$$\Gamma^{r}_{ik}$$

La conexión afín

Aplicación a la teoría clásica de campo

Wenceslao Segura González

εWT
Ediciones

WENCESLAO SEGURA GONZÁLEZ

La conexión afín

Aplicación a la teoría clásica de campo

εWT
Ediciones

La conexión afín

Aplicación a la teoría clásica de campo

© *Wenceslao Segura González*
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es

Primera edición:
abril de 2015

Edita:
eWT Ediciones

Depósito Legal:
CA-130-2015

ISBN:
978-84-606-7167-1

Impreso en España - *Printed in Spain*

A Mariluz

CONTENIDO

PREFACIO

Este es un libro de Matemática para físicos. Con ello queremos decir que los conceptos y desarrollos matemáticos que exponemos se hacen con la finalidad de aplicarlos a la Física; aquí entendemos la Matemática como una herramienta, y como tal herramienta no es importante el grado de rigor con la que se aplique, sino la utilidad que se consiga en el desarrollo de las teorías físicas.

Por esta razón hemos huido de un excesivo rigor, lo que tal vez sea del desagrado del matemático, pero que tenemos la seguridad de que agradará al físico.

Hemos titulado el libro «La conexión afín» para recalcar que este es el concepto básico de la geometría diferencial en cuanto a su aplicación a la teoría clásica de campo.

Los resultados matemáticos que recopilamos en el primer capítulo son aplicados a la formulación de las ecuaciones de la Relatividad General y a teorías unitarias de campo, siempre dentro de la visión clásica.

La generalización de la Relatividad General, ya sea en orden a su unificación con el electromagnetismo o a la búsqueda de nuevas teorías gravitatorias, ha recuperado interés recientemente y esta es la razón principal de que publiquemos este opúsculo.

Wenceslao Segura González

1 Teoría general de la conexión afín

1 TEORÍA GENERAL DE LA CONEXIÓN AFÍN

1.1.- Álgebra tensorial

Un espacio es un conjunto de infinitos elementos a los que llamamos puntos, cada uno de ellos definidos por N números reales independientes entre sí, a los que llamamos coordenadas del punto. Impondremos la condición de que el espacio sea contínuo, es decir que si un punto tiene coordenadas x^k existen otros puntos con coordenadas $x^k + dx^k$, donde dx^k son valores infinitesimales, es decir que «infinitamente cerca» de un punto existen infinitos puntos. Al número N de coordenadas necesarias para identificar a cada punto se le llama dimensión del espacio.

La representación de los puntos del espacio por sus coordenadas no es única. En efecto, es posible definir nuevas coordenadas relacionadas con las antiguas por N funciones

$$x'^r = x'^r\left(x^k\right) \tag{1}$$

o bien *

$$d\,x'^r = \frac{\partial x'^r}{\partial x^k} dx^k = A_k^r\, d\,x^k,$$

donde suponemos que la transformación es invertible, o sea que el jacobiano o determinante de la matriz A_k^r es distinto de cero, debiendo existir por tanto la relación inversa

$$d\,x^r = \frac{\partial x^r}{\partial x'^k} d\,x'^k = B_k^r\, d\,x'^k.$$

Vamos también a exigir que las funciones (1) sean derivables y con sufi-

* En lo que sigue utilizaremos el criterio de sumación de Einstein.

ISBN: 978-84-606-7167-1

cientes propiedades de regularidad.

Esta operación de cambio de coordenadas nos permite definir los elementos básicos que operan en un espacio, como son, entre otros: vectores, tensores, escalares y espinores. Un vector es un ente geométrico que puede venir definido por N números v^k, llamados sus componentes contravariantes, y que están relacionados con el espacio de tal forma que al hacer un cambio de coordenadas (1) estas componentes se transforman según la ley

$$v'^k = A^k_r v^r,$$

es decir se transforman con la misma ley que las diferenciales de las coordenadas. Otra posibilidad es que el vector venga definido por un conjunto de N números v_k, llamados sus componentes covariantes, que ante el cambio (1) se transforman como

$$v'_k = B^r_k v_r.$$

Hay que advertir que un vector viene expresado por las componentes contravariantes o por las covariantes. No obstante, y como veremos más adelante, es posible definir un vector de orden dos, como es el caso del tensor métrico, que nos sirva para «subir o bajar los índices», es decir establecer una correspondencia entre las componentes contravariantes de un vector y sus componentes covariantes. En este caso el vector viene definido tanto por unas como por las otras componentes, pues ambas se encuentran relacionados entre sí.

Debemos distinguir entre el vector simple y el campo vectorial. En el primer caso se trata de un vector definido en un único punto del espacio. En un campo vectorial nos encontramos con un vector definido en cada punto del espacio, lo que significa que las componentes del campo vectorial son funciones de las coordenadas.

El concepto de vector es fácilmente generalizable para alcanzar el concepto de tensor. Por ejemplo, un tensor de segundo orden contravariante es un ente matemático definido por N^2 componentes t^{pq} que se transforman en un cambio de coordenadas (1) por la ley

$$t'^{rk} = A^r_p A^k_q t^{pq}.$$

El concepto de tensor se puede generalizar tanto en su orden como en su carácter, sea éste covariante, contravariante o mixto. Por ejemplo, las componentes de un tensor de segundo orden mixto se transforman según

$$t'_q{}^p = A^p_r B^s_q t_s{}^r.$$

Al igual que lo señalado para los vectores, cabe hablar de un tensor definido solamente en un punto del espacio o de un campo tensorial, en este caso sus componentes son funciones de las coordenadas.

Se definen los escalares como entes matemáticos ligados con el espacio y definidos por un sólo número que no varía cuando se hace un cambio de coordenadas, o sea, es invariante. Puede existir un campo escalar, entonces el número que lo define depende del punto del espacio que se considere, pero estos números seguirán siendo los mismos al realizar un cambio de coordenadas.

Fácilmente se pueden definir operaciones tensoriales como la suma, resta, multiplicación y contracción. Esta última consiste en igualar dos índices, uno superior y otro inferior y luego sumar respecto a ellos. La contracción, por ejemplo, de un tensor de cuarto orden tres veces contravariante y uno covariante $t_q{}^{rkp}$ es un nuevo tensor de segundo orden t^{kp}

$$t_r{}^{rkp} = \sum_r t_r{}^{rkp} = t^{kp} .$$

Nótese que es importante el orden en que están colocados todos los índices de las componentes de un tensor, no solamente los índices que están en la misma línea, sino los índices contravariantes respecto a los covariantes. En realidad lo que hay que distinguir es el orden entre los índices contravariantes (o entre los covariantes), pero en el caso en que se defina un tensor de segundo orden para bajar y subir índices, entonces los índices contravariantes se pueden convertir en covariantes y viceversa, por ello es también necesario conocer el orden de un tipo de índice respecto a los del otro tipo. Debemos también notar que de un tensor dado se pueden obtener varios tensores contraídos que, en general, serán diferentes entre sí. De nuestro ejemplo anterior también se pueden obtener los tensores contractos $t_k{}^{rkp}$ y $t_p{}^{rkp}$.

Es posible combinar el producto con la contracción, operación especialmente útil para los vectores, denominándose en este caso producto interno o escalar. Para los vectores de componentes v^r y w_k su producto escalar será $v^k w_k$, donde como es habitual se sobreentiende la suma respecto a los índices repetidos, a los que se les llama índices mudos.

Una ecuación cuyos dos miembros sean tensores de igual orden y carácter es una ecuación invariante, es decir, que la relación entre sus miembros se mantiene cualesquiera que sea el sistema de coordenadas elegido. Y viceversa, si encontramos una ecuación invariante tal que uno de sus miembros tenga carácter tensorial, podemos concluir que el otro miembro también será un tensor y de iguales características.

Un tensor asimétrico, por ejemplo de segundo orden ($t_{ik} \neq t_{ki}$), siempre se puede descomponer en parte simétrica $t_{(ik)}$ y antisimétrica $t_{[ik]}$

$$t_{(ik)} = t_{(ki)}; \qquad t_{[ik]} = -t_{[ki]}$$

definidas por

$$t_{(ik)} = 1/2\left(t_{ik} + t_{ki}\right) \qquad t_{[ik]} = 1/2\left(t_{ik} - t_{ki}\right)$$

de tal forma que

$$t_{ik} = t_{(ik)} + t_{[ik]}.$$

Las partes simétricas y antisimétricas de un tensor son a su vez tensores y se transforman de forma independientes entre ellas. Si la ley de transformación del tensor considerado es

$$t'_{ik} = B_i^p\, B_k^q\, t_{pq},$$

se comprueba que también se cumple

$$t'_{(ik)} = \frac{1}{2}\left(B_i^p\, B_k^q\, t_{pq} + B_k^p\, B_i^q\, t_{pq}\right) = B_i^p\, B_k^q\, t_{(pq)}$$

donde se han intercambiado los índices mudos *p* y *q*; e igualmente obtenemos

$$t'_{[ik]} = B_i^p\, B_k^q\, t_{[pq]},$$

lo que nos muestra la independencia en la transformación de las partes simétricas y antisimétricas de un tensor. Estos resultados se pueden extender a un tensor de cualquier orden y carácter.

Se puede generalizar la simetrización y antisimetrización a tensores de un orden mayor que el segundo, así para un tensor covariante de orden *n* tendremos

$$T_{(ij\ldots k)} = \frac{1}{n!} T_{\{ij\ldots k\}}\ ; \quad T_{[ij\ldots k]} = \frac{1}{n!}(-1)^m\, T_{\{ij\ldots k\}}$$

donde $\{ij\ldots k\}$ representa la suma de todas las permutaciones posibles y *m* es el número de permutaciones a los que hay que someter a los índices del tensor *T* para llevarlos al orden inicial $ij....k$.

Se le llama traza de un tensor de segundo orden mixto a

$$Tr\left(a_k^{\ i}\right) = a_i^{\ i}$$

es decir, la suma de los elementos diagonales. La traza tiene la propiedad de ser invariante frente a cambios de coordenadas, en efecto

$$Tr\left(t'_k{}^i\right)=t'_i{}^i=A^i_pB^q_i\,t_q{}^p=t_p{}^p=Tr\left(t_q{}^p\right).$$

El concepto de traza es extensible a cualquier tensor que tenga componentes covariantes y contravariantes. Sea $T_{ik}{}^r$ un tensor antisimétrico definido en un espacio de N dimensiones y V_k es un vector definido por $V_k=1/\left(N-1\right)T_{rk}{}^r$, entonces el tensor admite la siguiente descomposición

$$T_{ik}{}^r=W_{ik}{}^r+\delta^r_iV_k-\delta^r_kV_i$$

en el que $W_{ik}{}^r$ es un tensor de traza nula $W_{rk}{}^r=0$ y δ^r_k es la delta Kronecker que como veremos en el epígrafe 1.5 es un tensor mixto.

Si $T_{ik}{}^r$ fuera un tensor simétrico, la descomposición sería

$$T_{ik}{}^r=W_{ik}{}^r+\delta^r_iV_k+\delta^r_kV_i$$

donde ahora tenemos la definición $V_k=1/\left(N+1\right)T_{rk}{}^r$. Esta descomposición se puede generalizar a tensores de otros órdenes.

1.2.- Conexiones y derivadas

Cuando un espacio euclídeo (o sea, el espacio ordinario, ver epígrafe 1.15) está expresado en coordenadas curvilíneas, las derivadas parciales de las componentes de un vector ∂_rv^k no tienen propiedades definidas de transformación, por ello es necesario introducir el concepto de derivada covariante del vector. Sea el vector $\mathbf{v}=v^k\mathbf{e}_k$, siendo $\mathbf{e}_k$ los vectores básicos, al hallar la derivada de $\mathbf{v}$ se obtiene

$$d\mathbf{v}=dv^k\mathbf{e}_k+v^kd\mathbf{e}_k=\frac{\partial v^k}{\partial x^r}dx^r\mathbf{e}_k+v^k\frac{\partial\mathbf{e}_k}{\partial x^r}dx^r,$$

como cualquier vector se puede poner como una combinación lineal de los vectores básicos, entonces

$$\frac{\partial\mathbf{e}_k}{\partial x^r}=\Gamma_{kr}{}^s\mathbf{e}_s$$

siendo los $\Gamma_{kr}{}^s$ unos coeficientes a determinar. Por lo anterior queda que la derivada de un vector en un espacio euclídeo es

$$d\mathbf{v}=\left(\partial_rv^s+v^k\Gamma_{kr}{}^s\right)dx^r\mathbf{e}_s=D_rv^sdx^r\mathbf{e}_s,\qquad(2)$$

llamando a D_rv^s las componentes de la derivada covariante del vector $\mathbf{v}$.

Para obtener una definición adecuada de diferenciación en un espacio genérico no euclídeo, nos guiaremos por (2). Con esto queremos indicar que la definición que daremos de derivación se reduce a la obtenida en la geometría euclídea. Teniendo esto presente, definimos la derivada covariante de un vector por los siguientes requisitos:

a) La derivada covariante de un vector es un tensor de segundo orden.

b) Si el campo vectorial tiene de componentes contravariantes v^k las componentes de la derivada covariante es la expresión

$$D_r v^k = \frac{\partial v^k}{\partial x^r} + v^s \Gamma_{sr}{}^k = \partial_r v^k + v^s \Gamma_{sr}{}^k \tag{3}$$

donde los símbolos $\Gamma_{sr}{}^k$ son las componentes de un campo –sin carácter tensorial– al que llamamos conexión afín o simplemente conexión.

c) La derivada covariante cumple la regla de Leibnitz de derivación de un producto.

d) En el caso de un campo escalar ϕ la derivada covariante es idéntica a su derivada parcial

$$D_r \phi = \partial_r \phi.$$

Una serie de aclaraciones exige la anterior definición. Como $\Gamma_{sr}{}^k$ no es en general simétrica respecto a los índices inferiores, se podría haber definido la derivada covariante por

$$\bar{D}_r v^k = \partial_r v^k + v^s \Gamma_{rs}{}^k \tag{4}$$

donde se ha invertido el orden de los subíndices de la conexión con respecto a la usada en (3). Como demostraremos más adelante, si (3) es un tensor también lo es (4), o dicho de otra forma si $\Gamma_{sr}{}^k$ es una conexión, también lo es su traspuesta $\tilde{\Gamma}_{rs}{}^k = \Gamma_{sr}{}^k$. (4) representa una derivada covariante diferente de (3). El uso de una u otra definición es indiferente, pero debe indicarse cuál de las dos se está usando. Es posible construir una geometría diferencial donde se usen simultáneamente ambas derivadas covariantes, incluso se puede hacer una definición mixta con ambas derivadas.

Es importante saber el orden de los índices de la conexión. En nuestra definición el índice contravariante o superior se encuentra en tercer lugar. También es arbitrario el orden que se elija, pero dado un orden debe mantenerse en los cálculos sucesivos. Se podría también representar la conexión por las siguientes expresiones: $\Gamma_r{}^k{}_s$ y $\Gamma^k{}_{sr}$. La diferencia entre una u otra surge cuando se baja el índice superior, ya que en este caso sí es significativo el orden del índice contravariante

Es posible definir una derivada covariante sin exigir el cumplimiento de los apartados c) y/o d). Entonces sería necesario utilizar dos conexiones: una para la derivada de las componentes contravariantes y otra para la derivada de las componentes covariantes.

En esta situación también sería posible la definición de la derivada de un tensor, siguiendo para ello la similitud con lo deducido en la correspondiente derivada de un tensor en un espacio euclídeo.

Nótese que de nuestra definición de derivada covariante no se puede obtener la expresión de la conexión, por esta razón estos símbolos se convierten en un elemento básico que debe ser indicado para definir el espacio. El establecimiento del campo de la conexión nos permite efectuar la diferenciación de un campo vectorial o tensorial y a partir de estas operaciones obtenemos un conjunto de tensores que describen las características y propiedades del espacio.

Es fácil deducir la derivada covariante de un vector con componentes covariantes, para ello partimos de

$$\phi = u^k v_k$$

donde ϕ es un escalar como se deriva de la leyes de transformación y u^k es un campo vectorial arbitrario. Teniendo en cuenta el apartado d) de la definición de derivada covariante

$$D_r\left(u^k v_k\right) = v_k D_r u^k + u^k D_r v_k = \partial_r\left(u^k v_k\right) = v_k \partial_r u^k + u^k \partial_r v_k$$

utilizando el valor ya encontrado de $D_r u^k$ entonces

$$u^k\left(D_r v_k - \partial_r v_k + v_s \Gamma_{kr}{}^s\right) = 0$$

dado el carácter arbitrario de u^k se encuentra

$$D_r v_k = \partial_r v_k - v_s \Gamma_{kr}{}^s \tag{5}$$

que es la expresión buscada.

Si la derivada covariante se hubiera definido por (4) entonces en vez (5) hubiéramos encontrado

$$\bar{D}_r v_k = \partial_r v_k - v_s \Gamma_{rk}{}^s .$$

El proceso lo podemos continuar para hallar la derivada de un tensor de segundo orden con componentes en forma covariante. Partimos para ello del escalar

$$\phi = u^r v^k t_{rk}$$

donde u^r y v^k son dos campos vectoriales arbitrarios. Haciendo uso de un procedimiento igual que el anterior se encuentra

$$D_p t_{rk} = \partial_p t_{rk} - t_{rs}\Gamma_{kp}{}^s - t_{sk}\Gamma_{rp}{}^s .$$

Para terminar pongamos la expresión para el caso de la derivada covariante de un tensor de segundo orden con componentes mixtas

$$D_p t_r{}^k = \partial_p t_r{}^k - t_s{}^k \Gamma_{rp}{}^s + t_r{}^s \Gamma_{sp}{}^k .$$

Como ya indicamos, es posible definir una derivada mixta, es decir la que utiliza tanto la definición (3) como la (4)

$$\hat{D}_p t_{rk} = \partial_p t_{rk} - t_{rs}\Gamma_{pk}{}^s - t_{sk}\Gamma_{rp}{}^s .$$

expresión que recibe el nombre de derivación covariante de Thomas.

Como antes dijimos es posible definir dos conexiones, una de ellas a utilizar en la derivada de un vector contravariante como en (3) y la otra para definir la derivada de un vector covariante

$$D_r v_k = \frac{\partial v_k}{\partial x^r} - v_s \hat{\Gamma}_{kr}{}^s$$

ambas conexiones deberán ser usadas cuando se calcula la derivada de un tensor que tenga índices covariantes y contravariantes. Definimos unos símbolos de tercer orden

$$C_{kr}{}^s = \Gamma_{kr}{}^s - \hat{\Gamma}_{kr}{}^s \tag{6}$$

que al ser la diferencia de dos conexiones es un tensor, como veremos en el epígrafe 1.3. Con estas dos conexiones podemos calcular la derivada covariante de la delta de Kronecker (ver epígrafe 1.5)

$$D_r \delta_p^q = \partial_r \delta_p^q + \delta_p^s \Gamma_{sr}{}^q - \delta_s^q \hat{\Gamma}_{pr}{}^s = \Gamma_{pr}{}^q - \hat{\Gamma}_{pr}{}^q$$

es decir

$$C_{pr}{}^q = D_r \delta_p^q .$$

Si $C_{kr}{}^s$ es distinto de cero no queda definida la derivada de un escalar. Así, por ejemplo, para $\phi = v_i u^i$

$$D_k \phi = \partial_k \phi + C_{ik}{}^s v_s u^i ,$$

la situación se resuelve si

$$C_{ik}{}^s = C_i \delta_k^s \tag{7}$$

o bien

$$C_{ik}{}^s = C_k \delta_i^s$$

donde C_k es un vector covariante, al que daremos el nombre de vector de Schouten, entonces

$$D_k\phi = \partial_k\phi + C_k\phi$$

expresión que conserva el carácter lineal de la derivación covariante de un escalar, pero no cumple la regla de Leibnitz.

(7) significa una condición que deben cumplir las dos conexiones Γ y $\hat{\Gamma}$. En efecto, si contraemos (7) repecto a s y k y luego respecto a s e i obtendremos

$$C_k = \frac{1}{4}\left(\Gamma_{sk}{}^{s} - \hat{\Gamma}_{sk}{}^{s}\right); \quad C_k = \Gamma_{ks}{}^{s} - \hat{\Gamma}_{ks}{}^{s}$$

lo que nos establece la relación entre las dos conexiones

$$\Gamma_{sk}{}^{s} - 4\Gamma_{ks}{}^{s} = \hat{\Gamma}_{sk}{}^{s} - 4\hat{\Gamma}_{ks}{}^{s}.$$

Por lo visto en este epígrafe podemos definir en un mismo espacio cuatro conexiones diferentes

$$\Gamma_{rk}{}^{s}; \quad \Gamma_{kr}{}^{s}; \quad \hat{\Gamma}_{rk}{}^{s}; \quad \hat{\Gamma}_{kr}{}^{s}$$

que generarán derivadas covariantes distintas.

1.3.- Ley de transformación de las conexiones

Si bien la definición de derivada covariante no permite definir la conexión, si le impone severas limitaciones y esto es así por la condición de tensor que debe poseer la derivada covariante, lo que establece la relación de transformación que debe cumplir la conexión asociada al espacio.

Ante el cambio de coordenadas (1) la derivada covariante de un tensor toma la forma

$$D'_r v'^{k} = \partial'_r v'^{k} + v'^{s}\,\Gamma'_{sr}{}^{k} \qquad (8)$$

que al ser un tensor deberá cumplir la siguiente ley de transformación

$$D'_r v'^{k} = B_r^p\, A_s^k\, D_p v^s. \qquad (9)$$

Como

$$\partial'_r v'^{k} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^r}\frac{\partial}{\partial x^j}\left(A_s^k v^s\right) = B_r^j A_{sj}^k v^s + B_r^j A_s^k \partial_j v^s$$

desarrollando (8) y aplicando (9)

$$D'_r v'^{k} = B_r^j A_{sj}^k v^s + B_r^j A_s^k \partial_j v^s + A_t^s v^t \Gamma'_{sr}{}^{k} =$$

$$= B_r^p A_s^k D_p v^s = B_r^p A_s^k \partial_p v^s + B_r^p A_t^k v^s \Gamma_{sp}{}^{t}$$

y dado que el vector de componentes v^k es arbitrario, resulta tras la simplifiación

$$\Gamma'_{ri}{}^{k} = B_i^p B_r^s A_t^k \Gamma_{sp}{}^{t} - B_i^j B_r^s A_{sj}^k$$

que es la ley de transformación de la conexión.

Es posible una ligera simplificación de la anterior expresión. El segundo sumando del segundo miembro se puede poner como

$$-B_i^j B_r^s A_{sj}^k = -\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}\frac{\partial x^s}{\partial x'^r}\frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^s \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial x^s}{\partial x'^r}\frac{\partial x'^k}{\partial x^s}\right)\frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$$

donde hemos sumado una expresión que es idénticamente nula por serlo la derivada del paréntesis que es el símbolo de Kronecker, δ_r^k. Desarrollando se llega a

$$-B_i^j B_r^s A_{sj}^k = \frac{\partial^2 x^s}{\partial x'^r \partial x'^i}\frac{\partial x'^k}{\partial x^s} = B_{ri}^s A_s^k$$

con este resultado la ley de transformación de una conexión frente a un cambio del sistema de coordenadas queda

$$\Gamma'_{ri}{}^{k} = B_i^q B_r^s A_p^k \Gamma_{sq}{}^{p} + B_{ri}^s A_s^k . \qquad (10)$$

Cualquier campo que ante una transformación de coordenadas cambie como (10) es una conexión. La anterior expresión se puede tomar como la forma más general de definición de una conexión. Nótese que si la transformación de coordenadas es lineal $B_{ri}^s = 0$ entonces la conexión se comporta como un tensor.

1.4.- Propiedades de las conexiones

Aunque sin carácter tensorial, cualquier conexión puede descomponerse en parte simétrica y antisimétrica

$$\Gamma_{is}{}^{k} = \Gamma_{(is)}{}^{k} + \Gamma_{[is]}{}^{k},$$

donde volvemos a utilizar el criterio de que los paréntesis redondeados representan simetrización y los cuadrados antisimetrización y que son definidos por

$$\Gamma_{(is)}{}^{k} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{is}{}^{k} + \Gamma_{si}{}^{k}\right)$$
$$\Gamma_{[is]}{}^{k} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{is}{}^{k} - \Gamma_{si}{}^{k}\right).$$

Sus leyes de transformación son diferentes, de tal forma que la parte antisimétrica se transforma como un tensor de tercer orden, algo que no ocurre con la parte simétrica. Esto viene a significar que las partes simétricas y antisimétricas no se mezclan y ante la ley de transformación actúan como magnitudes independientes. En un espacio de cuatro dimensiones la parte antisimétrica tiene 24 componentes independientes y la simétrica tiene 40 componentes, que hacen el total de 64 componentes de la conexión.

Si una conexión es simétrica en un sistema de coordenadas, será simétrica con cualquieras otras coordenadas, pues en este caso la parte antisimétrica es nula y al ser un tensor, seguirá siendo nula en cualquier otro sistema de coordenadas. No obstante, la conexión antisimétrica no tiene carácter invariante, es decir la conexión puede ser antisimétrica en un sistema de coordenadas y no serlo en otro.

La parte antisimétrica de una conexión no es una conexión, ya que se transforma como un tensor y no con la ley (10). No obstante, la parte simétrica de una conexión es a su vez una conexión pues cumple la condición de transformación (10), en efecto

$$\Gamma_{(ri)}{}^{k} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ri}{}^{k} + \Gamma_{ir}{}^{k}\right) = B_i^q B_r^s A_p^k \frac{1}{2}\left(\Gamma_{pq}{}^{k} + \Gamma_{qp}{}^{k}\right) + B_{ri}^s A_s^k =$$
$$= B_i^q B_r^s A_p^k \Gamma_{(pq)}{}^{k} + B_{ri}^s A_s^k .$$

Por tanto podemos afirmar que una conexión puede ser asimétrica (o sea, que contiene tanto parte simétrica como antisimetrica) y simétrica, pero no pueden existir conexiones antisimétricas para transformaciones generales de coordenadas.

Es fácil comprobar que la diferencia entre dos conexiones distintas $\Gamma_{is}{}^{k}$ y $\overline{\Gamma}_{is}{}^{k}$ es un tensor. En efecto, por la ley de transformación (10) se encuentra

$$\Gamma'_{is}{}^{k} - \overline{\Gamma}'_{is}{}^{k} = A_r^k B_i^p B_s^q \left(\Gamma_{pq}{}^{r} - \overline{\Gamma}_{qp}{}^{r}\right),$$

lo que nos viene a decir que dada una conexión podemos obtener otra sumándole un tensor cualquiera $T_{is}{}^{k}$

$$\overline{\Gamma}_{is}{}^{k} = \Gamma_{is}{}^{k} + T_{is}{}^{k}$$

Si bien la suma de dos conexiones no forma en general una nueva conexión, la expresión

$$\alpha\Gamma_{is}{}^{k} + \beta\overline{\Gamma}_{is}{}^{k}$$

sí será una conexión siempre y cuando $\alpha + \beta = 1$.

La conexión admite dos contracciones

$$\Gamma_s = \Gamma_{ks}{}^k \; ; \qquad \tilde{\Gamma}_s = \Gamma_{sk}{}^k$$

que son diferentes salvo que la conexión sea simétrica. Los símbolos Γ_s y $\tilde{\Gamma}_s$ son las componentes covariantes de un vector como se puede comprobar por aplicación de (10).

Si $\Gamma_{is}{}^k$ son las componentes de una conexión y λ es una función invariante

$$\Gamma^*_{is}{}^k = \Gamma_{is}{}^k + \delta_i^k \partial_s \lambda$$

es una nueva conexión puesto que se transforma según (10).

Si $\Gamma_{is}{}^k$ es una conexión, entonces su transpuesta $\tilde{\Gamma}_{is}{}^k = \Gamma_{si}{}^k$ también es una conexión, como fácilmente se deriva al aplicar (10).

Si $\Gamma_{is}{}^k$ es una conexión, entonces

$$U_{is}{}^k = \Gamma_{is}{}^k - \Gamma_i \delta_s^k$$

también es una conexión, ya que el segundo sumando del segundo miembro es un tensor. Igualmente ocurriría si usamos $\tilde{\Gamma}_i$ en vez de Γ_i en la anterior expresión o si cambiamos en el segundo sumando del segundo miembro los índice i por s.

1.5.- Tensores especiales

La delta de Kronecker δ_i^k ($=1$ si $i = k$; $=0$ si $i \neq k$) puede ser entendida como las componentes de un tensor mixto que tiene en todos los sistemas de coordenadas las mismas componentes, como la demuestra la identidad

$$\delta_i^k = A_p^k B_i^q \delta_q^p \,.$$

El símbolo de Levi-Civita completamente antisimétrico ε^{pqrs} tiene el valor 1 si hay una permutación par de los índices, el valor -1 si la permutación es impar y 0 si hay al menos dos índices iguales. Este símbolo no tiene carácter tensorial pero a partir de él podemos definir (por ejemplo, en un espacio tetradimensional) un tensor Δ^{pqrs}, también de carácter antisimétrico, por la relación

$$\Delta^{pqrs} = J \varepsilon^{pqrs} \tag{11}$$

donde J es un parámetro que ante un cambio de coordenadas se transforma según la ley

$$J' = |A| J$$

siendo $|A|$ el determinante de la matriz de transformación A_i^k. En efecto

$$A_p^i A_q^j A_r^k A_s^l \Delta^{pqrs} = A_p^1 A_q^2 A_r^3 A_s^4 \varepsilon^{ijkl} J \varepsilon^{pqrs} = |A| J \varepsilon^{ijkl} = J' \varepsilon^{ijkl} = \Delta'^{pqrs}$$

lo que nos muestra el carácter de tensor de cuarto orden contravariante del símbolo Δ^{pqrs}. Se puede hacer la generalización a un espacio de cualquier dimensión.

1.6.- Sistema de coordenadas localmente geodésico

Vamos a demostrar que para el caso de un espacio con una conexión simétrica es siempre posible encontrar en cada punto P un sistema de coordenadas respecto al cual la nueva conexión sea idénticamente nula en ese punto.

Consideremos la transformación de coordenadas

$$x'^k = x^k - x_0^k + \frac{1}{2}\left(\Gamma_{is}{}^k\right)_0 \left(x^i - x_0^i\right)\left(x^s - x_0^s\right) \tag{12}$$

donde el subíndice 0 se refiere al punto P en donde pretendemos obtener las componentes de la conexión respecto al nuevo sistema de coordenadas. Hallando la derivación parcial de la ecuación de transformación (12)

$$\frac{\partial x'^k}{\partial x'^r} = \delta_r^k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^r} + \left(\Gamma_{is}{}^k\right)_0 \frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\left(x^s - x_0^s\right) \tag{13}$$

y particularizando para el punto P

$$\delta_r^k = \left(\frac{\partial x^k}{\partial x'^r}\right)_0 = \left(B_r^k\right)_0 \quad \Rightarrow \quad \left(A_r^k\right)_0 = \delta_r^k,$$

lo que nos indica que los tensores no sufren ningún cambio en la transformación de coordenadas (12), ya que la matriz de la transformación es idéntica a la unidad. Derivando (13)

$$0 = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^r \partial x'^m} + \left(\Gamma_{is}{}^k\right)_0 \frac{\partial^2 x^i}{\partial x'^r \partial x'^m}\left(x^s - x_0^s\right) + \left(\Gamma_{is}{}^k\right)_0 \frac{\partial x^i}{\partial x'^r}\frac{\partial x^s}{\partial x'^m}$$

en el punto P nos queda

$$\left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^r \partial x'^m}\right)_0 = \left(B_{rm}^k\right)_0 = -\left(\Gamma_{rm}{}^k\right)_0,$$

teniendo presente la ley de transformación de la conexión (10) se encuentra

$$\left(\Gamma'_{is}{}^k\right)_0 = \delta_i^p \delta_s^q \delta_r^k \left(\Gamma_{pq}{}^r\right)_0 - \left(\Gamma_{is}{}^r\right)_0 \delta_r^k = 0$$

tal como queríamos demostrar; es decir, que para un espacio que tenga una conexión simétrica existe, para cada punto, un sistema de coordenadas respecto al cual la conexión transformada es nula en ese punto; lo que no implica que tengan que ser nulas sus derivadas. Al sistema de coordenadas donde se cumple esta propiedad se la llama localmente geodésico, porque, como veremos más adelante, los ejes coordenados en ese sistema son líneas geodésicas.

