La **conjecture de Polignac** est une conjecture portant sur la théorie des nombres. Elle fut énoncée par Alphonse de Polignac en 1849.

La formulation initiale est la suivante :

Tout nombre pair est égal à la différence de deux nombres premiers consécutifs d'une infinité de manières.

Autrement dit : pour tout entier naturel pair *n*, il existe une infinité de paires de nombres premiers consécutifs dont la différence vaut n.

Démonstration :

Soit 2 premiers consécutif p et p' (p et p' > 2et p'> p)

p et p' doivent être de la forme 6n+- 1 (v.démonstration de WARING)

Posons p=6n+- 1 et p'= 6n'+- 1

La différence p'-p = (6n'+1) - (6n+1) = 6(n'-n) +2 = 2[3(n'-n) +1] == > paire

Ou bien p'-p = 6n'+1 - (6n-1) = 6(n'-n) = 2.3 (n'-n) == > paire

Ou bien p'-p = 6n'- 1 - (6n+1) = 6(n'-n) -2 = 2[3(n'-n)-1] == > paire

Ou bien p'-p = 6n'- 1 - (6n-1) = 6(n'-n) = 2.3 (n'-n) == > paire

La forme 6n +- 1 exclue les premiers 2 et 3 :

1) 2 ne peut générer une différence paire avec tous les autres premiers qui sont impaires
2) Soit un premier quelconque de forme 6n+-1 dont on vérifie les différences avec 3 :

   (6n-1)-3 = 6n -4 = 2(3n-2) == > paire

   (6n+1)-3 = 6n -2 = 2(3n-1) == > paire

Comme le théorème TNP nous indique que la $\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0.$ et le **théorème d'Euclide sur les nombres premiers** qui nous affirme qu'**il existe une infinité de nombres premiers**.

== > ∃! Premier consécutif avec un écart variant infiniment de 2^n, pour n ∈ N*,

Avec le précédent, écart qui –comme nous avons vu ci-dessus-ne pouvait être que PAIRE

(Ces écarts varient donc infiniment, de 2 pour les nombres premiers jumeaux jusqu'à un multiple de 2 infiniment grand.)

La conjecture de Polignac est vérifiée pour tous nombre premier > 2. **CQFD**