Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР
Ленинградский политехнический институт им. М.И.Калинина

К.т.н., доцент **БОЛОНКИН** А. А.

НОВЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ и ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

(специальность 255 – техническая кибернетика)

Автореферат
Диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Москва **1971**

Д.т.н. Б. Кругляк

Предисловие

Немного истории. У этой диссертации трудная судьба. В 1961г научный руководитель Болонкина заслуженный ученый, заведующий кафедрой «Динамика полета и управление» Московского авиационного института , д.т.н. И.В. Остославский попросил своего аспиранта Александра Болонкина дать заключение о претенденте на вакантное место преподавателя В.Ф. Кротове, опубликовавшего в «Известиях ВУЗов» к тому времени всего две работы по математике. Как пишет в своих воспоминаниях Болонкин, он видел, что «работы Кротова это мыльный пузырь», содержащий к тому же массу математических ошибок автора, не имевшего базового математического образования и не понимавшего толком существа исследуемого предмета. Тем не менее учитывая трудное положение Кротова и желая ему помочь, Болонкин дал положительное заключение.

Оказавшись на кафедре Кротов возомнил себя гением, создателем нового метода вариационного исчисления и организовал группу по проталкиванию себя и членов своей группировки в добывание ученых степеней и званий. Напомню, что в те времена ученая степень обеспечивала не только повышенную зарплату, но давала многочисленные льготы, например, позволяла получать в первую очередь квартиры повышенной площади. Поскольку группировка в достижении своих целей не брезговали никакими методами она в среде специалистов получила название «Банда Кротова».

Болонкин отказался вступать в его банду и получил смертельного врага.

В 1962г Кротов В.Ф. объявляет величайшем достижением, что к широко известному уравнению Р. Беллмана, являющемуся достаточным условием абсолютного минимума

$$\inf_u \left[f_0(t,x,u) - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i(t,x,u) \right] = 0, \qquad (1)$$

[где u – r-мерный вектор управления (например, руль направления, угол атаки у самолета, обороты двигателя), x - n-мерный вектор фазовых координат (например, дальность полета и высота полета самолета), t – независимая пременная (обычно время)], Кротов добавляет излишнее, ненужное с математической точки зрения, требование абсолютного минимума по фазовым координатам *x* и делает их разрывными (о чем радостно пишет сам автор).

$$\inf_{u,x}\left[f_0(t,x,u) - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} f_i(t,x,u) \right] = 0, \qquad (2)$$

(обратите внимание на *x* под знаком инфинума).
Это сразу делает, как правило, задачу нерешаемой или приводит к идиотским техническим решениям. Например, что самолет может мгновенно переместится в любую точку Земли.

Недаром буквально все, кто пишет (чтобы не иметь Кротова врагом), что они решали задачу «Методом Кротова», пользовались только исходным уравнением Беллмана или принципом максимума Понтрягина.

Сам Кротов, решая своим методом задачу о минимуме расхода топлива двигателем внутреннего сгорания, получил, что с целью экономии топлива надо несколько раз в секунду включать и выключать двигатель. Обещает сэкономить для страны миллионы тонн бензина. Свой метод он преподносил как величайшее научное достижение и требовал себе сразу присвоения доктора физико-математических наук. Члены Ученого Совета, ошарашенные его требованием и потрясающими достижениями в незнакомой для них области, тем не менее согласились дать ему кандидата.

Говорят, что нашелся даже чудак, который решил на своем автомобиле опробовать метод Кротова. Израсходовал топливо, посадил аккумулятор , но не сдвинулся с места.

Кротов немедленно (за полгода), несмотря на преподавательскую работу, пишет докторскую диссертацию и решает в ней своим методом задачу о торможении космического аппарата при входе в земную атмосферу. Получает, что самолеты и космические аппараты тормозятся неправильно. Если пилот будет с максимальной частотой дергать ручку управления «вверх-вниз», то самолет будет тормозится быстрее, а космический корабль якобы сэкономить на теплозащите. То что эта проблема давно решена тупым носом у космического аппарата и воздушными тормозными щитками у самолета – Кротову невдомек. Поздние детальные технические расчеты показали, что торможение самолетов и космических кораблей (КК) происходит во много раз медленнее, космический корабль нуждается в более мощной теплозащите, аппарат и пилот получают неприемлемые (и ненужные) перегрузки и требуют большей прочности и веса. Космонавты теряют место посадки, а пилоты боевых самолетов (для пассажирских самолетов метод Кротова вообще неприемлем) теряют противника и становятся легкой добычей неприятеля.