Es válido el teorema inverso, si para cualquier punto de un espacio existe un sistema de coordenadas para el cual la conexión es idénticamente nula en ese punto, entonces la conexión es simétrica respecto a cualquier sistema de coordenadas.

En efecto, consideremos un sistema localmente geodésico definido en un punto P, en ese punto la conexión referida a ese sistema es nula; al hacer un cambio a otro sistema de coordenadas, la nueva conexión vendrá dada por (10) y en el punto P será

$$\left(\Gamma'_{is}{}^{k}\right)_0 = 0 + B^r_{is} A^k_r$$

que es simétrica por serlo B^r_{is}. El mismo procedimiento se puede hacer para todos los demás puntos del espacio, encontrándose que en todos ellos la conexión es simétrica.

Si la conexión no es simétrica no podemos obtener un sistema localmente geodésico en todo punto, pues no es posible anular la parte antisimétrica de la conexión por ser un tensor. No obstante, siempre podremos hacer una transformación de coordenadas que consiga en cada punto del espacio anular la parte simétrica de la conexión. Si la transformación de coordenadas es

$$x'^k = x^k - x^k_0 + \frac{1}{2}\left[\Gamma_{(is)}{}^{k}\right]_0 \left(x^i - x^i_0\right)\left(x^s - x^s_0\right)$$

entonces se encuentra

$$\left(B^r_{is}\right)_0 = -\left[\Gamma_{(is)}{}^{r}\right]_0; \qquad \left(A^k_r\right)_0 = \delta^k_r$$

que al aplicarlo a (10) se deduce

$$\left[\Gamma'_{(is)}{}^{r}\right]_0 = 0; \quad \left(\Gamma'_{[is]}{}^{r}\right)_0 = \left(\Gamma'_{[is]}{}^{r}\right)_0$$

tal como habíamos indicado antes.

1.7.- Tensor y vector de torsión

Definimos el tensor de torsión o de Cartan por

$$\tau_{is}{}^{k} = \Gamma_{is}{}^{k} - \Gamma_{si}{}^{k} = 2\Gamma_{[is]}{}^{k} \tag{14}$$

que tiene carácter tensorial ya que es la diferencia entre dos conexiones. En el caso de que la conexión sea simétrica el tensor de torsión es nulo. En el caso de un espacio de cuatro dimensiones el número de componentes independientes del tensor de torsión es 24 (ya que al ser antisimétrico hay 6 posibilidades de índices inferiores por cuatro de los superiores) y si el espacio tiene N dimensiones son N! las componentes independientes.

Se llama vector de torsión o de Cartan a la contracción del tensor de torsión

$$\tau_i = \tau_{ik}{}^{k} = \Gamma_{ik}{}^{k} - \Gamma_{ki}{}^{k} = \tilde{\Gamma}_i - \Gamma_i$$

que como ya hemos dicho es un vector covariante.

A partir de una conexión $\Gamma_{is}{}^{k}$ se puede obtener otras dos conexiones para un espacio de N dimensiones

$$\Gamma^{*}_{is}{}^{k} = \Gamma_{is}{}^{k} + \frac{1}{N-1}\delta_i^k \tau_s, \qquad \Gamma^{*}_{is}{}^{k} = \Gamma_{is}{}^{k} - \frac{1}{N-1}\delta_s^k \tau_i$$

que tienen asociados vectores de torsión nulo. La conexión

$$\Gamma^{*}_{is}{}^{k} = \Gamma_{is}{}^{k} + \frac{1}{2N-2}\left(\delta_i^k \tau_s - \delta_s^k \tau_i\right)$$

también tiene un vector de torsión nulo.

En el caso de existir torsión las derivadas covariantes D y $\bar{D}$ están relacionadas por

$$D_k u^i - \bar{D}_k u^i = u^s \tau_{sk}{}^{i}$$

naturalmente si la conexión es simétrica ambas derivadas coinciden.

1.8.- Tensor de curvatura

La conexión asociada a un espacio es el principal elemento para definir las propiedades no métricas. Pero ella sola no permite informar de algunos rasgos característicos del espacio, como es el caso de la curvatura, que nos dice cómo se aparta el espacio de un espacio plano o euclídeo

El grado de curvatura de un espacio es dado por el tensor de Riemann-Christoffel de cuarto orden. Para obtener su valor vamos a hallar la diferencia entre las derivadas segundas de un campo vectorial cualquiera

$$D_i\left(D_r v^k\right)-D_r\left(D_i v^k\right)$$

que en el caso de un espacio euclídeo se anula; aunque su anulación no significa que el espacio sea euclídeo. Haciendo los correspondientes cálculos y teniendo presente que la derivada covariante de un vector es un tensor y que es de aplicación la definición (3), se llega a la expresión

$$D_i\left(D_r v^k\right)-D_r\left(D_i v^k\right)=$$
$$=v^s\left(\Gamma_{sr,i}^{\ \ k}-\Gamma_{si,r}^{\ \ k}+\Gamma_{sr}^{\ \ n}\Gamma_{ni}^{\ \ k}-\Gamma_{si}^{\ \ n}\Gamma_{nr}^{\ \ k}\right)+D_s v^k\left(\Gamma_{ir}^{\ \ s}-\Gamma_{ri}^{\ \ s}\right)$$

donde la coma representa derivación parcial respecto a las coordenadas. La expresión anterior queda

$$D_i\left(D_r v^k\right)-D_r\left(D_i v^k\right)=v^s R^k_{\ sir}+D_s v^k \tau_{ir}^{\ \ s} \tag{15}$$

donde se ha utilizado la definición de tensor de torsión (14) y se ha definido el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel por

$$R^k_{\ sir}=\Gamma_{sr,i}^{\ \ k}-\Gamma_{si,r}^{\ \ k}+\Gamma_{sr}^{\ \ n}\Gamma_{ni}^{\ \ k}-\Gamma_{si}^{\ \ n}\Gamma_{nr}^{\ \ k} \tag{16}$$

que en efecto es un tensor por ser los restantes términos de (15) también tensores.

Si en vez de la definición de derivada covariante (3) utilizamos la (4) obtendremos otro tensor de curvatura

$$\tilde{R}^k_{\ sir}=\Gamma_{rs,i}^{\ \ k}-\Gamma_{is,r}^{\ \ k}+\Gamma_{rs}^{\ \ n}\Gamma_{in}^{\ \ k}-\Gamma_{is}^{\ \ n}\Gamma_{rn}^{\ \ k} \tag{17}$$

diferente al anterior. En el caso de la geometría de Riemann (ver epígrafe 1.15) coinciden ambos tensores de curvatura ya que la conexión es simétrica en esta geometría. Naturalmente se pueden obtener otros tensores de curvatura con otros tipos de conexiones.

Como ya indicamos, si a una conexión le sumamos un tensor volvemos a encontrar una nueva conexión

$$\overline{\Gamma}_{is}^{\ \ k}=\Gamma_{is}^{\ \ k}+T_{is}^{\ \ k}$$

que tendrá asociada un nuevo tensor de curvatura $\overline{R}^k_{\ sir}$ relacionado con (16) por la expresión

$$\begin{aligned}\overline{R}^k_{\ sir}&=R^k_{\ sir}+D_i T_{sr}^{\ \ k}-D_r T_{si}^{\ \ k}+\\&+T_{sn}^{\ \ k}\left(\Gamma_{ri}^{\ \ n}-\Gamma_{ir}^{\ \ n}\right)+T_{sr}^{\ \ n}T_{ni}^{\ \ k}-T_{si}^{\ \ n}T_{nr}^{\ \ k}\end{aligned} \tag{18}$$

o bien de forma más compacta

$$\bar{R}^k{}_{sir} = R^k{}_{sir} + 2D_{[i}T_{|s|r]}{}^k + T_{sn}{}^k\tau_{ri}{}^n + 2T_{s[r}{}^nT_{|n|i]}{}^k$$

donde los corchetes significan antisimetrización y los índices encerrados entre líneas paralelas vienen a significar que no entran en la antisimetrización y permanecen inalterables. Hay que advertir que las derivadas covariantes que aparecen en (18) se calculan respecto a la conexión originaria $\Gamma_{is}{}^k$. Es posible readaptar (18) al objeto que las derivadas covariantes se expresen respecto a la nueva conexión $\bar{\Gamma}_{is}{}^k$

$$\bar{R}^k{}_{sir} = R^k{}_{sir} + \bar{D}_iT_{sr}{}^k - \bar{D}_rT_{si}{}^k +$$
$$+T_{sn}{}^k\left(\bar{\Gamma}_{ri}{}^n - \bar{\Gamma}_{ir}{}^n\right) - T_{sr}{}^nT_{ni}{}^k + T_{si}{}^nT_{nr}{}^k$$

donde $\bar{D}$ representa la derivada covariante calculada respecto a la nueva conexión.

Cabe relacionar una variación del tensor de curvatura $\delta R^k{}_{sir}$ con la correspondiente variación de la conexión $\delta\Gamma_{si}{}^k$. De (16) y de la definición de derivada covariante se obtiene

$$\delta R^k{}_{sri} = D_i\,\delta\Gamma_{sr}{}^k - D_r\,\delta\Gamma_{si}{}^k + \tau_{ri}{}^n\delta\Gamma_{sn}{}^k \qquad (19)$$

donde hemos tenido presente que $\delta\Gamma_{si}{}^k$ es un tensor por ser la diferencia entre conexiones y nos está permitido conmutar la variación δ y la derivada respecto a las coordenadas espacio-temporales. A (19) la llamamos identidad de Palatini para el tensor de curvatura.

1.9.- Desplazamiento paralelo de un vector

Sea el vector $\mathbf{v} = v^k\mathbf{e}_k$ definido en el punto P de un espacio euclídeo. Si trasladamos paralelamente ese vector al punto P' infinitamente cercano a P, no tendrá las mismas componentes, puesto que los vectores básicos $\mathbf{e}_k$, al venir el espacio en coordenadas curvilíneas, serán diferentes en P que en P' y a consecuencia de esta variación de los vectores básicos se producirá una variación en las componentes del vector $\mathbf{v}$ aún cuando se traslade paralelamente al punto P'.

La variación del vector $\mathbf{v}$ a consecuencia del cambio de vectores básicos de P a P' viene dado por

$$v^k d\mathbf{e}_k = v^k\Gamma_{ki}{}^r dx^i\mathbf{e}_r$$

donde dx^i es la diferencia de coordenadas entre los puntos P y P'. Entonces podemos decir que un vector se ha trasladado paralelamente del punto P al P' si sus componentes cambian según

$$dv^r = -v^k \Gamma_{ki}{}^r dx^i$$

lo que neutraliza la variación ocasionada por el cambio de vectores básicos, consiguiendo, por tanto, que la diferencia entre el vector en P y en P' sea nula: $d\mathbf{v} = 0$. O dicho de otra forma, un vector es trasladado paralelamente de un punto a otro punto infinitamente cercano si la derivada absoluta del vector calculada entre los dos puntos es nula

$$Dv^k = dv^k + v^s \Gamma^r_{si}\, dx^i = 0.$$

Podemos generalizar esta definición a un espacio genérico y decir que cuando un vector se traslada paralelamente desde el punto P de coordenadas x^i a otro punto infinitamente cercano P' de coordenadas $x^i + dx^i$ la diferencia de sus componentes en ambos puntos es

$$dv^k = -v^s \Gamma^r_{si}\, dx^i \,. \tag{20}$$

Cuando en un espacio euclídeo se traslada paralelamente un vector a partir de punto para seguir un trayecto cerrado y volver al mismo punto de partida, el vector original coincide con el que resulta de la traslación paralela. Pero esto no se cumple en general. Vamos a demostrar a continuación que la variación de las componentes de un vector cuando se traslada paralelamente a través de un circuito cerrado elemental está relacionado con el tensor de curvatura y en general es distinto de cero.

Consideremos el paralelogramo infinitesimal de la figura 1. Al transportar paralelamente un vector de componentes v^s desde el punto A al B sus componentes varían según (20)

$$-v^s\left(x^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k\right)da^i \,.$$

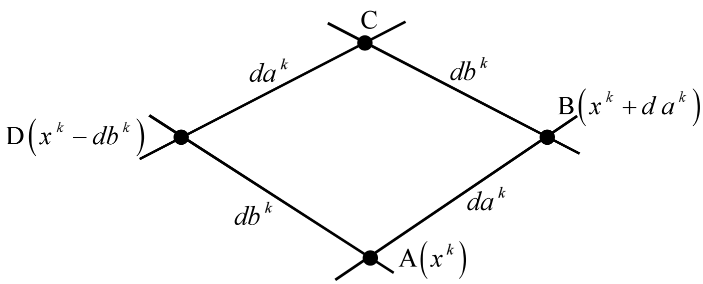

Figura 1

Al hacer el transporte de B a C las componenes del vector se modifican según

$$-v^s\left(x^k+da^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k+da^k\right)db^i .$$

La variación de las componentes del vector cuando se traslada paralelamente desde C a D serán las mismas que cuando se traslada de D a C pero cambiado de signo

$$v^s\left(x^k+db^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k+db^k\right)da^i .$$

La traslación de D a A será la misma que de A a D cambiando el signo

$$v^s\left(x^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k\right)db^i .$$

Ahora determinemos la variación total experimentada por las componentes del vector cuando se hace la traslación paralela a lo largo del paralelogramo infinitesimal considerado

$$dv^r=-v^s\left(x^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k\right)da^i-v^s\left(x^k+da^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k+da^k\right)db^i+$$
$$+v^s\left(x^k+db^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k+db^k\right)da^i+v^s\left(x^k\right)\Gamma_{si}{}^r\left(x^k\right)db^i ,$$

o en primer orden de aproximación

$$dv^r=-v^s\Gamma_{si,k}^{\ r}da^kdb^i-\partial_kv^s\Gamma_{si}{}^r da^kdb^i+$$
$$+v^s\Gamma_{si,k}^{\ r}da^idb^k+\partial_kv^s\Gamma_{si}{}^r da^idb^k$$

y teniendo presente que la variación de las componentes del vector es

$$\partial_kv^s=-v^n\Gamma_{nk}^{\ s}$$

nos queda finalmente

$$dv^r=R^r{}_{nik}v^nda^kdb^i ,$$

con lo que queda demostrado que al trasladar un vector paralelamente a sí mismo a través de un recinto infinitesimal cerrado, el vector resultante no coincide con el de partida, salvo en el caso especial en que el tensor de curvatura sea cero. En general, por tanto, la traslación paralela de un vector por un circuito cerrado no reproduce al mismo vector.

1.10.- Regla del paralelogramo

Consideremos en un espacio con torsión un vector de componentes δx^k cuyos extremos son los puntos infinitesimalmente cercanos A y B. Si trasladamos este vector paralelamente hasta los puntos infinitamente cercanos C y D, cuyas coordenadas se diferencian en dx^k de las de A y B, obtendremos un nuevo vector desplazamiento de coordenadas

$$\delta x^k - \Gamma_{ir}{}^k \delta x^i dx^r .$$

Si ahora repetimos la operación pero con el vector de extremos A y C, que tiene de coordenadas dx^k, y lo trasladamos paralelamente hasta que el extremo que estaba en A se sitúe en el punto B, obtendremos un vector de componentes

$$dx^k - \Gamma_{ik}{}^k dx^i \delta x^r .$$

Al sumar los cuatro vectores que forman el paralelogramo

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = \tau_{ir}{}^k \delta x^i dx^r$$

lo que no es nulo en general. Esto significa que el paralelogramo construido no es cerrado, es decir el extremo del vector resultado de la traslación de $\overrightarrow{AC}$ no coincide con el punto D. Por tanto la regla del paralelogramo no se cumple en espacios con torsión.

El resultado inverso también es cierto, es decir que si no se cumple la regla del paralelogramo (o sea, los paralelogramos no se cierran) entonces el espacio tiene torsión.

1.11.- Tensor de Ricci

Del tensor de curvatura se pueden definir dos nuevos tensores mediante la contracción de índices. Se le llama tensor de Ricci a la contracción

$$R_{si} = R^k{}_{sik} = \Gamma_{sk,i}^{\ k} - \Gamma_{si,k}^{\ k} + \Gamma_{sk}^{\ t}\Gamma_{ti}^{\ k} - \Gamma_{si}^{\ t}\Gamma_{tk}^{\ k} \tag{21}$$

compuesta tanto de parte simétrica como antisimétrica.

La otra posible contracción del tensor de curvatura recibe el nombre de curvatura homotética y es definida por

$$V_{ir} = R^k{}_{kir} = \Gamma_{kr,i}^{\ k} - \Gamma_{ki,r}^{\ k} + \Gamma_{kr}^{\ n}\Gamma_{ni}^{\ k} - \Gamma_{ki}^{\ n}\Gamma_{nr}^{\ k} = \Gamma_{kr,i}^{\ k} - \Gamma_{ki,r}^{\ k},$$

que es un tensor antisimétrico. Las otras contracciones posibles del tensor de curvatura no dan lugar a nuevos tensores.

Por cálculo directo es fácil comprobar que la derivada de la curvatura homotética cumple la relación

$$V_{ir,j} + V_{rj,i} + V_{ji,r} = 0. \tag{22}$$

Debemos tener presente que si aceptamos como definición de derivada covariante la (4) entonces obtenemos un tensor de Ricci y una curvatura homotética diferentes en general de las anteriores.

Si derivamos otra conexión añadiéndole a $\Gamma_{rk}{}^{s}$ un tensor $T_{rk}{}^{s}$ entonces el tensor de Ricci se obtendrá de (21)

$$\overline{R}_{si} = R_{si} + 2D_{[i}T_{|s|k]}{}^{k} + T_{sn}{}^{k}\tau_{ki}{}^{n} + 2T_{s[k}{}^{n}T_{|n|i]}{}^{k}.$$

Si utilizamos las derivadas covariantes calculadas con la conexión

$$\overline{\Gamma}_{rk}{}^{s} = \Gamma_{rk}{}^{s} + T_{rk}{}^{s}$$

entonces el tensor de Ricci quedará

$$\overline{R}_{si} = R_{si} + 2\overline{D}_{[i}T_{|s|k]}{}^{k} + T_{sn}{}^{k}\overline{\tau}_{ki}{}^{n} - 2T_{s[k}{}^{n}T_{|n|i]}{}^{k},$$

donde la barra significa que se utiliza la conexión $\overline{\Gamma}_{is}{}^{k}$.

La variación del tensor de Ricci se relaciona con la variación de la conexión por

$$\delta R_{si} = D_i\,\delta\Gamma_{sk}{}^{k} - D_k\delta\Gamma_{si}{}^{k} + \tau_{mi}^{k}\,\delta\Gamma_{sk}{}^{m} \tag{23}$$

que representa la identidad de Palatini para el tensor de Ricci, y al igual que en (19), hemos conmutado la derivación respecto a las coordenadas espacio-temporales con la variación δ. La expresión (23) resultará especialmente últil en el cálculo de variaciones que nos permite obtener las ecuaciones de campo a partir de un principio variacional.

La identidad de Palatini también se puede extender a la variación de la curvatura homotética, obteniéndose

$$\delta V_{ir} = D_i\,\delta\Gamma_{kr}{}^{k} - D_r\delta\Gamma_{ki}{}^{k} + \tau_{ri}^{s}\,\delta\Gamma_{ks}{}^{k}.$$

El tensor de Ricci no es en general simétrico, no obstante siempre se puede descomponer en parte simétrica y antisimétrica

$$R_{si} = R_{(si)} + R_{[si]}.$$

En el caso especialmente importante en que la conexión sea simétrica (o sea, no haya torsión) entonces la parte antisimétrica del tensor de Ricci está relacionada con la curvatura homotética por

$$R_{[is]} = \frac{1}{2}V_{si}, \tag{24}$$

y la parte simétrica toma la forma

$$R_{(si)} = R_{si} - \frac{1}{2}V_{si} = \frac{1}{2}\Gamma_{sk,i}{}^{k} + \frac{1}{2}\Gamma_{ik,s}{}^{k} - \Gamma_{si,k}{}^{k} + \Gamma_{sk}{}^{t}\Gamma_{ti}{}^{k} - \Gamma_{si}{}^{t}\Gamma_{tk}{}^{k}.$$

La identidad de Palatini se extiende a las partes simétricas y antisimétricas del tensor de Ricci

$$\delta R_{(si)} = \frac{1}{2}\left(\delta R_{ik} + \delta R_{ki}\right)$$

entonces utilizando (23) y teniendo en cuenta que

$$\delta \Gamma_{(si)}{}^{k} = \delta \Gamma_{si}{}^{k} - \frac{1}{2}\delta \tau_{si}{}^{k}$$

queda

$$\delta R_{(si)} = D_{(s}\delta \Gamma_{i)k}{}^{k} - D_{k}\delta \Gamma_{si}{}^{k} + \frac{1}{2} D_{k}\delta \tau_{si}{}^{k} + \tau_{m(i}{}^{k}\delta \Gamma_{s)k}{}^{m}$$

y en el caso particular de que la conexión sea simétrica la anterior expresión se reduce a

$$\delta R_{(si)} = D_{(s}\delta \Gamma_{i)k}{}^{k} - D_{k}\delta \Gamma_{si}{}^{k} .$$

En cuanto a la variación de la parte antisimétrica del tensor de Ricci

$$\delta R_{[si]} = \frac{1}{2}\left(\delta R_{si} - \delta R_{is}\right)$$

utilizando (23) se deduce

$$\delta R_{[si]} = D_{[i}\,\delta \Gamma_{s]k}{}^{k} - \frac{1}{2} D_{k}\delta \tau_{si}{}^{k} + \tau_{m[i}{}^{k}\delta \Gamma_{s]\,k}{}^{m}$$

y para el caso especial de conexión simétrica

$$\delta R_{[si]} = D_{[i}\,\delta \Gamma_{s]k}{}^{k} .$$

Debemos añadir que si existiera un tensor métrico entonces sería posible subir y bajar los índices, de tal forma que podríamos obtener otra contracción del tensor de curvatura

$$R'_{ik} = R_{i}{}^{r}{}_{rk} = g^{rm} g_{in} R^{n}{}_{mrk}$$

si de nuevo se aplicara un nueva contracción se obtendría una curvatura escalar (ver más adelante) de signo opuesto a la que hallaríamos con el tensor de Ricci.

1.12.- Identidades de Bianchi

La derivada covariante del tensor de curvatura es

$$D_m R^{k}{}_{sir} = \partial_m R^{k}{}_{sir} + R^{t}{}_{sir}\Gamma_{tm}{}^{k} - R^{k}{}_{tir}\Gamma_{sm}{}^{t} - R^{k}{}_{str}\Gamma_{im}{}^{t} - R^{k}{}_{sit}\Gamma_{rm}{}^{t} ,$$

si consideramos que la conexión es simétrica, existirá en cada punto un sistema de coordenadas localmente geodésico, donde las conexiones son nulas. Si elegimos este sistema entonces

$$D_m R^k{}_{sir} = \partial_m \Gamma^k_{sr,i} - \partial_m \Gamma^k_{si,r} = \Gamma^k_{sr,im} - \Gamma^k_{si,rm}.$$

Permutando los índices *m*, *i*, *r* se obtiene

$$D_i R^k{}_{srm} = \Gamma^k_{sm,r,i} - \Gamma^k_{sr,mi}; \qquad D_r R^k{}_{smi} = \Gamma^k_{si,m,r} - \Gamma^k_{sm,ir}.$$

Al sumar las tres expresiones encontradas se llega a

$$D_m R^k{}_{sir} + D_i R^k{}_{srm} + D_r R^k{}_{smi} = 0 \tag{25}$$

que al ser una identidad tensorial y válida en un sistema de coordenadas determinado (sistema localmente geodésico), se mantendrá en cualquier otro sistema de referencia. A (25) se le llama identidad de Bianchi y es válida en el caso de conexión simétrica.

Es posible generalizar las identidades de Bianchi para el caso en que la conexión no sea simétrica, en este caso se encuentra por cálculo directo

$$D_m R^k{}_{sir} + D_i R^k{}_{srm} + D_r R^k{}_{smi} = R^k{}_{pmi} \tau_{rs}{}^p + R^k{}_{pir} \tau_{ms}{}^p + R^k{}_{prm} \tau_{is}{}^p$$

o en notación más compacta

$$R^k{}_{s\{ir;\, m\}} = R^k{}_{p\{mi} \tau_{r\}\, s}{}^p$$

donde el punto y coma representa la derivación covariante y $\{...\}$ es la suma de las permutaciones.

1.13.- Tensor métrico

Consideremos un espacio euclídeo expresado en coordenadas curvilíneas. En cada punto existe un conjunto de vectores básicos $(\mathbf{e}_k)$ que dependen del punto en que están definidos. Sus productos escalares nos dan un conjunto de números que dependen del punto del espacio, que tiene carácter de tensor de segundo orden covariante y al que llamamos tensor métrico

$$g_{ik} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k.$$

El cuadrado del módulo de un vector $d\mathbf{x} = dx^k \mathbf{e}_k$, que corresponde al cuadrado de la distancia infinitesimal entre sus extremos $ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$, es

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

que le llamamos elemento de línea del espacio euclídeo.

Este resultado lo extendemos a un espacio genérico y decimos que el tensor métrico es un tensor covariante de segundo orden asociado al espacio, es decir, que se trata de un campo tensorial $g_{ik}(x^r)$ que no es singular, lo que significa que su determinante es distinto de cero.

Consideremos dos puntos A y B definidos por las coordenadas x^r y $x^r + dx^r$ respectivamente; se llama distancia entre los dos puntos a la cantidad infinitesimal dada por

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k . \tag{26}$$

El tensor métrico no es en general simétrico. Sin embargo, sólo la parte simétrica interviene en el cálculo de la distancia, en efecto

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g_{(ik)} dx^i dx^k + g_{[ik]} dx^i dx^k = g_{(ik)} dx^i dx^k ,$$

donde el sumando que contiene la parte antisimétrica del tensor métrico se anula al tener en cuenta que se pueden intercambiar entre sí los índices mudos *i* y *k*.

Con el tensor métrico se puede realizar la elevación o descenso de índices. Dado un vector cuyas componentes se encuentren en forma contravariante v^k, podemos obtener las componentes covariantes por la operación

$$v_s = g_{ks} v^k , \tag{27}$$

entendemos que ambos conjuntos de componentes representan al mismo vector, que de esta forma viene dado por dos conjuntos diferentes de componentes pero relacionadas entre sí.

De igual forma se pueden descender los índices de un tensor, en operaciones tales como las siguientes

$$t_{rs} = g_{ir} g_{ks} t^{ik}$$

o bien como

$$t_{rs} = g_{kr} t^k{}_s ,$$

nótese el orden en que aparezcen los índices del tensor métrico.

Como el tensor métrico es invertible (por ser singular), debe tener un inverso g'^{ks}, tal que cumpla

$$g_{rk} g'^{ks} = \delta_r^s$$

Si *g* es el determinante del tensor métrico g_{rk} ; α^{is} el menor adjunto asociado al elemento *i*, *s* y $\tilde{\alpha}^{is} = \alpha^{si}$ su traspuesta, entonces el inverso del tensor métrico es

$$g'^{ks} = \tilde{\alpha}^{ks} / g = \alpha^{sk} / g .$$

Pero se prefiere en vez de utilizar g'^{ks}, interpretar el tensor métrico en componentes contravariantes como el traspuesto del tensor inverso, es decir

$$g^{ks} = \frac{1}{g}\alpha^{ks}, \tag{28}$$

entonces la relación entre las componentes del tensor métrico en función de sus componentes contravariante y covariante es

$$g_{kr}g^{ks} = \delta_r^s. \tag{29}$$

Como se ve por el orden de los índices, (29) no es la operación matricial $G \cdot G^{-1} = I$, donde G es la matriz de elementos g_{kr}, sino la ecuación $G \cdot \tilde{G}^{-1} = I$, donde G^{-1} tiene de elementos los g'^{rk} anteriormente definidos.

De (29) se obtiene

$$g_{rk}g^{sk} = \delta_r^s.$$

De (29) también se deduce que g^{ks} son las componentes de un tensor de segundo orden contravariante.

El tensor métrico también nos permite elevar los índices tensoriales. En efecto, multiplicando (27) por g^{rs}

$$g^{rs}v_s = g^{rs}g_{ks}v^k = \delta_k^r v^k = v^r$$

con lo que se logra subir los índices. Este método es extensible para subir o bajar los índices de las componentes de los tensores, por ejemplo $t^{pq} = g^{pr}g^{qk}t_{rk}$.

