On the Inexistence of Navier-Stokes Solutions

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

Abstract – We have proved in a few lines that there are initial velocities $u^0(x)$ and forces $F(x,t)$ such that there is no solution to the Navier-Stokes equations, which corresponds to the cases (C) and (D) of the problem relating to Navier-Stokes equations available on the website of the Clay Institute.

Keywords – Navier-Stokes equations, Euler equations, continuity equation, breakdown, existence, smoothness, solutions, gradient field, conservative field, velocity, pressure, external force, millenium problem.

§ 1

My intention in this short article is to transform through simpler differential equations the problem of the Navier-Stokes equations, described especially on Clay Institute page [1], in order to make a more understandable, easy and acceptable solution.

The options we perceive as able to be solved among the four alternatives available in [1] are the proofs of the inexistence (breakdown of) solutions for the Navier-Stokes equations, which correspond to cases (C) and (D) described in [1], being the first of these cases referred to the solutions in general and the second specific to the spatially periodic solutions. The problem as proposed is restricted to $n = 3$ spatial dimensions.

Our preliminary studies on the subject have been taken in [2] and in abbreviated form in [3], and here we intend to further summarize our conclusions on these equations in a small basic "standard" demonstration, acceptable even to be a demonstration to (eventually) be given as response to a question of university discipline without spending hours and hours in your solution or pages and pages in the demonstration, but as accurate as possible. Purposely this is an article that can be considered small, adequate (we believe) to a student of engineering, but also to the students of physics, meteorology, oceanography, geophysics, astronomy and even mathematics. We understand the practical importance of this subject.

The Navier-Stokes equation in vector form may be written as

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)\, u = \nu\, \nabla^2 u - \nabla p + F,$$

for $u, F: \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ and $p: \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, where u is the velocity of the fluid, F the external "force" applied (e.g. gravity), p the pressure and ν is the coefficient (constant) of viscosity, measurements made in position $x \in \mathbb{R}^n$ and time $t \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ (called by habit Navier-Stokes equations in the plural when we think on the respective equations of its components $i, 1 \leq i \leq n$).

It is often joined to (1) the condition of incompressibility (constant mass density in the equation of continuity)

(2) $$\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \qquad (n = 3),$$

condition that must also be satisfied for conform to [1]. In what follows it will be understood that we are referring always to the spatial dimension $n = 3$.

Another way of writing (1) is

(3) $$\nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla) u + F = \varphi + F = \phi.$$

Calling the right side of (3) by ϕ the solution of (3) for p, when available, is given by

(4) $$p = \int_L \phi \cdot dl + \theta(t),$$

where L is a continuous path by parts of class C^1 which goes from x_0 to x with $x_0, x \in \mathbb{R}^3$. Suppose θ continuous, limited and differentiable at $t \geq 0$. We also assume that L does not pass by any singularities of ϕ.

From (3) we see immediately that (1) can be transformed into the simplest differential equation

(5) $$\nabla p = \phi, \qquad \phi(x,t): \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3,$$

that will only have solution if ϕ is a gradient field, i.e., conservative, and its solution in this case is (4). The reference [4] contains the basic theory of gradient fields.

Our central problem can then be written as, symbolically and as a question (a logical sentence and a question mark):

(P1) $$\exists \phi^0(x) = \phi(x,0),\ \nexists (\phi, p) /\ \nabla p = \phi?$$

If $\phi^0(x)$ is a non-gradient field then $\phi(x,t)$ is not a gradient field at $t = 0$, then (at least) at $t = 0$ there is no solution for $\phi = \nabla p$, whatever is $\phi(x,t)$ with $\phi(x,0) = \phi^0(x)$ no gradient.

The answer to (P1) is Yes, and we would have to seek some non-gradient $\phi^0(x)$ to illustrate the truth of the logic sentence. See that we can find many examples of functions $\phi(x,t)$, including to be worth $\phi^0(x) = \phi(x,0)$, but what will not exist using our example is the function p. In our proof the function $\phi(x,t)$ must exist so that there is also $\phi^0(x)$, and thus proving the inexistence of p.

