Organized by Russian Gravitational Society
Peoples' Friendship University of Russia
Center for Gravitation and Fundamental Metrology, VNIIMS
Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR, Dubna

Supported by the Russian Foundation for Basic Research, PFUR, VNIIMS, UMass Dartmouth, Phys. Dept. and Prof. Leung Mem. Fund and by APCTP within the APCTP-BLTP Joint Program

ICGAC-12

ABSTRACTS
of XIIth International Conference on Gravitation, Astrophysics and Cosmology, Dedicated to the centenary of Einstein's General Relativity theory

June 28 – July 5, 2015, PFUR, Moscow, Russia

Moscow
2015

The associated 4-potentials $A_\mu = -\xi'_\mu/(K^\rho \xi'_\rho)$ formally correspond to the ordinary Lienard-Wiechert solution, but in fact lead to the familiar EM field strength only in the case $b = 0$, or asymptotically far from the worldline. In the general case $b \neq 0$ they define the structure of two topologically different solutions one of which is everywhere regular. In the simplest static case the explicit form of potentials turns out to be as follows:

$$A_0 = \varepsilon/\sqrt{r^2 \pm b^2}, \quad \vec{A} = 0, \quad \varepsilon = \pm 1, \tag{4}$$

so that the asymptotic is Coulomb-like and the electric charge is again "*self-quantized*". Therefore, we are dealing with a peculiar *regular* charged field distribution localized near and moving along an arbitrary worldline. The other solution is singular at the "horizon" $r = b$. Recall that A. Einstein regarded the discovery of the model with two *asymmetric* charged solutions as a crucial point in the construction of the ultimate unified field theory.

[1] V. V. Kassandrov, J. A. Rizcallah, Gen. Rel. Grav. **46** (2014) 1771; arXiv: 1311.5423.

Goodbye, the Pseudotensor!

Radi I. Khrapko[1]

Moscow Aviation Institute, Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russia

[1] e-mail: khrapko_ri@hotmail.com

A gravitational field differs from ordinary fields, electromagnetic field, gluon field, which eliminate themselves due to interference when attracting objects. A gravitational field becomes stronger when attracting objects rather than eliminates itself. The mass-energy of objects always increases in the process of attracting due to the speed increase. In the case of an ordinary field, this increase is compensated by the field elimination. However, in the case of a gravitational attraction, we are forced to ascribe a negative energy to the growing gravitation field for the conservation of the total energy of the system (objects + gravitational field).

For accounting this negative gravitation energy, the pseudotensor t^ν_μ was proposed by Einstein [1, 87]. t^ν_μ is added to the matter energy-momentum tensor T^ν_μ. The total energy of an isolated system is calculated by the well known formula [1, (91.1), (91.3), (92.1)]

$$U = J_4 = \int (T^4_4 + t^4_4)\sqrt{-g}dx^1 dx^2 dx^3 = m, \tag{1}$$

and it turns out to be equal to the Schwarzschild constant m.

Meanwhile the explicit expression for the component t^4_4 of the pseudotensor of the isolated system, which was found, in particular, in [1], is positive, not negative! t^4_4 is the sum of pressures along the three axes, i.e. it is the triple pressure in the isotropic case [1, (92.4), (97.2), (97.3), (97.5)], [2, (105,23)]: $t^4_4 = -T^1_1 - T^2_2 - T^3_3 = 3p$.

How can the positive addition bring a negative contribution to the total mass-energy and give the constant m? Nowise! Formula (1) is false. Density $T^4_4 + t^4_4$ must be integrated over the proper spatial volume, $dV = \sqrt{-g_{11}g_{22}g_{33}}dx^1 dx^2 dx^3$, in order to obtain the total energy. This is pointed to, in particular, in [2, 100]. So, given the pseudotensor, the modulus of the total energy (the invariant) of the isolated system must be calculated by the formula [3, (6.9)]:

$$J = \int (T_4^4 + 3p)\sqrt{-g_{11}g_{22}g_{33}}dx^1dx^2dx^3 = \int (T_4^4 + 3p)\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{g_{44}}}dx^1dx^2dx^3. \quad (2)$$

But this quantity is much more than the constant m because $g_{44} < 1$. And even energy of the matter itself is more than the constant m [3, (5.8)], $P = \int T_4^4\sqrt{-g_{11}g_{22}g_{33}}dx^1dx^2dx^3 > m$. This indicates the gravitational mass defect of the body [2, 100].

