(n-1) **)** de $\mathbb{P}^2$

**n2** = $(2\,P(n-1)\ + 1) + 3\ = 2\,P(n-1) + 4$ correspond au plus **petite** image dans $\mathbb{D}$ , généré par le couple $((2\,P(n-1)\ + 1),\ 3)$ de $\mathbb{P}^2$

⇒ $2\,P(n-1) + 4$ est le successeur de $2\,P(n-1)$

⇒ $\forall\, n \in \mathbb{D}\ /\ 2\,P(n-1) < n < 2\,P(n-1) + 4$ , n ne peut avoir d'antécédent dans $\mathbb{P}^2$ puisqu'il n'y a pas De premiers entre P(n-1) et Pn , donc , $2\,P(n-1)\ + 2$ ne peut être la somme de deux premiers, elle serait donc un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach.

b) Si $Pn > 2\,P(n-1)$ , posons $Pn = 2\,P(n-1)\ + 3$ : ( $2\,P(n-1)\ + 1$ n'étant pas premier )

**n1** = $P(n-1) + P(n-1) = 2\,P(n-1)$ correspond au plus **grand** antécédent généré par le couple $(P(n-1),\ P(n-1))$ de $\mathbb{P}^2$

**n2** = $(2\,P(n-1)\ + 3) + 3\ = 2\,P(n-1) + 6$ correspond au plus **petit** antécédent généré par le couple $((2\,P(n-1)\ + 3),\ 3)$ de $\mathbb{P}^2$

⇒ $2\,P(n-1) + 6$ est le successeur de $2\,P(n-1)$

⇒ $\forall\, n \in \mathbb{D}\ /\ 2\,P(n-1) < n < 2\,P(n-1) + 6$ , n ne peut avoir d' antécédent dans $\mathbb{P}^2$ puisqu'il n'y a pas De premiers entre P(n-1) et Pn , donc , $2\,P(n-1)\ + 2$ et , $2\,P(n-1)\ + 4$ ne peuvent être la somme de deux premiers, elle serait donc deux contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach

⇒ Si $Pn > 2\,P(n-1)$ et $Pn = 2\,P(n-1)\ + 3$ , ALORS ∃ un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach.

Dans ce cas $(2\,P(n-1)\ + 2)$ et $(2\,P(n-1)\ + 4)$ ne peuvent pas avoir d'image dans $\mathbb{P}^2$ .

c) Si $Pn > 2\,P(n-1)$ , posons $Pn = 2\,P(n-1)\ + k$ : k entier positif impair

**n1** = $P(n-1) + P(n-1) = 2\,P(n-1)$ correspond au plus **grand** antécédent généré par le couple $(P(n-1),\ P(n-1))$ de $\mathbb{P}^2$

**n2** = $(2\,P(n-1)\ + k) + 3\ = 2\,P(n-1) + (k+3)$ correspond au plus **petit** antécédent généré par le couple $((2\,P(n-1)\ + k),\ 3)$ de $\mathbb{P}^2$

⇒ $2\,P(n-1) + (k+3)$ est le successeur de $2\,P(n-1)$

⇒ $\forall\, n \in \mathbb{D}\ /\ 2\,P(n-1) < n < 2\,P(n-1) + (k+3)$ , n ne peut avoir d' antécédent dans $\mathbb{P}^2$ puisqu'il n'y a pas De premiers entre P(n-1) et Pn , donc ,

$(2\,P(n-1)\ + 2)$ , $(2\,P(n-1)\ + 4)$, $(2\,P(n-1)\ + 6)$, **…** ,$(2\,P(n-1)\ + (k+1))$ ne peuvent être la somme de deux premiers, elle serait donc $\frac{k+1}{2}$ contre-exemples à la conjecture Forte de Goldbach.

⇒ Si $Pn > 2\,P(n-1)$ et $Pn = 2\,P(n-1)\ + k$ , ALORS ∃ un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach.

Dans ce cas, tous les pairs compris entre $2\,P(n-1)$ et $2\,P(n-1)\ + (k+3)$ ne peuvent pas avoir d'image dans $\mathbb{P}^2$ .