A logical equivalence that represents the inexistence of the pair of variables (ϕ, p) as used in (P1) is

(6) $$\nexists (\phi, p) \leftrightarrow ((\nexists \phi \wedge \exists p) \vee (\exists \phi \wedge \nexists p) \vee (\nexists \phi \wedge \nexists p)),$$

and of three possible alternatives described above to prove the absence of the pair (ϕ, p) we chose the existence of ϕ with the inexistence of p, i.e.

(7) $(\exists\phi \wedge \nexists p) \rightarrow \nexists(\phi, p)$.

In this and on the problems that follow assume that $p: \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is a scalar function and all other functions are vectors with image in $\mathbb{R}^3$.

§ 2

A variant of (P1) is given by the problem (P2) below.

(P2) $\exists\varphi^0(x) = \varphi(x,0), \exists F(x,t), \nexists(\varphi,p) / \nabla p = \varphi + F?$

Let us seek again the breakdown of the solutions in $t = 0$. If $\phi^0 = \varphi^0 + F(x,0)$ is not gradient then in $t = 0$ the equation $\nabla p = \varphi + F$ will have no solution, the case of breakdown solutions. Answer: Yes, and for that the logic sentence in (P2) show it is true we should seek $\varphi^0(x)$ and $F(x,t)$ whose respective sum at $t = 0$ results in a non-gradient field.

§ 3

Our third problem is an easy version of (3), where ∇p is replaced by P, with $P: \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(P3) $\exists u^0(x) = u(x,0), \exists F(x,t), \nexists(u,P) / P = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + F?$

Unlike the two previous answers, this time the answer is No. Assuming that the operation $\nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + F$ can be computed, i.e., that for all $u(x,t)$ with $u(x,0) = u^0(x)$ there are the partial derivatives of u with respect to the spatial coordinates until second order and with respect to time up to the first order and that there is a corresponding computable value for P, then there are always u and P satisfying the differential equation given in (P3) in a very obvious way. Given u with $u(x,0) = u^0$ then P, ultimately, is the result of an algebraic computation, regardless of how complicated the involved derivations are, i.e., it is a false statement $\nexists(u,P)$ in (P3). Does not seem to be the focus of [1] the search for a "pathological" function, some strange function, rare, for u^0, u or F such that the equation given in (1) cannot even be computed (with the possible except ∇p). On the contrary, [1] is concerned with functions and physically reasonable solutions, and lists several conditions that must be obeyed by u^0, u, F, p.

§ 4

Here we treat the main problem, which corresponds to a necessary condition for the absence of solution (3), and consequently to (1). It is one of the proofs that we intend to give as acceptable standard.

(P4) $\exists u^0(x) = u(x,0), \exists F(x,t), \nexists(u,p) / \nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + F?$

If $\exists u^0(x) = u(x,0)$ then there must be $u(x,t)$ at least in $t = 0$. As we seek solutions for (1) throughout all $t \geq 0$ then we can assume the existence of $u(x,t)$ in $t \geq 0$, hypothetically. Moreover, the original problem in [1] defines the domain $D(u)$ of u is

$\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$, so can assume by hypothesis the existence of u for all $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$, and for all $x \in \mathbb{R}^3$.

The statement $\nexists(u, p)$ does not imply only in $(\nexists u \wedge \nexists p)$. We will choose to find a vector field velocity u, with $u(x, 0) = u^0$ given, such that there is some pressure p that satisfies the differential equation given in (P4), equal to (3).