El determinante del tensor métrico en un espacio tetradimensional, tal como el espacio-tiempo ordinario, es

$$g = \varepsilon^{pqrs}g_{1p}\,g_{2q}\,g_{3r}\,g_{4s},$$

que también se puede desarrollar haciendo uso de los menores adjuntos, por ejemplo

$$g = g_{1p}\left(\varepsilon^{pqrs}g_{2q}\,g_{3r}\,g_{4s}\right) = g_{1p}\,\alpha^{1p}.$$

La derivada del determinante del tensor métrico se puede desarrollar por sus menores adjuntos

$$dg = dg_{1p}\left(\varepsilon^{pqrs}g_{2q}\,g_{3r}\,g_{4s}\right) + dg_{2q}\left(\varepsilon^{pqrs}g_{1p}\,g_{3r}\,g_{4s}\right) +$$
$$+ dg_{3r}\left(\varepsilon^{pqrs}g_{1p}\,g_{2q}\,g_{4s}\right) + dg_{4s}\left(\varepsilon^{pqrs}g_{1p}\,g_{2q}\,g_{3r}\right)$$

o bien

$$dg = dg_{pq}\,\alpha^{pq}$$

donde α^{pq} es el menor adjunto asociado al elemento p, q del tensor métrico. Haciendo uso de (28) queda

$$dg = gg^{pq}\,dg_{pq} \quad \Rightarrow \quad \delta g = g\,g^{pq}\delta g_{pq} \tag{30}$$

y la derivación parcial y covariante son

$$\partial_k g = g\,g^{pq}\,\partial_k g_{pq}\,; \qquad D_k g = g\,g^{pq}\,D_k g_{pq}\,.$$

Insistamos en que la expresión (30) es válida para una variación general del determinante del tensor métrico. Además como $g_{qp}g^{qp} = 4$ entonces $g_{qp}\delta g^{qp} = -g^{pq}\delta g_{pq}$ y por tanto

$$\delta g = -gg_{pq}\delta g^{pq}\,. \tag{31}$$

Consideremos un tensor cualquiera a_{ik}, al determinante de la matriz cuyos elementos son los a_{ik} lo representamos por a, mientras que α^{ik} es el menor adjunto asociado al elemento (i,k) de la matriz a_{ik}. El inverso de la matriz (a_{ik}) (si existe, es decir si $a \neq 0$) es la matriz cuyos elementos son a^{*ik} tal que

$$a_{ik}\,a^{*kr} = \delta_i^r\,.$$

por tanto a^{*kr} es un tensor. Por definición de determinante, los elementos de la matriz inversa se relacionan con los menores adjuntos por

$$a^{*kr} = \frac{1}{a}\alpha^{rk}$$

Al igual que antes con el tensor métrico, se calcula la variación del determinante de a_{ik} que en nuestro caso es

$$\delta a = \delta a_{pq}\,\alpha^{pq} = aa^{*qp}\delta a_{pq}\,. \tag{32}$$

Un tensor métrico asimétrico se descompone en parte simétrica y antisimétrica

$$g_{ik} = g_{(ik)} + g_{[ik]} = \gamma_{ik} + \varphi_{ik}$$

donde γ_{ik} representa la parte simétrica y φ_{ik} la antisimétrica. El tensor métrico en forma contravariante también se descompone en parte simétrica h^{ik} y en parte antisimétrica f^{ik}

$$g^{ik} = h^{ik} + f^{ik}$$

Como hemos visto anteriormente el menor adjunto del elemento i, k de γ_{ik}

es

$$\alpha^{ik} = \gamma\gamma^{*ki}$$

donde γ es el determinante de la matriz cuyos elementos son γ_{ik} y γ^{*ki} son los elementos de la matriz inversa de γ_{ik}. Vamos a definir las componentes γ^{ik} como

$$\gamma^{ik} = \gamma^{*ki}$$

es decir que las γ^{ik} son los elementos de la matriz traspuesta de la inversa de γ_{ik}. Como por definición de γ^{*ki} cumple $\gamma_{ij}\gamma^{*jk} = \delta_i^k$ entonces multiplicando ambos miembros por γ^{*ri} queda

$$\gamma^{*ki}\gamma_{ij}\gamma^{*jr} = \gamma^{*ki}\delta_i^r = \gamma^{*kr} \quad \Rightarrow \quad \gamma^{*ki}\gamma_{ij} = \delta_j^k \ ,$$

y por la definición de γ^{ik} tenemos

$$\gamma_{ij}\gamma^{ik} = \gamma_{ij}\gamma^{*ki} = \delta_j^k \ ,$$

e iguamente hacemos con las otras componentes

$$\varphi_{ij}\varphi^{ik} = \delta_j^k; \quad h_{ij}h^{ik} = \delta_j^k; \quad f_{ij}f^{ik} = \delta_j^k .$$

En un espacio de cuatro dimensiones, al que suponemos con signatura –2, el determinante de un tensor antisimétrico como φ_{ij} es

$$\varphi = \left(\varphi_{12}\varphi_{34} + \varphi_{31}\varphi_{24} + \varphi_{23}\varphi_{14}\right)^2 .$$

Por cómputo directo se comprueba que

$$\varepsilon^{ikpq}\varphi_{ik}\varphi_{pq} = 8\sqrt{\varphi}$$

e igualmente

$$\varepsilon^{ikpq}\varphi_{im}\varphi_{pq} = 0$$

si $k \neq m$. Entonces

$$\varepsilon^{ikpq}\varphi_{im}\varphi_{pq} = 2\sqrt{\varphi}\,\delta_m^k ,$$

multiplicando ambos términos por φ^{rm} se llega a

$$\varphi^{rk} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\varepsilon^{rkpq}\varphi_{pq} \tag{33}$$

que nos relaciona las componentes contravariantes de la parte antisimétrica del tensor métrico con sus componentes covariantes. Una fórmula igual que (33) se aplica a f^{ik}.

Como γ_{ij} es simétrico y real es siempre posible elegir en cada punto del espacio un sistema de coordenadas respecto al cual γ_{ij} tenga la siguiente forma diagonal

$$\left(\gamma_{ik}\right)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda\end{pmatrix}$$

donde λ es un número positivo cualquiera. En el sistema de coordenadas elegido el determinante de γ_{ik} es $\gamma=-\lambda^4$. Démonos cuenta que en otro punto del espacio el tensor γ_{ik} tendrá, en general, una forma distinta de la diagonal, pero nosotros los cálculos lo estamos haciendo con referencia a un sólo punto, aquel en el que γ_{ik} tiene forma diagonal.

La parte antisimétrica del tensor métrico es

$$\left(\varphi_{ik}\right)=\begin{pmatrix}0 & -\delta & \beta & -X\\ \delta & 0 & -\alpha & -Y\\ -\beta & \alpha & 0 & -Z\\ X & Y & Z & 0\end{pmatrix},$$

al hallar directamente el determinante de g_{ik} se encuentra

$$g=-\lambda^4-\lambda^2\left(\alpha^2+\beta^2+\delta^2-X^2-Y^2-Z^2\right)+\left(\alpha X+\beta Y+\delta Z\right)^2,$$

un cálculo directo nos da

$$\varphi=\left(\alpha X+\beta Y+\delta Z\right)^2$$

entonces

$$g=\gamma+\varphi-\lambda^2\left(\alpha^2+\beta^2+\delta^2-X^2-Y^2-Z^2\right).$$

Teniendo presente que

$$\left(\gamma^{ik}\right)=\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

entonces se calcula directamente que

$$\frac{\lambda^2}{2}\gamma^{im}\gamma^{kr}\varphi_{mr}\varphi_{ik}=\alpha^2+\beta^2+\delta^2-X^2-Y^2-Z^2$$

por tanto nos queda

$$g=\gamma+\varphi+\frac{\gamma}{2}\gamma^{im}\gamma^{kr}\varphi_{mr}\varphi_{ik},$$

si suponemos que los determinantes de g y γ son negativos, tendremos

$$\begin{gathered}g=-|g|=-|\gamma|+\varphi-\frac{|\gamma|}{2}\gamma^{im}\gamma^{kr}\varphi_{mr}\varphi_{ik}\\|g|=|\gamma|-\varphi+\frac{|\gamma|}{2}\gamma^{im}\gamma^{kr}\varphi_{mr}\varphi_{ik}.\end{gathered}\tag{34}$$

Esta expresión la hemos calculado para un determinado sistema de coordenadas, aquel en que la parte simétrica del tensor métrico tiene forma diagonal. Los tres sumandos del segundo miembro de (34) dependen del determinante de un tensor de segundo orden y los últimos cuatro factores forman un invariante. Ante una transformación de coordenadas los tres determinantes que aparecen en (34) se transforman con la misma ley, es decir, (34) es una expresión invariante aunque no tensorial. Entonces si es válida para un determinado sistema de coordenadas, seguirá siendo válida en cualquier otro sistema, por tanto (34) tiene carácter general.

Para obtener las partes simétrica y antisimétrica de las componentes contravariantes del tensor métrico partimos de (30)

$$\begin{gathered}dg=gg^{ik}dg_{ik}=g\left[g^{(ik)}+g^{[ik]}\right]\left[d\gamma_{ik}+d\varphi_{ik}\right]=\\=gg^{(ik)}d\gamma_{ik}+gg^{[ik]}d\varphi_{ik}\end{gathered}\tag{35}$$

hemos tenido en consideración que son nulos los productos de las componentes simétricas por las antisimétricas.

De (35) deducimos

$$\begin{gathered}g^{(ik)}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial\gamma_{ik}}\\g^{[ik]}=\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial\varphi_{ik}}\end{gathered}\tag{36}$$

Para llevar a cabo la diferenciación (36) debemos considerar la relación (32) aplicada a γ_{ik} que recordemos es un tensor simétrico e igual propiedad tiene γ^{*ik}

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\gamma_{ik}}=\gamma\gamma^{*ki}=\gamma\gamma^{*ik},\tag{37}$$

además como

$$d\left(\gamma^{*pk}\gamma^{*qi}\gamma_{pq}\right)=d\gamma^{*ki}=d\gamma^{*ik}+d\gamma^{*ki}+\gamma^{*pk}\gamma^{*qi}d\gamma_{pq}$$
$$d\gamma^{*ik}=-\gamma^{*pk}\gamma^{*qi}d\gamma_{pq},$$

entonces

$$\frac{\partial\gamma^{*ik}}{\partial\gamma_{pq}}=-\frac{1}{2}\left(\gamma^{*pk}\gamma^{*qi}+\gamma^{*qk}\gamma^{*pi}\right) \tag{38}$$

donde hemos simetrizado la expresión dado el carácter simétrico de γ^{*ik} y de γ_{pq}.

Ahora estamos en condiciones de resolver las dos ecuaciones (36), utilizando para ello (34), (37 y (38) resultando

$$\begin{aligned} g^{(ik)} &= \frac{\gamma}{g}\left[\gamma^{ki}\left(1+\frac{1}{2}\varphi_{mr}\varphi^{mr}\right)-\varphi^{iq}\varphi^{k}{}_{q}\right] \\ g^{[ik]} &= \frac{\gamma}{g}\left[\varphi^{ik}+\frac{1}{2\gamma}\left(\frac{1}{8}\varepsilon^{mnpq}\varphi_{mn}\varphi_{pq}\right)\varepsilon^{ikpq}\varphi_{pq}\right] \end{aligned} \tag{39}$$

indiquemos que los índices de φ_{ik} han sido elevados por γ^{*ik}.

Si suponemos que γ_{ik} es del orden la unidad y φ_{ik} es infinitesimal o de primer orden, entonces tenemos

$$g\equiv\gamma+O(2);\quad g^{(ik)}\equiv\gamma^{*ík}+O(2)$$

$O(2)$ representa infinitésimos de segundo orden o de orden superior ya que se encuentran productos de φ_{ik} por sí mismo; nótese que en el cálculo hemos tenido en cuenta que $g\approx\gamma$. Además

$$g^{[ik]}=\varphi^{ik}+O(2)=O(1)+O(2)$$

por tanto en las condiciones establecidas podemos hacer

$$g\approx\gamma;\quad g^{(ik)}\approx\gamma^{ki}=\gamma^{ik};\quad g^{[ik]}\approx\varphi^{ik}$$

o bien

$$g_{(ik)}g^{(ir)}\approx\delta_k^r;\quad g_{[ik]}g^{[ir]}\approx 0$$

donde los índices son bajados por γ_{ik}, obteniéndose el mismo resultado si se utilizara $g_{(ik)}$ o g_{ik} para bajar los índices.

Para terminar este epígrafe indiquemos que la derivada covariante de la delta de Kronecker es nula, en efecto

$$D_p\delta_s^r=\partial_p\delta_s^r+\delta_s^m\Gamma_{mp}{}^{r}-\delta_m^r\Gamma_{sp}{}^{m}=0+\Gamma_{sp}{}^{r}-\Gamma_{sp}{}^{r}=0,$$

al aplicar la regla de Leibnitz de la derivación a (29) se halla la derivada covariante de g^{ik}. En particular, si es nula la derivada covariante de g_{ik} también lo será la de g^{ik} y viceversa.

1.14.- Espacio euclidiano tangente

Consideremos un espacio V donde se ha definido un tensor métrico. Es siempre posible asociar en cada punto P de ese espacio un espacio euclídeo E, de la misma dimensión que V, que contenga al punto P y que en un entorno de este punto coincidan las propiedades métricas de E y V. Al espacio E se le llama euclidiano tangente.

Si g^0_{ik} es el tensor métrico de V en el punto P que tiene de coordenadas x^k_0, el espacio euclídeo tangente E tiene en el punto P el tensor métrico $g^0_{(ik)}$. Los puntos *M* del espacio E en un entorno del punto P tienen las coordenadas curvilíneas X^k, los puntos $\mathrm{m}(x^k)$ de V en un entorno de P están relacionados con los puntos $\mathrm{M}(X^k)$ de E mediante una relación de la forma

$$X^k = x^k - x^k_0 + \Psi^k_{(2)}\left(x^r - x^r_0\right) + X^k_0 \tag{40}$$

donde X^k_0 son las coordenadas del punto P en el sistema de coordenadas del espacio euclídeo E y $\Psi^k_{(2)}$ representa una función de segundo orden respecto a $x^r - x^r_0$.

Consideremos el punto $\mathrm{m}(x^k_0 + dx^k)$ situado en un entorno infinitesimal del punto P. La distancia entre ese punto y el punto $\mathrm{m}(x^k_0)$ viene dada, tal como sabemos, por

$$ds^2 = g^0_{(ik)}\, dx^i dx^k$$

Sea $\mathrm{M}(X^k_0 + dX^k)$ el punto del espacio E que corresponde por (33) al punto $\mathrm{m}(x^k_0 + dx^k)$, la distancia entre los puntos M y P pertenecientes al espacio euclídeo será

$$dS^2 = g^0_{(ik)}\, dX^i dX^k$$

ahora bien como por (40)

$$dX^k \approx dx^k$$

entonces la distancia infinitesimal entre puntos del entorno infinitesimal de P es igual tanto en el espacio euclídeo tangente E como en el espacio V

$$dS^2 = ds^2 .$$

O sea, las propiedades métricas de ambos espacios son localmente idénticas. Esto significa que podemos, sin más, extender los resultados métricos conocidos del espacio euclídeo al espacio V, al menos en un entorno infinitesimal de cada punto.

Hay que darse cuenta que esta identidad encontrada sólo se refiere a las propiedades métricas. No se garantiza la coincidencia entre las conexiones asociadas a los espacios E y V, lo que significa que las propiedades diferenciales serán diferentes en uno y en otro espacio.

1.15.- Espacio de Riemann

Hasta ahora hemos estado considerando espacios genéricos. Ahora vamos a considerar los dos que tienen más importancia en Física, los espacios de Riemann y los euclidianos.

Un espacio de Riemann viene caracterizado por las siguientes propiedades:

a) Tiene un tensor métrico simétrico.
b) Tiene asociada una conexión afín también simétrica.
c) La derivada covariante del tensor métrico es nula.

De la última condición y permutando los subíndices *k*, *p*, *q*

$$\begin{aligned} D_k g_{pq} &= \partial_k g_{pq} - g_{sq}\Gamma_{pk}{}^{s} - g_{ps}\Gamma_{qk}{}^{s} = 0 \\ D_q g_{kp} &= \partial_q g_{kp} - g_{sp}\Gamma_{kq}{}^{s} - g_{ks}\Gamma_{pq}{}^{s} = 0 \\ D_p g_{qk} &= \partial_p g_{qk} - g_{sk}\Gamma_{qp}{}^{s} - g_{qs}\Gamma_{kp}{}^{s} = 0 \end{aligned}$$

restando la segunda de la primera, sumándole la tercera y teniendo presente las propiedades de simetría se encuentra

$$\Gamma_{kp}{}^{s} = L_{kp}{}^{s} = \frac{1}{2} g^{sq}\left(\partial_k g_{pq} + \partial_p g_{kq} - \partial_q g_{kp}\right), \qquad (41)$$

a esta conexión, característica de los espacios riemannianos, se le llama símbolos de Christoffel. De ellos se pueden obtener otros símbolos totalmente covariantes

$$L_{kpr} = g_{rs} L_{kp}{}^{s}.$$

Téngase presente que esta coincidencia entre la conexión y los símbolos de Christoffel es una característica de los espacios de Riemann y no es extensible, en general, a otros tipos de espacios.

Se distinguen los espacios propiamente riemannianos como aquellos que quedan definidos porque el cuadrado de la distancia entre dos puntos (ds^2) siempre es mayor que cero. Reservándose el nombre de espacios impropiamente riemannianos para aquellos en los que no se cumple el anterior requisito, pudiendo ser en este caso el cuadrado de la distancia mayor, menor o igual a cero.

Una clase especial de espacios de Riemann lo representan los espacios euclídeos, que vienen caracterizados porque es siempre posible encontrar un sistema de coordenadas respecto al cual el tensor métrico sea el mismo en todos los puntos del espacio. De aquí resulta que la conexión, obtenida a partir de (41) es nula en todos los puntos de este espacio y respecto al sistema de coordenadas anteriormente elegido.

Como el tensor métrico en el caso de un espacio euclídeo es simétrico y real existirá siempre una transformación de coordenadas que ponga al tensor métrico en forma diagonal y posteriormente mediante un cambio de escala llevar estos elementos diagonales a los valores +1 ó –1.

1.16- Teorema de unicidad

Vamos a demostrar que en un espacio de Riemann el tensor de curvatura es el único tensor que puede ser construido a partir del tensor métrico, de su primera derivada, siendo lineal respecto a las segundas derivadas. Para la demostración nos vamos a referir a un sistema localmente geodésico, en el que tanto los símbolos de Christoffel como las primeras derivadas del tensor métrico son nulas en un punto dado.

Nos proponemos buscar un tensor que dependa del tensor métrico y de sus derivadas segundas. Consideremos una transformación de un sistema de coordenadas localmente geodésicas a otro sistema de igual característica. La ley de transformación de la conexión será (10) que al derivarla se obtiene

$$\partial'_m L'_{ri}{}^{k} = B^s_r B^q_i A^k_p \partial'_m L_{sq}{}^{p} + \partial'_m \left(B^s_{ri} A^k_s \right), \tag{42}$$

donde hemos tenido en cuenta que las conexiones, tanto en el sistema de coordenadas original como en el transformado, son nulas

Estamos buscando un tensor que dependa linealmente de las segundas derivadas del tensor métrico, o lo que es lo mismo, que dependa de las primeras derivadas de los símbolos de Christoffel. El único tensor de estas características es el obtenido de la diferencia de las primeras derivadas de los símbolos de Christoffel

$$T^k{}_{rit} = \partial_t L_{ri}{}^k - \partial_i L_{rt}{}^k$$

que al cambiar de uno a otro sistema localmente geodésico se transforma como un tensor, en efecto de (42) se sigue

$$T'^p{}_{sqm} = B^r_s B^i_q B^t_m A^p_k \left(\partial_t L_{ri}{}^k - \partial_i L_{rt}{}^k \right).$$

Se observa que en un sistema localmente geodésico se cumple

$$T^k{}_{rit} = R^k{}_{rit},$$

entonces respecto al sistema de coordenadas considerado el tensor de curvatura es el único que depende linealmente de las derivadas segundas del tensor métrico. Ahora tenemos que demostrar que esta propiedad del tensor de curvatura se cumple en cualquier otro sistema de coordenadas.

Si hubiese otro tensor $N^k{}_{rim}$ con iguales características, al representarlo en un sistema localmente geodésico se encontraría

$$N^k{}_{rit} = T^k{}_{rit},$$

y por el resultado obtenido

$$N^k{}_{rit} = R^k{}_{rit},$$

como los dos miembros son tensores, la igualdad se mantendrá en cualquier otro sistema de coordenadas, lo que demuestra la unicidad indicada del tensor de curvatura.

Es evidente que los tensores derivados mediante contracción del tensor de curvatura también tendrán la propiedad exigida de depender del tensor métrico y de sus derivadas primeras y que sea lineal respecto a las segundas derivadas; tal será el caso el tensor de Ricci y de su contracción, la curvatura escalar.

1.17.- Condición necesaria y suficiente para que un espacio riemaniano sea euclídeo

Vamos a demostrar que la condición necesaria y suficiente para que un espacio de Riemann sea euclídeo es que el tensor de curvatura sea idénticamente nulo.

Demostremos que la condición es necesaria. Supongamos un espacio euclídeo referido a un sistema de coordenadas respecto al cual el tensor métrico toma el mismo valor en todos los puntos. Entonces serán nulas las derivadas del tensor métrico y también los símbolos de Christoffel y por lo tanto será nulo el tensor de curvatura de Riemann. Si este tensor es nulo respecto a un sistema de coordenadas, será nulo en cualquier otro sistema de coordenadas, quedando demostrada la condición necesaria.

Vamos ahora a demostrar que la condición de nulidad del tensor de curvatura es suficiente para que el espacio de Riemann sea euclídeo. Consideremos un vector de componentes A^k definido en un punto cualquiera del espacio. Según sabemos se puede a partir de este vector crear infinitos campos vectoriales, obtenidos trasladando paralelamente el vector desde su posición inicial por caminos diferentes. Sea uno de estos infinitos campos $A^k(x^i)$ que debe tener la propiedad de que su derivada covariante es nula

$$dA_k = A_s \Gamma_{kr}^{\ \ s} dx^r \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A_k}{\partial x^r} = A_s \Gamma_{kr}^{\ \ s}.$$

Vamos a demostrar que cuando el tensor de curvatura es nulo entonces dA_k es una diferencial exacta, es decir que su derivada se puede poner como

$$dA_k = \frac{\partial A_k}{\partial x^r} dx^r,$$

esta circunstancia se dará cuando

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left(A_s \Gamma_{kr}^{\ \ s}\right) - \frac{\partial}{\partial x^r}\left(A_s \Gamma_{km}^{\ \ s}\right) = 0$$

que al desarrollar queda

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left(A_s \Gamma_{kr}^{\ \ s}\right) - \frac{\partial}{\partial x^r}\left(A_s \Gamma_{km}^{\ \ s}\right) = A_s R^s_{\ kmr}$$

que efectivamente es cero ya que hemos puesto de condición que el tensor de curvatura es nulo, con lo que queda demostrado que dA_k es una diferencial exacta. Esto significa que cuando trasladamos paralelamente el vector A_k obtenemos un campo único independientemente del camino que se siga, es decir que la integral de dA_k es la misma con independencia del camino seguido.

Consideremos cuatro campos vectoriales obtenidos a partir de traslaciones paralelas de cuatro vectores $A^i_{(k)}$ que en un punto dado sean linealmente independientes

$$\alpha^k A^i_{(k)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^k = 0 \tag{43}$$

donde *i* representa las componentes y *k* identifica a cada uno de los cuatro vectores.

Comprobemos primeramente que la independencia lineal se seguirá manteniendo después de hacer una traslación paralela

$$\alpha^k \left[A^i_{(k)} + dA^i_{(k)} \right] = \alpha^k A^i_{(k)} + d\left(\alpha^k A^i_{(k)}\right) = 0$$

expresión que sólo puede ser nula si $\alpha^k A^i_{(k)}$ es nula, pero en este caso por (43) implica que $\alpha^k = 0$, lo que nos muestra que los vectores desplazados paralelamente siguen siendo linealmente independientes.

Lo anterior significa que los $A^i_{(k)}$ son funciones únicas de las coordenadas y linealmente independientes entre sí. Si imaginamos las $A^i_{(k)}$ representandas por una matriz de orden N si el espacio tiene de dimensión N, debemos de concluir que su determinante es distinto de cero.

A continuación vamos a realizar la siguiente transformación de coordenadas

$$dx'^i = A^i_{(k)} dx^k$$

que como ya hemos demostrado, es invertible por ser distinto de cero el determinante formado por $A^i_{(k)}$. Con esta transformación el tensor métrico cambiará según

$$g'_{pq} = A^i_{(p)} A^k_{(q)} g_{ik},$$

derivando

$$\frac{\partial g'_{pq}}{\partial x^r} = A^i_{(p)} A^k_{(q)} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} + A^i_{(p)} g_{ik} \frac{\partial A^k_{(q)}}{\partial x^r} + A^k_{(q)} g_{ik} \frac{\partial A^i_{(p)}}{\partial x^r}$$

o bien

$$\frac{\partial g'_{pq}}{\partial x^r} = A^i_{(p)} A^k_{(q)} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r} - A^i_{(p)} g_{ik} A^s_{(q)} \Gamma^k_{sr} - A^k_{(q)} g_{ik} A^s_{(p)} \Gamma^i_{sr}$$

y sacando factor común

$$\frac{\partial g'_{pq}}{\partial x^r} = A^i_{(p)} A^k_{(q)} \left[\partial_r g_{ik} - g_{mk} \Gamma_{ir}{}^m - g_{im} \Gamma_{kr}{}^m \right] = A^i_{(p)} A^k_{(q)} D_r g_{ik}$$

que es nulo por serlo la derivada covariante del tensor métrico y como el determinante de $A^i_{(k)}$ es distinto de cero, resulta que la derivada del tensor métrico g_{pq} es nula, es decir, el tensor métrico no depende de la coordenada x^k y por tanto tampoco depende de la coordenada x'^k. O sea, el tensor métrico es el mismo en todos los puntos del espacio. Hemos encontrado, por lo tanto, un sistema que reúne los requisitos exigidos para que un espacio de Riemann sea euclídeo, con lo que queda demostrado el teorema.

1.18.- Tensor de no-metricidad

Se define el tensor de no-metricidad de un espacio como la derivada covariante del tensor métrico

$$Q_{pqr} = D_r g_{pq},$$

que resulta ser un tensor y en general no nulo. La anulación del tensor de no-metricidad impone 40 condiciones en el caso de tensor métrico simétrico y 64 en el caso de no simetría del tensor métrico.

Se define el tensor contorsión por la expresión

$$K_{rpq} = \tau_{rpq} + \tau_{pqr} - \tau_{qrp}$$

donde

$$\tau_{pqr} = g_{kr}\tau_{pq}{}^{k} = 2g_{kr}\Gamma_{[pq]}^{\ \ k}$$

es el tensor de torsión (14) en forma covariante.

Si partimos de un espacio de tensor métrico simétrico, es posible establecer una relación entre el tensor de no-metricidad, el tensor de contorsión y la conexión afín, de la que no se exige que sea simétrica; por tanto estaríamos tratando con un espacio no riemanniano. La relación a la que nos referimos que se comprueba por cálculo directo es

$$\Gamma_{rpq} = L_{rpq} + \frac{1}{2}K_{rpq} + \frac{1}{2}\left(Q_{rpq} - Q_{pqr} - Q_{qrp}\right) \tag{44}$$

donde hemos definido

$$\Gamma_{rpq} = g_{kq}\Gamma_{rp}{}^{k}; \qquad L_{rpq} = g_{kq}L_{rp}{}^{k}.$$

(44) se descompone en parte simétrica y antisimétrica

$$\begin{gathered}\Gamma_{(rp)\,q} = L_{rpq} + \frac{1}{2}\left(\tau_{pqr} - \tau_{qrp}\right) + \frac{1}{2}\left(Q_{rpq} - Q_{pqr} - Q_{qrp}\right)\\ \Gamma_{[pq]\,r} = \frac{1}{2}\tau_{rpq}\end{gathered} \tag{45}$$

por tanto, conocidos el tensor métrico, el de no metricidad y la parte antisimétrica de la conexión (o sea, la torsión), se obtiene su parte simétrica.

De (44) podemos comprobar que incluso en el caso de que sean distintos de cero el tensor de no-metricidad y el tensor de torsión, los símbolos de Christoffel, tal como son definidos en (41), representan una conexión. En efecto de (44) vemos que la diferencia entre la conexión $\Gamma_{kp}{}^{s}$ y los símbolos de Christoffel es un tensor, lo que garantiza que $L_{kp}{}^{s}$ se transforma como (10), es decir es una conexión.

En el caso de que no se considere nulo el tensor de Schouten (42) se generaliza a la siguiente expresión

$$\Gamma_{rpq} = L_{rpq} + \frac{1}{2}K_{rpq} + \frac{1}{2}\left(Q_{rpq} - Q_{pqr} - Q_{qrp}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left[C_{(p|r|q)} + C_{(r|p|q)} - C_{(r|q|p)}\right]$$

En el caso particular de un espacio de Riemann, donde son simétricos tanto el tensor métrico como la conexión y es nulo el tensor de no-metricidad, entonces la conexión es idéntica a los símbolos de Christoffel.

Y viceversa, si la conexión es idéntica a los símbolos de Christoffel entonces es nulo el tensor de no-metricidad y también el tensor de contorsión. En efecto el carácter simétrico de los símbolos de Christoffel implica la nulidad del tensor de torsión y por tanto será también nulo el tensor de contorsión. Además, y teniendo en cuenta la simetría del tensor métrico, se comprueba de manera directa que la derivada covariante del tensor métrico es nula si la conexión son los símbolos de Christoffel.

Finalmente advertimos que aunque el tensor de no-metricidad sea nulo, ello no implica que la conexión sea simétrica. Dicho de otra forma, los carácteres simétricos de la métrica y de la conexión y la nulidad del tensor de no-metricidad son condiciones independientes entre sí. Estas tres condiciones definen, como hemos visto, al espacio de Riemann.

Se dice que una geometría es semimétrica si cumple

$$Q_{ikr} = Q_r g_{ik} ,$$

donde Q_r es un vector covariante que llamaremos vector de Weyl. Si se cumple esta condición y además es nula la torsión, la relación entre la conexión y los símbolos de Christoffel es

$$\Gamma_{kp}{}^{r} = L_{kp}{}^{r} + \frac{1}{2}Q^{r} g_{kp} - \frac{1}{2}Q_{k}\delta_{q}^{r} - \frac{1}{2}Q_{p}\delta_{k}^{r} , \tag{46}$$

que es la conexión utilizada en la teoría de campo unificado de Weyl.

El carácter de conexión que tienen los simbolos de Christoffel nos permite definir una nueva derivada covariante que caraterizaremos por un asterisco. Para el caso de un vector en forma contravariante definimos

$$\overset{*}{D}_{k} v^{r} = \partial_{k} v^{r} + v^{s} L_{sk}{}^{r} , \tag{47}$$

esta derivación se puede extender a vectores covariantes y a tensores de orden cualquiera.

Notemos que la derivada covariante con asterisco del tensor métrico es nula

$$\overset{*}{D}_k g_{ir} = \partial_k g_{ir} - g_{sr} L_{ik}{}^s - g_{is} L_{rk}{}^s = 0$$

como se puede comprobar por sustitución directa, donde tenemos en cuenta que estamos considerando geometrías con tensor métrico simétrico, lo que viene a significar que los símbolos de Christoffel son simétricos respecto a los índices covariantes.

Advertimos que al utilizar como conexión los símbolos de Christoffel y teniendo presente que el tensor métrico es simétrico obtenemos expresiones geométricas en todo idénticas a las de la geometría de Riemann.

Si suponemos que es nulo el tensor de no-metricidad y simétrico el tensor métrico, entonces de (45) tenemos que la parte simétrica de la conexión es

$$\Gamma_{(rp)}{}^s = L_{rp}{}^s + \frac{1}{2} g^{qs} \left(\tau_{pqr} - \tau_{qrp} \right) = L_{rp}{}^s + g^{sq} T_{qrp} \tag{48}$$

que es a su vez una conexión. El tensor T_{qrp} cumple la siguiente propiedad de simetría

$$T_{qpr} = \frac{1}{2}\left(\tau_{rqp} - \tau_{qpr} \right) = \frac{1}{2}\left(-\tau_{qrp} + \tau_{pqr} \right) = T_{qrp} \tag{49}$$

donde se ha tenido en cuenta la antisimetría del tensor de torsión respecto sus dos primeros índices. Igualmente el tensor T_{qrp} cumple la relación

$$T_{qrp} + T_{rpq} + T_{pqr} = 0 \tag{50}$$

como se comprueba por cálculo directo.

Por lo expuesto anteriormente podemos considerar una nueva conexión

$$\Gamma_{rp}{}^s = L_{rp}{}^s + g^{sq} T_{qrp} \tag{51}$$

donde ahora el tensor T_{qrp} es un tensor general con las únicas condiciones de cumplir las simetrías (49) y (50). A la conexión (51) le llamaremos conexión de Schrödinger y tiene carácter simétrico.

La condición necesaria y suficiente para que el módulo de un vector no varíe cuando se le somete a un desplazamiento paralelo en su propia dirección es que la conexión simétrica sea la (51). Consideremos el vector A^k que al ser trasladado paralelamente cumple $DA^k = 0$, entonces

$$dA^k = -A^s \Gamma_{sr}{}^k dx^r$$

como estamos tratando traslación en la propia dirección del vector debe ocurrir que dA^k es paralelo a dx^k o bien

$$A^k = \frac{dx^k}{dt} \quad \Rightarrow \quad dA^k = -A^s A^r \Gamma_{sr}^{\ \ k} dt$$

donde t es un parámetro afín.