Conclusion 1 :

Si $Pn > 2\,P(n-1)$ , alors ∃ un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach. (3)

## 2°- Cas : Pn < 2 P(n-1) , Pn est plus petit au double de son prédécesseur

D'après le **théorème de Tchebychev** dument explicité ci-dessus dans le théorème -4 :

$\forall$ n $\in$ ℕ, $\exists$ q $\in$ ℙ (ensemble des nombres premiers) / n < q < 2n

Posons n= P(n-1) , un nombre premier du rang (n-1) , et soit Pn son successeur .

$\forall$ n $\in$ ℕ, $\exists$ q $\in$ ℙ / P(n-1) < q < 2 P(n-1)

Si $\exists!$ q $\in$ ℙ / P(n-1) < q < 2 P(n-1) , alors q est le successeur de P(n-1)

$\Rightarrow$ q = Pn

$\Rightarrow$ P(n-1) < Pn < 2 P(n-1)

Donc Pn < 2 P(n-1)

Si $\exists$ q1, q2, q3,…qm $\in$ ℙ / P(n-1) < q1<q2<q3<… <qm < 2 P(n-1) , alors q1 est le successeur de P(n-1)

$\Rightarrow$ q1 = Pn

$\Rightarrow$ P(n-1) < Pn < 2 P(n-1)

Donc $\forall$ le nombre Pn $\in$ ℙ , Pn est toujours inférieur à 2 P(n-1)

- D'après (3) l'Existence d'un contre-exemple est conditionné par : Pn > 2 P(n-1) dont on sait qu'elle ne sera jamais satisfaite étant donné qu'on a déjà démontré que $\forall$ n $\in$ ℕ , $\forall$ Pn $\in$ ℙ \{2} , Pn est toujours < 2 P(n-1 ) .

A) Soit A = Pn < 2 P(n-1)

non A = Pn > 2 P(n-1)

B = $\nexists$ un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach

non B = $\exists$ un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach

le schéma du raisonnement déductif nous apprend que :

**A est vrai et (A $\Rightarrow$ B) est vrai Donc B est vrai**

Ils en découlent seulement trois autres cas

A est vrai et (A $\Rightarrow$ B) est fausse Donc B est vrai

A est fausse et (A $\Rightarrow$ B) est vrai Donc B est fausse

A est fausse et (A $\Rightarrow$ B) est fausse Donc B est fausse

**Or nous savions que :**

- A est vrai vérifiée par le théorème de Tchebychev (T. Tchebychev $\Rightarrow$ A est vrai )
- (A $\Rightarrow$ B) est vrai vérifiée par notre démonstration ci-dessus :(A est vrai $\Rightarrow$ B est vrai)

: théorème de Tchebychev $\Rightarrow$ B est vrai ( $\nexists$ un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach) [21]

B) Prouvons maintenant que la conjecture de Goldbach implique le théorème de Tchebychev

Supposons que la Conjecture de Goldbach est Vraie ; il s'en suit que pour tout entier positif > 1 , soit 2n également un entier pair > 2 nous aurons 2n = p1 +p2 ( p1 et p2 premiers positifs ) [22]

2n = p1 +p2 équivaut à ( p1 < n $\Rightarrow$ p2 $\geq$ n ) ou bien ( p2 < n $\Rightarrow$ p1 $\geq$ n ) [23]

Soit pi $\geq$ n (c'est-à-dire pi =p1 ou bien pi = p2) [24]

$\Rightarrow$ n $\leq$ pi < 2n

. si n n'est un nombre premier, alors l'inégalité stricte est vérifiée : n < pi < 2n ,pi existe et vérifié par le théorème de Tchebychev. ( il existe au moins un pi entre n & 2n)

. si n est premier :

Elucidons le cas n=2

- soit $2<3<2*2$ , 3 nombre premier, donc le théorème de Tchebychev est vérifié

Pour les cas ou $n > 2$

- si n est nombre premier impair ⇒ que ( n+1) est un nombre composé

⇒ d'après [22], $2(n+1) = p1 + p2$ et d'après [23] & [24] , pi devra être $> (n+1)$