Thus, we arrive at

$$\big(\exists u^0(x) = u(x, 0)\big) \wedge \big(D(u) = \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)\big) \rightarrow \exists u: \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$$

(P4') $\quad (\exists u \wedge \nexists p) \rightarrow \nexists(u, p) \ / \ \nabla p = \nu \, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla) u + F = \phi.$

If the field ϕ in (P4') is non-gradient then there is no p that satisfies the equation required, and there are infinite examples u^0, u, F which can be given such that result in non-gradients fields ϕ. The simplest example are the velocities $u(x, t) = u^0(x) = 0$, and thus it will be sufficient find (at least) a non-gradient function $F(x, t)$ to make the (P4') true, what will be Yes the answer to the problem (P4). If the answer was No then there would not be breakdown of solutions to the Navier-Stokes equations.

For case (C) of the Millennium problem we give as an example $F(x, t) = (e^{-x_2^2}, 0, 0)$ and in case (D), corresponding to spatially periodic solutions, we give as an example $F(x, t) = (\cos(2\pi x_2), 0, 0)$, trigonometric function of period 1. The one examples of limited functions that meet the conditions of continuity, differentiability, no divergence, smoothness (C^∞) etc. and also satisfy the equation (2) of the incompressible fluid. So there are cases of inexistence of solutions for p in the Navier-Stokes equations, given u^0, u, F.

§ 5

This problem will check a sufficient condition for the absence of solution (3), and consequently to (1). It is probably the most important demonstration of this article, which summarizes the main idea of [2].

Including in (P4) the condition $\forall u(x, t) / u(x, 0) = u^0(x)$ we come to

(P5) $\quad \exists u^0(x) = u(x, 0), \exists F(x, t), \forall u(x, t) / u(x, 0) = u^0(x), \nexists(u, p) /$

$$\nabla p = \nu \, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla) u + F?$$

which requires that your answer is valid for any velocity $u(x, t)$ possible and complying to $u(x, 0) = u^0(x)$. It will not be enough, however only one or a few examples of velocities, as it is possible in (P4).

Equating the right side of equation (P5) to ϕ as done in (3) if ϕ is non gradient then equation (P5) does not admit solution. So when the function F is equal to

(8) $\quad F = \phi - \nu \, \nabla^2 u + \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u$

the differential equation to be solved is equal to (5), which has no solution for non-gradient ϕ. Let us choose for this reason the force F given in (8).

This is an explicit example of force which varies with velocity, so each $u(x,t)$ that checks (P5) will generally have a different $F(x,t)$, so, $F(x,t) = H(\phi(x,t), u^0(x), u(x,t), x, t)$. We see that such a definition for F does not violate the condition $\exists F(x,t)$ of this problem, for this reason we use it. It may seem an invalid procedure, but it is in accordance with the reading that is done in [1].

Thus we find a way to construct F which always results in inexistence of solutions to (3), so defining ϕ a non gradient function, the answer to (P5) is Yes, there are cases of breakdown (inexistence) solutions for Navier-Stokes equations. We turn through (8) the original equation (1) in equation (5), a problem that has already been answered also affirmatively in (P1).

§ 6

Alternatively, rather than a variable force with the velocity, one can choose, for example, $F = 0$, a non-gradient initial velocity $u^0(x)$ or equal to zero (to facilitate the calculations) and an additional initial condition $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = a^0(x)$ (can be $a^0(x) = 0$ or a non-gradient function) resulting to (3), at time $t = 0$, a non-gradient function ϕ.

The new problem in this case is

(P6) $\exists u^0(x) = u(x,0), \exists a^0(x) = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}, \exists F(x,t), \forall u(x,t)/u(x,0) = u^0(x), \nexists(u,p)/$
$\nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + F$?

Answer: Yes.

The breakdown of the solutions occurs (at least) at $t = 0$, since at this instant the right side of the differential equation (P6) is a non-gradient function, and therefore the pressure p cannot be calculated (meaning it does not exist). The example $F = u^0 = 0$ will result in $\nabla p^0 = -a^0(x)$, for $p^0(x) = p(x,0)$ and non-gradient a^0: equation with no solution.