Comprobemos que si la conexión es la (51) entonces el módulo

$$A^2 = g_{ik} A^i A^k$$

no varía en la traslación paralela anteriormente definida. En efecto

$$\begin{aligned} \frac{DA^2}{dt} &= \frac{Dg_{ik}}{dt} A^i A^k = \frac{D^* g_{ik}}{dt} A^i A^k + \\ &+ \left(-g_{sk} g^{sp} T_{irp} - g_{is} g^{sp} T_{krp}\right) A^i A^k A^r = \\ &= -\frac{2}{3}\left(T_{ikr} + T_{kri} + T_{rik}\right) A^i A^k A^r = 0 \end{aligned}$$

donde hemos tenido presente que $D^* g_{ik} = 0$ y la propiedad (50).

Ahora falta comprobar la condición necesaria, es decir que si no varía el módulo el vector, la conexión es la (51) con la propiedad (50)

$$\begin{aligned} \frac{DA^2}{dt} &= 0 = \frac{Dg_{ik}}{dt} A^i A^k = \frac{D^* g_{ik}}{dt} A^i A^k + \\ &+ \left(-g_{sk} g^{sp} T_{irp} - g_{is} g^{sp} T_{krp}\right) A^i A^k A^r \end{aligned}$$

y como $D^* g_{ik} = 0$ entonces

$$-2T_{irk} A^i A^k A^r = 0$$

como A^i es un vector arbitrario, podemos tomar en primer lugar sólo una de sus componentes distinta de cero, primero tomamos la componente 1 distinta de 0, luego haremos otro tanto con la 2 y luego con la tercera componente, obteniendo

$$T_{iii} = 0; \quad \forall i \tag{52}$$

a continuación tomamos dos componentes de A^i distinta de cero, por ejemplo la 1 y la 2 y obtenemos

$$\left(T_{112} + T_{121} + T_{211}\right) A^1 A^1 A^2 + \left(T_{122} + T_{212} + T_{221}\right) A^1 A^2 A^2 = 0,$$

donde tenemos en cuenta que $T_{111} = T_{222} = 0$, como A^1 y A^2 son arbitrarios, la anterior igualdad implica que

$$T_{122} + T_{121} + T_{211} = 0; \qquad T_{122} + T_{212} + T_{221} = 0 \tag{53}$$

y expresiones análogas para las distintas combinaciones de las otras componentes. Finalmente tomamos las tres componentes de A^i distintas de cero

$$\left(T_{123}+T_{132}+T_{213}+T_{231}+T_{312}+T_{321}\right)A^1A^2A^3=0$$

donde hemos aplicado (52) y (53). Ahora considerando (49) y llegamos a la conclusión de que

$$T_{123}+T_{231}+T_{321}=0$$

pues las componentes de A^i son arbitrarias; por lo tanto queda demostrada la igualdad (50).

En nuestro razonamiento hemos supuesto que la conexión es simétrica, pero notemos que si le agregamos una componente antisimétrica el teorema demostrado seguiría siendo válido, excepto que ahora la única condición que debe cumplir (51) es la (50).

Calculemos, por último, el número de funciones de las que depende la conexión (51). Hay 10 diferentes componentes del tensor métrico, el tensor T_{irk} tiene 64 componentes, pero por (49) se reducen a 40 y por (50) disminuyen en 20, por tanto el número total de funciones de las que depende la conexión (51) es de 30.

En el caso que estamos considerando de que el tensor métrico es simétrico se pueden obtener nuevas conexiones a partir de la expresión

$$\Gamma_{rk}{}^{p}=L_{rk}^{p}+Y_{rk}{}^{p},$$

donde $Y_{rk}{}^{p}$ es un tensor cualquiera. Un ejemplo es la conexión de Straneo

$$\Gamma_{rk}{}^{p}=L_{rk}^{p}+\delta_r^p\psi_k-\delta_k^p\psi_r$$

donde ψ_k es un campo vectorial.

1.19.- Variación del módulo de un vector en un desplazamiento paralelo

Cuando a un vector de componentes contravariantes A^r se le somete a un desplazamiento paralelo la derivada covariante del campo resultante se anula $DA^r=0$ y por lo tanto sus componentes cambian, según se vio en el epígrafe 1.9, por la expresión

$$dA^r=-A^s\Gamma_{sk}{}^{r}\,dx^k$$

dx^k es la diferencia entre las coordenadas de los puntos entre los que se desplaza el vector. Si suponemos nulo el tensor de no-metricidad, encontramos para la derivada absoluta de las componentes convariantes del vector

$$DA_i=D\left(g_{ri}A^r\right)=Dg_{ri}A^r+g_{ri}DA^r=Dg_{ri}A^r$$

que es, en general, distinto de cero. De la anterior expresión deducimos la variación que experimentan las componentes covariantes del vector cuando es trasladado paralelamente

$$dA_i = A_s \Gamma_{ik}{}^s dx^k + Dg_{ri} A^r .$$

Entonces cuando se traslada paralelamente un vector su módulo $A^2 = A_i A^i$ cambia según

$$dA^2 = A^i A^r Dg_{ri} = Q_{rik} A^i A^r dx^k \qquad (54)$$

que es en general distinto de cero. Nótese que si el módulo de cualquier vector no se modifica cuando se realiza un desplazamiento paralelo infinitesimal, no podemos asegurar que el tensor de no-metricidad sea nulo. De (54) también podemos deducir que si el tensor de no-metricidad fuese antisimétrico en sus dos primeros subíndices (una situación no física), entonces el módulo del vector no cambiaría cuando se ejecutase un desplazamiento paralelo infinitesimal.

Si consideramos un desplazamiento en la misma dirección del vector habría que poner en (54)

$$A^i = dx^i / dt$$

siendo de nuevo *t* un parámetro afín; si además ocurre que para cualquier traslación paralela su módulo es nulo entonces significaría que o bien $Q_{rik} = 0$ o se cumple la propiedad cíclica

$$Q_{rik} + Q_{ikr} + Q_{kri} = 0.$$

Consideremos de nuevo el paralelogramo infinitesimal de la figura 1, definido en un espacio sin torsión, pues en caso contrario tendríamos un paralelogramo no cerrado; da^k y db^k representan las diferencias de coordenadas entre los vértices de ese paralelogramo infinitesimal. Vamos a averiguar cómo cambia el módulo de un vector cuando es trasladado paralelamente a través de ese paralelogramo.

Consideremos un vector de módulo *A* en el punto $\mathrm{A}(x^k)$ y lo trasladamos paralelamente al punto $\mathrm{B}(x^k + da^k)$, su módulo cambiará según (54)

$$(dA_1)^2 = Q_{rik}\left(x^p\right) A^i\left(x^p\right) A^r\left(x^p\right) da^k ,$$

al hacer ahora la traslación de B al C el cambio de módulo será

$$(dA_2)^2 = Q_{rik}\left(x^p + da^p\right) A^i\left(x^p + da^p\right) A^r\left(x^p + da^p\right) db^k \approx$$

$$= Q_{rik}\left(x^p\right) A^i\left(x^p\right) A^r\left(x^p\right) db^k + Q_{rik,p}\left(x^p\right) A^i\left(x^p\right) A^r\left(x^p\right) da^p db^k +$$

$$+Q_{rik}\left(x^p\right)A^i_{,p}\left(x^p\right)A^r\left(x^p\right)da^p db^k + Q_{rik}\left(x^p\right)A^i\left(x^p\right)A^r_{,p}\left(x^p\right)da^p db^k$$

y teniendo presente que el vector A^i se desplaza paralelamente tendremos

$$\left(dA_2\right)^2 = Q_{rik}A^i A^r db^k + Q_{rik,p}A^i A^r da^p db^k -$$
$$-Q_{rik}A^s A^r \Gamma_{sp}{}^i da^p db^k + Q_{rik}A^i A^s \Gamma_{sp}{}^r da^p db^k$$

estando todas las funciones definidas en el punto x^p.

La variación de módulo del vector cuando se traslada paralelamente del punto C al D será el mismo que de D a C pero cambiado de signo

$$\left(dA_3\right)^2 = -Q_{rik}\left(x^p + db^p\right)A^i\left(x^p + db^p\right)A^r\left(x^p + db^p\right)da^k \approx$$
$$= -Q_{rik}A^i A^r da^k - Q_{rik,p}A^i A^r da^k db^p +$$
$$+Q_{rik}A^s A^r \Gamma_{sp}{}^i da^k db^p + Q_{rik}A^i A^s \Gamma_{sp}{}^r da^k db^p,$$

mientras que la variación experimentada por el módulo al pasar de D a A es la misma que de A a D pero con el signo cambiado

$$\left(dA_4\right)^2 = -Q_{rik}\left(x^p\right)A^i\left(x^p\right)A^r\left(x^p\right)db^k.$$

Por tanto el cambio total experimentado por el módulo del vector cuando ha recorrido el paralelogramo es

$$dA^2 = \left(dA_1\right)^2 + \left(dA_2\right)^2 + \left(dA_3\right)^2 + \left(dA_4\right)^2,$$

y al desarrollar hasta el primer orden

$$dA^2 = \left(D_p Q_{rik} - D_k Q_{rip}\right)A^i A^r da^p db^k,$$

donde hemos tenido en cuenta el carácter simétrico de la conexión. Si ahora introducimos el elemento de superficie del paralelogramo infinitesimal nos queda

$$dA^2 = \frac{1}{2}\left(D_p Q_{rik} - D_k Q_{rip}\right)A^i A^r dS^{pk} \qquad (55)$$

que representa la variación que experimenta el cuadrado del módulo de un vector cuando es trasladado paralelamente por un circuito infinitesimal cerrado. Como en general la expresión entre paréntesis no es nula, el módulo del vector cambiará al hacer la traslación. No obstante, si se cumple la igualdad

$$D_p Q_{rik} = D_k Q_{rip}$$

entonces el vector no sufre ninguna modificación en su módulo al hacer la traslación paralela por el circuito cerrado.

En el caso especial en que la geometría sea semi-métrica y por tanto

$$Q_{rik} = Q_k g_{ri}$$

(55) se reduce a

$$dA = \frac{1}{4}\left(Q_{k,p} - Q_{p,k}\right) A dS^{pk}$$

siempre y cuando la conexión sea simétrica.

1.20.- Cambio de escala

El tensor métrico g_{ik} característico de un espacio lo podemos poner como

$$g_{ik} = \psi\left(x^r\right)\hat{g}_{ik}$$

donde $\hat{g}_{ik}$ representa un campo tensorial de iguales propiedades que g_{ik} y $\psi(x^r)$ es una función escalar a la que llamaremos calibración, escala o gauge. Las componentes del tensor métrico pueden cambiar por efecto de un cambio de coordenadas, pero también se ve alterado si hacemos un cambio de calibración tal como

$$\psi\left(x^k\right) \to \psi'\left(x^k\right),$$

entonces el módulo de un vector que en la antigua calibración era

$$A^2 = \psi \hat{g}_{ik} A^i A^k$$

pasa a tomar el valor diferente

$$A'^2 = \psi' \hat{g}_{ik} A^i A^k = \frac{\psi'}{\psi} A^2 = \lambda^2 A^2$$

donde λ es una función de las coordenadas y distinta de cero.

Cuando tiene lugar un cambio de calibración el tensor métrico queda alterado. Si la nueva calibración es la función ψ' entonces el nuevo tensor métrico será

$$g'_{ik} = \psi' \hat{g}_{ik} = \frac{\psi'}{\psi} \psi \hat{g}_{ik} = \lambda^2 g_{ik}$$

y decimos que el tensor métrico es de peso 2, que es la potencia en la que aparece la función λ. Las componentes contravariantes del tensor métrico también quedarán modificadas

$$g'_{ik}g'^{rk}=\delta_i^r \;\Rightarrow\; \lambda^2 g_{ik}g'^{rk}=\delta_i^r \;\Rightarrow\; g'^{rk}=\lambda^{-2}g^{rk}$$

entonces el peso de g'^{rk} es –2. Mientras que el determinante de las componentes covariantes del tensor métrico se transforma ante un cambio de calibración por

$$g'=\lambda^8 g$$

siendo, por tanto, de peso 8.

Hay que observar que el cambio de calibración queda definido para el tensor métrico exclusivamente, por tanto no podemos establecer las leyes de transformación de los otros elementos geométricos, a menos que conozcamos su relación con el tensor métrico.

En el caso especial de una geometría semi-simétrica, el vector de Weyl cambia ante una transformación de calibración

$$Dg'_{ik}=D\left(\lambda^2 g_{ik}\right)=2\lambda d\lambda g_{ik}+\lambda^2 g_{ik}Q_r dx^r=$$
$$=\frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^r}g'_{ik}dx^r+g'_{ik}Q_r dx^r=Q'_r g'_{ik}dx^r$$

entonces

$$Q'_r=Q_r+\frac{2}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x^r}.$$

Notemos que las coordenadas de un punto del espacio no cambian en una transformación de calibración, pues sólo son números que identifican al punto. Por tanto, el elemento de línea queda modificado en un cambio de calibración por la ley

$$ds'=\lambda\, ds$$

es decir, tiene de peso 1, el mismo peso que tendrá el tiempo propio $d\tau$ de una partícula. Definida la tetravelocidad por

$$u^k=\frac{dx^k}{d\tau}$$

encontramos que tiene de peso –1, mientras que la tetraaceleración tendrá de peso –2.

1.21. Transformación proyectiva

Una transformación proyectiva de la conexión viene definida por

$$\Gamma'^{\;p}_{ik}=\Gamma^{\;p}_{ik}+\delta_i^p\phi_k$$

donde ϕ_k es un vector arbitrario. Notemos que si la conexión no es simétrica cabe otra transformación proyectiva dada por

$$\Gamma'_{ik}{}^{p} = \Gamma_{ik}{}^{p} + \delta_k^p \phi_i \ .$$

Frente a una transformación proyectiva el tensor de Ricci se modifica según la ley

$$R'_{ik} = R_{ik} - 2\partial_{[i}\phi_{k]} \quad \Rightarrow \quad R' = R - 2g^{ik}\partial_{[i}\phi_{k]}$$

si la métrica es simétrica entonces la curvatura escalar no se modifica. Notemos que ante a una transformación proyectiva la curvatura homotética se transforma por la ley

Distinguimos otra transformación de la conexión, parecida a la anterior, y a la que llamaremos transformación lambda definida por

$$\Gamma'_{ik}{}^{p} = \Gamma_{ik}{}^{p} + \delta_i^p \lambda_{,k}$$

donde λ es un campo escalar arbitrario y la coma representa derivación parcial respecto a las coordenadas. Fácilmente se comprueba que tanto el tensor de Ricci, como la curvatura escalar y la curvatura homotética son invariantes frente a esta transformación.

1.22.- El tensor de Ricci en función de los símbolos de Christoffel

Como se mostró en 1.18 es posible relacionar la conexión de un espacio con los símbolos de Christoffel. En el caso de un espacio métrico simétrico la relación es dada por (44), que se puede poner de la forma

$$\Gamma_{rp}{}^{k} = L_{rp}{}^{k} + \frac{1}{2} g^{qk} X_{rpq} = L_{rp}{}^{k} + \frac{1}{2} X_{rp}{}^{k} ,$$

en X_{rpq} se encuentran agrupadas las componentes antisimétricas de la conexión y el tensor de no-metricidad según aparecen en (44).

Utilizando (18) se puede poner el tensor de curvatura en función del tensor de curvatura $R^{*k}{}_{sir}$ formado a partir de los símbolos de Christoffel en vez de con la conexión $\Gamma_{pq}{}^{s}$

$$R^{k}{}_{sir} = R^{*k}{}_{sir} + \frac{1}{2} D_i^* X_{sr}{}^{k} - \frac{1}{2} D_r^* X_{si}{}^{k} +$$
$$+ \frac{1}{2} X_{sn}{}^{k} \tau_{ri}{}^{n} + \frac{1}{4} X_{sr}{}^{n} X_{ni}{}^{k} - \frac{1}{4} X_{si}{}^{n} X_{nr}{}^{k} .$$

Igualmente es posible poner el tensor de Ricci en función de $R^*{}_{si}$ que es el tensor de Ricci construido a partir de los símbolos de Christoffel, para lo cual se contraen los índice *k* y *r* de la expresión anterior

$$R_{si} = \overset{*}{R}_{si} + \frac{1}{2}\overset{*}{D}_i X_{sk}{}^k - \frac{1}{2}\overset{*}{D}_k X_{si}{}^k + \frac{1}{2} X_{sn}{}^k \tau_{ki}{}^n +$$
$$+\frac{1}{4} X_{sk}{}^n X_{ni}{}^k - \frac{1}{4} X_{si}{}^n X_{nk}{}^k .$$

Por ejemplo, para el caso de una geometría semi-métrica sin torsión el tensor de Ricci queda

$$R_{si} = \overset{*}{R}_{si} - \overset{*}{D}_i Q_s + \frac{1}{2}\left(\overset{*}{D}_s Q_i - \overset{*}{D}_i Q_s\right) -$$
$$-\frac{1}{2} g_{si} \overset{*}{D}_k Q^k + \frac{1}{2} g_{si} Q_k Q^k - \frac{1}{2} Q_s Q_i .$$

La contracción del tensor de Ricci es la curvatura escalar R y para el caso considerado de geometría semi-simétrica es

$$R = g^{si} R_{si} = R^* - 3\overset{*}{D}_k Q^k + \frac{3}{2} Q_k Q^k .$$

1.23.- Simetrías del tensor de curvatura

El tensor de curvatura en un espacio de N dimensiones tiene N^4 componentes. Sin embargo, no todas son independientes. Vamos a comprobar que existe un conjunto de relaciones que hacen descender considerablemente el número de componentes independientes del tensor de curvatura.

El tensor de curvatura completamente covariante tiene las componentes

$$R_{psri} = g_{pk} R^k{}_{sir} = g_{pk}\left(\Gamma_{sr,i}^{\ k} - \Gamma_{si,r}^{\ k} + \Gamma_{sr}^{\ t}\Gamma_{ti}^{\ k} - \Gamma_{si}^{\ t}\Gamma_{tr}^{\ k}\right),$$

limitándonos al caso de un espacio de conexión afín simétrica, obtenemos que la anterior expresión se reduce en un sistema localmente geodésico a

$$R_{psri} = g_{pk}\left(\Gamma_{sr,i}^{\ k} - \Gamma_{si,r}^{\ k}\right),$$

teniendo presente que las derivadas primeras del tensor métrico son nulas por así serlo la conexión, se encuentra

$$R_{psri} = \frac{1}{2}\left(g_{rp,s,i} - g_{sr,p,i} - g_{ip,s,r} + g_{si,p,r}\right).$$

A partir de la anterior ecuación es fácil comprobar que se cumplen la siguientes relaciones de simetría

$$R_{psri} = R_{rips}; \quad R_{psri} = -R_{psir};$$
$$R_{psrr} = R_{ppri} = 0; \quad R_{prsi} + R_{psri} + R_{pirs} = 0.$$

En el caso de un espacio tetradimensional el tensor de curvatura tiene 256 componentes, que quedan reducidas a 20 al tener en cuenta las anteriores relaciones de simetría.

En un espacio genérico el tensor de curvatura es antisimétrico con respecto a la dos últimos índices. Siempre podemos descomponer el tensor de curvatura totalmente covariante en dos partes

$$R_{ikpq} = R_{[ik]pq} + R_{(ik)pq} = P_{ikpq} + F_{ikpq} \tag{56}$$

siendo P_{ikpq} antisimétrico respecto al primer par de índices y F_{ikpq} es simétrico respecto al primer par de índices.

Cuando un vector A^k es trasladado paralelamente a través de un paralelogramo infinitesimal de lados da^k y db^i, sus componentes contravariantes cambian según se dedujo en 9 por

$$dA^r = R^r{}_{nik} A^n da^k db^i . \tag{57}$$

Como la superficie elemental tiene de área (ver epígrafe 1.25)

$$dS^{ij} = da^i db^j - da^j da^i$$

y el tensor de curvatura es antisimétrico respecto a sus dos últimos índices, tendremos que (57) queda

$$A_r dA^r = 1/2 R_{pnik} A^p A^n dS^{ik} ,$$

entonces como

$$A_r dA^r = \frac{1}{2} d\left(A_r A^r\right) = \frac{1}{2} dA^2 ,$$

la variación que experimenta el módulo de un vector cuando es trasladado paralelamente a través de un circuito elemental cerrado es

$$dA^2 = R_{pnik} A^p A^n dS^{ik} .$$

Sustituyendo (56) en la anterior expresión resulta

$$dA^2 = P_{pnik} A^p A^n dS^{ik} + F_{pnik} A^p A^n dS^{ik}$$

el primer sumando es nulo por la propiedad de antisimetría del tensor de curvatura respecto a sus dos primeros índices, entonces queda

$$dA^2 = F_{pnik} A^p A^n dS^{ik} ,$$

de (55) obtenemos

$$F_{pnik} = \frac{1}{2}\left(D_i Q_{npk} - D_k Q_{npi}\right).$$

Si nos limitamos a una geometria semi-métrica de conexión simétrica obtenemos de la anterior expresión

$$F_{pnik} = \frac{1}{2}\left(Q_{k,i} - Q_{i,k}\right) g_{pn} = -\frac{1}{2} F_{ik} g_{pn},$$

donde hemos definido

$$F_{ik} = \left(Q_{i,k} - Q_{k,i}\right),$$

lo que significa que en una geometría semi-métrica

$$R^q{}_{nik} = P^q{}_{nik} - \delta^q_n F_{ik},$$

donde el primer tensor del segundo miembro es antisimétrico respecto al primer par de índices (cuando están en forma covariante) y también respecto al segundo par. La anulación del tensor F_{ik} significa que el espacio se puede reducir a un espacio de Riemann por un adecuado cambio de calibración y por tanto en este caso $P^q{}_{nik}$ sería su tensor de curvatura.

1.24.- Tensor de Einstein

Las simetrías del tensor de curvatura pueden utilizarse para obtener un nuevo tensor que tiene importante aplicación en la Relatividad General donde se toma el continuo espacio-tiempo como siendo un espacio de Riemann. Partimos de la identidad de Bianchi (25) y la multiplicamos por g_{pk}, teniendo en cuenta la nulidad de la derivada covariante del tensor métrico queda

$$D_m R_{psir} + D_i R_{psrm} + D_r R_{psmi} = 0,$$

multiplicando ahora por g^{pr} y teniendo presente la definición (21) del tensor de Ricci

$$D_m R_{si} - D_i R_{sm} + D_r \left(g^{pr} R_{psmi}\right) = 0,$$

multiplicando una vez más por g^{si}

$$D_m R - D_i R^i{}_m - D_r R^r{}_m = 0,$$

que se puede poner de la forma

$$D_r \left(R^r{}_m - \frac{1}{2}\delta^r_m R\right) = 0,$$

a la expresión entre paréntesis se le llama tensor de Einstein, un tensor de segundo orden construido exclusivamente a partir de los tensores geométricos que definen el espacio de Riemann y que tiene la notable propiedad de tener nula su derivada covariante. Cabe poner el tensor de Einstein en forma covariante

$$R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}R$$

expresión que es especialmente relevante en la teoría relativista de la gravitación.

1.25.- Volúmenes y áreas

Consideremos en un espacio genérico (que tomaremos tridimensional para concretar) un paralelepípedo infinitesimal cuyos tres lados diferentes están formados por tres vectores infinitesimales de componentes da^i, db^k y dc^r. A partir de ellos se puede obtener el tensor antisimétrico formado por el siguiente determinante

$$d\Omega^{ikr}=\begin{vmatrix} da^i & db^i & dc^i \\ da^k & db^k & dc^k \\ da^r & db^r & dc^r \end{vmatrix},$$

que evidentemente es un tensor por ser la suma de productos de tres vectores.

Ya hemos indicado que en el caso de un espacio con torsión no es posible obtener un paralelogramo cerrado y por tanto tampoco un paralelepípedo cerrado. No obstante, podemos utilizar para este tipo de geometrías las fórmulas que vamos a deducir a continuación, puesto que la diferencia de área entre el cuadrilátero cerrado que se obtendría en un espacio con torsión y el área de un paralelogramo (como más adelante calcularemos) es de segundo orden y por tanto despreciable. Y lo mismo ocurrirá con el volumen de un paralelepípedo.

$d\Omega^{ikr}$ es un tensor que se puede poner en función de los símbolos completamente antisimétricos de Levi-Civita

$$d\Omega^{ikr}=d\Omega\,\varepsilon^{ikr}$$

donde $d\Omega$ es la única componente distinta de cero de $d\Omega^{ikr}$

$$d\Omega=d\Omega^{123}=da^1db^2dc^3.$$

Téngase presente que ni $d\Omega$ ni ε^{ikr} son tensores, pero su producto sí lo es.

Se define el volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores infinitesimales por la expresión

$$dV=\sqrt{g}\,d\Omega \tag{58}$$

donde g representa el valor absoluto del determinante del tensor métrico puesto en forma covariante.

Debemos comprobar que el volumen como es definido por (58) es un invariante, lo que significa que su valor no depende del sistema de coordenadas. Ante una transformación de coordenadas tendremos

$$d\Omega' = d\Omega'^{123} = A_i^1 A_k^2 A_r^3 \, d\Omega^{ikr} = A_i^1 A_k^2 A_r^3 \, d\Omega \, \varepsilon^{ikr} = |A| d\Omega$$

donde $|A|$ es el determinante de la matriz de la transformación de coordenadas.

En la transformación de coordenadas las componentes del tensor métrico cambian según

$$g'_{ik} = B_i^p \, B_k^q \, g_{pq}$$

que podemos representar como una ecuación matricial

$$G' = B \cdot G \cdot \tilde{B},$$

calculando los correspondientes determinantes se tiene

$$g' = |B|^2 g \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{g'} = \frac{1}{|A|}\sqrt{g}, \tag{59}$$

donde siempre tomamos el valor absoluto del determinante del tensor métrico. (59) se aplica en (58)

$$dV' = \sqrt{g'} \, d\Omega' = \frac{1}{|A|}\sqrt{g} \, |A| d\Omega = \sqrt{g} \, d\Omega = dV,$$

que demuestra el carácter invariante del volumen.

La fórmula (58) es generalizable para un espacio de cualquier número de dimensiones.

Para cualquier vector de segundo orden a_{ik} se cumple la relación

$$\sqrt{a'} = \frac{1}{|A|}\sqrt{a},$$

siendo a y a' los valores absolutos de los determinantes del tensor a_{ik} en cada uno de los dos sistemas de coordenadas; por tanto

$$\sqrt{a} \, d\Omega$$

es un invariante que es llamado volumen generalizado.

En un espacio de tres dimensiones se define el área de una superficie bidimensional a partir de un vector. De forma similar a como hemos hecho anteriormente, definimos el tensor superficie antisimétrico a partir del determinante

$$dS^{qr} = \begin{vmatrix} da^q & db^q \\ da^r & db^r \end{vmatrix}, \tag{60}$$

donde da^q y db^r son los vectores que conforman el paralelogramo bidimensional cuya vector área se quiere calcular. El vector asociado al elemento de superfice anterior es

$$dS^p = \frac{1}{2}\Delta^{pqr} dS_{qr}.$$

En el caso de un espacio tetradimensional (como el espacio-tiempo) tenemos dos tipos de «superficies», las bidimensionales y las tridimensionales. Las primeras vienen representadas por el tensor (60) y las segundas por un vector. En efecto, el tensor antisimétrico volumen tridimensional del espacio de cuatro dimensiones viene definido por

$$dS^{pqr} = \begin{vmatrix} da^p & db^p & dc^p \\ da^q & db^q & dc^q \\ da^r & db^r & dc^r \end{vmatrix} \tag{61}$$

donde, como en los casos anteriores da^p, db^q y dc^r son los vectores que forman el paralelepípedo infinitesimal cuyo volumen tridimensional se calcula. A partir del tensor completamente antisimétrico se puede obtener de (61) un vector asociado a la superficie tridimensional de un espacio tetradimensional

$$dS^p = \frac{1}{3!}\Delta^{pqrs} dS_{qrs}.$$

Esta expresión se puede generalizar a espacios de dimensión N cualquiera

$$dS^p = \frac{1}{(N-1)!}\Delta^{pqrs\ldots} dS_{qrs\ldots}.$$

Nos debemos fijar que para un espacio tetradimensional con métrica de Minkowski, que corresponde al espacio-tiempo en ausencia de campos, el volumen espacial es dado por dS^0.

En (11) habíamos definido el tensor de cuarto orden completamente antisimétrico en forma contravariante para espacios tetradimensionales. Ateniéndonos a (59), la definición (11) de este tensor totalmente antisimétrico toma la forma

$$\Delta^{pqrs} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{pqrs},$$

de donde se deduce el correspondiente tensor en forma covariante

$$\Delta_{ikmn} = g_{pi} g_{qk} g_{rm} g_{sn} \Delta^{pqrs} = g_{pi} g_{qk} g_{rm} g_{sn} \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{pqrs} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} g_{p1} g_{q2} g_{r3} g_{s4} \varepsilon^{pqrs} \varepsilon_{ikmn} = \sqrt{g} \varepsilon_{ikmn},$$

donde ε_{ikmn} son unos símbolos con igual propiedad que los símbolos de Levi-Civita, es decir $\varepsilon^{ikmn} \equiv \varepsilon_{ikmn}$. Notemos que ε_{ikmn} no son las componentes covariantes de ε^{ikmn}. Mientras que ε^{ikmn} es una densidad tensorial de peso 1 (ver epígrafe 1.35), ε_{ikmn} es una densidad tensorial de orden -1.

Con el tensor Δ_{ikmn} se puede hacer otra definición de los tensores «superficies», en el sentido de que aparezcan con sus componentes covariantes. Por ejemplo, para el caso de un espacio tetradimensional

$$dS_p = \frac{1}{3!} \Delta_{pqrs} dS^{qrs}.$$

1.26.- Geodésicas

Pretendemos generalizar el concepto de línea recta del espacio euclídeo. La vamos a definir de dos formas diferentes, una de ellas es estableciendo que la línea recta entre dos puntos tiene como propiedad que representa la mínima distancia entre esos puntos extremos. La otra definición que consideramos afirma que la línea recta tiene la propiedad de que sus vectores tangentes en cualquier punto son paralelos entre ellos.

Ambas definiciones son equivalentes en un espacio euclídeo, pero en un espacio general representan conceptos diferentes. A la curva tal como es definida por la primera propiedad antes expuesta le llamaremos curva de menor longitud o geodésica métrica, mientras que reservaremos el término de geodésica o geodésica afín para designar las curvas autoparalelas definidas por la segunda de las definiciones.

Nos limitamos de momento al espacio euclídeo y buscamos la condición matemática que debe cumplir la geodésica afín, curva que vendrá dada por la ecuación $x^k = x^k(t)$ donde *t* es un parámetro arbitrario que caracteriza a cada punto de la curva y las x^k son las coordenadas cartesianas de los puntos de la curva geodésica. Consideramos dos vectores tangentes

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad v^k = \frac{dx^k}{dt},$$

siendo $\mathbf{r}$ el vector de posición de un punto de la curva, o sea $\mathbf{r} = (x^k)$; $\mathbf{v}$ es un vector que no tiene el mismo módulo en cada uno de los puntos de la geodésica a consecuencia de la arbitrareidad del parámetro *t.* Además utlizaremos el vector unitario tangente

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad \Leftrightarrow \quad u^k = \frac{dx^k}{ds},$$

donde *s* es la distancia desde un extremo de la curva al punto considerado. Observemos que el vector $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección y el mismo módulo en cualquier punto de la geodésica.