Вслед за Кротовым потянулись и другие члены кротовской банды. Его верный ученик Владимир Гурман решает методом Кротова задачу изменения орбиты КК с двигателем малой тяги. И приходит к выводу, что двигатель надо включать многократно на самое короткое время только в нижней точке орбиты. То что это приводит (даже без учета переходных процессов и расхода топлива на включение-выключения) к бсконечному времени маневра - ему невдомек.

Самым своим уникальным результатом Кротов и Гурман считают сокращение взлетной дистанции вертолета на 40-50%. В Википедии Кротов сам о себе пишет (2013г):

На этой основе (т.е. метода Кротова – примечание Кругляк) выполнен ряд крупных прикладных исследований, таких как оптимизация ориентационных маневров космических аппаратов (В. И. Гурман, А. М. Никулин), оптимизация взлетов вертолета с уникальным результатом — сокращением взлетной дистанции на 40-50 % (Гурман В. И., Чуклов Б. Т.) и др., в том числе по договорам с ведущими организациями аэрокосмического профиля. С фирмами С. П. Королева, М. К. Янгеля, В. Н. Челомея, А. С. Лавочкина, ЦНИИМаш и другими были заключены хоздоговора на выполнение НИР по отысканию оптимальных режимов и законов управления космическими объектами, которые готовились к запуску на этих предприятиях.

Известно, что вертолет взлетает вертикально, длина его разбега равна нулю. Т.е. Кротов и его ученики секономили 40-50% от нуля! Что касается хоздоговоров с фирмами Королева, Янгеля, Челомея, Лавочкина и др., то все оказалось фикцией и Кротову пришлось это удалить.

Цель Кротова - стать академиком, а то и повыше, так и не осуществилась. Правда он купил звание академика в частной организации, громко именующей себя Российской Инженерной Академией, указал это в Википедии и сделал клик на государственную Российскую Академию Наук, но там его в списках не оказалось. Пришлось удалить.

Имея в своем распоряжении 4-х программистов, связанных с Википедией, Кротов развенулся во всю. Описание его «величайших» достижений там самое большое, просто гиганское. Что там академики, членкоры и доктора наук РАН, ИПУ, если даже описание достижений его непосредственного начальника - директора Института Проблем Управления (ИПУ) – академика С.Н. Васильева в 8-10 раз меньше, чем описание «достижений», самого выдающего ученого всего мира – В.Ф. Кротова!, с которым (как он пишет) сотрудничают Университеты США, Германии, Израиля, СНГ, др. стран (2013г). Правда в 2014г утверждения о договорах и сотрудничестве пришлось удалить, но наглой лжи осталось предостаточно.

Почему я об этом говорю? Дело в том, что после того как Александр Болонкин отказался стать членом банды Кротова, пахан решил продемонстрировать, что он раздавит любого, кто посмеет без его согласия и панегиреков в его адрес работать в области оптимального управления. К тому времени в его банде состояло несколько десятков человек (к настоящему времени, как он пишет, он воспитал и подготовил 20 кандидатов и 7 докторов наук (список представить отказался). Самый выдащийся, по его словам – это упомянутый выше В.И. Гурман).

В 1971г за два дня до защиты, Кротов узнает о защите докторской диссертации Болонкиным в Ленинградском Политехническом Институте. В течении суток он организует от членов своей банды чемодан отрицательных отзывов. Как видно из библиотечного формуляра ни сам Кротов, НИ ОДИН член его банды диссертации Болонкина не читал. Кротов командировал себя и членов своей банды в Ленинград (по личным делам, но за казенный счет разумеется!) сорвал свои и чужие лекции студентам. На защите они устроили бардак.

Сначала Кротов утверждал, что все результаты неверны, а затем что все списано у него На резонный вопрос, членов Совета: выходит Болонкин списал у Вас неверные результаты?- ответа не последовало. Ни на один конкретный вопрос по диссертации Кротов ответить также не смог (ибо ее не читал!). В итоге члены Совета проголосовали за присвоение Александру Болонкина степени доктора наук.

Тогда Кротов решил прибегнуть к другим грязным методам. В КГБ (Комитет Государственной безопасности в бывшем СССР) поступила информация, что Болонкин читает и распространяет произведения писателя Солженицына и академика Сахарова. В 1972г Болонкин был арестован КГБ и провел 15 лет в тюрьмах и концлагерях КГБ, подвергался пыткам и издевательствам. Освобожден только в 1988г в связи с перестройкой и сразу выдавлен за границу. Работал в США в НАСА, научных лабораториях Военно-Воздушных Сил США, преподавал в американских университетах. Трижды награждался Научным Советом Академии Наук США за оборонные научные разработки, грамотами Губернатора и Конгресса Нью-Йорка, а также награжден медалью Эйлера за достижения в области математики. Выступал на многих Международных Конгрессах.