Both in this problem as in previous ones, we are assuming, of course, that the functions u^0, a^0, F chosen obey all conditions of "well-behaved" functions, physically reasonable, described in [1], as well as the function u^0 must also comply (2).

It is noticed that more important than this specific treatment in relation to Navier-Stokes (valid for the Euler equations) is its application to various other equations also exist. We found a logical equivalence and a useful technique.

Wir müssen wissen. Wir werden wissen.
(We need to know. We will know.)
David Hilbert

References

1. Fefferman, Charles L., Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation, in http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf

2. Godoi, Valdir M.S., Breakdown of Navier-Stokes Solutions, in http://vixra.org/abs/1505.0083 (2015).

3. Godoi, Valdir M.S., Breakdown of Navier-Stokes Solutions (Short Version), in http://vixra.org/abs/1505.0138 (2015).

4. Apostol, Tom M., Calculus, vol. II. New York: John Wiley & Sons (1969).

On the Inexistence of Navier-Stokes Solutions

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

Abstract – We have proved in a few lines that there are initial velocities $u^0(x)$ and forces $F(x,t)$ such that there is no solution to the Navier-Stokes equations, which corresponds to the cases (C) and (D) of the problem relating to Navier-Stokes equations available on the website of the Clay Institute.

Keywords – Navier-Stokes equations, Euler equations, continuity equation, breakdown, existence, smoothness, solutions, gradient field, conservative field, velocity, pressure, external force, millenium problem.

§ 1

Minha intenção neste pequeno artigo é transformar através de equações diferenciais mais simples o problema sobre as equações de Navier-Stokes, descrito especialmente na página do Instituto Clay[1], de modo a tornar sua solução mais compreensível, fácil e aceitável.

As opções que percebemos como possíveis de serem resolvidas dentre as quatro alternativas disponíveis em [1] são as provas de inexistência de soluções (breakdown) para as equações de Navier-Stokes, que correspondem aos casos (C) e (D) descritos em [1], sendo o primeiro destes casos referente às soluções em geral e o segundo específico às soluções espacialmente periódicas. O problema conforme proposto está restrito a $n=3$ dimensões espaciais.

Nossos estudos preliminares sobre o assunto já foram dados em [2] e de forma abreviada em [3], e aqui pretendemos resumir ainda mais nossas conclusões sobre estas equações em uma pequena demonstração básica "padrão", aceitável inclusive para ser uma demonstração que possa (eventualmente) ser dada como resposta a uma questão de disciplina universitária, sem precisar gastar horas e mais horas em sua solução ou páginas e mais páginas na demonstração, mas tão rigorosa quanto possível. Propositalmente este é um artigo que pode ser considerado pequeno, adequado (acreditamos) a um aluno de Engenharia, mas também a alunos de Física, Meteorologia, Oceanografia, Geofísica, Astronomia e mesmo de Matemática. Entendemos a importância prática deste assunto.

A equação de Navier-Stokes, em forma vetorial, pode ser escrita como

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \nu\, \nabla^2 u - \nabla p + F,$$

para $u, F: \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ e $p: \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, onde u é a velocidade do fluido, F a "força" externa aplicada (por exemplo, gravidade), p a pressão e ν o coeficiente (constante) de viscosidade, medidas feitas na posição $x \in \mathbb{R}^n$ e tempo $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$ (chamamos por hábito equações de Navier-Stokes, no plural, quando pensamos nas respectivas equações das suas n componentes $i, 1 \leq i \leq n$).

Costuma-se juntar a (1) a condição de incompressibilidade (densidade de massa constante na equação da continuidade)

(2) $\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \qquad (n = 3),$

condição esta que também deve ser satisfeita para atender [1]. No que segue estará subentendido que estamos nos referindo sempre à dimensão espacial $n = 3$.