Sea el punto $\mathrm{P}(t)$ de la curva geodésica al que le corresponde el vector tangente $\mathbf{v}(t)$, en otro punto $\mathrm{P}(t+dt)$ el vector tangente será

$$\mathbf{v}(t+dt) = \mathbf{v}(t) + d\mathbf{v},$$

el requisito para que ambos vectores tangentes sean paralelos es que $d\mathbf{v}$ sea paralelo a $\mathbf{v}$. Matemáticamente el anterior requisito se puede establecer de dos formas

$$\mathbf{v} \wedge \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0; \qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \varphi(t)\mathbf{v} \tag{62}$$

es decir, que su producto vectorial sea nulo o bien que sean proporcionales. La función φ que aparece en la segunda condición (62) es arbitraria y puede depender del parámetro *t*. Las ecuaciones (62) se pueden expresar en función de las coordenadas

$$v^i \frac{dv^k}{dt} - v^k \frac{dv^i}{dt} = 0; \qquad \frac{dv^k}{dt} = \varphi(t) v^k. \tag{63}$$

Si en vez de coordenadas cartesianas utilizamos coordenadas curvilíneas, entonces habría que sustituir las derivadas por derivadas absolutas y tendríamos para las condiciones (63)

$$v^i \frac{Dv^k}{dt} - v^k \frac{Dv^i}{dt} = 0; \qquad \frac{Dv^k}{dt} = \varphi(t) v^k. \tag{64}$$

Tenemos otra forma de representar la ecuación de una geodésica, utilizando para ello el vector unitario tangente $\mathbf{u}$, que como hemos dicho es el mismo en todos los puntos de la geodésica, es decir debe cumplirse

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds}=0$$

o bien en coordenadas curvilíneas

$$\frac{Du^k}{ds}=0 \quad \Leftrightarrow \quad u^i D_i u^k=0. \tag{65}$$

Las ecuaciones (64) y (65) son equivalentes y válidas en un espacio euclídeo. Ahora hacemos la generalización y las extendemos a un espacio cualquiera, donde conservarán la misma forma. Notemos que la ecuación (64) se puede definir en un espacio donde no esté dada una métrica, es decir en un espacio afín; no obstante, la ecuación (65) requiere el concurso de un tensor métrico para poder definir la distancia, es por tanto un concepto utilizable solamente en un espacio métrico-afín.

La variable t utilizada para parametrizar la curva geodésica es arbitraria, es por tanto posible elegir un nuevo parámetro $\tilde{t}$, relacionado con el anterior por

$$\tilde{t}=f(t).$$

Al hacer el cambio de variable la derivada absoluta se transforma según

$$\frac{Dv^k}{dt}=\frac{d^2x^k}{dt^2}+\Gamma_{pq}{}^k\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx^k}{d\tilde{t}}\frac{d\tilde{t}}{dt}\right)+\Gamma_{pq}{}^k\frac{dx^p}{d\tilde{t}}\frac{dx^q}{d\tilde{t}}\left(\frac{d\tilde{t}}{dt}\right)^2=$$

$$=\frac{d^2x^k}{d\tilde{t}^2}\left(\frac{d\tilde{t}}{dt}\right)^2+\frac{dx^k}{d\tilde{t}}\frac{d^2\tilde{t}}{dt^2}+\Gamma_{pq}{}^k\frac{dx^p}{d\tilde{t}}\frac{dx^q}{d\tilde{t}}\left(\frac{d\tilde{t}}{dt}\right)^2,$$

y la segunda de las ecuaciones (64) queda

$$\frac{d^2x^k}{d\tilde{t}^2}+\Gamma_{pq}{}^k\frac{dx^p}{d\tilde{t}}\frac{dx^q}{d\tilde{t}}=\left(\frac{\varphi}{f'}-\frac{f''}{f'^2}\right)\frac{dx^k}{dt}=\tilde{\varphi}(\tilde{t})\frac{dx^k}{dt} \tag{66}$$

obteniéndose una ecuación idéntica a la segunda ecuación (64), porque si bien las funciones φ y $\tilde{\varphi}$ son distintas, son completamente arbitrarias (como lo son los parámetros t y $\tilde{t}$).

La ecuación (64) se reduce a la (65), para ello es necesario que

$$\varphi=\frac{f''}{f'}$$

o lo que es lo mismo

$$f'=\exp\int\varphi\,dt.$$

Es decir, cuando se cumple la anterior condición el parámetro de la curva geodésica coindice con la distancia s.

La condición necesaria y suficiente para que dos conexiones simétricas sean geodésicamente equivalentes, es decir reproduzcan la misma geodésica, es que estén relacionadas por

$$\Gamma'_{pq}{}^{k} = \Gamma_{pq}{}^{k} + \delta_p^k \psi_q + \delta_q^k \psi_p . \qquad (67)$$

Veamos que la condición (67) es suficiente. Si la sustituimos en la primera de las ecuaciones (64) queda inalterbale y si la sustituimos en la segunda ecuación (64) obtenemos

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma'_{pq}{}^{k}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt} = \left(\varphi + 2\psi_q \frac{dx^q}{dt}\right)\frac{dx^k}{dt} = \tilde{\varphi}\frac{dx^k}{dt} \qquad (68)$$

y al igual que anotamos antes, aunque φ y $\tilde{\varphi}$ sean funciones diferentes, al ser arbitrarias en nada afectan a la ecuación de la curva geodésica, o sea que (68) representa la misma geodésica que la segunda ecuación (64).

Veamos que la condición es suficiente, es decir que si $\Gamma_{pq}{}^{k}$ y $\Gamma'_{pq}{}^{k} = \Gamma_{pq}{}^{k} + \Theta_{pq}{}^{k}$ son conexiones que reproducen la misma geodésica deben estar relacionadas por (67). Para que esto ocurra es necesario que

$$\Theta_{pq}{}^{k}\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt} = \varphi\frac{dx^k}{dt}$$

siendo φ una función arbitraria de t, entonces las geodésicas formadas por las dos conexiones serán las mismas. De la anterior expresión se deduce que

$$\left(\Theta_{pq}{}^{k}\delta_r^i - \Theta_{pq}{}^{i}\delta_r^k\right)\frac{dx^p}{dt}\frac{dx^q}{dt}\frac{dx^r}{dt} = 0$$

relación que se tiene que mantener sea cual sea dx^r/dt, entonces

$$\Theta_{pq}{}^{k}\delta_r^i - \Theta_{pq}{}^{i}\delta_r^k + \Theta_{rp}{}^{k}\delta_q^i - \Theta_{rp}{}^{i}\delta_q^k + \Theta_{qr}{}^{k}\delta_p^i - \Theta_{qr}{}^{i}\delta_p^k = 0,$$

contrayendo respecto a i, r

$$\Theta_{pq}{}^{k} = \frac{1}{5}\left(\Theta_{rp}{}^{r}\delta_q^k + \Theta_{qr}{}^{r}\delta_p^k\right)$$

si se define

$$\psi_q = \frac{1}{5}\Theta_{qr}{}^{r}$$

encontramos finalmente que

$$\Theta_{pq}{}^{k} = \psi_p \delta_q^k + \psi_q \delta_p^k$$

lo que demuestra la condición necesaria antes afirmada.

También son conexiones geodésicamente equivalentes las que se encuentran relacionadas mediante la expresión

$$\Gamma'_{pq}{}^{k} = \Gamma_{pq}{}^{k} + Y_{pq}{}^{k}$$

donde $Y_{pq}{}^{k}$ es un tensor antisimétrico respecto a los indices inferiores. En efecto

$$\frac{Dv^k}{dt} = \frac{dv^k}{dt} + v^s \Gamma_{sr}{}^{k} v^r = \frac{dv^k}{dt} + v^s \Gamma'_{sr}{}^{k} v^r - Y_{sr}{}^{k} v^s v^r$$

pero como el último sumando es nulo por la antisimetría de $Y_{sr}{}^{k}$ entonces la derivada covariante de v^k no se modifica y las ecuaciones de las geodésicas (64) quedan inalteradas.

En un sistema localmente geodésico (ver epígrafe 1.6) las componentes simétricas de la conexión se anulan en un punto dado. Entonces en este sistema de coordenadas la ecuación geodésica queda

$$\frac{d^2 x^k}{ds} = 0$$

que tiene por solución

$$x^k = A^k s + B^k \tag{69}$$

siendo A^k y B^k constantes. Para un determinado valor de *k* (69) corresponde a la ecuación de uno de los ejes coordenados. O dicho de otra forma, en un sistema localmente geodésico los ejes coordenados son geodésicas.

A continuación vamos a tratar el problema de determinar la curva de menor distancia entre dos puntos, lo que llamamos curva de menor longitud o geodésica métrica. Para ello vamos a considerar un espacio métrico dotado de un tensor métrico no simétrico. El elemento de línea (26) nos permite determinar la distancia entre dos puntos. Pretendemos determinar la ecuación paramétrica de la curva $x^k = x^k(t)$ que uniendo dos puntos dados tenga la menor longitud.

Tenemos que determinar la función que haga mínima la distancia entre dos puntos dados A y B

$$s_{AB} = \int_A^B \sqrt{g_{ik}\left[x^r(t)\right] dx^i dx^k} = \int_A^B \sqrt{g_{ik}\left[x^r(t)\right] x'^i(t) x'^k(t)}\, dt$$

o bien

$$s_{AB}=\int_A^B\sqrt{f\left(x^r,x'^r\right)}\,dt$$

donde la prima significa derivación respecto al parámetro *t*. Aplicando las técnicas del método variacional, encontramos la curva extremal, que debe cumplir la ecuación de Euler

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\sqrt{f}}{\partial x'^r}\right)-\frac{\partial\sqrt{f}}{\partial x^r}=0,$$

y si la desarrollamos tenemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'^r}\right)-\frac{\partial f}{\partial x^r}-\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x'^r}\frac{df}{dt}=0. \tag{70}$$

En vez de utilizar el parámetro arbitrario *t* para describir la curva, vamos a utilizar como parámetro la propia distancia *s* de cada punto de la curva al punto inicial. Ahora tendremos

$$f=g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k=1$$

donde el punto significa derivación respecto a *s* y la ecuación (70) queda

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}^r}\right)-\frac{\partial f}{\partial x^r}=0,$$

desarrollando y teniendo presente el valor de *f* queda

$$g_{kr}\ddot{x}^k+g_{rk}\ddot{x}^k+\left(\partial_m g_{kr}+\partial_m g_{rk}-\partial_r g_{mk}\right)\dot{x}^m\dot{x}^k=0.$$

Introduciendo las partes simétricas y antisimétricas del tensor métrico

$$g_{(rk)}\ddot{x}^k+\frac{1}{2}\left[\partial_m g_{(rk)}+\partial_k g_{(rm)}-\partial_r g_{(mk)}\right]\dot{x}^m\dot{x}^k=0.$$

Definiendo el símbolo

$$L^*_{mkr}=\frac{1}{2}\left[\partial_m g_{(rk)}+\partial_k g_{(rm)}-\partial_r g_{(mk)}\right]$$

que es simétrico respecto a los dos primeros índices, entonces la ecuación de la línea de menor longitud se pone

$$g_{(rk)}\ddot{x}^k+L^*_{mkr}\dot{x}^m\dot{x}^k=0. \tag{71}$$

Debemos notar que L^*_{mkr} coincide con los símbolos de Christoffel en forma covariante en el caso de que el espacio tuviera una métrica simétrica.

Entonces la ecuación de la geodésica métrica (71) tomaría la forma habitual en un espacio de Riemann

$$\ddot{x}^r + \Gamma_{mk}{}^r \dot{x}^m \dot{x}^k = 0.$$

Como antes hemos señalado, la geodésica afín no es lo mismo que la curva de menor longitud. No obstante, cuando la conexión del espacio se puede poner de la forma

$$\Gamma_{pq}{}^k = L^{*}_{pq}{}^k + \alpha(t)\delta^k_p \psi_q + \beta(t)\delta^k_q \psi_p$$

donde $L^{*}_{pq}{}^k$ está formada exclusivamente por la parte simétrica del tensor métrico y ψ_p es un campo vectorial arbitrario, entonces ambas curvas, la geodésica afín y la de menor longitud coinciden, pues como hemos demostrado las dos ecuaciones (64) quedan inalterables, excepto que ahora la conexión será $L^{*}_{pq}{}^k$. Esto es lo que ocurre en el espacio euclídeo y también en el espacio de Riemann, en ambos casos ocurre que $\alpha = \beta = 0$, o sea la conexión coincide con los símbolos de Christoffel.

En general si la conexión se puede poner de la forma

$$\Gamma_{pq}{}^k = L_{pq}{}^k + Y_{pq}{}^k$$

donde $Y_{pq}{}^k$ es un tensor antisimétrico, entonces las geodésicas afín y métrica coinciden, siempre y cuando el tensor métrico sea simétrico.

1.27.- Desviación geodésica

La desviación geodésica mide la variación de la separación de dos puntos que se mueven a través de líneas geodésicas diferentes.

Consideremos una familia de geodésicas que etiquetamos con un paramétro contínuo *t*. Los puntos de cada una de las curvas geodésicas están definidos por el parámetro *s*.

El vector tangente en un punto *s* de la geodésica de coeficiente *t* es definido como es habitual por

$$u^k = \left(\frac{dx^k}{ds}\right)_t .$$

El vector desviación entre dos puntos de parametro *s* situados en dos geodésicas distintas es

$$v^k = \left(\frac{dx^k}{dt}\right)_s .$$

Con la desviación geodésica significamos la aceleración experimentada por la separación geodésica entre dos puntos que evolucionan por geodésicas diferentes y es definida por

$$a^i = \frac{D^2 v^i}{ds^2} = \frac{D}{ds}\left(\frac{Dv^k}{ds}\right) = \frac{dx^k}{ds} D_k \left(\frac{dx^j}{ds} D_j v^i\right) = u^k D_k \left(u^j D_j v^i\right).$$

Como

$$\begin{aligned} u^k D_k v^i - v^k D_k u^i &= u^k \partial_k v^i + u^k v^s \Gamma_{sk}^{\,i} - v^k \partial_k u^i - v^k u^s \Gamma_{sk}^{\,i} = \\ &= -\tau_{sk}^{\,i} u^s v^k , \end{aligned} \tag{72}$$

entonces la aceleración geodésica se pone como

$$\begin{aligned} \frac{D^2 v^i}{ds^2} &= u^k D_k \left(v^j D_j u^i\right) - u^j D_j \left(\tau_{sk}^{\,i} u^s v^k\right) = \\ &= D_k D_j u^i u^k v^j + D_k v^j D_j u^i u^k - u^j D_j \left(\tau_{sk}^{\,i} u^s v^k\right). \end{aligned}$$

De la definición de tensor de curvatura del epígrafe 8 se encuentra que

$$D_k D_j u^i = D_j D_k u^i - u^l R^i{}_{ljk} - D_l u^i \tau_{jk}^{\;\,l},$$

donde hemos utilizado las propiedades de antisimetría de la torsión, por tanto la aceleración geodésica es

$$\begin{aligned} \frac{D^2 v^i}{ds^2} &= D_j D_k u^i u^k v^j - R^i{}_{ljk} u^l u^k v^j - \tau_{jk}^{\;\,l} D_l u^i u^k v^j + \\ &\quad + D_k v^j D_j u^i u^k - u^j D_j \left(\tau_{sk}^{\,i} u^s v^k\right) = \\ &= D_j D_k u^i u^k v^j - R^i{}_{ljk} u^l u^k v^j - \tau_{jk}^{\;\,l} D_l u^i u^k v^j + \\ &\quad + D_j u^i \left(v^k D_k u^j - \tau_{kl}^{\;\,j} u^k v^l\right) - u^j D_j \left(\tau_{sk}^{\,i} u^s v^k\right) \end{aligned}$$

en la que de nuevo hemos usado la identidad (72). Una posterior simplificación nos lleva a

$$\begin{aligned} \frac{D^2 v^i}{ds^2} &= D_j \left(u^k D_k u^i\right) v^j - R^i{}_{ljk} u^l u^k v^j - u^j D_j \left(\tau_{sk}^{\,i} u^s v^k\right) = \\ &= -R^i{}_{ljk} u^l u^k v^j - \frac{D}{ds}\left(\tau_{sk}^{\,i} u^s v^k\right) \end{aligned}$$

donde hemos aprovechado la propiedad de antisimetría del tensor de torsión y tenemos en cuenta que el vector tangente de una curva geodésica cumple

$$u^k D_k u^i = \frac{Du^i}{ds} = 0,$$

finalmente tras un intercambio de índices obtenemos la ecuación de la desviación geodésica

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{Dv^i}{ds}+\tau_{sk}{}^{i}u^s v^k\right)=R^i{}_{jkl}\,u^j u^k v^l .$$

1.28.- Divergencia de un vector

La divergencia de un vector viene definida por

$$D_k v^k=\partial_k v^k+v^s\Gamma_{sk}{}^{k}, \tag{73}$$

vamos a encontrar una nueva expresión más útil. Partimos para ello de la derivada covariante del tensor métrico

$$D_r g_{ik}=\partial_r g_{ik}-g_{is}\Gamma_{kr}{}^{s}-g_{sk}\Gamma_{ir}{}^{s}=Q_{ikr},$$

al hacer la multiplicación contracta con g^{ik}

$$\Gamma_{sr}{}^{s}=\frac{1}{2}g^{ik}\partial_r g_{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}Q_{ikr}. \tag{74}$$

Insertando (30) en (74) encontramos

$$\Gamma_{sr}{}^{s}=\frac{1}{2g}\partial_r g-\frac{1}{2}g^{ik}Q_{ikr}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^r}-\frac{1}{2}g^{ik}Q_{ikr},$$

al vector

$$\kappa_r=\frac{1}{4}g^{ik}Q_{ikr}=\frac{1}{4}Q_i{}^{i}{}_{r}$$

le llamaremos vector de no-metricidad. En el caso particular de que la geometría sea semi-métrica, el vector de no-metricidad coincide con el vector de Weyl. Introduciendo el tensor de no-metricidad en la anterior expresión obtenemos

$$\Gamma_{sr}{}^{s}=\frac{\partial\ln\sqrt{g}}{\partial x^r}-2\kappa_r. \tag{75}$$

Limitándonos al caso de un espacio riemanniano donde tanto el tensor métrico como la conexión son simétricas y nulo el tensor de no-metricidad, la expresión (75) se reduce a

$$\Gamma_{sr}{}^{s}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^r}. \tag{76}$$

Por (73) y (76) la definición de divergencia de un vector para el espacio considerado queda

$$D_k v^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g} v^k\right)}{\partial x^k}, \tag{77}$$

válida para los espacios de Riemann. Para el caso general tendremos por las definiciones de los vectores de torsión y no-metricidad

$$\Gamma_{sk}{}^{k} = \tau_{sk}{}^{k} + \Gamma_{ks}{}^{k} = \tau_s + \frac{\partial}{\partial x^r} \ln\sqrt{g} - 2\kappa_r$$

entonces de (73)

$$D_k v^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g} v^k\right)}{\partial x^k} + v^k\left(\tau_k - 2\kappa_k\right) \tag{78}$$

que es la expresión general de la divergencia de un vector.

Si usamos la derivada covariante con asterisco, tendremos para la divergencia de un vector la expresión

$$\overset{*}{D}_k v^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g} v^k\right)}{\partial x^k}.$$

Para el caso particular de una geometría semi-métrica de torsión nula tendremos para la divergencia de un vector la expresión

$$D_k v^k = \overset{*}{D}_k v^k - 2v^k Q_k$$

donde Q_k es el vector de Weyl.

A partir de (75) podemos obtener una nueva expresión para la curvatura homotética

$$V_{ir} = \Gamma_{kr,i}^{\;k} - \Gamma_{ki,r}^{\;k} = 2\kappa_{i,r} - 2\kappa_{r,i},$$

por tanto si se cumple

$$\kappa_{i,r} = \kappa_{r,i}$$

entonces es nula la curvatura homotética. Por otra parte si el tensor de no-metricidad fuera nulo, también lo sería el vector de no-metricidad y por consiguiente sería nula la curvatura homotética.

Como el tensor de no-metricidad es nulo en los espacios de Riemann, también será nula la curvatura homotética y como la conexión es simétrica entonces es válida (24), siendo nula la parte antisimétrica del tensor de Ricci. Por tanto en un espacio de Riemann el tensor de Ricci es simétrico.

29.- Rotacional de un vector

En un espacio euclídeo tridimensional el rotacional es definido en coordenadas cartesianas por el siguiente vector (no hacemos distinción entre componentes covariantes y covariantes, es decir hacemos uso de coordenadas cartesianas)

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}\right)\mathbf{e}_i, \tag{79}$$

que es el vector dual asociado al tensor de componentes

$$\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\right)_{jk} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

Esto nos permite generalizar el concepto de rotacional de un vector a un espacio genérico, con sólo sustituir las derivadas parciales por derivadas covariantes

$$\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\right)_{jk} = D_j A_k - D_k A_j$$

que en el caso de un espacio con conexión simétrica se reduce a

$$\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\right)_{jk} = \partial_j A_k - \partial_k A_j.$$

De (79) se deriva el vector rotacional

$$\frac{1}{2}\Delta^{pjk}\left(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\right)_{jk}.$$

Si el espacio tiene más de tres dimensiones ya no es posible reducir el tensor rotacional a un vector como ocurre en el espacio tridimensional.

1.30.- Gradiente

Sea $\phi(x^k)$ un campo escalar que tiene la propiedad de ser invariante ante un cambio de coordenadas, esto quiere decir que la función $\phi(x^k)$ toma el mismo valor en un punto dado, con independencia del sistema de coordenadas.

El gradiente de una función escalar es definido por

$$\left(\mathrm{grad}\,\phi\right)_k = \partial_k \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^k}$$

que se comprueba fácilmente que es un tensor covariante.

1.31.- Laplaciana

El operador laplaciano es definido en coordenadas cartesianas en un espacio euclídeo como

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k}$$

en el caso de un espacio genérico, la laplaciana toma la forma $D_k D^k$.

1.32.- Ángulos

En un espacio euclídeo el ángulo entre dos vectores de componentes dx^i y dy^k se define a partir de su producto escalar

$$\cos\alpha=\frac{g_{ik}dx^i dy^k}{\sqrt{g_{ik}dx^i dx^k}\sqrt{g_{ik}dy^i dy^k}} \tag{80}$$

en esta expresión se anulan los términos que contienen la parte antisimétrica del tensor métrico, es decir que el ángulo solo depende de la parte simétrica de g_{ik}.

Dada la propiedad que tienen los espacios métricos de permitir que en cada punto se defina una espacio euclidiano tangente (ver epígrafe 1.14), es posible extender (80) para un espacio genérico.

1.33.- Teoremas integrales

El teorema de Stokes en el espacio tridimensional euclídeo es

$$\oint_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}=\iint_\Sigma \nabla\wedge\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S},$$

donde Γ es la curva perimetral de la superficie Σ. En función de las coordenadas queda

$$\oint_\Gamma A_k\, dx_k=\iint_\Sigma (\nabla\wedge\mathbf{A})_k\, dS_k$$

donde usamos coordenadas cartesianas y por tanto no establecemos diferencias entre índices covariantes y contravariantes. Por las definiciones de rotacional de un vector (79) y del elemento de superficie tenemos para el teorema de Stokes del espacio euclídeo tridimensional

$$\oint_\Gamma A_k\, dx_k=\iint_\Sigma \frac{1}{2}\varepsilon_{kpq}\left(\frac{\partial A_q}{\partial x_p}-\frac{\partial A_p}{\partial x_q}\right)dS_k=\frac{1}{2}\iint_\Sigma (\mathrm{rot}\,\mathbf{A})_{pq}\, dS_{pq}, \tag{81}$$

habiendo hecho uso de la relación

$$dS_{pq} = \varepsilon_{kpq} dS_k .$$

(81) se generaliza a una variedad genérica

$$\oint_\Gamma A_k dx^k = \frac{1}{2} \iint_\Sigma (\mathrm{rot}\, \mathbf{A})_{pq} dS^{pq} .$$

Nótese que sólo en el caso tridimensional es posible obtener un vector superficie bidimensional, que es el vector dual del tensor superficie de orden dos.

Se puede, igualmente, generalizar el teorema de Gauss, que en el caso del espacio euclídeo tridimensional es

$$\iiint_V \nabla \mathbf{A} dV = \oiint_\Sigma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

donde Σ es la superfice cerrada que engloba el volumen V. Lo anterior se pone en función de las coordenadas

$$\iiint_\Omega \frac{\partial A^k}{\partial x_k} d\Omega = \oiint_\Sigma A^k d\tilde{S}_k , \tag{82}$$

donde

$$d\tilde{S}_k = \frac{1}{(N-1)!} \varepsilon_{kpq} dS_{pq} ,$$

notemos que (82) es un resultado formal, sin referencia a las características geométricas del espacio en que están definidas las magnitudes implicadas. Por tanto (82) es válida en cualquier espacio con independencia de su dimensión y propiedades.

Como se comprobó en el epígrafe 1.25 el vector asociado a una superficie bidimensional en un espacio de N dimensiones es

$$dS_k = \frac{1}{(N-1)!} \Delta_{kmn....} dS^{mn....} = \frac{1}{(N-1)!} \sqrt{g} \varepsilon_{kmn....} dS^{mn....} = \sqrt{g} d\tilde{S}_k .$$

Como veremos en el siguiente epígrafe el teorema de Gauss puede formularse de varias formas en un espacio genérico.

1.34.- Densidades tensoriales

Se llama densidad de un vector A^k a

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^k = \sqrt{g} A^k ,$$

en un cambio de coordenadas se transforma según

$$\mathbf{A}'^{k} = \sqrt{g'}\, A'^{k} = \frac{1}{|A|}\sqrt{g}\, A^{k}_{r} A^{r} = \frac{1}{|A|} A^{k}_{r} \mathbf{A}^{r} ,$$

donde hemos usado (59). Para el caso especial de una densidad escalar su ley de transformación es

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{|A|}\mathbf{A} .$$

Por ejemplo, ε^{pqrs} es una densidad tensorial de peso 1, puesto que por lo deducido en el epígrafe 1.25 $\varepsilon^{pqrs} = \sqrt{g}\Delta^{pqrs}$ y Δ^{pqrs} es un tensor.

El concepto de densidad se puede extender a un tensor de cualquier orden e incluso de un peso distinto del primero, por ejemplo una densidad tensorial de segundo orden y de peso *n* tiene de ley de transformación

$$\mathbf{A}'^{ik} = \frac{1}{|A|^{n}} A^{i}_{p} A^{k}_{q} \mathbf{A}^{pq} ,$$

como ejemplo vemos que $d\Omega$ es una densidad escalar de peso -1 ya que $d\Omega' = |A|\, d\Omega$.

El concepto de densidad tensorial se puede generalizar. Supongamos un tensor de segundo orden covariante a_{ik}, de determinante *a*. Ante una transformación de coordenadas

$$\sqrt{a'} = \frac{1}{|A|}\sqrt{a}$$

o sea la misma propiedad que tiene el determinante del tensor métrico; por esta circunstancia generalizamos la densidad de un vector A^{k}

$$\mathbf{A}^{k} = \sqrt{a} A^{k}$$

definición que se puede extender a tensores y escalares. Las propiedades de las densidades son las mismas con independencia de que se utilice para su definición las raíces cuadradas de *g* o de *a*. No obstante, sus radicandos deben ser positivos, por lo que siempre entenderemos que tomamos el valor absoluto de *g* o de *a* aunque no lo indiquemos expresamente.

En lo que sigue consideraremos las densidades definidas a partir del determinante del tensor métrico, pero igualmente podríamos utilizar el determinante de un tensor de segundo orden covariante.

Los índices, ya sea superior o inferior, de un densidad tensorial se pueden bajar o subir mediante la técnica habitual del tensor métrico, por ejemplo

$$\mathbf{A}^{i}{}_{r}=g_{rk}\mathbf{A}^{ik}=\sqrt{g}g_{rk}A^{ik}=\sqrt{g}A^{i}{}_{r}.$$

La derivada covariante de la densidad tensorial de un vector es

$$D_{k}\mathbf{A}^{i}=D_{k}\left(\sqrt{g}\,A^{i}\right)=D_{k}\sqrt{g}A^{i}+\sqrt{g}D_{k}A^{i}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{g}}D_{k}gA^{i}+\sqrt{g}\left(\partial_{k}A^{i}+\Gamma_{sk}{}^{i}A^{s}\right),$$

para calcular la derivada covariante del determinante del tensor métrico tenemos en cuenta que

$$D_{k}g=gg^{pq}D_{k}g_{pq}=gg^{pq}Q_{pqk}.$$

Por (74) tenemos

$$\Gamma_{sk}{}^{s}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{s}}-\frac{1}{2}g^{pq}Q_{pqk}$$

entonces nos queda

$$D_{k}\mathbf{A}^{i}=\partial_{k}\mathbf{A}^{i}+\mathbf{A}^{s}\Gamma_{sk}^{\ \ i}-\mathbf{A}^{i}\Gamma_{sk}^{\ \ s}.$$

En cuanto a la divergencia de la densidad de un vector tenemos

$$D_{k}\mathbf{A}^{k}=D_{k}\left(\sqrt{g}\,A^{k}\right)=D_{k}\sqrt{g}A^{k}+\sqrt{g}D_{k}A^{k}=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{g}}D_{k}gA^{k}+\sqrt{g}\left(\partial_{k}A^{k}+\Gamma_{sk}{}^{k}A^{s}\right),$$

de donde se deriva

$$D_{k}\mathbf{A}^{k}=D_{k}\left(\sqrt{g}\,A^{k}\right)=\partial_{k}\left(\sqrt{g}A^{k}\right)+\sqrt{g}A^{k}\tau_{k}. \tag{83}$$

Siguiendo las mismas técnicas se calcula la derivada covariante de una densidad tensorial. Para el caso concreto de un tensor de segundo orden covariante tendremos

$$D_{k}\mathbf{A}_{ir}=D_{k}\left(\sqrt{g}\,A_{ir}\right)=\partial_{k}\mathbf{A}_{ir}-\mathbf{A}_{sr}\Gamma_{ik}^{\ \ s}-\mathbf{A}_{is}\Gamma_{rk}^{\ \ s}-\mathbf{A}_{ir}\Gamma_{lk}^{\ \ l}$$

que fácilmente se puede extender a otros tipos de densidades tensoriales. Si nos limitamos a la divergencia de una densidad tensorial tendríamos para el caso de un tensor de segundo orden

$$D_{k}\mathbf{A}^{ik}=\partial_{k}\mathbf{A}^{ik}+\mathbf{A}^{sk}\Gamma_{sk}^{\ \ i}+\mathbf{A}^{ik}\tau_{k}.$$

Finalmente mostramos que la derivada covariante de una densidad escalar es

$$D_k \boldsymbol{A} = \partial_k \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\,\Gamma_{sk}^{\ \ s}\,.$$

Notemos que la derivada covariante de una densidad tensorial es una nueva densidad tensorial. Para ello notemos que $\partial_k \sqrt{g}$ es una densidad tensorial, en efecto

$$\partial_k \sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,g^{pq} Q_{pqk}$$

que resulta ser un vector multiplicado por $\sqrt{g}$. Añadir que la derivada parcial de una densidad escalar $\boldsymbol{A}$ es una densidad vectorial

$$\partial_k \boldsymbol{A} = \sqrt{g}\left(\frac{1}{2} g^{pq} Q_{pqk} A - \partial_k A\right)$$

y como A es un escalar lo encerrado dentro del paréntesis es un vector covariante.