Кротов и члены его банды всячески препятствовали публикации книг и работ Болокина в СССР и России, писали лживые аннотации. За время его заключения многие его научные разработки разворовали. Например, В 70-х годах Гурман В.И. опубликовал даже книгу по Принципу Расширения, «забыв» упомянуть, что принцип расширения был впервые опубликован Болонкиным в 1964г (Принцип расширения и условие Якоби вариационного исчисления. ДАН УССР, №7, 1964г.). На нем построена и данная диссертация. (Гурман написал только, что «*принцип расширения известен давно*»).

Аналогичная ситуация с самым уникальным и выдающимся результатом Кротова – Гурмана: сокращением взлетной дистанции ВЕРТОЛЕТА на 40-50%. Болонкин еще в 1965г в работе «Исследование динамики старта самолета с вертикальным взлетом» (Сборник «Исследования по динамике полета», М., Машиностроение, 1965г) показал, что при правильном вертикальном взлете самолета можно сэкономить до 40-50% **горючего**. Но Гурман-Чуклов «забыли» об этом упомянуть.

Автореферат довольно подробно излагает содержание диссертации Болонкина.

О качестве диссертации и потоке новых идей и методов в ней читатель может судить по данному сканированному реферату 1971г. Рекомендую также книгу: Болонкин А.А., **Новые методы оптимизации и их применение**. МВТУ им. Баумана, 1972г., 220 стр. http://viXra.org/abs/1502.0137 .

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

К. т. н., доцент БОЛОНКИН А. А.

НОВЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ и ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

(специальность 255 — техническая кибернетика)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Москва 1971

Работа выполнена в Московском авиационном технологическом институте.

Официальные оппоненты:

Член-корреспондент АН СССР Красовский А. А.
Доктор физико-математических наук Кузьмак Г. Е.
Доктор физико-математических наук Риз П. М.

Ведущее предприятие — Институт космических исследований АН СССР.

Автореферат разослан «. . .» . . . . 1971 г.

Защита диссертации состоится в зале заседаний Ученого Совета физико-механического факультета Ленинградского политехнического института им. Калинина по адресу: г. Ленинград, К-251, ул. Политехническая, д. 29.

О дне защиты будет сообщено дополнительно.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Секретарь Ученого Совета **Душин Н. В.**

Л-122650 от 9/XII—70 г. Тип. МВТУ. Объем 2 п. л. Зак. 2002. Тир. 200

Диссертация состоит из 2-х частей. Первая часть (7 глав) посвящена математическим основам предлагаемых методов оптимизации. Вторая часть (3 главы) посвящена приложениям методов части I к задачам автоматики, техники и организации производства.

Во введении приводится краткий обзор методов оптимизации, их приложений к задачам динамики управляемых систем и тех трудностей, с которыми приходится сталкиваться в настоящее время исследователям при оптимизации авиационных систем.

Часть I. Математические основы предлагаемых методов оптимизации.

Глава 1. Методы β - функционала.

I°. Постановка задачи. Пусть состояние системы характеризуется элементом x, совокупность которых образует множество X. На X определен функционал $I(x)$, ограниченный снизу. Связи и ограничения, наложенные на систему, выделяют из этого множества некоторое подмножество допустимых состояний X^*, $X^* \subseteq X$.

Традиционная постановка задачи оптимизации состоит в следующем: а) Найти абсолютную минималь x^* функционала $I(x)$ на X^*. Наряду с данной задачей рассматриваются также следующие задачи: б) Выделить более "узкое" подмножество $M \subset X^*$, содержащее абсолютную минималь x^*; в) Найти подмножество $N \subset X^*$ такое, что $I(x) \leq c$ на N, где c - некоторое число, $c \geq I(x^*)$ (подмножество "лучших" решений, чем данное); г) Найти оценки снизу $I(x)$ на X^*.

Заметим, что инженера, как правило, в реальных задачах интересует именно подмножество $N \subset X^*$, выбирая из которого любое состояние он получит значение функционала не хуже заданной величины (задача "в") и оценки снизу - насколько далек он от оптимального решения (задача "г"). К тому же у него обычно есть много дополнительных соображений, которые нельзя учесть в математической модели или которые бы ее сильно усложнили. Постановка задачи оптимизации в форме "в" предоставляет ему определенную свободу выбора. Задача же "б" может существенно облегчить решение любой из перечисленных задач, т.к. сужает множество, на котором следует искать решение.

Для решения поставленной задачи вводится вспомогательное множество $Y = \{y\}$ и на $X \times Y$ определяется ограниченный снизу функционал $\beta(x,y)$. Он назван β - функционалом. Строится обобщенный функционал $J(x,y) = I(x) + \beta(x,y)$. Фиксируется y. Исходная задача $\inf I(x),\ x \in X^*$ - названа задачей 1, а задача $\bar{J}(y) = \inf J(x,y),\ x \in X$ (на расширенном множестве) - задачей 2.

