本文译自 *viXra.org:quantum physics/1505.0142v4*；本文地址 *viXra.org:quantum physics/1506.0214v4*

关于一个特殊函数的量子理论[†]（中译本）

张成刚[①*]

[①] 南华大学核科学与技术学院，衡阳 421001；

[*]联系人，E-mail:zhangchgang@163.com

摘要：文中将研究一个具有量子化特征的特殊函数，和其所包含的物理学原理；量子理论中两个基本假设的形式可以通过这个特殊函数推导得到，特殊函数可以被应用到原子领域，最终发现并证明特殊函数与已知的库仑力形式相关，其揭示了量子化的真正本质。

关键字：特殊函数 精确库仑力 精确引力

PACS：02.30.-f ， 02.30.Em ， 03.65.-w ， 03.50.De ， 04.60.-m

1、 引言

在量子力学中，原子能级通过求解薛定谔方程[1]得到，尤其是氢原子，并已经获得成功，但当考察系统包含多个对象时（多体，如氦原子等），方程在数学上变的更加复杂，求解薛定谔方程的过程变的非常困难；同样，方程中所包含的函数ψ依旧面临许多困难[2,3,4,5]，量子化的本质未能得到真正理解。因此在这里做一个新的思考：是否存在一个特殊形式的函数，量子化的数值在方程中以某种方式自然出现，求解薛定谔方程的过程被这一特殊形式的函数代替；如果这种特殊函数的确客观存在，它必将具有某种深刻的物理学含义。

事实上，这种特殊形式的函数的确客观存在，在文章中，量子理论的两个基本假设[6,7]的形式可以通过这个特殊函数推导得到，特殊函数可以被应用到原子领域，和已知的库仑力相关，它是量子化的内在原理。

2、 一个具有量子化特征的特殊函数

特殊函数在《量子笔迹》[8]一书中首次给出，用以解读薛定谔方程中包含函数的物理学意义，

[†]预印本，viXra.org:1505.0142v4

特殊函数具有数学形式：

$$U(x) = -D\left[Si^2(A\pi \cdot x) - (\pi/2)^2\right]^2,$$

其中：

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$$

这里$Si(x)$为正弦积分函数，D和A分别是依赖于被考察系统的待定常量（其中$D > 0$）。在数学上，函数$U(x)$在$x = n/A\ (n = 1,2,3,\cdots)$处具有一系列极小值，系列极小值在数值上近似为：

$$E_{x=n/A} \approx -Dg_0^2/n^2$$

其中$g_0 = 0.96226974$。注意到，函数$U(x)$的系列极小值与类氢原子的能量项E_0/n^2（E_0为基态能量）的形式完全一致，$U(x)$具有量子化的物理学特征。

3、 特殊函数的物理学应用和假设推导

特殊函数的量子化物理学特征表明，特殊函数可能揭示了量子化背后更深层次的物理学原理。现在考察特殊函数的一种更广泛的形式：

$$U(r) = -D\left[Si^2(A \cdot r^\eta) - (\pi/2)^2\right]^2 + B \tag{1}$$

或者写为：

$$U(r) = -D\left[si^2(A \cdot r^\eta) + \pi \cdot si(A \cdot r^\eta)\right]^2 + B$$

其中：

$$si(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

这里η和B为常数，D和A依然分别是依赖于被考察系统的待定常量（其中$D > 0$，D和A的具体形式将在本文的第 4 节给出），$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$。

依据《量子笔迹》的思想和我最近的论文[9]，$U(r)$是被考察对象的势能函数（因此可以将势能零点定义在$r \to \infty$，有$B = 0$和势能小于零），势能函数$U(r)$在$(n\pi/A)^{1/\eta}$周围形成势井（第n势井）；为了使函数在后面的讨论中具有更加清晰的物理含义，$U(r)$仅仅包含取决于被

考察系统的常量，这里做这样的处理，令 $A_0=(\pi/A)^{1/\eta}$，将函数（1）改写为：

$$U(r)=-D\left[Si^2\left(\pi A_0^{-\eta}r^{\eta}\right)-(\pi/2)^2\right]^2 \qquad (2)$$

相应力学函数为：

$$f(r)=4D\eta\left[Si^2\left(\pi A_0^{-\eta}r^{\eta}\right)-(\pi/2)^2\right]Si\left(\pi A_0^{-\eta}r^{\eta}\right)\sin\left(\pi A_0^{-\eta}r^{\eta}\right)\cdot r^{-1} \qquad (3)$$

在考察粒子在力场中的运动之前，先对 $f(r)$ 采取数学处理，将 $f(r)$ 在 $n^{1/\eta}A_0$ 处展开为泰勒级数的形式：

$$f(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left\{f^{(k)}\left(n^{1/\eta}A_0\right)\right\}\left(r-n^{1/\eta}A_0\right)^k，\quad r\in f\left(n^{1/\eta}A_0\right) \qquad (4)$$