Outra forma de escrever (1) é

(3) $\nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla) u + F = \varphi + F = \phi.$

Chamando de ϕ o lado direito de (3), a solução de (3) para p, quando existe, é dada por

(4) $p = \int_L \phi \cdot dl + \theta(t),$

sendo L um caminho contínuo por partes de classe C^1 que vai de x_0 a x, com $x_0, x \in \mathbb{R}^3$. Suponhamos θ contínua, limitada e diferenciável em $t \geq 0$. Também supomos que L não passe por nenhuma singularidade de ϕ.

De (3) vemos imediatamente que (1) pode ser transformada na equação diferencial mais simples

(5) $\nabla p = \phi, \qquad \phi(x,t): \mathbb{R}^3 \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^3,$

que só terá solução se ϕ for um campo gradiente, i.e., conservativo, e sua solução neste caso é (4). A referência [4] contém a teoria básica sobre os campos gradientes.

Nosso problema central pode então ser escrito assim, simbolicamente e em forma de pergunta (uma sentença lógica e uma interrogação):

(P1) $\exists \phi^0(x) = \phi(x, 0),\ \nexists(\phi, p) / \nabla p = \phi?$

Se $\phi^0(x)$ for um campo não gradiente então $\phi(x,t)$ é não gradiente em $t = 0$, então (ao menos) em $t = 0$ não há solução para $\nabla p = \phi$, qualquer que seja $\phi(x,t)$ com $\phi(x,0) = \phi^0(x)$ não gradiente.

A resposta para (P1) é Sim, e teríamos que buscar algum $\phi^0(x)$ não gradiente para exemplificar a verdade da sentença lógica. Vejam que podemos encontrar muitos exemplos de funções $\phi(x,t)$, inclusive para poder valer $\phi^0(x) = \phi(x,0)$, porém o que não existirá usando nosso exemplo é a função p. Em nossa prova a função $\phi(x,t)$ deverá existir, para que também exista $\phi^0(x)$, e assim provaremos a inexistência de p.

Uma equivalência lógica que representa a inexistência do par de variáveis (ϕ, p) como utilizada em (P1) é

(6) $\nexists(\phi, p) \leftrightarrow ((\nexists \phi \wedge \exists p) \vee (\exists \phi \wedge \nexists p) \vee (\nexists \phi \wedge \nexists p)),$

e das três alternativas possíveis descritas acima para provar a inexistência do par (ϕ, p) escolhemos a existência de ϕ com a inexistência de p, i.e.

(7) $(\exists\phi \wedge \nexists p) \rightarrow \nexists(\phi, p)$.

Neste e nos problemas que seguem admitimos que $p\colon \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função escalar e todas as outras funções são vetores com imagem em $\mathbb{R}^3$.

§ 2

Uma variante de (P1) é dada pelo problema (P2) a seguir.

(P2) $\exists\varphi^0(x) = \varphi(x, 0), \exists F(x, t), \nexists(\varphi, p) / \nabla p = \varphi + F$?

Busquemos novamente a quebra das soluções em $t = 0$. Se $\phi^0 = \varphi^0 + F(x, 0)$ for não gradiente então em $t = 0$ a equação $\nabla p = \varphi + F$ não terá solução, o caso de quebra de soluções. Resposta: Sim, e para que a sentença lógica em (P2) mostre-se verdadeira deveremos buscar $\varphi^0(x)$ e $F(x, t)$ cuja respectiva soma em $t = 0$ resulte em um campo não gradiente.

§ 3

Nosso terceiro problema é uma versão facilitada de (3), onde substituímos ∇p por P, com $P\colon \mathbb{R}^3 \times [0,\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(P3) $\exists u^0(x) = u(x, 0), \exists F(x, t), \nexists(u, P) / P = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + F$?