Функционал β подбирается так, чтобы задача 2 решалась проще. Доказывается

Теорема I (выделение подмножеств, содержащих лучшие, худшие решения и абсолютную минималь). Пусть $X^* = X$, $\bar{x}(y)$ – абсолютная минималь задачи 2. Тогда: I. Абсолютная минималь задачи 1 находится в множестве $M(y)=\{x: \beta(x,y) \ge \beta(\bar{x}(y),y)\}$. 2. Множество $N(y)=\{x: \mathcal{J}+I \le \bar{\mathcal{J}}+I\}$ содержит такие или лучшие решения(т.е. на N $I(x) \le I(\bar{x})$). 3. Множество $P(y)=\{x: \beta(x,y) \le \beta(\bar{x}(y),y)\}$ содержит такие или худшие решения (т.е. на P $I(x) \ge I(\bar{x})$).

В частности, если $X^* = P$, то $\bar{x}$ – абсолютная минималь задачи I на X^*. Теорема I верна и для случая $X^* \ne X$, когда M, N, P содержат элементы из X^*. Если в определении множеств N, P фигурирует строгое неравенство, то множество N будет содержать решения лучшие чем $\bar{x}$, а P – хуже. Доказывается, что $N \subseteq M$. Зависимость M, N, P от y используется для изменения "размеров" этих множеств.

Доказывается, что β – функционалы существуют и число их бесконечно. Предлагается алгоритм I (метод выделения подмножества, содержащего абсолютную минималь или лучшие решения при помощи β – функционалов): Задаемся $\beta_i(x,y)$ $i=1,2,\dots$ такими, чтобы задача 2 решалась просто. Находим множества M_i и N_i. Тогда $M=\bigcap_i M_i$ (оно всегда не пусто) есть множество, содержащее x^*, а $N=\bigcap_i N_i$, есть множество заведомо содержащее наилучшее из $\bar{x}_i$ или лучшие решения.

Исследуются условия сходимости этого алгоритма.

Теорема 2. Имеют место оценки снизу:

$$1)\ I(x) \ge \inf_x \mathcal{J}(x,y) - \sup_x \beta(x,y), \qquad 2)\ I(x) \ge \sup_y \left[\inf_x \mathcal{J}(x,y) - \sup_x \beta(x,y)\right]$$

Зависимость первой оценки от y может быть использована для ее улучшения.

Доказываются и ряд других теорем, позволяющих выделять подмножества, содержащие абсолютную минималь и лучшие решения. Эффективность их иллюстрируется на достаточно сложных нелинейных примерах. Предлагается алгоритм 2 (метод спуска по множеству лучших решений): берется точка x_1 из X^* и конструируется вспомогательный функционал $\mathcal{J}_1(x)$ таким образом, чтобы эта точка была его минималью. Находим множество лучших решений N_1. Берем из этого множества точку x_2, по тому же принципу строим $\mathcal{J}_2$, находим N_2 и т.д.

Показано, что в случае непрерывности и дифференцируемости

$\mathcal{J}_i(x)$, $I(x)$ на X^* (по Фреше) указанный процесс приводит к стационарной точке $I(x)$ на X^*. Получены условия, когда эта точка является абсолютной минималью задачи 1.

Преимущество спуска по множеству лучших решений по сравнению с градиентным методом в том, что можно шагать крупно, не рискуя получить худших значений функционала.

Показано как следует применять методы β – функционала в случае ограничений типа равенств и неравенств.

2^0. Следующий параграф (§ 2) посвящен методу, названному автором – метод совмещения экстремумов. Он базируется на теореме:

Теорема 3 (условие эквивалентности задач I и 2). Пусть $X = X^*$.

Для того, чтобы задачи I и 2 были эквивалентны (в смысле совпадения минималей: $x^* = \bar{x}$) достаточно, чтобы $\bar{x} = \hat{x}$, где

$$\beta(\hat{x}) = \sup_X \beta(x).$$

Из теоремы 3 вытекает алгоритм 3 (метод совмещения экстремумов): Берем ограниченный функционал $\beta(x,y)$. Решаем задачу $\inf \mathcal{J}(x,y)$, $x \in X^*$, находим $\bar{x}_1 = \bar{x}_1(y)$. Из условия $\sup \beta(x,y)$, $x \in X^*$ находим $\bar{x}_2 = \bar{x}_2(y)$. Приравниваем $\bar{x}_1(y) = \bar{x}_2(y)$ (уравнение совмещения экстремумов) и находим корни y_i. Это корни определяют минималь задачи I: $x^* = x_1(y_i) = x_2(y_i)$.

