Хмельник С. И.

Структура постоянного тока

Аннотация

Рассматривается структура постоянного тока в проводе.

Оглавление

1. Введение
2. Математическая модель
3. Решение уравнений
4. Структура токов
5. Мощность
Приложение
Литература

1. Введение

В [1] было показано, что постоянный ток в проводе имеет сложную структуру и этим можно обосновать утверждения о том, что основной поток электромагнитной энергии

- направлен вдоль оси провода,
- распространяется вдоль оси провода,
- распространяется внутри провода,
- компенсирует тепловые потери осевой составляющей тока.

Ниже структура постоянного тока рассматривается более строго.

2. Математическая модель

Ток в проводе принято рассматривать как усредненный поток электронов. Механические взаимодействия электронов с атомами считаются эквивалентными электрическому сопротивлению.

При моделировании тока будем использовать цилиндрические координаты $r, \ \varphi, \ z$. Уравнения Максвелла для магнитных напряженностей и токов в стационарном магнитном поле имеют вид

$$\mathrm{div}(H) = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{H}) = J, \tag{2}$$

или

$$\frac{H_r}{r}+\frac{\partial H_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}=J_r, \quad (4)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}=J_\varphi, \quad (5)$$

$$\frac{H_\varphi}{r}+\frac{\partial H_\varphi}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}=J_z+J_o, \quad (6)$$

Модель основана на том, что

1. основная электрическая напряженность E_o направлена вдоль оси провода,
2. она создает основной ток J_o – вертикальный поток зарядов,
3. вертикальный ток J_o формирует кольцевое магнитное поле с напряженностью H_φ и радиальное магнитное поле H_r - см. (6),
4. магнитное поле H_φ отклоняет силами Лоренца заряды вертикального потока в радиальном направлении, создавая– радиальный поток зарядов - радиальный ток J_r,
5. магнитное поле H_φ отклоняет силами Лоренца заряды радиального потока перпендикулярно радиусам, создавая вертикальный ток J_z (дополнительно к току J_o),
6. магнитное поле H_r отклоняет силами Лоренца заряды вертикального потока перпендикулярно радиусам, создавая кольцевой ток J_φ,
7. магнитное поле H_r отклоняет силами Лоренца заряды кольцевого потока вдоль радиусов, создавая вертикальный ток J_z (дополнительно к току J_o),
8. ток J_r формирует вертикальное магнитное поле H_z и кольцевое магнитное поле H_φ - см. (4),
9. ток J_φ формирует вертикальное магнитное поле H_z и радиальное магнитное поле H_r - см. (5),
10. ток J_z формирует кольцевое магнитное поле H_φ и радиальное магнитное поле H_r - см. (6),
11. токам соответствуют одноименные электрические напряженности, т.е.

$$E = \rho \cdot J \,, \tag{7}$$

где ρ - электросопротивление.

Таким образом, основной ток J_o создает дополнительные токи J_r, J_φ, J_z и магнитные поля H_r, H_φ, H_z. Они должны удовлетворять уравнениям Максвелла (3-6). Кроме того, токи должны удовлетворять условию непрерывности

$$\mathrm{div}(J) = 0 \,. \tag{8}$$

Прежде всего, необходимо доказать, что решение системы (3-8) существует при ненулевых токах J_r, J_φ, J_z.

3. Решение уравнений

Из физических соображений ясно, что поле должно быть однородным вдоль вертикальной оси, т.е. должны отсутствовать производные по аргументу z, и, следовательно, уравнения (3-6, 8) должны быть переписаны в виде:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \,, \tag{9}$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = J_r \,, \tag{10}$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi \,, \tag{11}$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z + J_o \,, \tag{12}$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \tag{13}$$

Решение системы уравнений дано в приложении 1, где показано, что при данных j_φ, h_φ определены

$$H_r . = \frac{\alpha}{2} h_\varphi r \sin(\alpha\varphi) \,, \tag{14}$$

$$H_\varphi . = h_\varphi r \cos(\alpha\varphi) + \frac{J_o r}{2} \,, \tag{15}$$

$$H_z = -\frac{1}{2} j_\varphi r^2 \sin(\alpha\varphi) \,, \tag{16}$$

$$J_r . = -\frac{\alpha}{2} j_\varphi r \cos(\alpha\varphi) \,, \tag{17}$$

$$J_{\varphi}. = j_{\varphi} r \sin(\alpha\varphi), \tag{18}$$

$$J_z = J_o + h_{\varphi}\left(\left(1-\alpha^2/2\right)\cos(\alpha\varphi) - \alpha\sin(\alpha\varphi)\right). \tag{19}$$

4. Структура токов

На основе уравнений (17-19) рассмотрим распределение токов в объеме цилиндрического провода. Все примеры показаны при $j_{\varphi}=1,\ h_{\varphi}=1,\ \alpha=10,\ R=50$.