Therefore the description of "gravitational energy" by the pseudotensor is false because the pseudotensor does not fulfill its main function: to contribute a negative term to the total energy of an isolated system.

[1] R. C. Tolman, Relativity, Thermodynamics and Cosmology (Oxford, Clarendon, 1969).

[2] L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, The Classical Theory of Fields (Pergamon, N. Y., 1975).

[3] R. I. Khrapko, The Truth about the Energy-Momentum Tensor and Pseudotensor, Grav. Cosmol. **20**, 4 (2014), p. 264.
http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=132&module=files

Gravitational mass of a photon

Radi I. Khrapko[1]

Moscow Aviation Institute — Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russia

[1] e-mail: khrapko_ri@hotmail.com

Einstein confirmed that radiation conveys *inertia* between the emitting and absorbing bodies [1]. But previously, it had been understood that light radiation was attracted to Earth and had *gravitational mass*. Using this understanding, Soldner applied Newton laws with inertial and gravitational masses of light in 1801 [2]: $F = ma$, $F = kmM/r^2$. He found that a mass M deflects a light ray on the angle α: $\tan\alpha/2 = kM/(c^2R)$. However, in 1919, Eddington observed the double deflection in accordance with Einstein's General Relativity.

Ginzburg [3] explained this fact by the space curvature. But Okun' [4] concluded that the gravitational mass depends on the direction of velocity. E.g., for a horisontally moving photon, its grravitational mass is twice as large as that for a vertically moving photon.

We demonstrate that Ginzburg is right. The inertial mass determines the gravitational force in any situation. Gravitational force parallel to velocity was considered in [5]; here we consider gravitational force, which is perpendicular to velocity.

Consider round orbits in the Schwarzschild space-time. We show here the equations for geodesic lines using t as a parameter and their solution for $i = r$ when $dr/dt \equiv 0$

$$\frac{D}{dt}\frac{dx^i}{dt} \equiv \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \alpha\frac{dx^i}{dt}, \quad \Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{\varphi\varphi}(\frac{d\varphi}{dt})^2 = 0, \quad (\frac{d\varphi}{dt})^2 = \frac{1}{2r^3} \quad (1)$$

If $r = 3/2$, world line (1) is an isotropic world line, i.e. it represents an photon's orbit.

World line (1) is a geodesic line of space-time, which represents a moving on a circle in the space. The centripetal acceleration a of such a moving is determined by the second derivative with respect to time of the *deviation* of this circle, $r = Const$, from the *tangential geodesic* line in the space with the metric $dl^2 = rdr^2/(r-1) + r^2 d\varphi^2$. The general equation (1) with φ as the parameter gives the equation of such geodesic line, $r(\varphi)$:

$$d^2r/(d\varphi)^2 + \Gamma^r_{rr}(dr/d\varphi)^2 + \Gamma^r_{\varphi\varphi} = \alpha dr/d\varphi. \tag{2}$$

Taking into account $dr/d\varphi = 0$ for the tangential line at the point $\varphi = 0$ yields for $\varphi = 0$:

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} = (r-1), \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{(r-1)}{2r^3}, \quad a = \frac{\sqrt{g_{rr}}}{g_{tt}}\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{2r^3}\sqrt{\frac{r}{r-1}} = g. \tag{3}$$

So, "transversal" gravitational mass does not differ from "longitudinal" mass. The second half of the deflection is from space curvature.

[1] A. Einstein, Ann. D. Phys. **18**, 639 (1905).

[2] J. Soldner, Ann. d. Phys. **65**, 593 (1921).

[3] V. L. Ginsburg, Uspekhi Fizicheskikh Nauk **59**, 33 (1956).

[4] L. B. Okun', Sov. Phys. Usp. **32** (7), 629 (1989). Phys. Today **42** (6), 31 (1989)

[5] R. I. Khrapko, Eur. J. Phys. **36**, 038001 (2015).