Рассмотрены обобщения этого алгоритма.

3^0. Следующий § 3 посвящен γ – функционалу, обобщенный функционал получается из которого путем умножения на $I(x)$, т.е. $\mathcal{J}(x) = I(x)\gamma(x)$ (а не сложения, как с β -функционалом). Основные результаты п. I^0 получены и для этого случая.

4^0. В § 4 β – функционал применяется к задачам "а, б, в, г" теории экстремумов функций конечного числа переменных, к задачам оптимизации, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями. Показано как можно выделять множества, содержащие абсолютную минималь, лучшие решения, получать оценки снизу, спускаться по множеству лучших решений. Приведем для примера пару теорем для задач оптимизации, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями: $\dot{x}_i = f_i(t,x,u)$ $i=1,2,\dots,n$ с функционалом $I=\int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt$, $x,u \in Q$, Q – множество допустимых функций $x(t)$, $u(t)$, t_1, t_2 – заданы.

Теорема 4. Пусть решена задача 2: $\bar{\mathcal{J}} = \inf \mathcal{J}(x,u)$ на Q, где $\mathcal{J}=\int_{t_1}^{t_2}[f_0(t,x,u)+\beta(t,x,u)]\,dt$. Тогда: I) Множество $N=\{t,x,u: 2f_0 + \beta \le 2\bar{f}_0 + \bar{\beta},\ t \in T\}$ содержит такие или лучшие решения задачи 1. 2) Множество $P=\{t,x,u: \beta \le \bar{\beta},\ t \in T\}$ содержит такие или худшие решения задачи 1.

Теорема 5. Пусть решена задача $\hat{\beta} = \sup \int_{t_1}^{t_2} \beta(t,x,y)\,dt$ на Q. Имеет место оценка задачи 1

$$I(x,u) \geq \int_T (\bar{f}_0 + \bar{\beta} - \hat{\beta})\,dt.$$

Дается 5 примеров (в том числе с недифференцируемыми функционалами), на которых демонстрируются преимущества предлагаемых методов.

Глава 2. Методы α - функционала. 1^0. Частным случаем β--функционала является $\tilde{\alpha}$ - функционал, определенный на $Z = X \times Y$ и такой, что 1) Существует подмножество $K \subset Z$ с $pr_x K = X^*$, 2) $\tilde{\alpha}(x,y) = 0$ на К. Доказана

Теорема 6. Пусть $\tilde{\alpha}(x,y)$ есть $\tilde{\alpha}$ - функционал и существует $x^* \in X^*$. Для того, чтобы $\bar{x}$ был абсолютной минималью функционала $I(x)$ на X^* достаточно существования $\tilde{\alpha}(x,y)$ такого, что: 1) $J(\bar{x},\bar{y}) = \inf[I(x) + \alpha(x,y)]$, $x,y \in Z$, 2) $\bar{x},\bar{y} \in K$.

Частным случаем $\tilde{\alpha}$ - функционала является α - функционал, определенный на Z и такой, что $\alpha(x,y) = 0$ на X^* при $\forall y \in Y$. Для α - функционала теорема 6 принимает вид:

Теорема 7. Пусть $\alpha(x,y) = 0$ на X^* при $\forall y \in Y$ и существует $x^* \in X^*$. Для того, чтобы $\bar{x}$ был абсолютной минималью функционала $I(x)$ на X^* достаточно существования $\alpha(x,y)$ такого, что:
1) $J(\bar{x},\bar{y}) = \inf[I(x) + \alpha(x,y)]$, $x,y \in Z$, 2) $\bar{x} \in X^*$. (*)

Теорема 8. $\tilde{\alpha}$, α - функционалы существуют и число их бесконечно.

Теорема 9. Если в (*) $\bar{x} \notin X^*$, то получаем оценку снизу величины функционала $I(x)$ на X^*: $J(\bar{x},y) \leq I(x)$ при $\forall y \in Y$.

Зависимость α от y может быть использована для улучшения нижней оценки и для выполнения условия $\bar{x} \in X^*$.

Из теоремы 7, 8 вытекает следствие: пусть $\alpha(x) = 0$ на X^* и существует $x^* \in X^*$. Для того, чтобы элемент $\bar{x}$ был абсолютной минималью функционала $I(x)$ на X^* необходимо и достаточно существование $\alpha(x)$ такого, что: 1) $J(\bar{x}) = \inf[I(x) + \alpha(x)]$, $x \in X$. 2) $\bar{x} \in X^*$. Достаточное заключение этого следствия совпадает с леммой В.Ф.Кротова /АиТ,№12,1962/.