Ao contrário das duas respostas anteriores, desta vez a resposta é Não. Supondo que a operação $\nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + F$ possa ser computada, i.e., que para todo $u(x, t)$ com $u(x, 0) = u^0(x)$ existam as derivadas parciais de u em relação às coordenadas espaciais até a segunda ordem e em relação ao tempo até a primeira ordem e que exista o respectivo valor computável para P, então sempre existem u e P que satisfaçam a equação diferencial dada em (P3), de maneira muito óbvia. Dado u com $u(x, 0) = u^0$ então P, em última análise, é o resultado de uma computação algébrica, por mais complicadas que sejam as derivações envolvidas, i.e., é falsa a afirmação $\nexists(u, P)$ em (P3). Não parece ser o foco de [1] a busca de alguma função "patológica", alguma função estranha, rara, para u^0, u ou F tal que a equação dada em (1) nem sequer possa ser computada (com a possível exceção de ∇p). Pelo contrário, [1] preocupa-se com funções e soluções fisicamente razoáveis, e elenca várias condições que devem ser obedecidas por u^0, u, F, p.

§ 4

Aqui trataremos do problema principal, que corresponde a uma condição necessária para a inexistência de solução para (3), e consequentemente de (1). É uma das provas que pretendemos dar como padrão aceitável.

(P4) $\exists u^0(x) = u(x, 0), \exists F(x, t), \nexists(u, p) / \nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + F$?

Se $\exists u^0(x) = u(x,0)$ então deve existir $u(x,t)$ ao menos em $t = 0$. Como buscamos soluções para (1) em todo $t \geq 0$ então podemos supor a existência de $u(x,t)$ em $t \geq 0$, por hipótese. Além disso, o problema original em [1] define que o domínio $D(u)$ de u seja $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$, ou seja, podemos supor por hipótese a existência de u em todo $t \geq 0, t \in \mathbb{R}$, e para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

A afirmação $\nexists(u,p)$ não implica apenas em $(\nexists u \land \nexists p)$. Optaremos por encontrar algum campo vetorial de velocidades u, com $u(x,0) = u^0$ dado, tal que não exista pressão p alguma que satisfaça a equação diferencial dada em (P4), igual a (3).

Assim sendo, chegamos a

$$\big(\exists u^0(x) = u(x,0)\big) \land \big(D(u) = \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)\big) \to \exists u: \mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$$

(P4') $\quad (\exists u \land \nexists p) \to \nexists(u,p) \;/\; \nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + F = \phi.$

Se o campo ϕ em (P4') for não gradiente então não haverá p que satisfaça à requerida equação, e existem infinitos exemplos de u^0, u, F que podem ser dados tais que resultem em campos ϕ não gradientes. O mais simples exemplo que penso são as velocidades $u(x,t) = u^0(x) = 0$, e assim bastará encontrar (ao menos) uma função $F(x,t)$ não gradiente de modo a tornar (P4') verdadeira, o que fará ser Sim a resposta para o problema (P4). Se a resposta fosse Não então não haveria quebra de soluções para as equações de Navier-Stokes.

Para o caso (C) do problema do milênio damos como exemplo $F(x,t) = (e^{-x_2^2}, 0, 0)$ e para o caso (D), correspondente às soluções espacialmente periódicas, damos como exemplo $F(x,t) = (\cos(2\pi x_2), 0, 0)$, função trigonométrica de período 1. São exemplos de funções limitadas que obedecem às condições de continuidade, derivabilidade, não divergência, smoothness (C^∞), etc. e também satisfazem à equação (2) dos fluidos incompressíveis. Portanto existem casos de inexistência de soluções para p nas equações de Navier-Stokes, dados u^0, u, F.

§ 5

Neste problema verificaremos uma condição suficiente para a inexistência de solução para (3), e consequentemente de (1). É provavelmente a mais importante demonstração deste artigo, que resume a ideia principal de [2].

Incluindo-se em (P4) a condição $\forall u(x,t)/u(x,0) = u^0(x)$ chegamos a

(P5) $\quad \exists u^0(x) = u(x,0), \exists F(x,t), \forall u(x,t)/u(x,0) = u^0(x), \nexists(u,p)/$

$\quad \nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla)u + F?$

que requer que sua resposta seja válida para qualquer velocidade $u(x,t)$ possível e que obedeça a $u(x,0) = u^0(x)$. Não bastará, portanto, apenas um ou alguns poucos exemplos de velocidades, como é possível em (P4).