Podemos generalizar el teorema integral de Gauss (82) para el caso de existir torsión, para lo que se utiliza (83) de donde resulta

$$\begin{aligned}\int_V D_k\left(\sqrt{g}A^k\right) d\Omega &= \int_\Sigma \sqrt{g}A^k d\tilde{S}_k + \int_V \sqrt{g}A^k \tau_k \, d\Omega = \\ &= \int_\Sigma A^k dS_k + \int_V \sqrt{g}A^k \tau_k \, d\Omega,\end{aligned}$$

para el caso en que el vector A^k se anule en los límites de la integración nos queda simplemente

$$\int_V D_k\left(\sqrt{g}A^k\right) d\Omega = \int_V \sqrt{g}A^k \tau_k \, d\Omega \tag{84}$$

que es nulo si suponemos un espacio sin torsión como el de Riemann.

Otra forma de poner el teorema de Gauss es

$$\int_V \overset{*}{D}_k A^k dV = \int_\Sigma \sqrt{g}A^k d\tilde{S}_k = \int_\Sigma A^k dS_k\,.$$

Finalmente otra forma del teorema de Gauss se basa en la aplicacion de (78)

$$\int_V D_k A^k dV = \int_\Sigma A^k dS_k + \int_V v^k\left(\tau_k - 2\kappa_k\right) d\Omega.$$

Consideremos ahora un tensor de segundo orden simétrico T^{ik} definido en un espacio de Riemann. Su divergencia será

$$D_k T_i^{\ k} = \partial_k T_i^{\ k} + T_i^{\ s}\Gamma_{sk}^{\ \ k} - T_s^{\ k}\Gamma_{ik}^{\ \ s} = \partial_k T_i^{\ k} - T_i^{\ s}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^s} - T_s^{\ k}\Gamma_{ik}^{\ \ s}$$

donde se ha utilizado (76). Simplificando

$$\sqrt{g}D_kT_i^{\ k}=\partial_k\left(\sqrt{g}T_i^{\ k}\right)-\sqrt{g}T_s^{\ k}\Gamma_{ik}^{\ \ s}.$$

Analizando el segundo sumando de la anterior expresión y teniendo presente la simetría del tensor T^{ik}

$$T_s^{\ k}\Gamma_{ik}^{\ \ s}=T_s^{\ k}L_{ik}^{\ \ s}=\frac{1}{2}T_s^{\ k}g^{sr}\left(g_{kr,i}+g_{ir,k}-g_{ik,r}\right)=\frac{1}{2}T^{rk}g_{kr,i},$$

finalmente nos queda

$$\sqrt{g}D_kT_i^{\ k}=D_k\boldsymbol{\mathcal{T}}_i^{\ k}=\partial_k\boldsymbol{\mathcal{T}}_i^{\ k}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{T}}^{rk}g_{kr,i}.$$

Si ahora suponemos que el tensor T^{ik} es antisimétrico

$$\sqrt{g}D_kT^{ik}=\partial_k\left(\sqrt{g}T^{ik}\right)-\sqrt{g}\,T^{sk}\Gamma_{sk}^{\ \ i},$$

y como la conexión es simétrica

$$D_k\boldsymbol{\mathcal{T}}^{ik}=\partial_k\boldsymbol{\mathcal{T}}^{ik},$$

donde tenemos en cuenta la nulidad de la derivada covariante del determinante del tensor métrico en un espacio de Riemann.

1.35.- Relaciones útiles de las densidades tensoriales

Es de interés expresar la variación de la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico en función de la variación de la densidad tensorial $\boldsymbol{g}^{ik}=\sqrt{g}\,g^{ik}$; por (30) tenemos

$$\delta\sqrt{g}=-\frac{1}{2}\sqrt{g}g_{pq}\delta g^{pq}=-\frac{1}{2}g_{qp}\delta\boldsymbol{g}^{qp}+\frac{1}{2}g_{qp}g^{qp}\delta\sqrt{g}$$

y como $g_{qp}g^{qp}=4$ entonces

$$\delta\sqrt{g}=\frac{1}{2}g_{qp}\delta\boldsymbol{g}^{qp}. \qquad (85)$$

Podemos también expresar la variación de $\sqrt{g}$ en función de las componentes covariantes de la densidad del tensor métrico. Para ello partimos de

$$\delta\sqrt{g}=\frac{1}{2}\sqrt{g}g^{pq}\delta g_{pq}=\frac{1}{2}g^{pq}\delta\boldsymbol{g}_{pq}-\frac{1}{2}g^{pq}g_{pq}\delta\sqrt{g}$$

entonces

$$\delta\sqrt{g}=\frac{1}{6}g^{pq}\delta\boldsymbol{g}_{pq}. \qquad (86)$$

De (85) se deduce que si $D_r \boldsymbol{g}^{ik}=0$ entonces $D_r\, g^{ik}=0$. En efecto, por (85)

$$D_r\sqrt{g}=\frac{1}{2}g_{pq}\,D_r\boldsymbol{g}^{pq}=0$$

entonces de

$$D_r\left(\sqrt{g}\,g^{ik}\right)=0=D_r\sqrt{g}\,g^{ik}+\sqrt{g}D_r g^{ik}$$

se deduce $D_r g^{ik}=0$. La inversa también es cierta, es decir que si $D_r g^{ik}$ es nula entonces $D_r\boldsymbol{g}^{ik}$ también lo es. En efecto, por (30) se encuentra que si $D_r g^{ik}=0$ entonces $D_r\sqrt{g}=0$ y por tanto $D_r\boldsymbol{g}^{ik}=0$.

Consideremos la transformación infinitesimal de coordenadas

$$x'^k=x^k+\eta^k;\quad A_r^k=\frac{\partial x'^k}{\partial x^r}=\delta_r^k+\frac{\partial\eta^k}{\partial x^r};\quad B_r^k\approx\delta_r^k-\frac{\partial\eta^k}{\partial x^r},$$

entonces el tensor métrico se transforma según la ley

$$g'_{ik}=g_{ik}-\frac{\partial\eta^q}{\partial x^k}g_{iq}-\frac{\partial\eta^p}{\partial x^i}g_{pk}\quad\Rightarrow\quad\delta g_{ik}=-\frac{\partial\eta^q}{\partial x^k}g_{iq}-\frac{\partial\eta^p}{\partial x^i}g_{pk}$$

y la función escalar $L=L\left(g_{ik}\right)$ cambiará según

$$\delta L=0=\frac{\partial L}{\partial g_{ik}}\delta g_{ik}=\frac{\partial L}{\partial g_{ik}}\left(-\frac{\partial\eta^q}{\partial x^k}g_{iq}-\frac{\partial\eta^p}{\partial x^i}g_{pk}\right)=$$

$$=-\frac{\partial\eta^q}{\partial x^k}\left(\frac{\partial L}{\partial g_{ik}}g_{iq}+\frac{\partial L}{\partial g_{ki}}g_{qi}\right)$$

donde suponemos que el tensor métrico es asimétrico. Como las funciones η^k son arbitrarias e independientes entre sí entonces se deduce

$$\frac{\partial L}{\partial g_{ik}}g_{iq}+\frac{\partial L}{\partial g_{ki}}g_{qi}=0. \tag{87}$$

La ecuación (87) se puede extender para el caso de una densidad escalar del tipo

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}\left(g_{ik}\right)=\sqrt{g}L\left(g_{ik}\right),$$

teniendo en cuenta (30)

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g_{pq}}=\frac{1}{2}\sqrt{g}\,g^{pq}$$

y (87) toma la forma

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{ik}} g_{iq} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial g_{ki}} g_{qi} = \delta_q^k \mathfrak{L} \tag{88}$$

como se puede deducir por cálculo directo. Las fórmulas (87) y (88) siguen siendo válidas si en vez del tensor métrico tenemos cualquier otro tensor de segundo orden.

Sea $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\left(x^{ik},\ldots..\right)$ una densidad escalar que depende entre otros del tensor x^{ik}, vamos a demostrar que

$$\mathfrak{b}_{ik} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x^{ik}}$$

es la densidad de un tensor de segundo orden covariante y de las mismas propiedades de simetría que x^{ik}. La densidad escalar se puede escribir como $\mathfrak{L} = \sqrt{a}\,L$ donde a es el valor absoluto del determinante de un determinado tensor de segundo orden a_{ik} y L es un escalar. Consideremos una variación arbitraria del vector x_{ik}

$$x'_{ik} = x_{ik} + \delta x_{ik}$$

donde los tres tensores anteriores están definidos en el mismo punto. A consecuencia de la anterior variación también varía $\mathfrak{L}$ y L. Ahora bien, como L es un escalar δL, que es la diferencia de dos escalares evaluados en el mismo punto, también será un escalar. La variación de $\mathfrak{L}$ es

$$\delta \mathfrak{L} = \delta\left(\sqrt{a}L\right) = \delta\sqrt{a}L + \sqrt{a}\,\delta L = \frac{1}{2}\sqrt{a}a^{*qp}\delta a_{pq} + \sqrt{a}\,\delta L \tag{89}$$

donde hemos aplicado (32). Los dos sumandos del segundo miembro de (89) son densidades escalares ya que son escalares multiplicados por $\sqrt{a}$, entonces $\delta\mathfrak{L}$ es una densidad escalar. Por otra parte tenemos que

$$\delta \mathfrak{L} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\delta x^{ik}} \delta x^{ik} = \mathfrak{b}_{ik} \delta x^{ik}$$

como $\delta\mathfrak{L}$ es una densidad escalar y δx^{ik} es un tensor de segundo orden, forzosamente $\mathfrak{b}_{ik}$ debe ser una densidad tensorial de segundo orden covariante tal como queríamos demostrar. Notemos que si x^{ik} es simétrico o antisimétrico entonces $\mathfrak{b}_{ik}$ también tendrá esa misma propiedad. Como corolario es fácil compobar que $\partial L/\partial x^{ik}$ es un tensor de segundo orden covariante. Este teorema que acabamos de demostrar se puede extender para densidades escalares que dependan de tensores de cualquier orden y carácter.

Consideremos otro caso, aquel en que $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\left(\Gamma_{ik}^{\ r}\right)$ entonces

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_{ik}^{\ r}} \delta \Gamma_{ik}^{\ r}$$

como $\delta \Gamma_{ik}^{\ r}$ es un tensor, entonces $\partial \mathcal{L} / \partial \Gamma_{ik}^{\ r}$ es una densidad tensorial.

Podemos generalizar estos razonamientos al caso en que la dependencia de $\mathcal{L}$ sea respecto a $x_{,r}^{ik}$ y $\Gamma_{ik,r}^{\ p}$ o a otros órdenes de derivación, entonces

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_{ik,p}^{\ r}} \delta \Gamma_{ik,p}^{\ r} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{,p}^{ik}} \delta x_{,p}^{ik} = \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_{ik,p}^{\ r}} \delta \Gamma_{ik}^{\ r} \right) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_{ik,p}^{\ r}} \right) \delta \Gamma_{ik}^{\ r} + \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{,p}^{ik}} \delta x^{ik} \right) - \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{,p}^{ik}} \right) \delta x^{ik}$$

por tanto

$$\frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Gamma_{ik,p}^{\ r}} \right); \qquad \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{,p}^{ik}} \right)$$

son densidades tensoriales.

1.36.- Tensores y densidades duales

En un espacio tetradimensional asociamos a un vector de componentes covariante A_m el tensor dual

$$A^{*ikl} = \Delta^{iklm} A_m ,$$

también se le puede asociar a A_m una densidad tensorial dual mediante

$$\mathcal{A}^{*ikl} = \varepsilon^{iklm} A_m .$$

donde tenemos en cuenta el carácter de densidad tensorial de los símbolos de Levi-Civita.

Para el caso en que tengamos un tensor A_{pq} antisimétrico su tensor dual es

$$A^{*ik} = \frac{1}{2} \Delta^{ikpq} A_{pq} ,$$

de donde también se obtiene una densidad tensorial

$$\mathcal{A}^{*ik} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikpq} A_{pq} .$$

El concepto de tensores y densidades duales se puede extener a tensores de otro orden e igualmente a espacios de dimensiones distintas de cuatro.

1.37 .- Tensor de Weyl

Buscamos un tensor de cuarto orden definido en un espacio de Riemann que tenga las mismas propiedades de simetría que el tensor de curvatura y además que todas sus trazas sean nula. Este tensor sólo se puede construir a partir de $R^i{}_{jkl}$, R_{ik}, R y g_{ik} y es llamado tensor de Weyl

$$C_{ijkl} = AR_{ijkl} + Bg_{ij}R_{kl} + Cg_{ik}R_{jl} + Dg_{il}R_{jk} + Eg_{jk}R_{il} +$$
$$+Fg_{jl}R_{ik} + Gg_{kl}R_{ij} + Hg_{ik}g_{jl}R + Ig_{il}g_{jk}R + Kg_{ij}g_{kl}R.$$

El coeficiente A es una constante numérica que, en realidad, multiplica a todo el resto del segundo miembro, por lo que podemos adoptar el valor arbitrario $A=1$. Los coeficientes en los que aparece B y G tienen que anularse, puesto que al ser simétrico frente a transformaciones $i \to j$ o $k \to l$ haría que el tensor C_{ijkl} perdiera sus propiedades de antisimetría respecto a los dos primeros y a los dos últimos pares de índices. El coeficiente K también es cero ya que multiplica a una expresión simétrica respecto al cambio $i \to j$ o a $k \to l$, lo que ya hemos dicho que no es permitido.

Para conseguir la deseada antisimetría del tensor de Weyl es necesario que se cumpla

$$I = -H$$

entonces la suma de los sumandos que contienen esos coeficientes son antisimétrico. Por tanto el tensor de Weyl queda

$$C_{ijkl} = R_{ijkl} + Cg_{ik}R_{jl} + Dg_{il}R_{jk} + Eg_{jk}R_{il} +$$
$$+Fg_{jl}R_{ik} + Hg_{ik}g_{jl}R - Hg_{il}g_{jk}R.$$

Al igual que para el tensor de curvatura, también el tensor de Weyl tiene dos contracciones posibles $C^i{}_{ikl}$ y $C^i{}_{jki}$ ya que todas las restantes o coinciden con las dos anteriores o son sus opuestos. Vamos a exigir que las dos contracciones anteriores se anulen. Al aplicar este requisito se encuentra

$$C + D + E + F = 0.$$

donde hemos tenido en cuenta que $R^i{}_{ikl} = V_{kl} = 0$. De la segunda contracción del tensor de Ricci se deducen las siguientes dos identidades

$$1 + C + 4D + F = 0; \qquad E + H - 4H = 0,$$

donde tenemos en cuenta que el tensor de Ricci no puede ser proporcional al tensor métrico. Al imponer la condición

$$C_{ijkl} = -C_{jikl}$$

se encuentra

$$C=-E; \qquad D=-F,$$

y finalmente por la condición de antisimetría

$$C_{ijkl}=-C_{ijlk}$$

tenemos

$$C=-D; \qquad E=-F.$$

Reuniendo todas las relaciones encontradas hallamos que los coeficientes tienen que ser

$$C=\frac{1}{2}; \quad D=-\frac{1}{2}; \quad E=-\frac{1}{2}; \quad F=\frac{1}{2}; \quad H=-\frac{1}{6}$$

donde suponemos que el espacio es de cuatro dimensiones. Con estos resultados el tensor de Weyl en forma completamente covariante es

$$C_{ijkl}=R_{ijkl}+\frac{1}{2}\left(g_{ik}R_{jl}-g_{il}R_{jk}-g_{jk}R_{il}+g_{jl}R_{ik}\right)+ \\ +\frac{1}{6}\left(g_{il}g_{jk}-g_{ik}g_{jl}\right)R.$$

Si el espacio tuviera N dimensiones ($N>3$) el tensor de Weyl sería

$$C_{ijkl}=R_{ijkl}+\frac{1}{N-2}\left(g_{ik}R_{jl}-g_{il}R_{jk}-g_{jk}R_{il}+g_{jl}R_{ik}\right)+ \\ +\frac{1}{(N-1)(N-2)}\left(g_{il}g_{jk}+g_{ik}g_{jl}\right)R.$$

El tensor de Weyl en forma mixta $C^{i}{}_{jkl}$ tiene la propiedad de ser invariante conforme, es decir que no se altera si se realiza la transformación conforme definida por

$$g'_{ik}=\lambda^{2}g_{ik}$$

donde λ es una función escalar de las coordenadas. Por esta invariancia a $C^{i}{}_{jkl}$ también se le llama tensor conforme de Weyl.

1.38.- Unidades

Las coordenadas contravariantes de un punto del espacio no son más que etiquetas para su identificación. Estas coordenadas representan un concepto previo a la métrica, es decir que no están relacionadas con la distancia, concepto este último que requiere la introducción del tensor métrico. Por tanto, las coordenadas contravariantes de un punto del espacio no tienen unidades físicas.

No obstante, el elemento de línea de un espacio si tiene unidades, pues representa la distancia. Se trata de unidades de longitud, que representamos genéricamente por L. Entonces el elemento de línea ds tiene de unidad L, lo que significa que el tensor métrico en forma covariante debe tener la unidad L^2; sus componentes contravariantes tienen la unidad L^{-2} y el determinante obtenido de las coordenadas covariantes tiene la unidad L^{2N}, donde N es la dimensión del espacio.

La conexión afín es adimensional, como fácilmente se puede comprobar a partir de la definición de derivada covariante. Por tanto el tensor de curvatura $R^k{}_{sir}$, el tensor de Ricci R_{si} y la curvatura homotética V_{ir} son también adimensionales, puesto que dependen de la conexión o de sus derivadas respecto a las componentes contravariantes, que como antes hemos dicho son adimensionales. Pero la curvatura escalar R por depender de las componentes contravariantes del tensor métrico tiene la unidad L^{-2}.

Las componentes covariantes de las coordenadas tienen de unidad L^2, pues se construyen de las componentes covariantes del tensor métrico.

Por lo dicho queda claro que un tensor puede tener una u otras unidades según venga expresado por coordenadas covariantes o por las coordenadas contravariantes.

Para completar digamos que el tensor de torsión $\tau_{is}{}^k$, el vector de torsión τ_i y el vector de Weyl Q_i son adimensionales. El tensor de no metricidad Q_{ikp} tiene la unidad L^2 y el volumen L^N.

1.39.- Vierbein

En cada punto del espacio-tiempo siempre podemos elegir un sistema de coordenadas K caracterizado por tener la métrica de Minkowski η_{ik} al menos en el punto elegido. Sean ξ^k las coordenadas de un punto en ese sistema y x^μ las coordenadas del mismo punto respecto a un sistema general de coordenadas. La cantidades definidas por

$$e^m_\mu = \frac{\partial \xi^m}{\partial x^\mu} \tag{90}$$

se le llaman vierbein (del alemán «cuatro patas») o tetrad. Nótese que utilizamos letras latinas para identificar las coordenadas del sistema de Minkowski, a las que llamaremos coordenadas Lorentz y las letras griegas las reservamos para las habituales coordenadas del espacio.

Respecto a un cambio de coordenadas, el vierbein se transforma como un vector covariante. En efecto, sea la transformación

$$x'^{\mu} = x^{\mu}\left(x^{\nu}\right),$$

frente a este cambio de coordenadas el vierbein se transforma según

$$e'^{m}_{\mu} = \frac{\partial \xi^{m}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \xi^{m}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} e^{m}_{\nu}$$

lo que muestra su carácter de vector covariante. Esto significa que podemos entender el vierbein como cuatro vectores covariantes, donde el superíndice (o índice latino o de Lorentz) nos numera a cada uno de los cuatro vectores y el subíndice (o índice griego) nos identifica las cuatro componentes de cada uno de los vectores.

Como la transformación de coordenadas $\xi^{m} = \xi^{m}\left(x^{\mu}\right)$ es invertible, existirá el inverso del vierbein, definido como

$$e^{\mu}_{m} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \xi^{m}}$$

tal que

$$e^{\mu}_{m} e^{n}_{\mu} = \delta^{n}_{m}; \qquad e^{\mu}_{m} e^{m}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}.$$

El elemento de línea entre dos puntos infinitesimales respecto a las coordenadas del sistema K es

$$ds^{2} = \eta_{mn} d\xi^{m} d\xi^{n} \tag{91}$$

puesto que entendemos que hay diferencias infinitesimales entre los tensores métricos asociados a puntos a su vez también infinitesimales; introduciendo el vierbein

$$ds^{2} = \eta_{mn} e^{m}_{\mu} e^{n}_{\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu},$$

entonces se encuentra la relación entre el vierbein y el tensor métrico

$$g_{\mu\nu} = e^{m}_{\mu} e^{n}_{\nu} \eta_{mn} \tag{92}$$

démonos cuenta que existen 10 componentes independientes del tensor métrico (por su simetría), mientras que son 16 las componentes del vierbein. O dicho de otra forma, el vierbein nos determina el tensor métrico pero no ocurre al contrario.

Dado un vector A^{μ} podemos contraerlo con el vierbein

$$A^{m} = e^{m}_{\mu} A^{\mu}$$

que tiene como efecto el reemplazar el vector por un conjunto de cuatro escalares coordenados, que representan las componentes de un vector Lorentz. La misma operación se puede hacer con vectores covariantes y con tensores de cualquier orden. Para el caso especial del tensor métrico tendremos

$$g_{mn} = e_m^\mu e_n^\nu g_{\mu\nu} = e_m^\mu e_n^\nu e_\mu^p e_\nu^q \eta_{pq} = \eta_{mn}.$$

El sistema de coordenadas K no es único, siempre es posible hacer una transformación de sus coordenadas tales que el nuevo tensor métrico siga siendo el de Minkowski, es decir

$$\eta_{mn} = \Lambda_m^p \Lambda_n^q \eta_{pq}$$

entonces reencontramos la transformación de Lorentz de la relatividad especial.

Frente a transformaciones de Lorentz el vierbein cambia como un vector contravariente

$$e'^m_\mu = \frac{\partial \xi'^m}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^n}{\partial x^\mu}\frac{\partial \xi'^m}{\partial \xi^n} = \Lambda_n^m e_\mu^n$$

y en general un vector Lorentz contravariante se transformará por la ley

$$A'^m = \Lambda_n^m A^n.$$

Nos encontramos, por tanto, con dos tipos de vectores (y en general de tensores), aquellos que se transforman por la ley usual cuando se produce un cambio en las coordenadas del espacio y que llamamos vectores (o tensores) coordenados, cuyas componentes vienen identificadas por índices griegos. Además se encuentran las vectores Lorentz, que son escalares ante transformaciones de coordenadas pero cambian como vectores cuando hay una transformación en las coordenadas de Minkowski.

1.40.- La conexión spin

La derivada covariante de un vector Lorentz se define de forma similar a como se estableció para la derivada covariante de un vector coordenado (epígrafe 1.2), exigiendo los siguientes requisitos:

a) La derivada covariante de un vector Lorentz $D_\mu V^m$ es un vector Lorentz contravariante y un vector coordenado covariante.

b) La derivada covariante de un vector Lorentz se define por la regla

$$D_\mu V^m = \partial_\mu V^m + V^s \omega_\mu{}^m{}_s. \tag{93}$$

donde $\omega_\mu{}^m{}_s$ es llamada la conexión spin cuya ley de transformación obten-

dremos más adelante.
c) La derivada covariante de un vector Lorentz cumple la regla de Leibnitz de derivación del producto.
d) En el caso de un campo escalar *f* se cumple

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi .$$

La condición a) nos permite determinar la regla de transformación de la conexión spin cuando hay una transformación Lorentz. En efecto, el caracter de vector Lorentz de la derivada covariante implica que debe transformarse según la ley

$$\left(D_\mu V^m\right)' = D'_\mu V'^m = \Lambda^m_n D_\mu V^n \tag{94}$$

desarrollando el primer miembro

$$\partial_\mu\left(\Lambda^m_n V^n\right) + \Lambda^s_p V^p \omega'_\mu{}^m{}_s = V^n \partial_\mu \Lambda^m_n + \Lambda^m_n \partial_\mu V^n + \Lambda^s_p V^p \omega'_\mu{}^m{}_s ,$$

mientras que el segundo miembro de (94) es

$$\Lambda^m_n\left(\partial_\mu V^n + V^s \omega_\mu{}^n{}_s\right),$$

igualando ambas expresiones se obtiene la ley de transformación de la conexión spin ante transformaciones de Lorentz

$$\omega'_\mu{}^m{}_q = \left(\Lambda^{-1}\right)^p_q \Lambda^m_n \omega_\mu{}^n{}_p - \left(\Lambda^{-1}\right)^p_q \partial_\mu \Lambda^m_p .$$

Nótese que ante transformaciones de coordenadas genéricas la conexión spin debe transformarse como un vector covariante. En efecto, dada la transformación

$$dx'^\mu = A^\mu_\nu dx^\nu \quad \Rightarrow \quad dx^\nu = B^\nu_\mu dx'^\mu$$

es fácil ver que la conexión spin se transforma como

$$\omega'_\mu{}^m{}_p = B^\nu_\mu \omega_\nu{}^m{}_p .$$

Las condiciones c) y d) nos permiten obtener la derivada covariante de un vector Lorentz puesto en forma covariante y en general, la derivada covariante de un tensor Lorentz. Por ejemplo

$$D_\mu T_n{}^m = \partial_\mu T_n{}^m + T_n{}^s \omega_\mu{}^m{}_s - T_s{}^m \omega_\mu{}^s{}_n$$

Nos encontramos ahora con dos tipos diferentes de derivadas covariantes, la anteriormente definida, que da lugar a la conexión spin y la habitual derivada covariante coordenada $D_\mu V^\nu$ cuya definición exige la conexión afín, que sigue poseyendo sus propiedades habituales. Es posible mezclar ambas derivadas, algo que ocurre cuando se trata de la derivada de un tensor que tiene tanto componentes Lorentz como componentes coordenadas (es decir, índices latinos y griegos). Por ejemplo

$$\bar{D}_\mu T^{\nu m} = \partial_\mu T^{\nu m} + T^{\nu s}\omega_\mu{}^m{}_s + T^{\alpha m}\Gamma^\nu_{\alpha\mu}.$$

En un espacio de Riemann la derivada covariante del tensor métrico es nula. Esta propiedad permite expresar la conexión afín en función del tensor métrico y sus primeras derivadas. Algo similar se puede hacer con la técnica del vierbein. Si se impone la condición de nulidad de la derivada covariante del vierbein

$$D_\mu e^m_\nu = 0 \tag{95}$$

entonces es posible relacionar la conexión spin con la afín y como ésta última se puede expresar en función del vierbein, será posible expresar la conexión spin en función del vierbein y sus derivadas primeras. Debemos advertir que la condición (95) no la hemos deducido sino la hemos impuesto, y naturalmente cabe la posibilidad de una geometría en donde (95) no se cumpla. Notemos también que (95) implica que la derivada covariante del tensor métrico es nula, pero la afirmación inversa no es válida. La razón se encuentra en que $D_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ implica cuarenta ecuaciones, pero (95) son 64, dado que el tensor métrico tiene 10 componentes independientes y el vierbein tiene 16.

Al desarrollar (95) se encuentra la relación entre ambas conexiones, la spin y la afín

$$\omega_\mu{}^m{}_p = -e^\nu_p \partial_\mu e^m_\nu + e^\nu_p e^m_\alpha \Gamma_{\nu\mu}{}^\alpha. \tag{96}$$

Si nos limitamos a espacios de Riemann, la conexión afín coincide con los símbolos de Christoffel, de tal forma que esta conexión se puede poner en función del vierbein, para lo cual usamos (92) conjuntamente con la definición de símbolos de Christoffel

$$\begin{gathered}\Gamma_{\nu\mu}{}^\alpha = L_{\nu\mu}{}^\alpha = \frac{1}{2} e^\alpha_s \left(\partial_\mu e^s_\nu + \partial_\nu e^s_\mu\right) + \\ + \frac{1}{2}\eta^{rq}\eta_{sn} e^\alpha_r e^\beta_q \left[e^s_\nu \left(\partial_\mu e^n_\beta - \partial_\beta e^n_\mu\right) + e^s_\mu \left(\partial_\nu e^n_\beta - \partial_\beta e^n_\nu\right)\right],\end{gathered} \tag{97}$$

que al sustituir en (96) da

$$\omega_{\mu}{}^{m}{}_{p} = \frac{1}{2} e^{\nu}_{p} e^{\beta m} \left(C_{\beta\mu\nu} + C_{\nu\beta\mu} - C_{\mu\nu\beta} \right), \tag{98}$$

donde se ha definido

$$C_{\beta\mu\nu} = e_{\beta n} \left(\partial_{\nu} e^{n}_{\mu} - \partial_{\mu} e^{n}_{\nu} \right).$$

Como es nula tanto la derivada covariante del tensor métrico como la derivada covariante del vierbein, por (92) también debe ser nula la derivada covariante del tensor métrico de Minkowski

$$D_{\mu} \eta_{mn} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \cancel{\partial_{\mu} \eta_{mn}} - \eta_{sn}\, \omega_{\mu}{}^{s}{}_{m} - \eta_{ms}\, \omega_{\mu}{}^{s}{}_{n} = 0$$

de donde se deduce la antisimetría de los índices latinos de la conexión spin

$$\omega_{\mu nm} = -\omega_{\mu mn}.$$

1.41.- Tensor de curvatura en función de la conexión spin

La derivada covariante de un vector Lorentz no es conmutativa y al igual que en la derivada covariante de vectores coordenados, el conmutador de las derivadas covariantes está relacionada con el tensor de curvatura, ahora expresado en función de la conexión spin.

Sea V^{m} un vector Lorentz, vamos a calcular el conmutador

$$\left[D_{\mu}, D_{\nu} \right] V^{m} = D_{\mu} \left(D_{\nu} V^{m} \right) - D_{\nu} \left(D_{\mu} V^{m} \right),$$

teniendo presente

$$D_{\mu} \left(D_{\nu} V^{m} \right) = \partial_{\mu} \left(D_{\nu} V^{m} \right) + D_{\nu} V^{s} \omega_{\mu}{}^{m}{}_{s} - D_{\alpha} V^{m} \Gamma_{\nu\mu}{}^{\alpha}$$

y que

$$D_{\nu} V^{m} = \partial_{\nu} V^{m} + D_{\nu} V^{s} \omega_{\nu}{}^{m}{}_{s}$$

entonces después de algún cálculo se obtiene

$$\left[D_{\mu}, D_{\nu} \right] V^{m} = R^{m}{}_{s\mu\nu} V^{s} + D_{\alpha} V^{m} \tau_{\mu\nu}{}^{\alpha}$$

donde $R^{m}{}_{s\mu\nu}$ es el tensor de curvatura en función de la conexión spin definida por

$$R^{m}{}_{s\mu\nu} = \partial_{\mu}\, \omega_{\nu}{}^{m}{}_{s} - \partial_{\nu}\, \omega_{\mu}{}^{m}{}_{s} + \omega_{\nu}{}^{r}{}_{s}\, \omega_{\mu}{}^{m}{}_{r} - \omega_{\mu}{}^{r}{}_{s}\, \omega_{\nu}{}^{m}{}_{r} \tag{99}$$

y $\tau_{\mu\nu}{}^{\alpha}$ es el tensor de torsión definido en función de la conexión afín

$$\tau_{\mu\nu}{}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}{}^{\alpha}.$$

Cabe definir otra derivada covariante de vectores Lorentz por

$$D_m = e_m^\mu D_\mu .$$

al desarrollar el conmutador

$$\left[D_m, D_n\right] V^r = D_m\left(D_n V^r\right) - D_n\left(D_m V^r\right)$$

se obtiene un nuevo el tensor de curvatura pero ahora puesto en función del vierbein

$$\left[D_m, D_n\right] V^r = R^r{}_{smn} V^s + S_{mn}{}^p D_p V^r$$

donde el tensor de torsión en función del vierbein es definido por

$$S_{mn}{}^p = e_\nu^p \left[e_m^\mu D_\mu e_n^\nu - e_n^\mu D_\mu e_m^\nu \right] + e_m^\mu e_n^\nu e_\alpha^p \tau_{\mu\nu}{}^\alpha ,$$

mientras que el nuevo de tensor de curvatura con todos sus índices latinos es

$$R^r{}_{smn} = e_m^\mu e_n^\nu R^r{}_{s\mu\nu} , \tag{100}$$

al desarrollar el tensor de torsión comprobamos que viene dado solamente en función del vierbein, de sus primeras derivadas y de la conexión spin, en efecto

$$S_{mn}{}^p = e_\nu^p \left[e_m^\mu \left(\partial_\mu e_n^\nu - e_s^\nu \omega_\mu{}^s{}_n \right) - e_n^\mu \left(\partial_\mu e_m^\nu - e_s^\nu \omega_\mu{}^s{}_m \right) \right].$$

Nos encontramos con tres tensores de curvatura, dos de ellos dados en función de la conexión spin, $R^r{}_{s\nu\mu}$ y $R^r{}_{mns}$ relacionados por (100) y el tercero $R^\sigma{}_{\alpha\mu\nu}$ se obtiene por la conexión afín según se expresa en (16). Este último está relacionado con los anteriores, como ahora vamos a demostrar. Para ello sustituimos en (99) la expresión (96), encontrándose

$$R^r{}_{s\mu\nu} = e_s^\alpha e_\sigma^r R^\sigma{}_{\alpha\mu\nu}$$

de donde se deduce la relación

$$R^r{}_{smn} = e_m^\mu e_n^\nu e_s^\alpha e_\sigma^r R^\sigma{}_{\alpha\mu\nu} .$$

Es posible definir el tensor de Ricci en función del vierbein

$$R_{sm} = R^r{}_{smr} = e_m^\mu e_r^\nu e_s^\alpha e_\sigma^r R^\sigma{}_{\alpha\mu\nu} = e_m^\mu e_s^\alpha R^\sigma{}_{\alpha\mu\sigma} = e_m^\mu e_s^\alpha R_{\alpha\mu} .$$

Igualmente se define una curvatura escalar en función del vierbein R', que también se puede relacionar con la curvatura escalar del espacio

$$R' = \eta^{sm} R_{sm} = \eta^{sm} e_m^\mu e_s^\alpha R_{\alpha\mu} = g^{\alpha\mu} R_{\alpha\mu} = R$$

donde R es la curvatura escalar del espacio en función del tensor métrico.