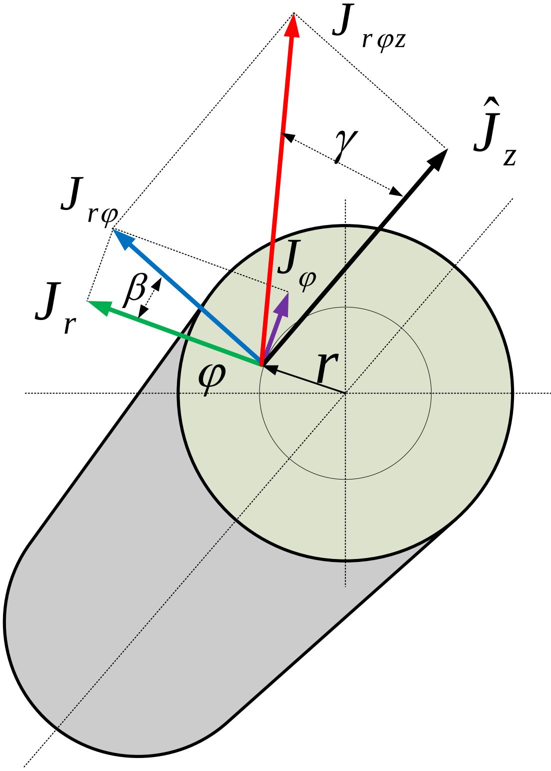
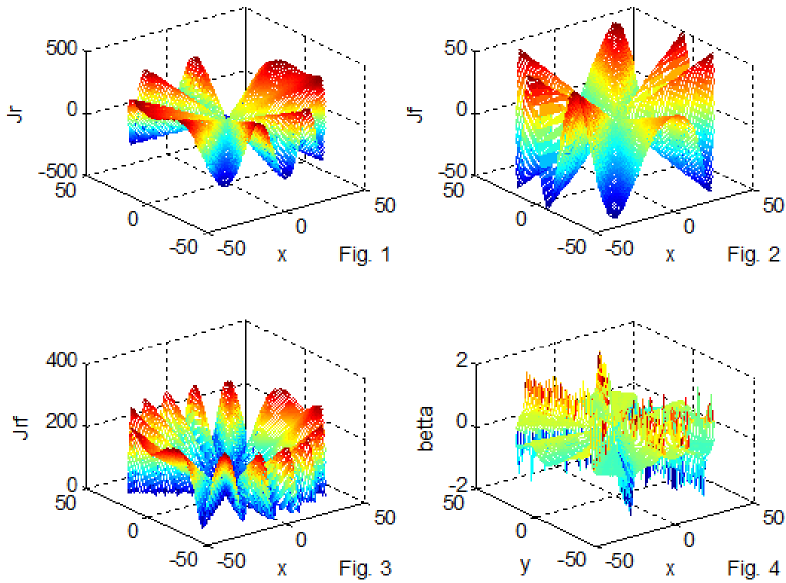


Рис. 0.

На рис. 0 показаны векторы токов J_r, J_{φ}, J_z. На этом рисунке при фиксированном значении φ показаны также вектор $J_{r\varphi}$ (равный сумме векторов J_r и J) и вектор $J_{r\varphi z}$ (равный сумме векторов $J_{r\varphi}$ и J_o). Вектор $J_{r\varphi}$ составляет с радиусом угол β. Видно, что <u>вектор $J_{r\varphi z}$ направлен под некоторым углом γ к оси цилиндра</u>.



На рис. 1, 2, 3, 4 показаны величины J_r, J_φ, $J_{r\varphi}$, β на плоскости сечения $(r,\ \varphi)$. На рис. 5 показаны линии токов J_r, J_φ на этой плоскости при $\alpha = 8$. Важно отметить, что на линиях тока J_r ток $J_\varphi = 0$. Видно, что непрерывность линий тока соблюдается – см. (13).

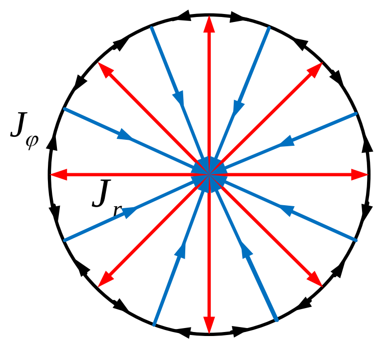


Рис. 5.