Для решения задач "б","в" при помощи α - функционала может быть использована т[illegible]орема 10 и алгоритм 4.

Теорема 10. Пусть $\bar{x}$ - абсолютная минималь задачи 2: $\inf[I(x) + \alpha(x)]$, $x \in X$. Тогда: 1) Абсолютная минималь задачи 1 находится в множестве $M^* = M \cap X^*$, где $M = \{x : \alpha \geq \bar{\alpha}\}$. 2) Множество $N^* = N \cap X^*$, где $N = \{x : J + I \leq \bar{J} + \bar{I}\}$ содержит такие или лучшие решения

3) Множество $P^* = P \cap X^*$, где $P = \{x : \alpha \leq \bar{\alpha}\}$ содержит такие или худшие решения.

Алгоритм 4 (решение путем подбора α - функционала). Берем ограниченный снизу функционал α, определенный на X (или $X \times Y$). Решаем задачу 2: $\inf(I + \alpha)$, $x \in X$. Если $\bar{x} \in X^*$, то мы получаем минималь задачи 1. Если $\bar{x} \notin X^*$, то мы получили оценку снизу: $J(\bar{x}) \leq I(x^*)$ величины функционала $I(x)$ на X^* и множества M, N, P. В случае задания последовательности $\alpha_i(x,y)$ здесь могут быть применены общие условия сходимости алгоритма 1.

В работе предлагаются формы α - функционалов для ограничений типа равенств и неравенств, для дискретных задач, для задач с логическими связями (двойная импликация, дизъюнкция, конъюнкция, отрицание и т.п.). На примерах (в частности, неаналитических функционалов) демонстрируются его преимущества. Результаты распространены на случай отсутствия минимали в классе допустимых и построения минимизирующих последовательностей.

2^0. Метод α - функционала применяется к задачам: "а, б, в, г" функций конечного числа переменных

$$I = f_0(x), \quad f_i(x) = 0 \quad i = 1,2,\dots,n \tag{I}$$

и задачам оптимизации, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями. В отличие от других методов данный подход не требует непрерывности и дифференцируемости связей $f_i(x) = 0$. α--функционал может быть взят, в частности, в виде: $\alpha = p_i(x) f_i(x)$, где $p_i(x)$ - некоторые функции x. Обобщенный функционал: $J(x) = f_0(x) + \alpha(x)$. Тогда из решения задачи 2: $\inf J(x)$, $x \in X$, согласно теоремам § I, мы можем извлечь следующую информацию о задаче 1: I. Если $\bar{x} \in X^*$, то $\bar{x}$ - абсолютная минималь задачи 1. 2. Если $\bar{x} \notin X^*$ то: а) $J(\bar{x})$ - оценка снизу функционала $f_0(x)$ на X^*. б) Когда $\alpha(\bar{x}) > 0$, то $x^* \in P = \{x : \alpha(x) \leq \alpha(\bar{x})\}$, в) Когда $\alpha(\bar{x}) < 0$ то $x^* \in M = \{x : \alpha(x) \geq \alpha(\bar{x})\}$, г) Множество $N^* = N \cap X^*$, где $N = \{x : 2f_0 + \alpha \leq 2\bar{f}_0 + \bar{\alpha}\}$ содержит такие или лучшие решения.

Рассмотрена задача оптимизации, описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$I = F(x_1,x_2) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt, \quad \dot{x}_i = f_i(t,x,u) \quad i = 1,2,\dots,n, \; t \in T = [t_1,t_2], \; x_1 = x(t_1), \; x_2 = x(t_2) \tag{2}$$

Пусть D - множество непрерывных почти всюду дифференцируемых функций $x(t)$ с $x \in G$, V - множество кусочно-непрерывных функций $u(t)$ с $u \in U$, Q - множество допустимых пар $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих связям в (2). α - функционал для этой задачи может быть взят, например, в виде: $\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \lambda_i(t,x)[\dot{x}_i - f_i(t,x,u)]\,dt$. Составляя обобщенный функционал $J = I + \alpha$, интегрируя член $\lambda_i \dot{x}_i$

по частям и исключая $\dot{x}_i$ при помощи (2), получим

$$J = F + \lambda_i x_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \Big[f_0 - \Big(x_j \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} + \lambda_i \Big) f_i - x_i \frac{\partial \lambda_i}{\partial t} \Big] dt = A + \int_{t_1}^{T_1} B\, dt \qquad (3)$$

Смысл обозначений A, B ясен из (3). Доказаны

Теорема II. Пусть $F \equiv 0$ и решена задача $\inf B$, $x \in G$, $u \in U$. Тогда: 1) Множество $N = \{t, x, u : B + f_0 \leq \bar{B} + \bar{f}_0, t \in T\}$ содержит такие или лучшие решения задачи I. 2) Множество $P = \{t, x, u : B - f_0 \leq \bar{B} - \bar{f}_0, t \in T\}$ содержит такие или худшие решения задачи I.