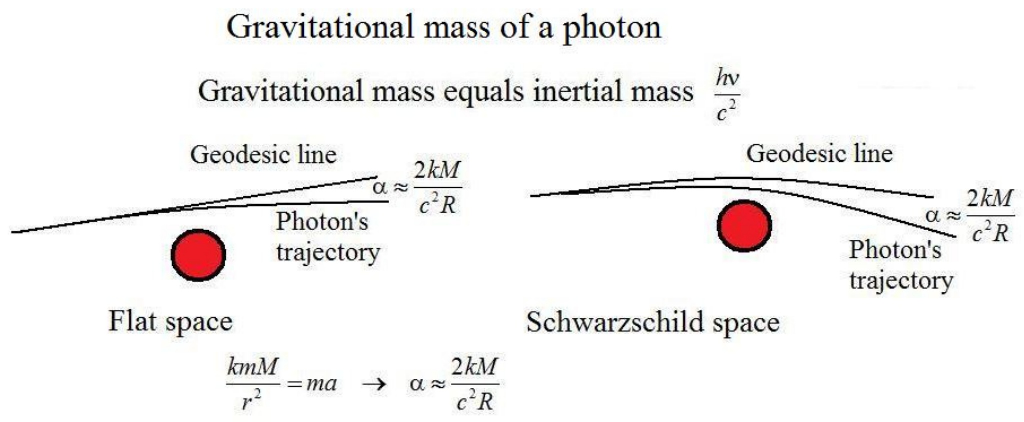
Lorentz-invariant generator of discrete space-time on the basis of a metric algebra

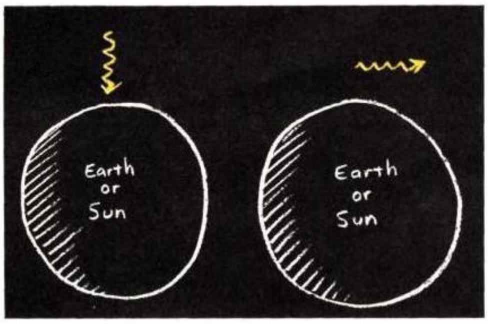
A.V. Koganov

Лоренц инвариантный генератор дискретного пространства-времени на основе метрической алгебры

А.В. Коганов

Предлагается модель дискретного пространства-времени, в которой имеется предельный макроскопический переход к непрерывному пространству-времени с метрикой Минковского. Метод генерации дискретного графа с вершинами $S(K)$, по этапам генерации $K = 0, 1, \ldots$ из начального набора точек D коммутирует с преобразованиями Лоренца L: $S(K)|L \circ D = L \circ (S(K)|D)$. Этот результат удалось получить впервые, несмотря на большой цикл работ в данном направлении, например [1-4]. В основе генерации лежит использование специальной метрической алгебры, разработанной автором, операции которой над 5-векторами коммутируют с преобразованиями Лоренца на четырехмерном подпространстве. Пятая ось играет роль числовых действительных скаляров и инвариантна относительно этих преобразований. На каждом этапе для полученного ранее множества точек (векторов)выполняются все бинарные операции алгебры. Дополнительно





L. B. Okun'

PHYSICS TODAY JUNE 1989 35

Gravitational force attracting a horizontally moving photon to the Earth or Sun is twice as large as that attracting a vertically moving photon.

ICGAC-12. Section 1. Classical Gravity. GR Extentions.
1 July, Wednesday. 16:00 – 16:15. **R.I. Khrapko**. Goodby, the Pseudotensor!

The Pseudotensor for pedestrians (Псевдотензор для чайников)

1. Energy-momentum tensor of matter (material+field), T_i^k, satisfies

$$\nabla_k (T_i^k\sqrt{-g}) \equiv \partial_k (T_i^k\sqrt{-g}) - \Gamma^n_{im} T^m_n \sqrt{-g} = 0, \qquad (1)$$

but *they* claim that the 4-momentum P_i is conserved due to the *noncovariant* identity

$$\partial_k(\mathrm{T}_i^k\sqrt{-g}) = 0, \qquad (2)$$

because the 4-momentum P_i in a space V is determined by $P_i = \int_V T_i^k\sqrt{-g}\,dV_k$, (3)

and the change of P_i when $V_1 \to V_2$ is expressed through the *partial* divergence:

$$\underset{2}{P}_i - \underset{1}{P}_i = \int_{V_2} \mathrm{T}_i^k\sqrt{-g}\,dV_k - \int_{V_1} \mathrm{T}_i^k\sqrt{-g}\,dV_k = \oint_{\partial\Omega} \mathrm{T}_i^k\sqrt{-g}\,dV_k = \int_\Omega \partial_k(\mathrm{T}_i^k\sqrt{-g})\,d\Omega = 0 \;\text{ if (2).}$$

But note, the tensor T_i^k (2) is false; it does not relate to energy-momentum.