Точно так же изображаются линии напряженностей H_r, H_φ на плоскости сечения $(r,\ \varphi)$. Отличие заключается в том, что на линиях напряженностей H_r напряженность $H_\varphi. = J_o r/2$ - см. (15). Видно, что непрерывность силовых линий также соблюдается – см. (9).

Важно отметить, что на окружности внешнего радиуса R напряженность H_φ не постоянна, определяется из (15) и имеет вид:

$$H_{\varphi R}. = h_\varphi R\cos(\alpha\varphi) + J_o R/2 \qquad (20)$$

На рис. 6 показана величина J_z на плоскости сечения $(r,\ \varphi)$. На рис. 7, 8 показаны величины $J_{r\varphi z}$, γ на плоскости сечения $(r,\ \varphi)$ при $J_o = 500$. Видно, что линии тока $J_{r\varphi z}$ всегда наклонены к оси цилиндра. Именно этот факт был основным аргументом при обосновании указанных во введении выводов статьи [1]

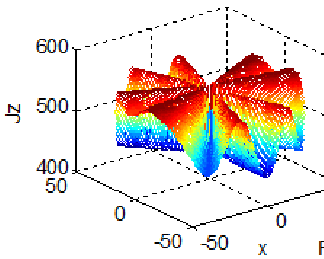


Fig. 6

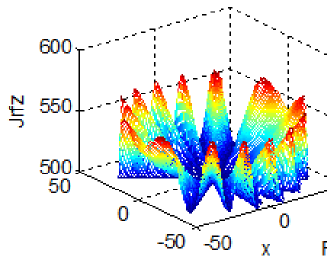


Fig. 7

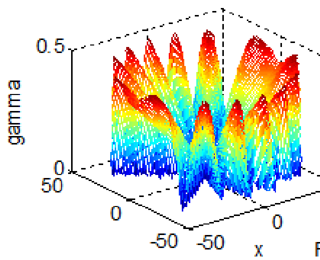


Fig. 8

Заметим, что существуют случаи, когда угол γ является постоянным. Например, на рис. 9, 10 показаны величины $J_{r\varphi z}$, γ при $\alpha = 2$.

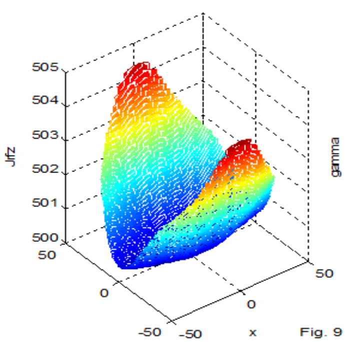


Fig. 9

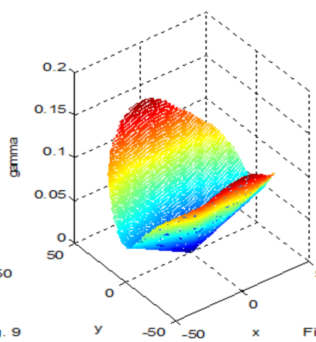


Fig. 8

5. Мощность

Найдем плотность мощности тепловых потерь, обозначая через R - внешний радиус провода, L - длину провода, ρ - электросопротивление.

Ток J_r течет через сечение $Lr \cdot d\varphi$ на длине dr. Поэтому мощность потерь от этих токов равна следующему интегралу:

$$P_r = \rho L \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (J_r)^2 d\varphi = \frac{\rho L \alpha^2}{4} j_\varphi^2 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (r\cos(\alpha\varphi))^2 d\varphi$$

или

$$P_r = \frac{\pi \rho \alpha^2 R^4 L}{16} j_\varphi^2. \tag{21}$$

Ток J_φ течет через сечение $L \cdot dr$ на длине $r \cdot d\varphi$. Поэтому мощность потерь от этих токов равна следующему интегралу:

$$P_\varphi = \rho L \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (J_\varphi)^2 d\varphi = \rho L j_\varphi^2 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (r\sin(\alpha\varphi))^2 d\varphi$$