Возьмем вместо функционала I в (2) другой более простой функционал $\int_T B_1(t, x, u)\, dt$.

Теорема I2. Пусть $F \equiv 0$ и найдена абсолютная минималь $\bar{x}$, $\bar{u}$ функционала $\int_T B_1 dt$ на Q. Тогда: 1) Множество $N = \{t, x, u : f_0 + B_1 \leq \bar{f}_0 + \bar{B}_1, t \in T\}$ содержит такие или лучшие решения задачи I. 2) Множество $P = \{t, x, u : B_1 - f_0 \leq \bar{B}_1 - \bar{f}_0, t \in T\}$ содержит такие или худшие решения задачи I.

Рассмотрены случаи, когда можно выделить множество, содержащее абсолютную минималь задачи I.

В частности, пусть, например, $x_n \neq 0$. Зададимся $\lambda_i = 0$ $i = 1, 2, \ldots, n-1$, $\lambda_n = \psi(t, x)/x_n$, где $\psi(t, x)$ – некоторая функция, подставим их в A, B получим:

$$A = F + \psi_2 - \psi_1, \qquad (4)$$

$$B = f_0 - \psi_{x_i} f_i - \psi_t. \qquad (5)$$

Показано, как можно применить предлагаемые подходы в задачах динамического программирования.

3°. Из α – функционала получены методы "штрафа" для задач (I), (2). Рассмотрим для примера задачу (I). Зададимся $\alpha = a_i f_i^2$, где $a_i = const_i > 0$. Запишем $J = f_0 + \alpha$. При определенных условиях и $a_i \to \infty$ минималь $\bar{x} \to x^*$. Кроме того, при любых $a_i > 0$ значение $\bar{J}$ является оценкой снизу задачи (I).

4°. Из п. I° видно, что зная минималь какого-либо функционала на допустимом множестве, можно извлечь определенную информацию о решениях задачи I и даже решить одну из задач а, б, в, г.

Известно, что большинство прямых задач: $\inf I(x)$ на X^* – решается с большим трудом. Однако, если функционал заранее не оговаривать, то решение для такого произвольного функционала найти просто.

Поэтому для задачи оптимизации (2), описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, поставлена задача: найти функционал, соответствующий данной функции $\psi(t, x)$ (см. (4–5)) и минималь этого функционала на допустимом множестве. Эта задача решается теоремой (метод обратной подстановки):

Теорема I3. Функционал, соответствующий функции $\psi(t, x)$, определяется выражением

$$J_1 = \int_{t_1}^{t_2} B_1(t, x)\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \inf_{u \in U} \big[-\psi_{x_i} f_i(t, x, u) - \psi_t \big] dt, \qquad (6)$$

а соответствующая ему допустимая минималь уравнениями $\dot{x}_i = f_i[t, x, \bar{u}(t, x, \psi_{x_i})]$ $i = 1, 2, \ldots, n$, где $\bar{u} = \bar{u}(t, x, \psi_{x_i})$ находится из (6).[1]

Следствие: если $B_1 = f_0(t, x)$, то мы получаем поле минималей функционала I для граничного условия $\psi = \psi(t_2, x)$. Если это условие совпадает с заданными граничными условиями, то это поле минималей задачи I. Можно задаться $\psi(t, x, y)$ и подобрать такие $y(t)$, чтобы $B_1(t, x, \tilde{y}) \equiv f_0(t, x)$ /если это возможно/.

Функционал, полученный в результате метода обратной подстановки, может быть использован для построения множеств N, P (см. теор. II, I2).

Рассмотрена также задача: как найти функционал для заданного синтеза управления $u = u(t, x)$. Показано для этого надо решить уравнение в частных производных $u(t, x) = \bar{u}(t, x, \psi_{x_i})$. В качестве одного из примеров методом обратной подстановки решается задача аналитического конструирования оптимального регулятора без управлений в функционале.

5°. В § 5 метод совмещения экстремумов, рассмотренный в § 2 гл. I, распространен на задачи условного минимума теории функций конечного числа переменных и задачи описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Глава 3. Метод максимина. I°. Метод α – функционала неудобен, тем, что он составляет открытым вопрос о подборе $\alpha(x)$ такого, чтобы $x \in X^*$. Развиваемый в этой главе подход дает алгоритм в значительной мере лишенный этого недостатка.