The falseness of T_i^k (2) provides the conservation of P_i.

But P_i is not conserved when the true tensor T_i^k (1) is used.

$$\underset{2}{P}_i - \underset{1}{P}_i = \int_{V_2} T_i^k\sqrt{-g}\,dV_k - \int_{V_1} T_i^k\sqrt{-g}\,dV_k = \int_\Omega \partial_k(T_i^k\sqrt{-g})\,d\Omega = \int_\Omega \Gamma^n_{im}T^m_n\sqrt{-g}\,d\Omega \neq 0 \;\text{ if (1)}$$

And the nonconservation depends on coordinates in use.
And besides, the quadruple P_i has no sense because there is no basis to which the components of the integral could belong. The basis at infinity is not fit as well

So, the senseless quantity (3) is conserved due to the false tensor and is not conserved due to the true one

2. On this ugly background the classics, from Einstein to Faddeev, claimed:
It is naturally that the (senseless) 4-momentum of matter P_i changes! The increase,

$\underset{2}{P}_i - \underset{1}{P}_i$, equals the increase of a *negative* gravitational 4-momentum, $\int_V t_i^k \sqrt{-g}\, dV_k$, i.e.

$$\underset{2}{P}_i - \underset{1}{P}_i \equiv \int_\Omega \partial_k (T_i^k \sqrt{-g}) d\Omega \equiv \int_\Omega \Gamma^n_{im} T_n^m \sqrt{-g}\, d\Omega = -\int_\Omega \partial_k (t_i^k \sqrt{-g}) d\Omega \quad \text{при (1)}$$

(although the nonconservation is obvious in flat space),
and it is need to find t_i^k, the bearer of the *negative* gravitational energy-momentum,

$$\Gamma^n_{im} T_n^m \sqrt{-g} = -\partial_k (t_i^k \sqrt{-g}) \tag{4}$$

in order to satisfy a noncovariant identity of a type (2) $\qquad \partial_k [(T_i^k + t_i^k)\sqrt{-g}] = 0$.

t_i^k was found by long hard transformations of $\Gamma^n_{im} T_n^m \sqrt{-g}$ [Tolman, § 87].

$$\Gamma^n_{im} T_n^m \sqrt{-g} = -\partial_i g^{mn} T_{mn} \sqrt{-g}/2 = -\partial_i g^{mn} (R_{mn} - R g_{mn}/2)\sqrt{-g}/16\pi = -\partial_i (g^{mn}\sqrt{-g}) R_{mn}/16\pi$$

Ricci tensor is written through a quantity $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{L} = g^{mn}\sqrt{-g}(\Gamma^r_{ms}\Gamma^s_{nr} - \Gamma^r_{mn}\Gamma^s_{rs}) \qquad R_{mn} = -\partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k (g^{mn}\sqrt{-g}))} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(g^{mn}\sqrt{-g})}$$

So, they have $16\pi \Gamma^n_{im} T_n^m \sqrt{-g} =$

$$= \partial_i (g^{mn}\sqrt{-g}) \left(\partial_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k (g^{mn}\sqrt{-g}))} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(g^{mn}\sqrt{-g})} \right)$$

$$= \partial_k \left(\partial_i (g^{mn}\sqrt{-g}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k (g^{mn}\sqrt{-g}))} \right) - \partial_k \partial_i (g^{mn}\sqrt{-g}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k (g^{mn}\sqrt{-g}))} - \partial_i (g^{mn}\sqrt{-g}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(g^{mn}\sqrt{-g})}$$

$$= \partial_k \left(\partial_i (g^{mn}\sqrt{-g}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k (g^{mn}\sqrt{-g}))} \right) - \partial_i \mathcal{L} = \partial_k \left(\partial_i (g^{mn}\sqrt{-g}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k (g^{mn}\sqrt{-g}))} - \delta_i^k \partial_k \mathcal{L} \right).$$