因为：

$$f^{(0)}\left(n^{1/\eta}A_0\right)=0$$

$$f^{(1)}\left(n^{1/\eta}A_0\right)=4D\eta^2\pi A_0^{-2}\left[Si^2(n\pi)-(\pi/2)^2\right]Si(n\pi)\cos(n\pi)n^{(\eta-2)/\eta}$$

并且 $\left[Si^2(n\pi)-(\pi/2)^2\right]\approx(-1)^{n+1}g_0/n$，$Si(n\pi)\approx\pi/2$ $\left(n>>g_0(2/\pi)^2\right)$，所以忽略 $k=2$ 及以后的高次项，有

$$f(r)=-2Dg_0\pi^2A_0^{-2}\eta^2n^{-2/\eta}\left(r-n^{1/\eta}A_0\right)；\left(n>>g_0(2/\pi)^2\right) \qquad (5)$$

势井中运动的粒子可以近似看做是在做简谐运动。

现在考虑粒子在势井中做简谐运动的情况（非相对论的运动），粒子处在第 n 势井中具有总能量：

$$E_{total}=Dg_0\pi^2A_0^{-2}\eta^2n^{-2/\eta}\mathrm{A}^2-Dg_0^2/n^2 \qquad (6)$$

其中 A 是粒子的振动振幅；（6）式右边第二项完全独立于粒子的运动状态，而仅仅取决于粒子存在的空间（即粒子存在的势井），这意味着处于势井中的粒子具有固有能：

$$U(n)=-Dg_0^2/n^2$$

也表明处于空间中的粒子在 $f(r)$ 力场具有量子化的固有能量。根据势能函数 $U(r)$ 的特征，粒子的量子化逃逸能：

$$E=E(n)=Dg_0^2/n^2 \qquad (7)$$

粒子在势井中做简谐运动具有振动频率：

$$v_{vf} = v_{vf}(n) = n^{-1/\eta}\eta A_0^{-1}\sqrt{Dg_0/(2m)} \tag{8}$$

这里 m 为粒子的质量，由于振动频率为正值，所以有 $\eta > 0$。

通过比较（7）式和（8）式，粒子的量子化能量和振动频率之间存在关系：

$$E/v_{vf} = E(n)/v_{vf}(n) = n^{(1/\eta)-2}\eta^{-1}A_0\sqrt{2mDg_0^3}$$

当取 $\eta = 1/2$，则有：

$$E/v_{vf} = A_0\sqrt{8mDg_0^3} \tag{9}$$

对于特定的考察体系，A、m 和 D 为常量，所以（9）式可以被改写为：

$$E/v_{vf} = b_0 = constant \tag{10}$$

$$b_0 = A_0\sqrt{8mDg_0^3} \tag{11}$$

（10）式与普朗克能量量子化假设和德布罗意关系在形式上完全一致，当 b_0 在数值上等于普朗克常数 h，（10）式即为普朗克和德布罗意的假设的表达式（关于 b_0 和普朗克常数的关系在后面会有进一步的讨论，它们的确相关）。

4、 理论验证和待定常数被确定

现在我们将上述理论应用于类氢原子。类氢原子的能级公式在玻尔理论和量子力学中都有给出（显而易见，本文的内容呈现的原子结构与之不同）：

$$E_n = -\frac{Z^2e^4}{8n^2h^2\varepsilon_0^2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \tag{12}$$

这里 Z 为原子序数，e 为元电荷，m_1 为原子核的质量，m_2 为电子的质量。

通过比较（7）（11）和（12）式，得到常量公式：

$$Dg_0^2 = \frac{Z^2e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}；\quad A_0 = \frac{b_0h\varepsilon_0}{\sqrt{g_0}Ze^2}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1m_2} \tag{13}$$

原子的固有能公式为：

$$U(n) = -\frac{Dg_0^2}{n^2} = -\frac{Dg_0^2A_0}{n^2A_0} = -\frac{b_0}{8h\varepsilon_0\sqrt{g_0}}\cdot\frac{Ze^2}{r_n} \tag{14}$$