En orden a obtener invariantes que puedan servir para formular densidades lagrangianas, vamos a calcular el determinante del vierbein. De (92) entendida como una expresión matricial, se calculan los determinantes, encontrándose

$$e=\sqrt{g}$$

donde e y g son los determinantes del vierbein y del tensor métrico y donde se entiende que tomamos siempre sus valores positivos.

Bibliografía

Todos los libros de Relatividad General dedican su parte inicial a una descripción de la geometría diferencial, especialmente centrada en los espacios de Riemann. La mejor fuente para el estudio de la geometría no-Riemanniana se encuentra en los artículos en los que se investigan las teorías de campo unificado o las generalizaciones de la teoría de la gravitación. A continuación relacionamos una breve bibliografía escogida por la especial claridad con la que están expuestos sus contenidos.

-POPLASWKI, Nikodem J.: «Spacetime and fields», arXiv:0911.0334, 2009.
-SCHRÖDINGER, Erwin: *Space-Time Structure*, Cambridge University Press, 1991.
-LICHNEROWITZ, A.: *Elementos de cálculo tensorial*, Aguilar, 1972.
-TONNELAT, Marie-Antoinette: *Les théories unitaires de l'electromagnétism et de la gravitation*, Gauthier-Villars, 1965.
-EDDINGTON, A. S.: «A Generalisation of Weyl's Theory of the Electromagnetic and Gravitational Fields», *Proceedings of the Royal Society of London; Philosophical Transactions of the Royal Society* 99 (1921) 104-112.

2 Relatividad General

2 Relatividad General

2.1.- Introducción

En este y en el siguiente capítulo vamos a exponer ejemplos de aplicación a la teoría clásica de campo de la geometría diferencial analizada en el primer capítulo. Estudiamos primeramente la ecuaciones de campo gravitatorio de la Relatividad General, utilizando el principio de mínima acción, del que hay que decir que no es un principio físico, como lo es en la mecánica clásica, pero no obstante es un poderoso método que nos facilita la búsqueda de las ecuaciones de campo. Vamos a hallar las ecuaciones de la gravitación en el vacío utilizando tres formalismos: el métrico, el métrico-afín y el puramente afín, los resultados serán los mismos, con la excepcion que el procedimiento puramente afín produce forzosamente la constante cosmológica, que puede o no aparecer en los dos primeros formalismos.

2.2.- Principio de mínima acción

Las ecuaciones de campo las vamos a obtener a partir del principio de mínima acción. Sea

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi_{ik}, \phi_{ik,r}\right)$$

una densidad lagrangiana que depende de los potenciales ϕ_{ik} (que suponemos que es un tensor para concretar) y de sus derivadas primeras. La acción del campo viene definida por

$$I = \int \mathcal{L}\, d\Omega$$

donde $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$. Supongamos que los potenciales los sometemos a una variación arbitraria $\delta\phi_{ik}$ con la condición de que se anule en los límites de la integral de la acción. Bajo estos supuestos la variación de la acción es nula

ISBN: 978-84-606-7167-1

$$\delta I = \delta \int \mathcal{L}\, d\Omega = 0.$$

El principio de mínimo de acción que hemos formulado es equivalente a afirmar que las ecuaciones de campo se derivan de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{ik,r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{ik}} = 0, \tag{101}$$

como ya demostramos en 1.35 (101) es una ecuación tensorial, por serlo cada uno de los dos sumandos.

El principio de mínima acción se generaliza cuando la densidad lagrangiana depende no sólo de los potenciales y sus primeras derivadas sino también de las segundas derivadas

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\phi_{ik}, \phi_{ik,r}, \phi_{ik,rp}\right)$$

entonces la variación de los potenciales $\delta\phi_{ik}$ debe cumplir no sólo la condición de que se anule en los límites de la integración, sino que igual condición posea su derivada primera $\delta\phi_{ik,r}$. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son entonces

$$\frac{\partial^2}{\partial x^r \partial x^p}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{ik,rp}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{ik,r}}\right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{ik}} = 0,$$

que también es una ecuación tensorial. Fácilmente se llega a más amplias generalizaciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

2.3.- Los potenciales del campo gravitatorio

Se admiten tres posibles formas de obtener las ecuaciones del campo gravitatorio en la Relatividad General. Si suponemos que los potenciales son únicamente las componentes del tensor métrico, tenemos el formalismo métrico. En este caso hay que indicar cuáles son las componentes de la conexión, que en la teoría de la Relatividad General coincide con los símbolos de Christoffel (ver 1.15).

El otro formalismo consiste en tomar simultáneamente las componentes del tensor métrico y de la conexión como los potenciales del campo. En principio la conexión se supone que no es igual a los símbolos de Christoffel. Esto significa que debemos obtener, además de las ecuaciones de campo, unas ecuaciones auxiliares que nos relacionen al tensor métrico con la conexión. A este formalismo se le llama métrico-afín o de Palatini.

Finalmente es posible hallar las ecuaciones de la gravedad suponiendo que los únicos potenciales son las componentes de la conexión. En este método que llamamos puramente afín, es necesario establecer un método para obtener las componentes del tensor métrico a partir de la densidad lagrangiana.

Es interesante señalar que para todos los formalismos señalados existen además de las ecuaciones de campo unas ecuaciones auxiliares que relacionan la conexión y el tensor métrico.

2.4.- Formalismo métrico

Admitimos una geometría caracterizada por un tensor métrico simétrico y por una conexión que coincide con los símbolos de Christoffel. Entonces el formalismo métrico establece que el campo gravitatorio viene expresado por una densidad lagrangiana con la dependencia funcional

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(g_{ik}, g_{ik,r}, g_{ik,rp}\right).$$

Más concretamente, se elige la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \sqrt{g}R = \sqrt{g}\, g^{ik} R_{ik}.$$

Al aplicar el principio de mínima acción

$$\delta I = \delta \int \sqrt{g}\, g^{ik} R_{ik}\, d\Omega = 0$$

δI es cero si se hace una variación arbitraria del tensor métrico δg_{ik} con tal que esta variación y su derivada $\left(\delta g_{ik}\right)_{,r} = \delta g_{ik,r}$ se anulen en los límites de integración. Aunque es posible obtener las ecuaciones de campo utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, es más simple proceder por el método de las variaciones. Entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \delta I &= \int \left(\delta \sqrt{g}\right) R\, d\Omega + \int \sqrt{g} R_{ik} \delta g^{ik} d\Omega + \int \sqrt{g} g^{ik} \delta R_{ik}\, d\Omega = \\ &= \int \sqrt{g} \left(-\frac{1}{2} g_{ik} R + R_{ik} \right) \delta g^{ik} d\Omega + \int \sqrt{g} g^{ik} \delta R_{ik}\, d\Omega = 0, \end{aligned} \tag{102}$$

nótese que al variar el tensor métrico se induce una variacion en la conexión, ya que ambas magnitudes están relacionadas entre sí, lo que a su vez origina una variación del tensor de Ricci. También hay que señalar que la variación de g_{ik} induce una variación en g^{ik}. En efecto, de (29) obtenemos

$$\delta g^{ik} = -g^{ir} g^{sk} \delta g_{sr}.$$

por tanto la anulación de δg_{sr} y su derivada implica la anulación de δg^{ik}

y su derivada. Para abordar la última integral de (102) hacemos uso de la identidad de Palatini (23)

$$\delta R_{ik} = D_k \delta\Gamma_{ir}{}^{r} - D_r \delta\Gamma_{ik}{}^{r} + \tau^{r}_{mk} \delta\Gamma_{ir}{}^{m}$$

cuyo último sumando es nulo por ser la conexión simétrica. Al aplicar esta identidad en la última integral de (102)

$$\int \sqrt{g}\, g^{ik} \delta R_{ik}\, d\Omega = \int \boldsymbol{g}^{ik} D_k \delta\Gamma_{ir}{}^{r} d\Omega - \int \boldsymbol{g}^{ik} D_r \delta\Gamma_{ik}{}^{r} d\Omega. \quad (103)$$

Para tratar (103) integramos por partes y después aplicamos el teorema de Gauss. Veamos el procedimiento para la primera integral del segundo miembro de (103)

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} D_k \delta\Gamma_{ir}{}^{r} d\Omega = \int D_k \left(\boldsymbol{g}^{ik} \delta\Gamma_{ir}{}^{r} \right) d\Omega - \int D_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta\Gamma_{ir}{}^{r} d\Omega,$$

a la primera integral se le aplica el teorema de Gauss (ver 1.34)

$$\int D_k \left(\boldsymbol{g}^{ik} \delta\Gamma_{ir}{}^{r} \right) d\Omega = \int g^{ik} \delta\Gamma_{ir}{}^{r} dS_k + \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta\Gamma_{ir}{}^{r} \tau_k\, d\Omega$$

como las variaciones del tensor métrico y de su primera derivada en los límites de integración son nulas, también lo serán las variaciones inducidas en la conexión por depender del tensor métrico y sus primeras derivadas, siendo nula por tanto la primera de las integrales. Además, la segunda integral también se anula por no exisitr torsión dado que la conexión es simétrica.

Ahora bien, la derivada covariante del tensor métrico es nula, a consecuencia de la simetría del tensor métrico y ser la conexión igual a los símbolos de Christoffel, resultado que se puede comprobar por cálculo directo al sustituir el valor de la conexión en la expresión de la derivada covariante del tensor métrico. Además, la anulación de $D_r g_{ik}$ significa que también es nula la derivada covariante del determinante de g_{ik} y $D_r \boldsymbol{g}_{ik} = 0$. Por tanto son nulas $D_r g^{ik}$ y $D_r \boldsymbol{g}^{ik}$. Todo lo anterior nos lleva al resultado

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} D_k \delta\Gamma_{ir}{}^{r} d\Omega = 0.$$

Aplicando el mismo procedimiento a la segunda integral de (103) llegamos al resultado de que es nula, entonces (102) se simplifica para quedar

$$\int \sqrt{g} \left(-\frac{1}{2} g_{ik} R + R_{ik} \right) \delta g^{ik} d\Omega = 0,$$

como las δg^{ik} son arbitrarias lo anterior implica que el radicando es nulo

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 0 \quad (104)$$

al contraer

$$R = 0$$

y por tanto llegamos a las ecuaciones de campo gravitatorio en el vacío

$$R_{ik} = 0.$$

Hay que notar que en (104) las δg^{ik} son arbitrarias pero no son independientes entre sí por ser el tensor métrico simétrico. Pero como el paréntesis de (104) también es simétrico el resultado que obtenemos es simplemente duplicar las ecuaciones. Obsérvese que la situación cambiaría si el paréntesis de (104) no fuera simétrico, tal como veremos más adelante.

A la densidad lagrangiana le podemos añadir el término

$$\mathcal{L}' = -2\lambda\sqrt{g}$$

λ es una constante indeterminada; con este añadido se sigue manteniendo la dependencia funcional de la densidad lagrangiana. Al tener en cuenta $\mathcal{L}'$ entonces (104) se transforma en

$$\int\sqrt{g}\left(-\frac{1}{2}g_{ik}R + R_{ik} + \lambda g_{ik}\right)\delta g^{ik} d\Omega = 0,$$

de donde se deduce

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R + \lambda g_{ik} = 0$$

al contraer

$$R = 4\lambda$$

y por tanto las ecuaciones gravitatorias quedan

$$R_{ik} = \lambda g_{ik}$$

λ la identificcamos con la constante cosmológica, de tal forma que la anterior ecuación coincide con la correspondiente de la Relatividad General.

2.5.- Formalismo métrico-afin o de Palatini

Ahora admitimos que la dependencia funcional de la densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(g_{ik}, \Gamma_{ik}^{p}, \Gamma_{ik,r}^{p}\right)$$

donde tomamos simétrico tanto al tensor métrico como la conexión, que no identificamos previamente con los símbolos de Christoffel. La conexión y sus derivadas van a aparecer en la densidad lagrangiana a través del tensor de Ricci, entonces

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(g_{ik}, R_{ik}\right).$$

Para obtener las ecuaciones de campo gravitatorio por este formalismo se vuelve a utilizar la misma densidad lagrangiana que en el caso métrico, es decir

$$\mathcal{L} = \sqrt{g} g^{ik} R_{ik}.$$

Al variar la acción encontramos

$$\delta I = \int \sqrt{g}\left(-\frac{1}{2} g_{ik} R + R_{ik}\right)\delta g^{ik} d\Omega + \int \sqrt{g} g^{ik} \delta R_{ik}\, d\Omega = 0. \quad (105)$$

en la segunda integral no aparece la variación del tensor métrico, ya que el tensor de Ricci sólo depende de la conexión y sus derivadas, mientras que la variación de la conexión no aparece en la primera integral, donde sólo se encuentra la variación del tensor métrico. Como las variaciones del tensor métrico y de la conexión son independientes, podemos descomponer (105)

$$\begin{gathered} \int \sqrt{g}\left(-\frac{1}{2} g_{ik} R + R_{ik}\right)\delta g^{ik} d\Omega = 0 \\ \int \sqrt{g} g^{ik} \delta R_{ik}\, d\Omega = 0. \end{gathered} \quad (106)$$

De la segunda integral de (106) hallamos la ecuación auxiliar, aquella que nos relaciona la conexión con el tensor métrico; mientras que de la primera integral obtenemos las genuinas ecuaciones de campo gravitatorio.

El paréntesis de la primera integral de (106) lo descomponemos en parte simétrica y antisimétrica, pero como δg^{ik} es simétrico su producto por un tensor antisimétrico se anula, por tanto la primera integral de (106) queda

$$\int \sqrt{g}\left(-\frac{1}{2} g_{ik} R + R_{ik}\right)\delta g^{ik} d\Omega = \int \sqrt{g}\left(-\frac{1}{2} g_{ik} R + R_{(ik)}\right)\delta g^{ik} d\Omega = 0$$

y como las δg^{ik} son arbitrarias nos queda

$$R_{(ik)} = 0$$

que es la ecuación del campo gravitatorio en el vacío. Nótese que dada la simetría del tensor métrico sólo la parte simétrica del tensor de Ricci interviene en el cálculo de la curvatura escalar *R*, es decir

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{ik} R_{(ik)}.$$

Para aplicar el principio de mínima acción a la segunda integral de (106) utilizamos la identidad de Palatini (23)

$$\delta R_{ik} = D_k\, \delta\Gamma_{ir}{}^{r} - D_r\, \delta\Gamma_{ik}{}^{r} + \tau^{r}_{mk}\, \delta\Gamma_{ir}{}^{m}$$

siendo el último sumando nulo ya que suponemos que la conexión es simétrica. Entonces la segunda integral de (106) queda

$$\int \sqrt{g} g^{ik} \delta R_{ik}\, d\Omega = \int \mathfrak{g}^{ik} \delta R_{ik} d\Omega = \int \mathfrak{g}^{ik} D_k\, \delta\Gamma_{ir}{}^{r} d\Omega - \int \mathfrak{g}^{ik} D_r\, \delta\Gamma_{ik}{}^{r} d\Omega \tag{107}$$

donde $\mathfrak{g}^{ik} = \sqrt{g} g^{ik}$ es la densidad del tensor métrico en forma contravariante. Para resolver las dos integrales de (107) primero se hace una integración por partes y luego se aplica el teorema de Gauss al igual que hicimos en el anterior epígrafe. Veamos la primera integral

$$\int \mathfrak{g}^{ik} D_k\, \delta\Gamma_{ir}{}^{r} d\Omega = \int D_k \left(\mathfrak{g}^{ik} \delta\Gamma_{ir}{}^{r} \right) d\Omega - \int D_k\, \mathfrak{g}^{ik} \delta\Gamma_{ir}{}^{r} d\Omega \tag{108}$$

seguidamente aplicamos el teorema de Gauss (ver 1.34) a la primera integral de (108)

$$\int D_k \left(\mathfrak{g}^{ik} \delta\Gamma_{ir}{}^{r} \right) d\Omega = \int g^{ik} \delta\Gamma_{ir}{}^{r} dS_k + \int \mathfrak{g}^{ik} \delta\Gamma_{ir}{}^{r} \tau_k\, d\Omega$$

al suponer que la variación de la conexión se anula en los límites de integración y que es simétrica (o sea el vector de torsión es nulo), entonces las dos integrales del segundo miembro se anulan, por tanto (108) queda

$$\int \mathfrak{g}^{ik} D_k \delta\Gamma_{ir}{}^{r} d\Omega = -\int D_k\, \mathfrak{g}^{ik} \delta\Gamma_{ir}{}^{r} d\Omega = -\int \delta^k_r D_p \mathfrak{g}^{ip} \delta\Gamma_{ik}{}^{r} d\Omega,$$

utilizando la misma técnica con el último sumando de (107) encontramos

$$-\int \mathfrak{g}^{ik} D_r \delta\Gamma_{ik}{}^{r} d\Omega = \int D_r \mathfrak{g}^{ik} \delta\Gamma_{ik}{}^{r} d\Omega.$$

Reagrupando términos

$$\int \sqrt{g} g^{ik} \delta R_{ik}\, d\Omega = \int \left(D_r \mathfrak{g}^{ik} - \delta^k_r D_p \mathfrak{g}^{ip} \right) \delta\Gamma_{ik}{}^{r} d\Omega. \tag{109}$$

Las componentes $\delta\Gamma_{ik}{}^{r}$ son arbitrarias pero no son independientes debido a su carácter simétrico. Por esta razón descomponemos el paréntesis del integrando de (109) en parte simétrica y antisimétrica, esta última desaparece cuando se multiplica por $\delta\Gamma_{ik}{}^{r}$ que es simétrica, entonces (109) queda

$$\frac{1}{2} \int \left(D_r \mathfrak{g}^{ik} + D_r \mathfrak{g}^{ki} - \delta^k_r D_p \mathfrak{g}^{ip} - \delta^i_r D_p \mathfrak{g}^{kp} \right) \delta\Gamma_{ik}{}^{r} d\Omega = 0$$

y dado el carácter arbitrario de la variación de la conexión

$$2 D_r \mathfrak{g}^{ik} - \delta^k_r D_p \mathfrak{g}^{ip} - \delta^i_r D_p \mathfrak{g}^{kp} = 0\,(110) \tag{110}$$

que es la ecuación auxiliar. Al contraer (110) respecto a k y r hallamos

$$D_r \boldsymbol{g}^{ir} = 0$$

y al sustituir en (110)

$$D_r \boldsymbol{g}^{ik} = 0,$$

como se dedujo en 1.35 lo anterior es equivalente a afirmar que $D_r\, g^{ik} = 0 \;\Rightarrow\; D_r g_{ik} = 0$ y si añadimos que tanto el tensor métrico como la conexión son simétricos, concluimos que el espacio es de Riemann (epígrafe 1.15) y por tanto la conexión es idéntica a los símbolos de Christoffel, igualdad que establece la relación entre el tensor métrico y la conexión.

Como estamos en un espacio de Riemann entonces el tensor de Ricci es simétrico y la ecuación de campo es

$$R_{ik} = 0.$$

Al igual que con el formalismo métrico, también aquí se admite añadir a la densidad lagrangiana el sumando

$$\boldsymbol{L}' = -2\lambda\sqrt{g}$$

lo que hace transformar las ecuaciones de la gravitación a la forma $R_{ik} = \lambda g_{ik}$.

2.6.- Formalismo puramente afín

Finalmente vamos a obtener las ecuaciones de la Relatividad General usando el formalismo puramente afín, en el que los únicos potenciales son las componentes de la conexión que consideramos simétrica. Entonces la dependencia funcional de la densidad lagrangiana es

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\left(\Gamma_{ik}^{\;\;p}, \Gamma_{ik,r}^{\;\;p}\right)$$

o bien

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\left(R_{ik}\right)$$

indicar que el tensor de Ricci tiene parte simétrica y antisimétrica. También señalar que la curvatura homotética (ver 1.11) no aparece explícitamente en la lagrangiana, ya que al ser simétrica la conexión la curvatura homotética está relacionada con la parte antismétrica del tensor de Ricci [ver (24)] la que ya está incluida en la densidad lagrangiana.

El tensor métrico se introduce en la teoría por la definición

$$\boldsymbol{g}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{ik}} \tag{111}$$

que a su vez se convierte en la ecuación de campo gravitatorio cuando es conocida la densidad lagrangiana. Añadir que $\mathfrak{g}^{ik}$ tal como se obtiene de (111) es una densidad tensorial como fue deducido en 1.35.

Como el tensor de Ricci tiene parte simétrica y antisimétrica podemos poner

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}\left[R_{(ik)}, R_{[ik]}\right]$$

entonces

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial R_{ik}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial R_{(pq)}}\frac{\partial R_{(pq)}}{\partial R_{ik}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial R_{[pq]}}\frac{\partial R_{[pq]}}{\partial R_{ik}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial R_{(ik)}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial R_{[ik]}}$$

como se mostró en 1.35 el primer sumando del último miembro es una densidad tensorial simétrica y el segundo sumando lo es antisimétrica.

Ahora bien, como en la teoría general de la relatividad suponemos que el tensor métrico es simétrico entonces debe ocurrir

$$\mathfrak{g}^{ik} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial R_{ik}} = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial R_{(ik)}}$$

lo que significa que la densidad lagrangiana no puede depender de la parte antisimétrica del tensor de Ricci.

Debemos advertir una notable propiedad del formalismo puramente afín. Consiste en que para obtener las ecuaciones auxiliares, que como ya sabemos son las que relacionan tensor métrico y conexión, no necesitamos conocer la densidad lagrangiana sino sólo su dependencia funcional. Sigamos con este procedimiento. El principio de mínima acción es

$$\delta I = \delta \int \mathfrak{L}\left(R_{ik}\right) d\Omega = \int \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial R_{ik}} \delta R_{ik} d\Omega = \int \mathfrak{g}^{ik} \delta R_{ik} d\Omega = 0 \qquad (112)$$

recordando que el tensor métrico, la conexión y el tensor de Ricci son simétricos, (112) es idéntica a la segunda ecuación (106), obteniéndose los mismos resultados, es decir que la conexión coincide con los símbolos de Christoffel.

Para terminar tenemos que hallar la ecuación de campo a partir de (111) para ello es necesario especificar la densidad lagrangiana, la adoptada en la teoría puramente afín de la Relatividad General es

$$\mathfrak{L} = \frac{2}{\lambda}\sqrt{-\det R_{ik}} = \frac{2}{\lambda}\sqrt{-|R|} \qquad (113)$$

$|R|$ representa el determinante de R_{ik} que debe ser negativo y λ es una constante indeterminada.

Para calcular (111) utilizamos (32)

$$\boldsymbol{g}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{ik}} = \frac{2}{\lambda}\frac{-1}{2\sqrt{-|R|}}\frac{\partial |R|}{\partial R_{ik}} = \frac{1}{\lambda}\frac{-|R|}{\sqrt{-|R|}} R^{*ki} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{-|R|}\, R^{*ki} \qquad (114)$$

R^{*ki} representa los elementos de la matriz inversa de la matriz de elementos R_{ik}.

Como hemos dicho (ver 1.34), una densidad tensorial (o escalar) es el producto de un tensor (o escalar) por la raíz cuadrada del determinante de un tensor de segundo orden. Cabe preguntarse cuál es el tensor cuya raíz cuadrada se utiliza para definir la densidad escalar de la lagrangiana en (113). Este tensor está indefinido, vamos a elegirlo arbitrariamente como R_{ik}/λ entonces la raíz cuadrada de su determinante, que define a las densidades, es $\sqrt{-|R|}/\lambda^2$, elección que hacemos por razones que veremos más adelante.

Multipliquemos los dos miembros de (114) por $R_{ip}\, g_{rk}$

$$\lambda R_{ip} g_{rk} \boldsymbol{g}^{ik} = R_{ip} g_{rk} \sqrt{-|R|}\, R^{*ki}$$

o bien

$$\lambda \frac{1}{\lambda^2} R_{rp}\sqrt{-|R|} = \sqrt{-|R|}\, g_{rp} \quad \Rightarrow \quad R_{rp} = \lambda g_{rp}\,, \qquad (115)$$

que son las ecuaciones de campo gravitatorio. Notemos que (115) es diferente de las correspondientes ecuaciones obtenidas en los formalismos antes estudiados, puesto que ahora existe un segundo miembro distinto de cero. La constante λ es entendida como la constante cosmológica que en el formalismo afín surge naturalmente, mientras que en los formalismos métrico o métrico-afín hay que introducirla *ad-hoc*. La naturalidad con la que surge la constante cosmológica hay que entenderla como otra prueba de la superioridad del formalismo puramente afín.

Es posible poner la ecuación de campo (115) en forma contravariante; si multiplicamos (115) por $g^{ip} R^{*kr}$

$$g^{ip} R^{*kr} R_{rp} = \lambda g_{rp} g^{ip} R^{*kr} \quad \Rightarrow \quad g^{ik} = \lambda R^{*ki}\,.$$

Ahora podemos explicar la elección hecha anteriormente en la definición de densidad tensorial. De (115) deducimos que

$$\sqrt{g} = \frac{1}{\lambda^2}\sqrt{-|R|}$$

o sea, que la elección que hicimos era para que las densidades se calculen con la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico. Advertimos que g representa el valor absoluto del determinante de g_{ik}.

El formalismo puramente afín, que hemos expuesto en el marco de la Relatividad General, admite una fácil generalización, ya sea para desarrollar nuevas teorías gravitatorias, como para dar cabida a otros campos, como será visto en el siguiente capítulo.

3 Teoría puramente afín de campo

3 Teoría puramente afín de campo

3.1.- Introducción

Como una segunda aplicación vamos en este capítulo a exponer la teoría de campo puramente afín, que se caracteriza porque los únicos potenciales son las componentes de la conexión, que ahora suponemos asimétrica, generalizando, por tanto, a la Relatividad General. La densidad lagrangiana depende de la conexión y su primera derivada

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\left(\Gamma_{ik}{}^{r}, \Gamma_{ik}{}^{r}{}_{,p}\right).$$

Ahora surge una circunstancia que no se da cuando la conexión es simétrica. Consiste en que el tensor de Ricci, que tiene parte simétrica y antisimétrica, es independiente de la curvatura homotética (ver 1.11), que depende exclusivamente de las derivadas de la conexión; es decir, aparece un nuevo tensor adecuado para formar la densidad lagrangiana. Esto nos obliga a desarrollar dos teorías diferentes, según contenga o no a la curvatura homotética.

En la teoría que a continuación desarrollamos el tensor métrico es asimétrico, al serlo también el tensor de Ricci del que deriva.

Las teorías que se examinan son capaces de incluir varios campos, no sólo el gravitatorio. Como veremos es posible la unificación de la gravedad con el electromagnetismo, e incluso todavía queda lugar para un tercer campo.

3.2.- Ecuación auxiliar

Como ya expusimos en el capítulo precedente debe existir una relación entre el tensor métrico y la conexión, a la que llamamos ecuación auxiliar. Para hallar esta ecuación en la teoría puramente afín no se necesita conocer la densidad lagrangiana, sino solamente su dependencia funcional. Es el procedimiento que seguimos a continación.