⇒ $(n+1) \leq pi < 2(n+1)$

Comme pi & n sont premier & (n+1) est un composé ⇒ pi > n (dans le cas ou n>2) [25]

D'autre part si pi < 2(n+1), 2(n+1) = 2n + 2 nous constations que pi ne peut être égal à 2n+1 et égal à 2n :

Si, d'après [22], si p1 = 2n+1 pour être égal à 2n +2 p2 doit être = 1 (p1 vice versa)
Or 1 n'est pas un nombre premier, et pi, nombre premier > 2 ne peut être = 2n
⇒ pi < 2n [26]

Donc d'après [25] et d'après [26] on a **n < pi < 2n** vérifié par le théorème de Tchebychev.

Conclusion 2 :

si ∄ un contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach. (C Goldbach Vraie) ⇒ T. Tchebytchev

or d'après [21] et d'après la conclusion 2 :

| |
|---|
| **le théorème de Tchebychev. ⇔ Conjecture Goldbach Vraie** |

Ce qui achève la démonstration.

**C) CONCLUSION :**

**Soit la proposition P = Toute somme S de deux nombres premiers > 2 est pair**
**Et sa réciproque Q = Tout nombre pair > 2 est la somme de deux nombres premiers** , qui correspond au fait à la conjecture forte de Goldbach .

1) $f : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{D}$

$(p,p') \longrightarrow f(p,p')=(p+p')$ est une bijection démontrée injective et surjective , ce qui justifie le choix de $f(p, p')= (p+p')$, c'est l'introduction de l'énoncé de la conjecture forte de Goldbach dans cette bijection.

2) l'énoncé de la conjecture forte de Goldbach coïncide avec celui de la Surjection à savoir :

$\forall$ n pair $\in \mathbb{D}$, $\exists$ $(p,p') \in \mathbb{P}^2$ , $(p+p') = n$ . Nous savions que c'est une bijection et devait donc être forcément surjective mais ce n'est pas suffisant.

3) ce qui nous a amené à démontrer cette surjection qui est donc la conjecture forte de Goldbach. En détaillant sa preuve ci-dessus pour constater qu'il $\nexists$ de contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach. Tant que le théorème de Tchebychev équivaut à C. Goldbach VRAIE ( qui suffit à elle seule ) mais dont nous respectons la démarche du départ , en constatant par le biais de cette double démonstration que **non Q** est fausse

$\Rightarrow$ que **Q, la** conjecture Forte de Goldbach est VRAIE par déduction selon le principe du tiers exclu .

## III - CONJECTURE FAIBLE DE C. GOLDBACH
## DEMONSTRATION

**A) Toute somme S de trois nombres premiers > 5 est impair:**

Soit trois nombres premiers de la forme $6m \pm 1$. $6n \pm 1$, et $6p \pm 1$ avec m, n et p $\in$ N*.
Nous aurons 8 sommes à trois, possibles :

1° soit S = (6m+1) + (6n +1) + (6p +1) = 6(m+n+p) +3 $\Rightarrow$ d'après théorème 3
$\Rightarrow$ S est IMPAIRE $\forall$ m, n & p $\in$ N*

2° soit S = (6m+1) + (6n +1) + (6p -1) = 6(m+n+p) +1 $\Rightarrow$ d'après théorème 3
$\Rightarrow$ S est IMPAIRE $\forall$ m, n & p $\in$ N*

3° soit S = (6m+1) + (6n -1) + (6p +1) = 6(m+n+p) +1 $\Rightarrow$ d'après théorème 3
$\Rightarrow$ S est IMPAIRE $\forall$ m, n & p $\in$ N*

4° soit S = (6m+1) + (6n -1) + (6p -1) = 6(m+n+p) -1 $\Rightarrow$ d'après théorème 3
$\Rightarrow$ S est IMPAIRE $\forall$ m, n & p $\in$ N*