The result: $$t_i^k \sqrt{-g} = \left(-\partial_i (g^{mn}\sqrt{-g}) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k (g^{mn}\sqrt{-g}))} + \delta_i^k \partial_k \mathcal{L} \right) / 16\pi \tag{5}$$

3. Thereby the classics gained a senseless conserved quantity, 4-momentum of matter with gravitational field

$$J_i = \int_V (T_i^k \sqrt{-g} + t_i^k \sqrt{-g}) dV_k \,. \tag{6}$$

The result was applied to the mass of an ideal liquid sphere [Tolman, Phys. Rev. **35,** 875 (1930)]

$$J_t = \int_V (T_t^t \sqrt{-g} + t_t^t \sqrt{-g}) dV_t = m = const\,, \tag{7}$$

m is the Schwarzschild parameter, the total mass for a removed observer.
The idea was the mass of the liquid increases when volume of the sphere decreases, and this increase is compensated by the *negative* contribution of gravitational energy.
And nobody was troubled that, according to (5),

$$t_t^t = 3p > 0\,. \tag{8}$$

Using $T_t^t(r)$, $p(r)$ from the internal Schwarzschild solution and integrating give

$$\int_V T_t^t \sqrt{-g}\, dV_t \approx m\left(1 - \frac{3m}{5r_1}\right), \quad \int_V 3p\sqrt{-g}\, dV_t \approx \frac{3m^2}{5r_1}$$

(r_1 is the coordinate of the sphere surface). The senseless quantity of the liquid mass decreases, and the senseless quantity of the gravitational energy is positive.

The true liquid mass is obtained by integrating over space volume $dV = dV_t/\sqrt{g_{tt}}$

$$P = \int T_t^t \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{g_{tt}}} \hat{} \, dV_t = \int_0^{r_1} T_t^t \sqrt{-g_{rr}}\, 4\pi r^2 dr = \int_0^{r_1} \frac{3}{2R} \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} \approx m\left(1 + \frac{3m}{5r_1}\right).$$

ICGAC-12. Section 1. Classical Gravity. GR Extentions.
1 July, Wednesday. 16:00 – 16:15. **R.I. Khrapko**. Goodby, the Pseudotensor!
Текст выступления http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=141&module=files

Псевдотензор для чайников

1. Я извиняюсь, что пристаю к вам со старьем. То, что я буду рассказывать, это не mainstream. Однако глупости, допущенные классиками и разошедшиеся по учебникам, нельзя оставлять без критики. Ибо если нам так дурят голову гравитационной энергией, то почему мы должны верить, скажеим, в струны или браны? Но, перейдем к делу.

Тензор энергии-импульса (ЭИ) материи (вещество + поле), T_i^k, имеет нулевую *ковариантную* дивергенцию

$$\nabla_k (T_i^k \sqrt{-g}) \equiv \partial_k (T_i^k \sqrt{-g}) - \Gamma_{im}^n T_n^m \sqrt{-g} = 0 . \quad (1)$$

Кстати, под *полем* я понимаю в основном электромагнитное поле, потому что я не знаю тензора ЭИ, скажем, глюонного поля. И, конечно, это не гравитационное поле. Потому что в рамках общей теории относительности (ОТО) гравитационного поля нет. Эйнштейн его геометризовал. Остались электромагнитное, слабое, глюонное поле, может быть "пятое" поле, но гравитационного поля нет в рамках ОТО.

Итак, тензор ЭИ материи имеет нулевую ковариантную дивергенцию (1). Однако утверждается, что из-за этого 4-импульс материальной системы, P_i, получаемый интегрированием тензора ЭИ по пространству V, не удовлетворяет закону сохранения (коротко, не сохраняется), потому что изменение 4-импульса определяется по теореме Гаусса не ковариантной, а *частной* дивергенцией, которая не равна нулю для тензора ЭИ материи:

$$\underset{2}{P}_i - \underset{1}{P}_i = \int_{V_2} T_i^k \sqrt{-g}\, dV_k - \int_{V_1} T_i^k \sqrt{-g}\, dV_k = \int_\Omega \partial_k (T_i^k \sqrt{-g}) d\Omega = \int_\Omega \Gamma_{im}^n T_n^m \sqrt{-g}\, d\Omega \neq 0 . \quad (2)$$

И при этом величина несохранения 4-импульса зависит от используемых координат, от коэффициентов связности Γ_{im}^n. И все терпят такое несохранение 4-импульса материальной системы!