или

$$P_\varphi = \frac{\pi \rho R^4 L}{4} j_\varphi^2. \tag{22}$$

Ток J_z течет через сечение $r \cdot d\varphi \cdot dr$ на длине L. Поэтому мощность потерь от этих токов равна следующему интегралу:

$$P_z = \rho L \pi R^2 J_o^2 + \rho L \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} (J_z)^2 d\varphi =$$

$$\rho L \pi R^2 J_o^2 + \rho L h_\varphi^2 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} \left(\begin{pmatrix} \left(1-\alpha^2/2\right)\cos(\alpha\varphi) \\ -\alpha\sin(\alpha\varphi) \end{pmatrix} \right)^2 d\varphi =$$

$$\rho L \pi R^2 J_o^2 + \rho L h_\varphi^2 \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} \left(\begin{pmatrix} \left(1-\alpha^2/2\right)^2 \cos^2(\alpha\varphi) \\ -\alpha\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)\sin(2\alpha\varphi) \\ +\alpha^2\sin^2(\alpha\varphi) \end{pmatrix} \right)^2 d\varphi =$$

$$= \rho L \pi R^2 J_o^2 + \frac{\pi R^2}{2} \rho L h_\varphi^2 \left(\left(1-\alpha^2/2\right)^2 + \alpha^2 \right)$$

или

$$P_z = \rho L \pi R^2 \left(J_o^2 + \frac{1}{2} h_\varphi^2 \left(1 + \alpha^4/4\right) \right). \quad (23)$$

Итак,

$$P = \begin{bmatrix} P_r \\ P_\varphi \\ P_z \end{bmatrix} = \pi R^2 L \rho \begin{bmatrix} P_r = \alpha^2 R^2 j_\varphi^2 / 16 \\ P_\varphi = R^2 j_\varphi^2 / 4 \\ P_z = J_o^2 + h_\varphi^2 \left(1/2 + \alpha^4/8\right) \end{bmatrix} \quad (24)$$

и

$$P = P_r + P_\varphi + P_z = \pi R^2 L \rho \left(j_\varphi^2 R^2 \left(1/4 + \alpha^2/16\right) + J_o^2 + h_\varphi^2 \left(1 + \alpha^4/4\right) \right) \quad (25)$$

В электрических цепях постоянного тока соблюдается принцип минимума тепловых потерь. Впервые на такое свойство электрических цепей обратил внимание Максвелл [2], который обнаружил, что в цепях с сопротивлениями токи минимизируют мощность тепловых потерь. Минимум мощности (25) соблюдается при

$$\left(j_\varphi^2 R^2 \left(1/4 + \alpha^2/16\right) + h_\varphi^2 \left(1 + \alpha^4/4\right) \right) \to \min \quad (26)$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{j_\varphi^2 R^2 \left(1/4 + \alpha^2/16\right)} = \sqrt{h_\varphi^2 \left(1 + \alpha^4/4\right)}$$

или

$$j_\varphi = h_\varphi \eta / R. \quad (27)$$

где

$$\eta = \sqrt{\left(4 + \alpha^4\right) / \left(1 + \alpha^2/4\right)}, \quad (28)$$

т.е.

$$P = \pi R^2 L \rho \left(J_o^2 + h_\varphi^2 \left(\eta^2 \left(1/4 + \alpha^2/16\right) + \left(1 + \alpha^4/4\right) \right) \right)$$

или

$$P = \pi R^2 L \rho \left(J_o^2 + h_\varphi^2 \left(1/4 + \alpha^4/16\right) \right) \quad (29)$$

Энергия, расходуемая силами Лоренца для создания дополнительных токов J_r, J_φ, J_z, доставляется основным током J_o. Следовательно, создание дополнительных токов эквивалентно увеличению сопротивления на некоторую величину $\Delta\rho$. Этот факт можно записать в следующем виде:

$$\left(\rho + \Delta\rho\right) \cdot \pi R^2 J_o^2 L = P. \quad (30)$$

Из (25, 27, 30) следует, что

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} J_o^2 = h_\varphi^2 \left(1/4 + \alpha^4/16\right) \quad (31)$$

Пример.
Все вычисления будем выполнять в системе СИ. Найдем максимальные токи и напряженности из (14-19):

$$H_r. = \pm\frac{\alpha}{2}h_\varphi R,\ H_\varphi. = \pm h_\varphi R + \frac{J_o R}{2},\ H_z = \pm\frac{1}{2}j_\varphi R^2,$$

$$J_r. = \pm\frac{\alpha}{2}j_\varphi R,\ J_\varphi. = \pm j_\varphi R,\ J_z = J_o \pm \frac{\alpha^2}{2}h_\varphi. \qquad (32)$$