5° soit S = (6m-1) + (6n-1) + (6p -1) = 6(m+n+p) -3 $\Rightarrow$ d'après théorème 3
$\Rightarrow$ S est IMPAIRE $\forall$ m, n & p $\in$ N*

6° soit S = (6m -1) (6n+1) + (6p -1) = 6(m+n+p) -1 $\Rightarrow$ d'après théorème 3
$\Rightarrow$ S est IMPAIRE $\forall$ m, n & p$\in$ N*

7° soit S = (6m -1) + (6n -1) + (6p+1) = 6(m+n+p) -1 $\Rightarrow$ d'après théorème 3
$\Rightarrow$ S est IMPAIRE $\forall$ m, n & p $\in$ N*

8° soit S = (6m -1) + (6n+1) + (6p +1) = 6(m+n+p) +1 $\Rightarrow$ d'après théorème 3
$\Rightarrow$ S est IMPAIRE $\forall$ m, n & p $\in$ N*

**La première condition nécessaire pour qu'un nombre soit premier est la forme $6m \pm 1$ , $6n \pm 1$ ou $6p \pm 1$ vérifiée , la propriété IMPAIRE est établi pour ces sommes aussi , quelque soit m , n & p $\in$ N*, S est impaire, non divisible par 2**

$\Rightarrow$ **Donc $\forall$ m, n & p $\in$ N*, la somme de 3 premiers est IMPAIRE, y compris quand :**

**1)- m, n et p $\neq$ 6xy +x + y ou m, n et p $\neq$ 6xy -x - y ; condition suffisante pour que 6m + 1, ou 6n + 1 ou 6p + 1 soient premiers. (D'après théorème 1)**

$\Rightarrow$ $\exists$ k, k' et k'' $\in$ à **R,** tel que, k= (6m + 1)(=), k'= (6n + 1)(=) et k''= (6p+1)(=) .
. Si k > 0, k'>0 et k''> 0 $\Rightarrow$ (m+k), (n+k') et (p+k'') $\neq$ 6xy +x + y ou (m+k), (n+k') et (p+k'') $\neq$ 6xy -x – y
$\Leftrightarrow$ 6m + 1, 6n + 1 et 6p +1 sont surement Premiers sans avoir à déterminer x et y.
Puisque k, k' et k'' sont différent de 0 selon **théorème 2**.

**2) - y compris aussi quand : m, n et p $\neq$ 6xy +x – y ; condition suffisante pour que 6m - 1, 6n -1 ou 6p – 1 soient premiers. (D'après théorème 1)**

$\Rightarrow$ $\exists$ k, k' et k'' $\in$ à **R,** tel que, k= (6m - 1)(=), k'= (6n - 1) (=) et k''= (6p-1)(=)

.Si k > 0, k'>0 et k''> 0 $\Rightarrow$ (m+k), (n+k') et (p+k'') $\neq$ 6xy +x - y

$\Leftrightarrow$ 6m - 1, 6n - 1 et 6p -1 sont surement Premiers sans avoir à déterminer x et y.

**PREMIERE CONCLUSION : Toute somme S de trois nombres premiers > 5 est impaire**

**Soit la proposition P = Toute somme S de trois nombres premiers > 5 est impaire**
**Et sa réciproque Q = Tout nombre impair > 5 est la somme de trois nombres premiers**

**Supposons que Q est Fausse :**

b) $\Rightarrow$ $\exists$ un nombre IMPAIR > 5 qui n'est pas la somme de trois nombres premiers

**Démonstration du :**

$\mathbb{I}$, l'ensemble des entiers impairs $\mathbb{I}$, et $\mathbb{P}$ l'ensemble des premiers positifs, sont des sous-ensembles infinis de $\mathbb{N}$

D'après le Lemme 1, $\mathbb{I}$ et $\mathbb{P}$ sont donc équipotents à $\mathbb{N}$, comme selon le Lemme 3, $\mathbb{N}^3$ est équipotents à $\mathbb{N}$

D'où l'on déduit que $\mathbb{P}^3$ est équipotents à $\mathbb{I}$. donc Card ($\mathbb{P}^3$) = Card ($\mathbb{I}$) .