当 A_0 足够小时（宏观上），r_n 近似连续变化，（14）式即为宏观中我们已知的库仑势能的表达式，理论由量子过渡到经典（我不认为这仅仅是一种巧合，它强烈表明库仑力在微观尺度上具有更精确的作用形式，库仑力的精确形式是形成微观领域明显量子化的根本原因，我们过去已知的库仑力形式只是精确库仑力在宏观上的一种近似表达），有：

$$b_0 = 2h/\pi \approx 4.2182869 \times 10^{-34}\,\mathrm{J.s} \tag{15}$$

（10）式具有形式：

$$E/v_{vf} = 2h/\pi \tag{16}$$

注意到，（16）式不同于量子理论中普朗克和德布罗意的假设形式，具有 $2/\pi$ 因子，这是由于（16）式仅仅表达的是粒子固有能和振动频率之间的关系，唯一理解这种不同的方式是认为粒子的固有能改变量 ΔE 和频率的改变量 v_{tf} 具有关系：

$$\Delta E/v_{tf} = h \tag{17}$$

当 $\mathrm{Z}=1$（氢原子），电子在原子核周围的稳态半径：

$$r_n = n^2 A_0 = \frac{2n^2h^2\varepsilon_0}{e^2\pi\sqrt{g_0}} \cdot \frac{m_1+m_2}{m_1m_2} \tag{18}$$

电子的第一稳态半径：

$$r_0 = A_0 = \frac{2h^2\varepsilon_0}{e^2\pi\sqrt{g_0}} \cdot \frac{m_1+m_2}{m_1m_2} \approx 1.0583441 \times 10^{-10}\,\mathrm{m} \tag{19}$$

它是玻尔半径的两倍，将（15）式和 A_0 的计算值带入（14）式再次可以得到氢原子的基态能量：

$$E_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{g_0}} \cdot \frac{1}{A_0} \approx 13.6eV$$

间接证明了（16）式的正确性和精确库仑力客观存在。

以上关于特殊函数的理论在原子方面的成功和对假设的推导，表明库仑力在微观尺度上具有更精确的作用形式，我们已知的库仑力形式只是库仑力在宏观上的一种近似表达，两个物体之间的精确库仑力形式为：

$$\left.\begin{aligned}
f_{21}(r) &= -D\frac{\partial}{\partial r}\left\{\left[Si^2\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)-(\pi/2)^2\right]^2+B\right\} \text{其中} q_1q_2<0\\
f_{21}(r) &= +D\frac{\partial}{\partial r}\left\{\left[Si^2\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)-(\pi/2)^2\right]^2+B\right\} \text{其中} q_1q_2>0\\
D &= \frac{1}{8h^2\varepsilon_0^2g_0^2}\cdot\frac{q_1^2q_2^2m_1m_2}{m_1+m_2}, A_0=\frac{2h^2\varepsilon_0}{\pi\sqrt{g_0}}\cdot\frac{m_1+m_2}{|q_1q_2|m_1m_2}
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

这里h为普朗克常数，ε_0为真空介电常量；r为物体 1 和物体 2 之间的距离；q_1为物体 1 的电荷量，q_2为物体 2 的电荷量；m_1为物体 1 的质量，m_2为物体 2 的质量。

或者写为：

$$\left.\begin{aligned}
f_{21}(r) &= -D\frac{\partial}{\partial r}\left\{\left[Si^2\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)-(\pi/2)^2\right]^2+B\right\} \text{其中} q_1q_2<0\\
f_{21}(r) &= +D\frac{\partial}{\partial r}\left\{\left[Si^2\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)-(\pi/2)^2\right]^2+B\right\} \text{其中} q_1q_2>0\\
D &= \frac{2K^2\pi^2}{h^2g_0^2}\cdot\frac{q_1^2q_2^2m_1m_2}{m_1+m_2}, A_0=\frac{h^2}{2\pi^2K\sqrt{g_0}}\cdot\frac{m_1+m_2}{|q_1q_2|m_1m_2}
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

其中K为库仑常量。

5、 猜想

我猜想引力也具有类似精确的作用形式：

$$\left.\begin{aligned}
f_{21}(r) &= -D\frac{\partial}{\partial r}\left\{\left[Si^2\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)-(\pi/2)^2\right]^2+B\right\}\\
D &= \frac{2G^2\pi^2}{h^2g_0^2}\cdot\frac{m_1^3m_2^3}{m_1+m_2}, A_0=\frac{h^2}{2\pi^2G\sqrt{g_0}}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1^2m_2^2}
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

这里G为万有引力常数；r为物体 1 和物体 2 之间的距离；m_1为物体 1 的质量，m_2为物体 2 的质量。

6、 结论

库仑力在微观尺度上具有更精确的作用形式，如方程（21），过去已知的库仑力形式只是精确库仑力在宏观上的一种近似表达；求解薛定谔方程的过程被这一精确库仑力形式的势能函数所

取代，普朗克和德布罗意假设可以由精确库仑力推导得到；精确库仑力也是导致量子化的真正原因。

期待物理学家对理论做出更广泛的应用，并对精确库仑力和精确引力的作用形式做出实验验证。

修正(2015 年 7 月 8 号)