Igualando o lado direito da equação em (P5) a ϕ, conforme feito em (3), se ϕ for não gradiente a equação em (P5) não admitirá solução. Então quando a função F é igual a

(8) $F = \phi - \nu\, \nabla^2 u + \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u$

a equação diferencial a ser resolvida é igual a $\nabla p = \phi$, que não tem solução para ϕ não gradiente. Escolhamos por essa razão a força F dada em (8).

Este é um exemplo explícito de força que varia com a velocidade, portanto a cada $u(x,t)$ que verifique (P5) teremos em geral um $F(x,t)$ diferente, ou seja, $F(x,t) = H(\phi(x,t), u^0(x), u(x,t), x, t)$. Vemos que tal definição para F não viola a condição $\exists F(x,t)$ deste problema, por isso a utilizamos. Pode parecer um procedimento inválido, mas está de acordo com a leitura que se faz de [1].

Encontramos assim uma maneira de construir F que resulta sempre em inexistência de soluções para (3), por isso, definindo ϕ uma função não gradiente, a resposta para (P5) é Sim, existem casos de quebra (inexistência) de soluções para as equações de Navier-Stokes. Transformamos através de (8) a equação original (1) na equação (5), problema que já foi respondido, também afirmativamente, em (P1).

§ 6

Alternativamente a uma força variável com a velocidade pode-se escolher, por exemplo, $F = 0$, uma velocidade inicial $u^0(x)$ não gradiente ou igual a zero (para facilitar os cálculos) e uma condição inicial adicional $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = a^0(x)$ (podendo ser $a^0(x) = 0$ ou uma função não gradiente) que resultem para (3), em $t = 0$, uma função ϕ não gradiente.

O novo problema neste caso é

(P6) $\exists u^0(x) = u(x,0), \exists a^0(x) = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}, \exists F(x,t), \forall u(x,t)/u(x,0) = u^0(x), \nexists (u,p)/$
$\nabla p = \nu\, \nabla^2 u - \frac{\partial u}{\partial t} - (u \cdot \nabla) u + F$?

Resposta: Sim.

A quebra das soluções ocorre (pelo menos) em $t = 0$, pois neste instante o lado direito da equação diferencial de (P6) será uma função não gradiente, e por isso a pressão p não poderá ser calculada (significando que não existirá). O exemplo $F = u^0 = 0$ resultará em $\nabla p^0 = -a^0(x)$, sendo $p^0(x) = p(x,0)$ e a^0 não gradiente: equação sem solução.

Tanto neste problema quanto nos anteriores estamos admitindo, evidentemente, que as funções u^0, a^0, F escolhidas obedecem a todas as condições de funções "bem comportadas", fisicamente razoáveis, descritas em [1], assim como a função u^0 também deve obedecer (2).

Percebe-se que mais importante que este tratamento específico em relação a Navier-Stokes (válido para as Equações de Euler) é sua aplicação a várias outras equações que também existem. Encontramos uma equivalência lógica e uma técnica úteis.

Wir müssen wissen. Wir werden wissen.
(*Nós precisamos saber. Nós iremos saber.*)
David Hilbert

Referências Bibliográficas

1. Fefferman, Charles L., *Existence and Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, in http://www.claymath.org/sites/default/files/navierstokes.pdf

2. Godoi, Valdir M.S., *Breakdown of Navier-Stokes Solutions*, in http://vixra.org/abs/1505.0083 (2015).

3. Godoi, Valdir M.S., *Breakdown of Navier-Stokes Solutions (Short Version)*, in http://vixra.org/abs/1505.0138 (2015).

4. Apostol, Tom M., *Calculus*, vol. II. New York: John Wiley & Sons (1969).