**B) RECAPITULATION FORTE :**

Si Card ($\mathbb{I}$) $>$ Card ( $\mathbb{P}^3$) , alors il y aurait des nombres impairs qui ne peuvent générer des sommes de 3 premiers

Puisse que les images de l'ensemble $\mathbb{P}^3$ ont déjà un antécédent dans $\mathbb{I}$, et que pour le restant des impairs de l'ensemble $\mathbb{I}$ , la seule possibilité , est de générer des sommes de 3 nombres non premiers ; comme dans notre cas

Card ($\mathbb{I}$) = Card ( $\mathbb{P}^3$) .cette possibilité selon l'argument de Cardinalité est nulle, donc : $\Rightarrow$ $f : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{I}$ est une bijection :

Optant pour un choix non arbitraire pour $f$ (p, p',p'') = p + p'+p'' tant qu'on peut prouver l'injection et la surjection de $f$ :

- $f$ est donc injective : $\forall$ (p, p', p'') et (c, c', c'') $\in$ $\mathbb{P}^3$ , (p+p'+p'') = n et (c+c'+c'') =n' $\Rightarrow$ si (p+p'+p'') = (c+c'+c'')

Alors n = n' (n et n' impairs $\in$ $\mathbb{I}$.) (*)

**Preuve :**

n = n' de l'injection(*) $\Rightarrow$ n et n' de même parité, or d'après la réciproque de la conjecture forte de Goldbach

$\forall$ (p, p',p'' ) et (c, c',c'') $\in$ $\mathbb{P}^3$; p+p'+p'' = n et c+c'+c'' =n', n et n' , sont toujours impairs.

il s'agit au fait de la proposition **P = Toute somme S de trois nombres premiers > 5 est impaire**, qui se trouve la réciproque de la conjecture faible de Goldbach. Et qu'on peut donc démontrer rapidement :

$\forall$ (p, p',p'') $\in$ $\mathbb{P}^3$ , sauf 2, p , p' et p'' sont IMPAIRES, et la somme de trois impaires est évidemment un nombre IMPAIR ,d'après le théorème -3 (Avec 2+2+3 =7 début des impaires, en particulier)

.

- $f$ est donc surjective : $\forall$ n impair $\in$ $\mathbb{I}$, $\exists$ (p, p', p'') $\in$ $\mathbb{P}^3$ , (p+p'+p'') = n .

**Preuve :**

.Soit $\mathbb{P}^3$ et $\mathbb{I}$ respectivement l'ensemble des triplets de premiers, et l'ensemble des entiers naturels Impairs .

.Soit $f : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{I}$

(p, p',p'') $\longrightarrow$ $f$ (p, p',p'') = p + p'+ p''

.Soit P(n-1) un nombre premier de rang (n-1), son successeur Pn , puis P(n+1) le successeur de Pn .

## 1°- Cas : Pn > 3 P(n-1) , Pn est plus grand au triple de son prédécesseur

a) Si Pn > 3 P(n-1) , posons Pn = 3 P(n-1) + 2 :

**n1** = P(n-1) + P(n-1) + P(n+1) = 3 P(n-1) correspond au plus **grande** image dans $\mathbb{I}$ généré par le triplet (P (n-1), P (n-1), P (n-1) ) de $\mathbb{P}^3$ .

**n2** = (3 P(n-1) + 2 ) + 2 +2 = 3 P(n-1) +6 , impair qui correspond au plus **petite** image dans $\mathbb{I}$ , généré par le triplet ((3 P(n-1) + 2) , 2 , 2 ) de $\mathbb{P}^3$

⇒ l'impair 3 P(n-1) +6 est le successeur de 3 P(n-1) + 2

⇒ ∀ n ∈ $\mathbb{I}$ / 3 P(n-1) + 2 < n < 3 P(n-1) +6 , n ne peut avoir d'antécédent dans $\mathbb{P}^3$ puisqu'il n'y a pas De premiers entre P(n-1) et Pn , donc ,dans ce cas ou Pn = 3 P(n-1) + 2 , 3 P(n-1) + 4 ne peut être la somme de trois premiers, elle serait donc un contre-exemple à la conjecture faible de Goldbach.