经过进一步的探索，前文的精确库仑力(20)(21)和精确引力(22)的形式应该做进一步的修正。精确库仑力形式为：

$$\left.\begin{array}{c} f_{21}(r)=-D\dfrac{\partial}{\partial r}\left\{\dfrac{\cos\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)\left[Si^2\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)-(\pi/2)^2\right]}{\sqrt{r/A_0}}+B\right\},\text{其中}q_1q_2<0 \\ f_{21}(r)=+D\dfrac{\partial}{\partial r}\left\{\dfrac{\cos\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)\left[Si^2\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)-(\pi/2)^2\right]}{\sqrt{r/A_0}}+B\right\},\text{其中}q_1q_2>0 \\ D=\dfrac{1}{8h^2\varepsilon_0^2g_0^2}\cdot\dfrac{q_1^2q_2^2m_1m_2}{m_1+m_2},A_0=\dfrac{2h^2\varepsilon_0}{\pi\sqrt{g_0}}\cdot\dfrac{m_1+m_2}{|q_1q_2|m_1m_2} \end{array}\right\}$$

其中 $g_0\approx 0.992478$，h 为普朗克常数，ε_0 为真空介电常量；r 为物体 1 和物体 2 之间的距离；

q_1 为物体 1 的电荷量，q_2 为物体 2 的电荷量；m_1 为物体 1 的质量，m_2 为物体 2 的质量。

或者写为：

$$\left.\begin{array}{c} f_{21}(r)=-D\dfrac{\partial}{\partial r}\left\{\dfrac{\cos\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)\left[Si^2\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)-(\pi/2)^2\right]}{\sqrt{r/A_0}}+B\right\},\text{其中}q_1q_2<0 \\ f_{21}(r)=+D\dfrac{\partial}{\partial r}\left\{\dfrac{\cos\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)\left[Si^2\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)-(\pi/2)^2\right]}{\sqrt{r/A_0}}+B\right\},\text{其中}q_1q_2>0 \\ D=\dfrac{2K^2\pi^2}{h^2g_0^2}\cdot\dfrac{q_1^2q_2^2m_1m_2}{m_1+m_2},A_0=\dfrac{h^2}{2\pi^2K\sqrt{g_0}}\cdot\dfrac{m_1+m_2}{|q_1q_2|m_1m_2} \end{array}\right\}$$

其中 K 为库仑常量。

精确引力的作用形式：

$$\left.\begin{array}{c} f_{21}(r)=-D\dfrac{\partial}{\partial r}\left\{\dfrac{\cos\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)\left[Si^2\left(\pi\sqrt{r/A_0}\right)-(\pi/2)^2\right]}{\sqrt{r/A_0}}+B\right\} \\ D=\dfrac{2G^2\pi^2}{h^2g_0^2}\cdot\dfrac{m_1^3m_2^3}{m_1+m_2},A_0=\dfrac{h^2}{2\pi^2G\sqrt{g_0}}\cdot\dfrac{m_1+m_2}{m_1^2m_2^2} \end{array}\right\}$$

这里G为万有引力常数；r为物体 1 和物体 2 之间的距离；m_1为物体 1 的质量，m_2为物体 2 的质量。

参考文献：

1 Shrodinger E .Quantisierung als Eigenwert Problem .Annalen der Physik , 1926, 79(4): 361

2 Born M . Physical aspects of quantum mechanics . Nature ,1927,119:354-357. (Translation by Robert Oppenheimer.)

3 Einstein A ,Podolsky B ,Rosen N .Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered complete ?. Phys Rev ,1935,47:777-780

4 Bohm D.A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden variables”I. Phys Rev,1952, 85 (2):166-179

5 Tegmark M , Wheeler J A , 100 Years of the Quantum .Scientific American ,2001,284:68-75

6 Planck M .On the Law of Distribution of Energy in the Normal Spectrum .Annalen der Physik ,1901,4:553

7 De Broglie L . Radiation - Wave and Quantum .Comptes Rendus.1923,177:507

8 张成刚. 量子笔迹. 成都：电子科技大学出版社，2014

9 Zhang C G .Diffraction Experiment of Microscopic Particle Is Due to One Force. viXra.org: 1412.0183v3.

The Theory about One Special Function for Quantum†

ChengGang.Zhang[1*]

[1] College of Nuclear Science and Technology,

University of South China ,Hengyang 421001,China；

This paper will research one special function and it's physics principle , the special function which has quantum properties ; Two hypothesis of quantum theory can be derived from the special function , and the special function also applies to atoms successfully；This paper proves that the special function is related to Coulomb force in the end , and reveals the essential reason .

Special function , Accurate Coulomb force , Accurate gravity .

PACS：02.30.-f , 02.30.Em , 03.65.-w , 03.50.De , 04.60.-m