Впрочем, а что это за 4-импульс, который не сохраняется? Оказывается, он определяется интегралом по пространству, причем интеграл рассматривается как ковектор

$$P_i = \int_V T_i^k \sqrt{-g}\, dV_k , \quad (3)$$

Ну, согласитесь, что у так определенной величины нет геометрического смысла, потому что интегральные компоненты не обеспечены репером, ибо в разных местах области интегрирования - реперы разные, и еще какой-то репер на бесконечности. А если нет геометрического смысла, то нет и никакого смысла.

Ну и слава богу, не сохраняется (2) бессмысленная величина (3), правда, с реальным тензором ЭИ (1).

2. Однако не все так просто. Эта четверка чисел P_i (3) сохраняется, если при её определении использован некий тензор T_i^k (или не тензор) с нулевой *частной* дивергенцией

$$\partial_k (\mathrm{T}_i^k \sqrt{-g}) = 0 , \quad (4)$$

Действительно, при таком тензоре имеем нулевое приращение 4-импульса (3) независимо от его бессмысленности:

$$\underset{2}{P}_i - \underset{1}{P}_i = \int_{V_2} \mathrm{T}_i^k \sqrt{-g}\, dV_k - \int_{V_1} \mathrm{T}_i^k \sqrt{-g}\, dV_k = \oint_{\partial\Omega} \mathrm{T}_i^k \sqrt{-g}\, dV_k = \int_\Omega \partial_k (\mathrm{T}_i^k \sqrt{-g}) d\Omega = 0 . \quad (5)$$

Но заметьте, тензор T_i^k (4) – фальшивый, он не имеет отношения к ЭИ. Фальшивость тензора (4) обеспечила сохранение 4-импульса (3). Тоже неплохо, сохраяется бессмысленная величина, построенная бессмысленным тензором. Но пока нам до этого нет дела.

3. Классиков заинтересовала *та*, не сохраняющаяся бессмысленная величина (3), построенная истинным тензором ЭИ. И классики были так рады, что она не сохраняется, что проигнорировали её бессмысленность.

Несохранение (2) 4-импульса (3) объяснили воздействием *гравитационного поля* (хотя это несохранение имеет место и в плоском пространстве-времени). Идея была в том, что прирост 4-импульса материи, $\underset{2}{P}_i - \underset{1}{P}_i$, равен по величине приросту *отрицательного* гравитационного 4-импульса, то есть

$$\underset{2}{P}_i - \underset{1}{P}_i \equiv \int_\Omega \partial_k (T_i^k \sqrt{-g}) d\Omega \equiv \int_\Omega \Gamma_{im}^n T_n^m \sqrt{-g}\, d\Omega = -\int_\Omega \partial_k (t_i^k \sqrt{-g}) d\Omega . \quad (6)$$

Осталось представить интегранд несохранения, $\Gamma_{im}^n T_n^m \sqrt{-g}$, как частную дивергенцию носителя ЭИ гравитационного поля, *псевдотензора* t_i^k,

$$\Gamma_{im}^n T_n^m \sqrt{-g} = -\partial_k (t_i^k \sqrt{-g}) , \quad (7)$$

для того, чтобы удовлетворить нековариантное тождество типа (4)

$$\partial_k[(T_i^k + t_i^k)\sqrt{-g}] = 0, \quad (8)$$

обеспечивающее сохранение величины типа (3).

4. t_i^k нашли путем тяжелых тождественных преобразований. Проследим главные шаги. [R. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Oxford: Clarendon, 1933, § 87]

Расписывают Γ-символ, вводят тензор Эйнштейна и несколько преобразуют его

$$\Gamma_{im}^n T_n^m \sqrt{-g} = -\partial_i g^{mn} T_{mn}\sqrt{-g}/2 = -\partial_i g^{mn}(R_{mn} - Rg_{mn}/2)\sqrt{-g}/16\pi = -\partial_i(g^{mn}\sqrt{-g})R_{mn}/16\pi$$