b) Si Pn > 3 P(n-1) , posons Pn = 3 P(n-1) + 4 : ( 3 P(n-1) + 2 n'étant pas premier )

**n1** = P(n-1) + P(n-1) + P(n+1) = 3 P(n-1) correspond au plus **grand** antécédent généré par le triplet (P (n-1), P (n-1), P (n-1) ) de $\mathbb{P}^3$

**n2** = (3 P(n-1) + 4 ) + 2+2 = 3 P(n-1) +8 correspond au plus **petit** antécédent généré par le triplet ((3 P(n-1) + 4) , 2 , 2 ) de $\mathbb{P}^3$

⇒ 3 P(n-1) +8 est le successeur de 3 P(n-1)

⇒ ∀ n ∈ $\mathbb{I}$ / 3 P(n-1) < n < 3 P(n-1) +8 , n ne peut avoir d' antécédent dans $\mathbb{P}^3$ puisqu'il n'y a pas De premiers entre P(n-1) et Pn , donc ,3 P(n-1) + 2 et 3 P(n-1) + 6 ne peuvent être la somme de trois premiers, elle serait donc deux contre-exemples à la conjecture faible de Goldbach.

c) Si Pn > 3 P(n-1) , posons Pn = 3 P(n-1) + k , k entier positive Pair

**n1** = P(n-1) + P(n-1) + P(n+1) = 3 P(n-1) correspond au plus **grand** antécédent généré par le triplet (P (n-1), P (n-1), P (n-1) ) de $\mathbb{P}^3$

**n2** = (3 P(n-1) + k ) + 2+2 = 3 P(n-1) +(k+4) correspond au plus **petit** antécédent généré par le triplet ((3 P(n-1) + k) , 2 , 2 ) de $\mathbb{P}^3$

⇒ 3 P(n-1) +(k+4) est le successeur de 3 P(n-1)

⇒ ∀ n ∈ $\mathbb{I}$ / 3 P(n-1) < n < 3 P(n-1) +(k+4) , n ne peut avoir d' antécédent dans $\mathbb{P}^3$ puisqu'il n'y a pas De premiers entre P(n-1) et Pn , donc ,3 P(n-1) + 2 , …., 3 P(n-1) +(k+2) ne peuvent être la somme de trois premiers, elle seraient donc $\frac{k}{2}$ contre-exemples à la conjecture faible de Goldbach

Conclusion 1 :

Si Pn > 3 P(n-1) , alors ∃ un contre-exemple à la conjecture Faible de Goldbach. (5)

## 2°- Cas : Pn < 3 P(n-1) , Pn est plus petit au triple de son prédécesseur

D'après le **théorème de Tchebychev** dument explicité ci-dessus dans le théorème -4 :

∀ n ∈ $\mathbb{N}$, ∃ q ∈ $\mathbb{P}$ (ensemble des nombres premiers) / n < q < 2n

soit P(n-1) un nombre premier du rang (n-1) , et soit Pn son successeur .
posons n= 2 P(n-1) d'après le théorème -4

$\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $\exists$ q $\in \mathbb{P}$ / 2 P(n-1) < q < 4 P(n-1)

Si $\exists!$ q $\in \mathbb{P}$ / 2 P(n-1) < q < 4 P(n-1) , alors q est le successeur de P(n-1)

$\Rightarrow$ q = Pn

$\Rightarrow$ 2 P(n-1) < Pn < 4 P(n-1)

Si $\exists$ q1, q2, q3,…qm $\in \mathbb{P}$ / 2 P(n-1) < q1<q2<q3<… <qm < 4 P(n-1) , alors q1 est le successeur de P(n-1)

$\Rightarrow$ q1 = Pn

$\Rightarrow$ 2 P(n-1) < Pn < 4 P(n-1)

