Théorie des nombres

Nombres premiers

Par

AMRAR Mouhcine

Baccalauréat sciences mathématiques

Amrarmouhcine83@gmail.com

Résumé

Dans cet article on a tout étudié sur les nombres premiers, On commence par la traditionnelle définition de ces nombres et on dit que p est un nombre premier s'il est divisible sur 1 et sur lui-même, dans ce travail on essaye de définir ces nombres et de les déterminer par plusieurs notions, propriétés et théorèmes, parmi les célèbres théorèmes des nombres premiers, le théorème de Fermat et celui de Wilson, au début on généralise ces deux théorèmes,

Soit Ω_p *l'ensemble des nombres premiers, d'apres le theoreme de fermat p est un nombre premier si* $a^p - a \equiv 0[p]$*,on peut dire soit α un entier naturel et α≤p, pour un entier naturel p et pour a≥3, on dit que p est un nombre premier si* $a^\alpha - a \equiv 0[p-\alpha]$ *dans le même sens* $a^{p-\alpha} - a^2 \equiv 0[p-\alpha]$*, on a aussi si E est impair et p et E sont premiers entre eux, p est dit premier si*

$$p^E - 1 \equiv 0[p+1]$$

Généralisations du théorème de FERMAT *Voici quelques généralisations pour le théorème de Fermat si p est un nombre premier alors p divise ces valeurs :*

$$\sum_{k=2}^{p} a^k \;, \sum_{k=2}^{p-1} a^k \;, (-\sim+)\sum_{k=2}^{p-1} a^k \;, \sum_{k=3}^{p} a^k \;, \sum_{k=0}^{\left|\frac{p-3}{2}\right|} a^{p-(2k+1)} \;, (a^{p+1}-a)\sum_{k=0}^{\left|\frac{p-3}{2}\right|} a^{p-(2k+1)}$$

Généralisations du théorème de Wilson *si p est un nombre premier, soit* $(\alpha, a) \in N^2$ *et* $a \geq 3$ *on a :* $a^{p-\alpha} - a^{\alpha+1} \equiv 0(mod\ p)$*, toujours dans la généralisation du théorème de Fermat on a : p est un nombre premier, alors pour* $(\alpha, a) \in \mathbb{N}^2$ *et* $a \geq 3$ $a^\alpha - a \equiv 0(mod\ p-\alpha)$*, dans cette partie nous essayons de donner des généralisations pour le théorème de Wilson, on commence par un contre exemple pour ce théorème d'après Wilson p est un nombre premier p est dit premier si* $(p-1)! + 1 \equiv 0(mod\ p)$*, alors qu'on peut dire que p est dit non premier, pour* $p \geq 5$*, si* $(p-1)! \equiv r(mod\ p), r \neq 0$*, on peut aussi dire p est dit premier si* $(p-2)! \equiv r(mod\ p), r \neq 0$*, on peut généraliser ces deux relations et on a soit p un entier naturel, p est dit non premier si* $\forall m \in N, (p-m)! \equiv r(mod\ p), r \neq 0$ *, pour m s'il est pair alors on prend* $m \geq \left|\frac{p}{2}\right|$ *et si m est impair alors on prend* $m \geq \left|\frac{p}{3}\right|$*, dans le même sens en suivant l'idée du théorème de Wilson, soit p un entier naturel et soit*

$$S_1 = \sum_{k=1}^{p} k \;, si\ p! \equiv 0(mod\ S_1) \Rightarrow p \in \Omega_p$$

$$S_2 = \sum_{k=1}^{p} k \text{ , si } p! \equiv r(mod\ S_2) \text{ dont } r \neq 0 \Rightarrow p \in \Omega_p$$

$$S_3 = \sum_{k=1}^{\alpha} k(p-k) \text{ et } \alpha = \frac{p-1}{2} \text{ , si } S_3 \equiv 0(mod\ p) \Rightarrow p \in \Omega_p$$

Soit $S_4 = (p-1) + (p-3) + (p-5) + \cdots$, *et* $S'_4 = (p-2) + (p-4) + (p-6) + \cdots$ *on dit que si p est un nombre premier alors* $S_4 + S'_4 \equiv O(mod\ p)$ *et* $S_4 - S'_4 \equiv O(mod\ p)$.

<u>La relation nombre premier-factoriel</u> Dans cette partie on étudie la relation entre les nombres premiers et le factoriel, on commence par ce théorème, soit p et n des entiers naturels il existe un N$\in \mathbb{N}^*$ *tel que* $p^N - p \equiv 0(mod\ n!)$. *On prend n égal à 4 soit p et p' deux nombres premiers et* $(p, p') \neq (2, 2)$ *et* $p - p' \geq 3$ *alors* $p^{p'} - p \equiv 0(mod\ 4!)$, *même chose pour* $5!$.*si* $p - p' < 3$ *alors c'est le cas de p et p' premiers jumeaux et soit* $5 \leq p \leq p'$ *alors* $p! + p + 1 \equiv 0(mod\ p')$. *on peut aussi accepter un troisième nombre pour cette relation et on dit : Soit* (p_1, p_2, p_3) *nombres premiers, il existe n*$\in \mathbb{N}$ *tel que* ${p_1}^{p_3} - {p_2}^{p_3} \equiv O(mod\ n!)/$ $p_1 > p_2 > p_3$. *On essaye de donner une relation pour tous les nombres premiers et le factoriel on a :*