Пусть в формуле (31) $\Delta\rho/\rho = 0.01$. Тогда $0.01J_o^2 \approx h_\varphi^2\alpha^4/16$ или

$$h_\varphi \approx 0.04J_o/\alpha^2. \qquad (33)$$

Пусть еще $\alpha = 2$, $R = 0.001$. Тогда из (33, 28, 27) найдем $h_\varphi \approx 0.01J_o$, $\eta = 10$, $j_\varphi = 100J_o$, а из (32) найдем:

$$H_r. \approx \pm J_o 10^{-5},\ H_\varphi. \approx (5 \pm 0.1)J_o 10^{-4},\ H_z \approx \pm 5J_o 10^{-5},$$

$$J_r. = \pm 0.1J_o,\ J_\varphi. = \pm 0.1J_o,\ J_z = (1 \pm 0.02)J_o. \qquad (34)$$

Таким образом, существуют условия, при которых рассматриваемая структура тока возможна.

Приложение

Рассматривается решение уравнений (9-13). Из физических соображений ясно, что поле должно быть однородным вдоль вертикальной оси, т.е. должны отсутствовать производные по аргументу z, и, следовательно, уравнения (9-13) основного раздела должны быть переписаны в виде:

$$\frac{H_r}{r} + \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_z}{\partial \varphi} = J_r, \qquad (2)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial r} = J_\varphi, \qquad (3)$$

$$\frac{H_\varphi}{r} + \frac{\partial H_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = J_z + J_o, \qquad (4)$$

$$\frac{J_r}{r} + \frac{\partial J_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial J_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \qquad (5)$$

Предположим, что

$$H_r. = h_r r\sin(\alpha\varphi) \qquad (6)$$

$$H_\varphi . = h_\varphi r\cos(\alpha\varphi) + \frac{J_o r}{2} \tag{7}$$

Из (1, 6, 7) следует:

$$\frac{h_r r\sin(\alpha\varphi)}{r} + h_r \sin(\alpha\varphi) - h_\varphi \alpha\sin(\alpha\varphi) = 0\,, \tag{8}$$

Следовательно,

$$h_r = h_\varphi \alpha/2\,. \tag{9}$$

Из (4, 6, 7) следует:

$$\frac{h_\varphi r\cos(\alpha\varphi)}{r} - h_\varphi \alpha\sin(\alpha\varphi) - h_r \alpha\cos(\alpha\varphi) = J_z\,, \tag{10}$$

Из (9, 10) следует:

$$-h_\varphi \alpha\sin(\alpha\varphi) + (h_\varphi - h_r\alpha)\cos(\alpha\varphi) = J_z\,,$$

или

$$J_z = h_\varphi\left(\left(1-\alpha^2/2\right)\cos(\alpha\varphi) - \alpha\sin(\alpha\varphi)\right). \tag{11}$$

Предположим, далее, что

$$J_r . = j_r r\cos(\alpha\varphi)\,, \tag{12}$$

$$J_\varphi . = j_\varphi r\sin(\alpha\varphi)\,. \tag{13}$$

Из (5, 11, 12) следует:

$$\frac{j_r r\cos(\alpha\varphi)}{r} + j_r \cos(\alpha\varphi) + j_\varphi \alpha\cos(\alpha\varphi) = 0\,, \tag{14}$$

Следовательно,

$$j_r = -j_\varphi \alpha/2 \tag{15}$$

Из (2, 12) находим

$$\frac{\partial H_z}{\partial\varphi} = j_r r^2\cos(\alpha\varphi)\,, \tag{16}$$

Из (15, 16) следует, что

$$H_z = -\frac{1}{2} j_\varphi r^2\sin(\alpha\varphi) \tag{17}$$

Из (3, 13) находим

$$\frac{\partial H_z}{\partial r} = -j_\varphi r\sin(\alpha\varphi), \tag{18}$$

Из (18) следует, что

$$H_z = -\frac{1}{2} j_\varphi r^2\sin(\alpha\varphi) \tag{19}$$

Формулы (17, 19) совпадают, что свидетельствует о правильности решения.

Литература

1. Хмельник С.И. Поток электромагнитной энергии в проводнике с постоянным током, «Доклады независимых авторов», изд. «DNA», ISSN 2225—6717, Россия – Израиль, 2015, вып. 32. ISBN 978-1-312-19894-4, printed in USA, Lulu Inc., ID 16319679; http://vixra.org/pdf/1503.0048v1.pdf
2. Максвелл Кларк Д. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. 1. М.-Л.: Гостехиздат, 1939, 321 с.