Далее формулы настолько громоздки, что приходится использовать обозначение $\mathcal{L}$. Через $\mathcal{L}$ выражают тензор Риччи:

$$\mathcal{L} = g^{mn}\sqrt{-g}(\Gamma_{ms}^r\Gamma_{nr}^s - \Gamma_{mn}^r\Gamma_{rs}^s) \qquad R_{mn} = -\partial_k \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k(g^{mn}\sqrt{-g}))} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(g^{mn}\sqrt{-g})}.$$

Так что мы имеем $16\pi\Gamma_{im}^n T_n^m\sqrt{-g} =$

$$= \partial_i(g^{mn}\sqrt{-g})\left(\partial_k \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k(g^{mn}\sqrt{-g}))} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(g^{mn}\sqrt{-g})}\right)$$

$$= \partial_k\left(\partial_i(g^{mn}\sqrt{-g})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k(g^{mn}\sqrt{-g}))}\right) - \partial_k\partial_i(g^{mn}\sqrt{-g})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k(g^{mn}\sqrt{-g}))} - \partial_i(g^{mn}\sqrt{-g})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(g^{mn}\sqrt{-g})}$$

$$= \partial_k\left(\partial_i(g^{mn}\sqrt{-g})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k(g^{mn}\sqrt{-g}))}\right) - \partial_i\mathcal{L} = \partial_k\left(\partial_i(g^{mn}\sqrt{-g})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k(g^{mn}\sqrt{-g}))} - \delta_i^k\partial_k\mathcal{L}\right).$$

Результат: $$t_i^k\sqrt{-g} = \left(-\partial_i(g^{mn}\sqrt{-g})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_k(g^{mn}\sqrt{-g}))} + \delta_i^k\partial_k\mathcal{L}\right)/16\pi \quad (9)$$

Таким образом классики получили величину типа (3), 4-импульс материи вместе с гравитационным полем,

$$J_i = \int_V (T_i^k\sqrt{-g} + t_i^k\sqrt{-g})dV_k, \quad (10)$$

которая *сохраняется*, в соответствии с (4) и (8).

5. Результат применили к массе шара из идеальной жидкости [R. Tolman, Phys. Rev. **35,** 875 (1930)]

$$J_t = \int_V (T_t^t\sqrt{-g} + t_t^t\sqrt{-g})dV_t = m = const, \quad (11)$$

(m - шварцшильдовский параметр, полная масса для удаленного наблюдателя). Идея была в том, что, по мере сжатия шара, масса его вещества растёт, но это компенсируется ***отрицательным*** вкладом гравитационной энергии. Внутреннее решение Шварцшильда позволило вычислить компоненты тензора ЭИ жидкости T_t^t и псевдотензора ЭИ гравитационного поля t_t^t.

ПОРАЗИТЕЛЬНО! Никого не смутило, что компонента псевдотензора t_t^t, согласно (9), оказалась ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ!

$$t_t^t = 3p > 0, \quad (12)$$

где p есть давление внутри шара.

Подстановка выражений $T_t^t(r),\ p(r)$ из внутреннего решения Шварцшильда и интегрирование дают для слагаемых "общей массы" J_t

$$\int_V T_t^t\sqrt{-g}dV_t \approx m(1-\frac{3m}{5r_1}), \quad \int_V t_t^t\sqrt{-g}dV_t = \int_V 3p\sqrt{-g}dV_t \approx \frac{3m^2}{5r_1} \quad (13)$$

(r_1 - радиальная координата поверхности шара). Так что, действительно, сумма (11) сохраняется. Но вот тут-то и проявилась бессмысленность сохраняющихся, в силу (4),(8), величин типа (3). По мере сжатия шара, бессмысленная величина, выдаваемая за массу житкости, уменьшается, а бессмысленная величина гравитационной энергии – положительна и растет.

Правильная величина массы жидкости получается при интегрировании по собственному объему

$$dV = dV_t/\sqrt{g_{tt}}: \ P = \int T_t^t \frac{\sqrt{-g}_{\wedge}}{\sqrt{g_{tt}}}dV_t = \int_0^{r_1} T_t^t\sqrt{-g_{rr}}4\pi r^2 dr = \int_0^{r_1}\frac{3}{2R}\frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2-r^2}} \approx m(1+\frac{3m}{5r_1}).$$