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} (p_\alpha)! \equiv 0(mod 4)$$

$$(-\sim +)\sum_{\alpha=1}^{\infty} (p_\alpha)! \equiv 0(mod 4)$$

Pour un $p \geq 5$ *on lie chaque nombre une valeur* $4^\alpha.4!$

5	7	11	13	17	19	23	29	...	P
$4^0.4!$	$4^1.4!$	$4^2.4!$	$4^3.4!$	$4^4.4!$	$4^5.4!$	$4^6.4!$	$4^7.4!$	...	$4^\alpha.4!$

$\forall p \in \Omega_p, \exists \alpha \in \mathbb{N}, p_\alpha$ *est lié à* $4^\alpha.4!$ $\forall a \in \mathbb{N}$ $a^{p_\alpha} - a^{p_{\alpha-2}} \equiv 0(mod 4^\alpha.4!)$, *si* $p_{\alpha=}11$ *alors* $p_{\alpha-2=}5$.

La même chose mais cette fois les nombres premiers sont liés à la valeur $4^\alpha.4^2$,*on a*

$\forall p \in \Omega_p, \exists \alpha \in \mathbb{N}, p_\alpha$ *est lié à* $4^\alpha.4^2$; $a^{p_\alpha} - a^{p_{\alpha-1}} \equiv 0\left(mod 4^{\alpha+2}\right)/4^{\alpha+2}$ *est lié à* $p_{\alpha-1}$

Propriété

Soit p_1 *et* p_2 *deux nombres premiers, il existe un entier naturel tel que* ${p_1}^{p_2} - p_1 \equiv 0(mod\ n!)$ *aussi vérifient* ${p_1}^{p_1-1} - {p_2}^{p_2-1} \equiv 0(mod\ 8)$

<u>Le produit des nombres premiers</u> soit p un nombre premier et soit $\prod p$ *un produit composé des nombres premiers inferieurs ou égal à p ;* $\prod 7 = 7 \times 5 \times 3 \times 2$ *tout produit des nombres premiers s'écrit sous la forme* $\prod p = 24K + 6$ *ou* $\prod p = 24K + 18$ *si N*$(p) \equiv 0(mod 4)$ *, N(p) est le nombre des p composant* $\prod p$. *Tel que 7et 19.*

2	3	5	7	11	13	17	19	...	P

<u>Les nombres premiers de la forme</u> $6\lambda + 1$, *soit* Ω'_p *l'ensemble des nombres premiers ayant la forme* $6\lambda + 1$ /$\Omega'_p \subset \Omega_p$, *tous les éléments de* Ω'_p *vérifient* $(p-1)! \equiv 0(mod\ 2p+1)$

<u>Les nombres premiers de la forme</u> $\boldsymbol{kq}! + \boldsymbol{p}$ *le but de cet étude est de présenter les nombres premiers dans un tableau nommé tableau des nombres premiers, on travaille sur les nombres de la forme* $\boldsymbol{kq}! + \boldsymbol{p}$*, dont p est un nombre premier, on commence par le cas de* $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{3}$ *;*

+	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66
1	7	13	19	[redacted]	31	37	43	[redacted]	[redacted]	61	67
2	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
3	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
5	11	17	23	29	[redacted]	41	47	53	59	[redacted]	71

Pour la première colonne elle contient des nombres premiers inferieurs à $\mathbf{q}!$ *les cases vides sont des cases dont* $\boldsymbol{6k} + \boldsymbol{p}$ *est divisible par les premiers inferieurs à* $\mathbf{q}!$*.dans le même sens et dans un tableau dont la première colonne contient 1 et les éléments de* $\Omega'_p\ /\Omega'_p \subset \Omega_p$ *et sup*$\Omega'_p = \boldsymbol{\beta}$ *et* $\boldsymbol{\beta} \leq \boldsymbol{q}!$ *et la première ligne contient* $\boldsymbol{kq}!/\boldsymbol{q} \geq \mathbf{3}$ *,* $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^*$*, on a :* $\boldsymbol{p} \in \Omega_p \Rightarrow \forall \boldsymbol{\beta}_k \in \Omega'_p, \exists \boldsymbol{q} \geq \mathbf{3}, \exists \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^*$

$\boldsymbol{kq}! + \boldsymbol{\beta}_k \equiv \boldsymbol{r}(\boldsymbol{mod}\ \boldsymbol{f})\ /\boldsymbol{r} \neq \mathbf{0}\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{f} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{5}, \ldots, \boldsymbol{sup}\Omega'_p\}$*.*

<u>Les polynômes et les nombres premiers.</u> Soit Ω_p *l'ensemble des nombres premiers nous étudions*

quelques polynômes et leurs relations avec les nombres premiers, on a si $x \in \Omega_p - \{\mathbf{11}\}$ *alors :*