**deux cas alors** soit Pn $\in$ [2 P(n-1) , 3 P(n-1) [ ou bien Pn $\in$ [3 P(n-1) , 4 P(n-1) [

a ) si Pn $\in$ [2 P(n-1) , 3 P(n-1) [ alors $\nexists$ de contre-exemple à la conjecture Forte de Goldbach. (6)

b ) si Pn $\in$ [3 P(n-1) , 4 P(n-1) [ on ne peut pas conclure car il faut démontrer aussi qu' $\nexists$ premiers dans cette intervalle :

soit $\pi$(n) , le cardinal des nombres premiers compris dans ]1, n] , n entier avec $\pi(n) \sim \frac{n}{\log(n)}$

<u>supposons</u> $\pi$ (4n) - $\pi$(3n) = 0

Alors dans [2n, 4n [ , $\pi$ (4n) - $\pi$(3n) = 0.

$$\Rightarrow \quad \frac{4n}{\log(4n)} - \frac{3n}{\log(3n)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4n.\log(3n) - 3n.\log(4n) = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{4n.\log(3n)} = e^{3n.\log(4n)}$$

$$\Rightarrow \quad (3n)^{4n} = (4n)^{3n}$$

$$\Rightarrow \quad 81^{n} . n^{4n} = 64^{n} . n^{3n} \text{ Absurde}$$

Donc **$\pi$ (4n) - $\pi$(3n) > 0.** $\Rightarrow \exists$ premier(s) dans [3 P(n-1) , 4 P(n-1) [

On ne peut donc se contenter d'une probabilité de ½ ( a ou b) pour vérifier la Conjecture faible de Goldbach avec le postulat de BERTRAND contrairement à la conjecture forte de Goldbach.

**Comme nous avons déjà démontré que la conjecture forte est vérifiée , utilisant la démonstration de GAUSS qui démontre que si <u>tout nombre pair supérieur à 4 soit somme de 2 nombres premiers p et p'</u> , alors ; p+p'+ 3 = impair . (puisque la somme d'un nombre pair avec un impair est toujours impair )**

**3 , premier , étant le premier dont la somme du premier triplet (2+2+3) =7 , ce qui est vrai pour tout p'' Premier > 3 puisque tout premier > 3 est impair , donc <u>la somme ( p+p'+p'' ) est toujours impair</u>**

Ce qui achève la démonstration.

**C) CONCLUSION :**

**Soit la proposition P = Toute somme S de trois nombres premiers > 5 est impaire**
**Et sa réciproque Q = Tout nombre impair > 5 est la somme de trois nombres premiers** , qui correspond au fait à la conjecture faible de Goldbach .

1) $f : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{I}$

$(p,p',p'') \longrightarrow f(p,p',p'')=(p+p'+p'')$ est une bijection démontrée injective et surjective , ce qui justifie le choix de $f(p, p'+p'')= (p+p'+p'')$, c'est l'introduction de l'énoncé de la conjecture forte de Goldbach dans cette bijection.

2) l'énoncé de la conjecture faible de Goldbach coïncide avec celui de la Surjection à savoir :

: $\forall$ n impair $\in \mathbb{I}$, $\exists$ $(p, p', p'') \in \mathbb{P}^3$ , $(p+p'+p'') = n$ .. nous savions que c'est une bijection et devait donc être forcément surjective mais ce n'est pas suffisant.

3) ce qui nous a amené à démontrer cette surjection qui est donc la conjecture faible de Goldbach. En détaillant sa preuve ci-dessus pour constater qu'il est insatisfaisante , nous nous sommes contenté de la démonstration de Gauss tant que le théorème de Tchebychev équivaut à C. Goldbach Forte VRAIE ( qui suffit à elle seule ) mais dont nous respectons la démarche du départ , en constatant par le biais de cette double démonstration que **non Q** est fausse

$\Rightarrow$ que **Q ,** la conjecture Faible de Goldbach est VRAIE par déduction selon le principe du tiers exclu .

CQFD

Casablanca le 19/05/2016 - 11:00

BERKOUK Mohamed ; email: bellevue-2011@hotmail.com

**REFERENCE**

**[1]** Conférence du Mr. **KRAFFT** du12 avril 1798, **in Nova acta Academiae Scientiarum Imperialis –** p.220