ISBN: 978-84-606-7167-1

De momento vamos a limitarnos al caso en que la densidad lagrangiana dependa exclusivamente del tensor de Ricci

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\left(R_{ik}\right) = \boldsymbol{L}\left[R_{(ik)}, R_{[ik]}\right].$$

El tensor métrico aparece en la teoría como una magnitud derivada y definida por

$$\boldsymbol{g}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{ik}}. \tag{116}$$

como R_{ik} es asimétrico así también lo será el tensor métrico. Al tomar $\Gamma_{ik}^{\ \ r}$ como los potenciales, podemos considerar $\boldsymbol{g}^{ik}$ dado por (116) como las intensidades de campo, pero en $\boldsymbol{g}^{ik}$ hay dos intensidades correspondientes a las partes simétrica y la antisimétrica. Mientras que la parte simétrica es la intensidad gravitatoria, la parte antisimétrica corresponde a otro campo, que en estas teorías se asocia con el campo electromagnético

Para obtener la ecuación auxiliar aplicamos el principio de mínima acción

$$\delta I = \delta \int \boldsymbol{L} d\Omega = \int \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{ik}} \delta R_{ik}\, d\Omega = \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta R_{ik} d\Omega = 0. \tag{117}$$

Para hacer la variación usamos la identidad de Palatini [véase (23)]

$$\delta R_{ik} = D_k\, \delta \Gamma_{is}^{\ \ s} - D_s \delta \Gamma_{ik}^{\ \ s} + \tau^{\ s}_{mk}\, \delta \Gamma_{is}^{\ \ m}$$

donde el tensor de torsión no es nulo. La técnica es la misma que la aplicada al formalismo puramente afín de la Relatividad General (epígrafe 2.5), excepto que ahora tenemos que utilizar el teorema de Gauss con el término en el que aparece el vector de torsión (ver 1.34) que no es nulo en la teoría que examinamos

$$\int_V D_k \boldsymbol{A}^k d\Omega = \int_\Sigma A^k dS_k + \int_V \boldsymbol{A}^k \tau_k\, d\Omega.$$

Aplicando la identidad de Palatini a (117) queda

$$\begin{aligned} \delta I = \int \boldsymbol{g}^{ik} \delta R_{ik}\, d\Omega = \int \boldsymbol{g}^{ik} D_k\, \delta \Gamma_{is}^{\ \ s} d\Omega - \\ - \int \boldsymbol{g}^{ik} D_s \delta \Gamma_{ik}^{\ \ s} d\Omega + \int \boldsymbol{g}^{ik} \tau^{\ s}_{mk}\, \delta \Gamma_{is}^{\ \ m}\, d\Omega = 0 \end{aligned} \tag{118}$$

ahora hay que integrar por partes y aplicar el teorema de Gauss; para la primera integral del último miembro de (118) se tiene

$$\int \boldsymbol{g}^{ik} D_k\, \delta \Gamma_{is}^{\ \ s} d\Omega = \int D_k \left(\boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{is}^{\ \ s}\right) d\Omega - \int D_k \boldsymbol{g}^{ik} \delta \Gamma_{is}^{\ \ s} d\Omega =$$

$$=\int g^{ik}\delta\Gamma_{is}{}^{s}dS_k+\int \boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{is}{}^{s}\tau_k d\Omega-\int D_k\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{is}{}^{s}d\Omega$$

como las variaciones de las componentes de la conexión se anulan en la superficie de integración, entonces

$$\int \boldsymbol{g}^{ik}D_k\,\delta\Gamma_{is}{}^{s}d\Omega=\int \boldsymbol{g}^{ik}\tau_k\,\delta\Gamma_{is}{}^{s}d\Omega-\int D_k\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{is}{}^{s}d\Omega=$$
$$=\int \delta_s^k\left(\boldsymbol{g}^{ir}\tau_r-D_r\boldsymbol{g}^{ir}\right)\delta\Gamma_{ik}{}^{s}d\Omega,$$

haciendo el mismo razonamiento con la segunda integral del último miembro de (118) se encuentra

$$\delta I=\int\left[\delta_s^k\boldsymbol{g}^{ir}\tau_r-\delta_s^k D_r\boldsymbol{g}^{ir}-\boldsymbol{g}^{ik}\tau_s+D_s\boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{ir}\tau_{sr}^{k}\right]\delta\Gamma_{ik}{}^{s}\,d\Omega=0$$

y como las $\delta\Gamma_{ik}{}^{s}$ son todas independientes y arbitrarias, nos queda las ecuaciones auxiliares

$$\delta_s^k\boldsymbol{g}^{ir}\tau_r-\delta_s^k D_r\boldsymbol{g}^{ir}-\boldsymbol{g}^{ik}\tau_s+D_s\boldsymbol{g}^{ik}+\boldsymbol{g}^{ir}\tau_{sr}^{k}=0. \qquad (119)$$

Al contraer (119) respecto a k y s

$$D_r\boldsymbol{g}^{ir}=\frac{2}{3}\boldsymbol{g}^{ir}\tau_r$$

que al sustituir en (119) queda

$$D_s\boldsymbol{g}^{ik}-\boldsymbol{g}^{ik}\tau_s+\frac{1}{3}\delta_s^k\boldsymbol{g}^{ir}\tau_r+\boldsymbol{g}^{ir}\tau_{sr}{}^{k}=0 \qquad (120)$$

que son 64 ecuaciones correspondientes a las 64 componentes de la conexión.

(120) es la ecuación auxiliar, es decir aquella que nos relaciona la conexión con el tensor métrico. Recordamos que para deducir (120) no necesitamos conocer la densidad lagrangiana, sólo su dependencia funcional. Sin embargo, para hallar las ecuaciones de campo, que se derivan de (116), necesitamos saber la forma de la densidad lagrangiana.

3.3.- Las ecuaciones de campo

De la (120) se averigua la conexión si es conocido el tensor métrico, que tiene 16 componentes distintas. Entonces para resolver el sistema necesitamos otras 16 ecuaciones, que son las ecuaciones de campo propiamente dichas. Estas ecuaciones se derivan de (116). Vamos a suponer que la densidad lagrangiana es

$$\boldsymbol{L}=\frac{2}{\lambda}\sqrt{-\det R_{ik}}=\frac{2}{\lambda}\sqrt{-|R|} \qquad (121)$$

λ es una constante indeterminada; (121) es la expresión más simple que podemos encontrar y que en efecto es una densidad lagrangiana, o sea, producto de un escalar (el número $2/\lambda$) por la raíz cuadrada del determinante de un tensor de segundo orden. Una condición que exigimos al tensor de Ricci es que tenga determinante negativo, por razones que veremos más adelante.

Al aplicar el principio de mínima acción a (121) nos encontramos en la situación analizada en 2.5, con la excepción que ahora la conexión no es simétrica. De tal forma que llegamos al resultado (115)

$$R_{ik} = \lambda g_{ik} \tag{121}$$

aunque ahora ni el tensor de Ricci ni el tensor métrico son simétricos.

Si hacemos una comparación entre el principio de mínima acción que hemos usado con el mismo principio que se aplica en la mecánica clásica de un sistema de partículas, encontramos que las coordenadas generalizadas de un sistema de partículas q_α son equivalentes a las componentes de la conexión; las velocidades generalizadas dq_α/dt corresponden en nuestro análisis al tensor de Ricci; el tiempo de la mecánica clásica son para nosotros las coordenadas espacio-temporales; y el tensor métrico, que se deriva de la densidad lagrangiana, equivaldría al momento lineal p_α, que igualmente se deriva de la langragiana del sistema de partículas.

3.4.- Ecuaciones de campo en función de la conexión

Se define la conexión afín estrellada por

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{ik}{}^{r} = \Gamma_{ik}{}^{r} + \frac{1}{3}\delta_i^r \tau_k$$

que es una conexión puesto que es la suma de una conexión y un tensor. La conexión afín estrellada tiene la propiedad

$$\overset{*}{\Gamma}{}_{rk}{}^{r} = \overset{*}{\Gamma}{}_{kr}{}^{r},$$

los correspondientes vector y tensor de torsión son

$$\overset{*}{\tau}_r = \frac{4}{3}\tau_r\,; \qquad \tau_{ik}{}^{s} = \overset{*}{\tau}{}_{ik}{}^{s} + \frac{1}{4}\delta_i^s \overset{*}{\tau}_k - \frac{1}{4}\delta_k^s \overset{*}{\tau}_i\,.$$

Es posible expresar (120) en función de la conexión afín estrellada. Para ello recordamos que la derivada covariante de la densidad del tensor métrico es (ver 1.34)

$$D_s \boldsymbol{g}^{ik} = \partial_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{rk}\Gamma_{rs}{}^{i} + \boldsymbol{g}^{ir}\Gamma_{rs}{}^{k} - \boldsymbol{g}^{ik}\Gamma_{rs}{}^{r},$$

entonces de (120) tenemos

$$\partial_s \mathfrak{g}^{ik} + \mathfrak{g}^{rk}\left(\Gamma^{*\ i}_{rs} - \frac{1}{4}\delta^i_r \tau^*_s\right) + \mathfrak{g}^{ir}\left(\Gamma^{*\ k}_{rs} - \frac{1}{4}\delta^k_r \tau^*_s\right) - \mathfrak{g}^{ik}\left(\Gamma^{*\ r}_{rs} - \tau^*_s\right) -$$

$$-\frac{3}{4}\mathfrak{g}^{ik}\tau^*_s - \frac{1}{4}\delta^k_s \mathfrak{g}^{ir}\tau^*_r + \mathfrak{g}^{ir}\left(\tau^{*\ k}_{sr} + \frac{1}{4}\delta^k_s \tau^*_r - \frac{1}{4}\delta^k_r \tau^*_s\right) = 0$$

y al simplificar

$$\partial_s \mathfrak{g}^{ik} + \mathfrak{g}^{rk}\Gamma^{*\ i}_{rs} + \mathfrak{g}^{ir}\Gamma^{*\ k}_{sr} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{ik}\left(\Gamma^{*\ r}_{rs} + \Gamma^{*\ r}_{sr}\right) = 0. \qquad (122)$$

Ahora vamos a poner (122) en función del tensor métrico en vez de la densidad del tensor métrico. Para lo cual multiplicamos (122) por g_{ik} y desarrollamos

$$g_{ik}g^{ik}\frac{\partial_s\sqrt{g}}{\sqrt{g}} + g_{ik}\partial_s g^{ik} + \Gamma^{*\ r}_{rs} + \Gamma^{*\ r}_{sr} - 2g_{ik}g^{ik}\left(\Gamma^{*\ r}_{rs} + \Gamma^{*\ r}_{sr}\right) = 0$$

como sabemos que

$$\frac{\partial_s\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = -\frac{1}{2}g_{ik}\partial_s g^{ik}$$

obtenemos

$$\frac{\partial_s\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{*\ r}_{rs} + \Gamma^{*\ r}_{sr}\right) \qquad (123)$$

de nuevo volvemos a (122) en donde sustituimos (123) y se encuentra

$$\partial_s g^{ik} + g^{rk}\Gamma^{*\ i}_{rs} + g^{ir}\Gamma^{*\ k}_{rs} = 0.$$

Al multiplicar la anterior expresión por $g_{in}g_{mk}$ queda

$$\partial_s g_{mn} - g_{rn}\Gamma^{*\ r}_{ms} - g_{mr}\Gamma^{*\ r}_{sn} = 0, \qquad (124)$$

en este cálculo debemos advertir que por definición $g_{in}\, g^{ik} = \delta^i_n$ y $g_{mk}\, g^{ik} = \delta^i_m$ entonces $g_{in}g_{mk}\, g^{ik} = g_{mn}$.

Hay que notar que el primer miembro de (124) no coincide con $D_s g_{mn}$, ambas ecuaciones se diferencian en el orden de los subíndices de la conexión afín que aparece en el último sumando.

El tensor de Ricci puede ponerse en función de la conexión afín estrellada, obteniéndose

$$R_{ik} = R^*_{ik} + F_{ik}$$

donde R^*_{ik} es el tensor de Ricci calculado respecto a $\Gamma^{*\ r}_{ik}$ y el tensor antisimétrico F_{ik} es definido por

$$F_{ik}=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\tau_i}{\partial x^k}-\frac{\partial\tau_k}{\partial x^i}\right),$$

entonces por (121) se puede poner la ecuación de campo (124) en función de los dos tensores anteriores

$$\partial_s\left(R^*_{mn}+F_{mn}\right)-\left(R^*_{rn}+F_{rn}\right)\Gamma^{*\ r}_{ms}-\left(R^*_{mr}+F_{mr}\right)\Gamma^{*\ r}_{sm}=0 \quad (125)$$

que representan 64 ecuaciones diferenciales más las 4 condiciondes $\Gamma^{*\ r}_{rk}=\Gamma^{*\ r}_{kr}$, para 68 variables de campo: 64 componentes de $\Gamma^{*\ r}_{ik}$ y 4 de τ_k.

Las ecuaciones (125) son las ecuaciones de campo de la teoría puramente afín de conexión asimétrica. Sobre la ecuación (121) indicar que incluye el término cosmológico λ, como ocurre, en general, en las teorías puramente afín, término que no puede ser nulo.

3.5.- Integrales primeras

De (123) y de la propiedad $\Gamma^{*\ r}_{rk}=\Gamma^{*\ r}_{kr}$, se obtiene

$$\Gamma^{*\ r}_{rs}=\frac{\partial_s\sqrt{g}}{\sqrt{g}}$$

entonces deberá de cumplirse

$$\frac{\partial\Gamma^{*\ r}_{rs}}{\partial x^i}-\frac{\partial\Gamma^{*\ r}_{ri}}{\partial x^s}=0$$

que corresponde a las integrales primeras de la ecuación de campo (125).

Contrayendo (122) primero respecto a *i* y *s* y luego respecto a *k* y *s*, y restando los resultados, es fácil encontrar que

$$\frac{\partial\boldsymbol{g}^{[ik]}}{\partial x^k}=0 \quad (126)$$

donde $\boldsymbol{g}^{[ik]}$ representa la parte antisimétrica de $\boldsymbol{g}^{ik}$. Además de (121)

$$R^*_{ik}+F_{ik}=\lambda g_{ik}\ ,(127) \quad (127)$$

entonces las 80 ecuaciones (125) y (127) son otra forma de representar las ecuaciones de campo. Descomponiendo (127) en parte simétrica y antisimétrica nos permite replantear las ecuaciones de campo sin que aparezca F_{ik} es decir sin τ_k

$$R^*_{(ik)}-\lambda g_{(ik)}=0 \quad (128)$$

$$R^{*}_{[ik]} - \lambda g_{[ik]} = -F_{ik} \tag{128}$$

hallando la derivada parcial de la segunda ecuación y permutándola cíclicamente conseguimos que desaparezca F_{ik}

$$\partial_r \left[R^{*}_{[ik]} - \lambda g_{[ik]} \right] + \partial_k \left[R^{*}_{[ri]} - \lambda g_{[ri]} \right] + \partial_i \left[R^{*}_{[kr]} - \lambda g_{[kr]} \right] = 0 \tag{129}$$

las nuevas ecuaciones de campo están formadas por (126), la primera ecuación (128) y por (129), lo que nos sirve para obtener las componentes del tensor métrico.

Si el tensor métrico y la conexión fueran simétricos entonces de (124) se encuentra que $\Gamma^{*}{}_{ik}{}^{r}$ coincide con los símbolos de Christoffel, por tanto R^{*}_{ik} sería simétrico, con lo que la ecuación (129) deja de existir, quedando únicamente la primera de las ecuaciones (128), recuperándose, por tanto, la Relatividad General. De (124) y (121) obtenemos otra forma de las ecuaciones de campo

$$\partial_s R_{mn} - R_{rn} \Gamma^{*}{}_{ms}{}^{r} - R_{mr} \Gamma^{*}{}_{sn}{}^{r} = 0.$$

3.6.- Teoría puramente afín de conexión simétrica

Vamos a considerar un caso particular de la teoría puramente afín, aquel en que la conexión es simétrica, aunque el tensor métrico siga siendo asimétrico. Para hallar las ecuaciones auxiliares utilizamos las mismas técnicas aplicadas en 3.2, excepto que ahora la conexión es simétrica y por tanto la identidad de Palatini se escribe sin el tensor de torsión que es nulo

$$\delta R_{ik} = D_k \, \delta \Gamma_{is}{}^{s} - D_s \delta \Gamma_{ik}{}^{s}$$

el resultado es el mismo que en 2.3 pero sin aparecer en el resultado final ni el vector ni el tensor de torsión

$$\delta I = \int \left[D_s \boldsymbol{g}^{ik} - \delta^k_s D_r \boldsymbol{g}^{ir} \right] \delta \Gamma_{ik}{}^{s} \, d\Omega = 0.$$

Ahora las $\delta \Gamma_{ik}{}^{s}$ son arbitrarias pero no independientes, a causa de su carácter simétrico, teniendo en cuenta esta propiedad encontramos del principio de mínima acción

$$D_s \boldsymbol{g}^{ik} + D_s \boldsymbol{g}^{ki} - \delta^k_s D_r \boldsymbol{g}^{ir} - \delta^i_s D_r \boldsymbol{g}^{kr} = 0, \tag{130}$$

contrayendo respecto a los índices *k* y *s*

$$4 D_r \boldsymbol{g}^{ir} = D_r \boldsymbol{g}^{ri}$$

si hacemos la definición

$$\boldsymbol{i}^{i}=D_{r}\boldsymbol{g}^{[ir]}$$

entonces

$$D_{r}\boldsymbol{g}^{ir}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{i}^{i}$$

y sustituyendo en (130)

$$D_{s}\boldsymbol{g}^{(ik)}+\frac{1}{3}\delta_{s}^{k}\boldsymbol{i}^{i}+\frac{1}{3}\delta_{s}^{i}\boldsymbol{i}^{k}=0. \qquad (131)$$

El paso siguiente es hallar $\Gamma_{ik}{}^{s}$, para lograr este objetivo vamos a definir un nuevo tensor que representaremos por s_{ik} y cuyo determinante es

$$s=\det\left(s_{ik}\right)=\det\left[\boldsymbol{g}^{(ik)}\right]$$

y sus componentes contravariantes son definidas por

$$s^{ik}=\frac{\boldsymbol{g}^{(ik)}}{\sqrt{s}}$$

con s representamos el valor positivo del determinante de s_{ik}. La relación entre las componentes covariante y contravariante es

$$s^{ik}s_{ir}=\delta_{r}^{k},$$

lo que significa que utilizamos el mismo criterio que el usado para el tensor métrico (29), ahora bien como s^{ik} es simétrico entonces $\left(s_{ik}\right)$ será su matriz inversa cuyos elementos también son simétricos. Con esta definición (131) queda

$$D_{r}\boldsymbol{s}^{ik}+\frac{1}{3}\delta_{r}^{k}\boldsymbol{i}^{i}+\frac{1}{3}\delta_{r}^{i}\boldsymbol{i}^{k}=0 \qquad (132)$$

de donde es posible hallar las componentes de la conexión como a continuación veremos. La conexión la podemos descomponer como

$$\Gamma_{ik}{}^{r}=L_{ik}^{*}{}^{r}+X_{ik}{}^{r}$$

donde $L_{ik}^{*}{}^{r}$ son los símbolos de Christoffel respecto a s_{ik} que es una conexión y $X_{ik}{}^{r}$ es un tensor. Advertimos que como s_{ik} es simétrico y por la definición de los símbolos de Christoffel encontramos que $D_{r}^{*}s_{ik}=0$ donde D^{*} es la derivada covariante calculada respecto a $L_{ik}^{*}{}^{r}$, entonces de (132)

$$D_{r}\left(\sqrt{s}s^{ik}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{s}s^{ik}s^{pq}\left(D_{r}^{*}s_{pq}-s_{pm}X_{qr}{}^{m}-s_{mq}X_{pr}{}^{m}\right)+$$

$$+\sqrt{s}\left(D_r^* s^{ik} + s^{mk} X_{mr}^{\ \ i} + s^{im} X_{mr}^{\ \ k}\right) = -\frac{1}{3}\left(\delta_r^k \boldsymbol{i}^i + \delta_r^i \boldsymbol{i}^k\right) \qquad (133)$$

donde hemos tenido en cuenta que

$$D_r s = s s^{pq} D_r s_{pq}.$$

(133) se simplifica

$$-s^{ik} X_{qr}^{\ \ q} + s^{qk} X_{qr}^{\ \ i} + s^{iq} X_{qr}^{\ \ k} = -\frac{1}{3}\left(\delta_r^k i^i + \delta_r^i i^k\right),$$

multiplicando ambos miembros por $s_{kp} s_{im}$ y luego permutando los índices se encuentran las tres relaciones

$$X_{prm} + X_{mrp} - s_{mp} X_{qr}^{\ \ q} = -\frac{1}{3}\left(s_{rp} i_m + s_{rm} i_p\right)$$

$$X_{mpr} + X_{rpm} - s_{rm} X_{qp}^{\ \ q} = -\frac{1}{3}\left(s_{pm} i_r + s_{pr} i_m\right)$$

$$X_{rmp} + X_{pmr} - s_{pr} X_{qm}^{\ \ q} = -\frac{1}{3}\left(s_{mr} i_p + s_{mp} i_r\right)$$

nótese que estamos subiendo y bajando los índices con el tensor s_{ik}; sumando la primera de las anteriores ecuaciones con la tercera y restándole la segunda queda

$$2X_{mrp} - s_{mp} X_{qr}^{\ \ q} + s_{rm} X_{qp}^{\ \ q} - s_{pr} X_{qm}^{\ \ q} = -\frac{2}{3} s_{rm} i_p$$

donde hemos considerado el carácter simétrico de $X_{ik}^{\ \ r}$ respecto a los índices covariantes y la simetría de s_{ik}. El siguiente paso es multiplicar ambos miembros por s^{pn}

$$2X_{mr}^{\ \ n} - \delta_m^n X_{qr}^{\ \ q} + s^{pn} s_{rm} X_{qp}^{\ \ q} - \delta_r^n X_{qm}^{\ \ q} = -\frac{2}{3} s_{rm} i^n \qquad (134)$$

al contraer *n* y *r* se encuentra

$$X_{mr}^{\ \ r} = i_m/3$$

que se sustituye en (134)

$$X_{mrp} = -\frac{1}{2} s_{rm} i_p + \frac{1}{6} s_{mp} i_r + \frac{1}{6} s_{pr} i_m$$

elevando el índice *p* y sumando el resultado a los símbolos de Christoffel encontramos la conexión afín que estábamos buscando

$$\Gamma_{mr}^{\ \ p} = L_{mr}^{*\ p} - \frac{1}{2} s_{mr} i^p + \frac{1}{6} \delta_m^p i_r + \frac{1}{6} \delta_r^p i_m. \qquad (135)$$

Sustituyendo (135) en (121) se obtiene

$$R_{ik} = \overset{*}{R}_{ik} + \frac{1}{6}\left(i_{i,k} - i_{k,i}\right) + \frac{1}{6} i_i\, i_k = \lambda g_{ik} \tag{136}$$

donde $\overset{*}{R}_{ik}$ es el tensor de Ricci calculado a partir de los símbolos de Christoffel $\overset{*}{L}_{ik}{}^{r}$ y en el cálculo hemos considerado $i^{k}_{,k} = 0$ como se desprende de la definición de $\boldsymbol{i}^{k}$ y de (83). Descomponiendo (136) en parte simétrica y antisimétrica y teniendo en cuenta que $\overset{*}{R}_{ik}$ es simétrica

$$\begin{aligned} \overset{*}{R}_{ik} + \frac{1}{6} i_i\, i_k &= \lambda g_{(ik)} \\ \frac{1}{6}\left(i_{i,k} - i_{k,i}\right) &= \lambda g_{[ik]}. \end{aligned} \tag{137}$$

Las ecuaciones de campo (137) corresponden a 16 ecuaciones: 10 de la primera ecuación (nótese que $\overset{*}{R}_{ik}$ es simétrico) y 6 de la segunda, a las que hay que sumar las 4 ecuaciones $i^{k}_{,k} = 0$; habiendo 20 funciones: 16 del tensor métrico y 4 del vector i_k.

En esta teoría se exige que i_k no sea nula, puesto que de serlo entonces por la segunda ecuación (137) $g_{[ik]} = 0$ y por tanto $s_{ik} = g_{(ik)} = g_{ik}$, y la primera ecuación (137) sería idéntica a la ecuación de la Relatividad General.

De la segunda ecuación (137) tenemos

$$\frac{\partial g_{[ik]}}{\partial x^{r}} + \frac{\partial g_{[kr]}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial g_{[ri]}}{\partial x^{k}} = 0$$

que con $\boldsymbol{i}^{i} = D_r \boldsymbol{g}^{[ir]}$ forman las ecuaciones de campo electromagnético, con $g_{[ik]}$ como su tensor de campo, mientras que i^{k} es proporcional tanto a la densidad de corriente como al potencial del campo electromagnético.

La primera ecuación (137) es la de campo gravitatorio, que se reduce, como hemos visto, a la Relatividad General cuando no existe campo electromagnético $g_{[ik]} = 0$.

Si se supone campo electromagnético débil, nos encontramos que es de aplicación los resultados de 1.13, por tanto

$$s_{ik} \approx g_{(ik)}$$

entonces de la primera ecuación (137) encontramos que

$$\overset{*}{R} = s^{ik} \overset{*}{R}_{ik} = 4\lambda - \frac{1}{6} i_r\, i^{r}$$

y volviendo a utilizar la primera ecuación (137)

$$R^*_{ik}-\frac{1}{2}s_{ik}R^*+\lambda s_{ik}=-\frac{1}{6}\left(i_i i_k-\frac{1}{2}s_{ik}i^r i^r\right)=-\chi T_{ik}$$

donde

$$T_{ik}=\frac{1}{6\chi}\left(i_i i_k-\frac{1}{2}s_{ik}i^r i^r\right)$$

es interpretado como el tensor energía-momento del campo electromagnético y χ es una constante indeterminada.

3.7.- Densidad lagrangiana dependiente de la curvatura homotética

Como hemos indicado, si la conexión no es simétrica, la curvatura homotética V_{ik} es independiente del tensor de Ricci R_{ik}, por tanto ambos tensores son adecuados como argumentos de la densidad lagrangiana

$$\mathbf{L}=\mathbf{L}\left(R_{ik},V_{ik}\right). \tag{138}$$

Es posible elegir en vez de R_{ik} y V_{ik} como argumentos otros tensores

$$P_{ik}=\alpha R_{ik}+\beta V_{ik}$$
$$Q_{ik}=\alpha' R_{ik}+\beta' V_{ik}$$

que deben ser linalmente independiente

Las ecuaciones auxiliares del campo son obtenidas de (138), aunque para hallar las ecuaciones de campo se necesitará especificar la densidad lagrangiana. Al aplicar el principio de mínima acción a (138)

$$\delta I=\delta\int\mathbf{L}\left(R_{ik},V_{ik}\right)d\Omega=\int\left(\frac{\partial\mathbf{L}}{R_{ik}}\delta R_{ik}+\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial V_{ik}}\delta V_{ik}\right)d\Omega=0,$$

definimos una densidad tensorial antisimétrica

$$\mathbf{h}^{ik}=\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial V_{ik}}, \tag{139}$$

indiquemos que la densidad lagrangiana no puede depender exclusivamente de V_{ik}, pues entonces sólo podríamos obtener la densidad tensorial $\mathbf{h}^{ik}$ que por ser antisimétrica no puede ser interpretada como el tensor métrico, el cual necesita una parte simétrica para definir el elemento de línea. En este tipo de teorías nos encontramos con tres campos, dos de ellos asociados a $\mathbf{g}^{ik}$ (uno su parte simétrica y el otro la antisimétrica) y a $\mathbf{h}^{ik}$ que como hemos visto sólo tiene parte antisimétrica. Por tanto, estas teorías además de al campo gravitatorio y electromagnético puede acoger a un tercer campo que también es de carácter vectorial al igual que el electromagnético.

Con la definición (139) el principio de mínima acción queda

$$\delta I = \int \left(\boldsymbol{g}^{ik} \delta R_{ik} + \boldsymbol{h}^{ik} \, \delta V_{ik} \right) d\Omega = 0,$$

su resolución se hace con las mismas técnicas usadas anteriormente, es decir, aplicamos la identidad de Palatini, luego se integra por partes y se aplica el teorema de Gauss. El primer sumando de la integral origina el primer miembro de (119). Para resolver el segundo sumando de la integral usamos la identidad de Palatini deducida en 1.11

$$\delta V_{ik} = D_i \, \delta \Gamma_{sk}{}^{s} - D_k \delta \Gamma_{si}{}^{s} + \tau_{ki}^{m} \, \delta \Gamma_{sm}^{\ \ s}.$$

y tras integrar por partes

$$\int \boldsymbol{h}^{ik} \, \delta V_{ik} d\Omega = \int D_i \left(\boldsymbol{h}^{ik} \delta \Gamma_{sk}{}^{s} \right) d\Omega - \int D_i \, \boldsymbol{h}^{ik} \delta \Gamma_{sk}{}^{s} d\Omega -$$
$$- \int D_k \left(\boldsymbol{h}^{ik} \delta \Gamma_{si}{}^{s} \right) d\Omega + \int D_k \boldsymbol{h}^{ik} \delta \Gamma_{si}{}^{s} d\Omega + \int \boldsymbol{h}^{ik} \tau_{ki}^{m} \, \delta \Gamma_{sm}^{\ \ s} d\Omega$$

ahora se aplica el teorema de Gauss (84)

$$\int D_i \left(\boldsymbol{h}^{ik} \delta \Gamma_{sk}{}^{s} \right) d\Omega = \int \boldsymbol{h}^{ik} \delta \Gamma_{sk}{}^{s} \tau_i \, d\Omega$$
$$\int D_k \left(\boldsymbol{h}^{ik} \delta \Gamma_{si}{}^{s} \right) d\Omega = \int \boldsymbol{h}^{ik} \delta \Gamma_{si}{}^{s} \tau_k d\Omega$$

reuniendo todos los términos

$$\int \boldsymbol{h}^{ik} \, \delta V_{ik} d\Omega = \int \left(2 \boldsymbol{h}^{ik} \tau_i - 2 D_i \, \boldsymbol{h}^{ik} + \boldsymbol{h}^{im} \tau_{mi}^{k} \right) \delta_s^i \delta \Gamma_{ik}{}^{s} d\Omega$$

teniendo en cuenta lo deducido en 1.34 para $D_i \, \boldsymbol{h}^{ik}$ se encuentra

$$\int \boldsymbol{h}^{ik} \, \delta V_{ik} d\Omega = 2 \int \partial_r \, \boldsymbol{h}^{kr} \, \delta_s^i \delta \Gamma_{ik}{}^{s} d\Omega$$

que es el término que hay que sumarle a la ecuación (119) que ahora queda

$$\delta_s^k \boldsymbol{g}^{ir} \tau_r - \delta_s^k D_r \boldsymbol{g}^{ir} - \boldsymbol{g}^{ik} \tau_s + D_s \boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{ir} \tau_{sr}^{k} + 2 \partial_r \boldsymbol{h}^{kr} \delta_s^i = 0, \quad (140)$$

contrayendo respecto a k y s

$$D_r \boldsymbol{g}^{ir} = \frac{2}{3} \boldsymbol{g}^{ir} \tau_r + \frac{2}{3} \partial_r \boldsymbol{h}^{ir}$$

sustituyendo en (140)

$$D_s \boldsymbol{g}^{ik} - \boldsymbol{g}^{ik} \tau_s + \frac{1}{3} \delta_s^k \boldsymbol{g}^{ir} \tau_r + \boldsymbol{g}^{ir} \tau_{sr}{}^{k} - \frac{2}{3} \delta_s^k \partial_r \boldsymbol{h}^{ir} + 2 \delta_s^i \partial_r \boldsymbol{h}^{kr} = 0 \quad (141)$$

que es la ecuación auxiliar correspondiente a la densidad lagrangiana (138).

De (141) podemos obtener las integrales primeras, al igual que en 3.5. El camino para hacerlo es primeramente introducir en (141) la conexión afín estrellada, al igual que se hizo en 3.4, llegando al resultado

$$\partial_s \mathfrak{g}^{ik} + \mathfrak{g}^{rk}\Gamma^{*\ i}_{rs} + \mathfrak{g}^{ir}\Gamma^{*\ k}_{sr} - \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{ik}\left(\Gamma^{*\ r}_{rs} + \Gamma^{*\ r}_{sr}\right) -$$
$$-\frac{2}{3}\delta^k_s \partial_r \mathfrak{h}^{ir} + 2\delta^i_s \partial_r \mathfrak{h}^{kr} = 0$$

ahora se contrae *i, s* y luego *k*, *s*, los resultados se restan y queda

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\mathfrak{g}^{[ik]} + 8\mathfrak{h}^{ik}\right\} = 0$$

que es la generalización de (126) cuando en la densidad lagrangiana también aparece la curvtura homotética. Esta ecuación puede cambiar si se utilizan como argumentos de la densidad lagrangiana P_{ik} y Q_{ik} que hemos definido antes.

Para hallar las ecuaciones de campo aplicamos (139) para lo que necesitamos conocer la densidad lagrangiana, que vamos especualitvamente a elegir como

$$\mathfrak{L} = \frac{2}{\lambda}\sqrt{-\det R_{ik}} + \frac{2}{\lambda'}\sqrt{-\det V_{ik}} \tag{142}$$

donde λ y λ' son constantes indeterminadas. (142) es una densidad escalar y con la dependencia funcional requerida. La ecuación de campo que se deriva de (116) ya la hemos obtenido y es la (121). Ahora tenemos que aplicar (139) a la densidad lagrangiana (142) y obtener el otro conjunto de ecuaciones de campo.

La técnica a usar es la descrita en 2.5, excepto que se cambia el tensor de Ricci por la curvatura homotética, la densidad $\mathfrak{g}^{ik}$ por $\mathfrak{h}^{ik}$ y la constante λ por λ'

$$V_{ik} = \lambda' h_{ik}$$

que dado el carácter antisimétrico de ambos términos son 6 ecuaciones a añadir a (121), incrementándose también en 6 las funciones a determinar.