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \sum_{k=2}^{5} \boldsymbol{x}^{K} \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}} \sum_{k=2}^{5} -(-\mathbf{1})^{k} \boldsymbol{x}^{K} \in \mathbb{Z}$$

Soit $\boldsymbol{E}_p$ *un polynôme du* $\mathbf{n}^{ieme}$ *degré* $\boldsymbol{E}_p = \boldsymbol{x}^n + \boldsymbol{x}^{n-1} + \boldsymbol{x}^{n-2} + \cdots \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{m}\ /\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$ *ou il existe des entiers relatifs a, b, et c dont* $\boldsymbol{m} = \mathbf{10}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \mathbf{3}\boldsymbol{c}$*, si p*$\in \Omega_p - \{\mathbf{11}\}$ *alors il vérifie* $\boldsymbol{E}_p$*. et soit* $\boldsymbol{E}'_p = (-\sim+)\boldsymbol{E}_p$ *on a aussi tous les éléments de* $\Omega_p - \{\mathbf{11}\}$ *vérifient* $\boldsymbol{E}'_p$*, en généralisant ces propriétés on obtient, soit E' un polynôme de* $\mathbf{5}^{ieme}$ *degré* $\boldsymbol{x}^5 + \boldsymbol{x}^4 + \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{d}\boldsymbol{x}^2 = \mathbf{10}\boldsymbol{m}$ *dont* $\boldsymbol{a} = \pm\boldsymbol{c}$ *et* $\boldsymbol{b} = \pm\boldsymbol{d}$ *on a si p*$\in \Omega_p - \{\mathbf{11}\}$ *alors il p est une solution de E'. On remarque dans les polynômes précédents l'absence de* $\boldsymbol{x}^1$ *nous voulons trouver des polynômes avec l'inconnu* $\boldsymbol{x}^1$*,*

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{x}^5 + \boldsymbol{x}^4 + \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x}^2 = \mathbf{10}\boldsymbol{m}$$

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{x}^4 + \boldsymbol{x}^3 + \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x}^1 = \mathbf{10}\boldsymbol{m}$$

...

$$\boldsymbol{E}_l = \boldsymbol{x}^{\alpha} + \boldsymbol{x}^{\alpha-1} + \boldsymbol{x}^{\alpha-2} + \boldsymbol{x}^{\alpha-3} = \mathbf{10}\boldsymbol{m}$$

On obtient le polynôme suivant

$$\boldsymbol{E}_l = \boldsymbol{x}^n + \mathbf{2}\boldsymbol{x}^{n-1} + \mathbf{3}\boldsymbol{x}^{n-2} + \mathbf{4}\boldsymbol{x}^{n-3} + \cdots + (\boldsymbol{f} + \mathbf{1})\boldsymbol{x}^{f+1} + \boldsymbol{f}\boldsymbol{x}^f + \cdots + +\mathbf{3}\boldsymbol{x}^3 + \mathbf{2}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x}^1 = \mathbf{10}\boldsymbol{m}$$

Et $\boldsymbol{f} = \frac{n}{2}$*, alors si p est un nombre premier il vérifie le polynôme. Comme on peut écrire :*

$$\boldsymbol{E}_{l'} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^n + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x}^{n-1} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{n-2} + \cdots + \boldsymbol{b}'\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x}^1 = \mathbf{10}\boldsymbol{m}'/\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}$$

$$a = \pm a' / b = \pm b' / c = \pm c' / d = \pm d'$$

On a aussi les nombres premiers vérifient $E_{l'}$

<u>Quelques propriétés des nombres parfaits</u> nous donnons des propriétés des nombres parfaits on commence par le théorème d Euclide et on a si $2^n - 1$ *est premier alors* $2^{n-1}(2^n - 1)$ *est un nombre parfait, dans le même sens on peut aussi dire que si* $2^n - 1$ *est premier alors il existe un n*$\in \mathbb{N}^*$ *tel que* $2^{n-1}(2^n - 1) \in M_{2^{n'}}$ *(*$M_{2^{n'}}$ *sont les multiples de* $2^{n'}$*), on donne quelques valeurs de n' par rapport a n,*

n	*3*	*5*	*7*	*11*	*13*	*17*	*19*	…	*P*
n'	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	…	*P'*

Exemple, Si $n = 23$ *alors* $2^{n-1}(2^n - 1)$ *est un multiple de* 2^8

On donne quelques propriétés des nombres parfaits,

Soit p un nombre parfait, alors il existe un entier k tel que $p = 48k + 16$ *ou* $p = 62k + 28$

on peut dire aussi si p est un nombre parfait alors $\equiv \sum a_i [n!]$ *, et* $p = a_1 a_2 a_3 \dots a_i$ *et* $a_i = (6, 8)$

$P \equiv 16[48]$ *,* $P \equiv 28[62]$

Si p un nombre parfait supérieur à 6, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $p = 24k + 16$

Si p un nombre parfait supérieur à 496, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $p = 120k + 88$

Si p un nombre parfait supérieur à $\wp$*, alors il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $p = n!\, k + \sum a_i$ *;* $\sum a_i$ *est un nombre se termine par 6 ou 8.*

<u>Références</u>

Travail fait sans références.