Теорема I4. Пусть: 1) $\alpha(x, y) = 0$ только на X^* при $\forall y \in Y$. 2) $\alpha(x, y)$ таково, что для $\forall x \in X - X^*$ найдется $y \in Y$ такое, что $I(x) + \alpha(x, y) > \inf_{X^*} I(x)$. 3) Существует пара $\bar{x}$, $\bar{y}$, удовлетворяющая условию

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_Y \inf_X \big[I(x) + \alpha(x, y) \big], \qquad (7)$$

4) $J(\bar{x}, y) \leq J(\bar{x}, \bar{y})$ на Y.

I) Заметим, что предлагаемый подход не имеет ничего общего с обратной задачей вариационного исчисления. Там задача ставится так: дана кривая – найти какой функционал (функционалы) она минимизирует на данном допустимом подмножестве. Эта задача, вообще говоря, даже более трудная, чем прямая задача. У нас же минималь не задана. Она находится по данному $\psi(t, x)$.

Тогда: I) $\bar{x}$ - принадлежит X^*. 2) $\bar{x}$ - является абсолютной минималью задачи 1: $\inf I(x),\ x \in X^*$.

Замечание 1. Если имеется α - функционал и элемент $\bar{x} \in X^*$, удовлетворяющие (7), то любой элемент $x_1 \in X^*$ и удовлетворяющий (7) - есть абсолютная минималь функционала $I(x)$ на X^* и любая абсолютная минималь функционала $I(x)$ на X при соответствующем выборе множества Y, удовлетворяет условию (7).

Теорема I5. α - функционалы, удовлетворяющие теореме I4, существуют и число их бесконечно.

Теорема I6. Пусть $\alpha(x,y)=0$ только на X^* при $\forall y \in Y$. Тогда (7) дает оценку снизу $I(x)$ на X^*.

Из теоремы I5 вытекает алгоритм 5 (метод максимина). Чтобы найти x^* надо решить задачу (7).

Решать задачу (7) можно различно: а) Алгоритм 5'. Берем одновременно $\inf\limits_{x}$ и $\sup\limits_{y}$ получим систему: $\omega_1(\bar{x},\bar{y})=0$, $\omega_2(\bar{x},\bar{y})=0$ - (уравнения максимина), отыскивая решения которой и получим точки $\bar{x}$, $\bar{y}$. б) Алгоритм 5''. Берем вначале $\inf\limits_{x} J$, находим $\omega_3(\bar{x},y)=0$ и $J_1(y)=\inf\limits_{x} J$ а затем $\sup\limits_{y} J_1(y)$ и находим $\omega_4(y)=0$. Они названы уравнениями последовательного максимина. Их корни и являются минималями.

Разработан алгоритм 6 (метод условного максимина)[1]. Чтобы найти x^* надо решить систему

$$\bar{x}=\bar{x}(y), \quad \alpha(\bar{x},y)=0, \tag{8}$$

где $\bar{x}$ - минималь задачи $\inf\limits_{x}\left[I(x)+\alpha(x,y)\right]$.

Уравнения (8) в неявном виде: $\xi(\bar{x},y)=0$, $\alpha(\bar{x},y)=0$ - названы общими уравнениями условного максимина. Если при помощи одного из уравнений (8) исключить $\bar{x}$, придем к уравнению: $\omega_5(y)=0$, а если исключить y, то к уравнению $\omega_6(\bar{x})=0$. Первое из них названо уравнением условного максимина относительно вспомогательного неизвестного, а второе - уравнением условного максимина относительно основного неизвестного.

Метод максимина распространен на β- функционал с ограничениями типа равенств и неравенств.

2^0. В § 2 метод максимина применен к задачам оптимизации (2), описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями с A и B вида (4-5).

Теорема I7. Пусть существует непрерывная дифференцируемая функция $\psi(t,x,y)$ удовлетворяющая условиям: I) Для $\forall x,u \notin Q$ найдется $y \in W$, такое, что $J > I(x^*)=m$; 2) Существует тройка $\bar{x}$, $\bar{u}$, $\bar{y}$

1) При условии $\alpha(x,y)=0$.

такая, что

$$J(\bar{x},\bar{u},\bar{y})=\sup_{y(t)\in W}\Big(\inf_{x_1,x_2\in R} A+\int_{t_1}^{t_2}\inf_{x\in G,\,u\in U} B\,dt\Big), \tag{9}$$

3) $\bar{x}(t)\in D$, $\bar{u}(t)\in V$. 4) $J(\bar{x},\bar{u},y)\le J(\bar{x},\bar{y},\bar{u})$ на W. Тогда: I) $\bar{x},\bar{u}\in Q$ и $\bar{x},\bar{u}$ - является абсолютной минималью задачи (2).

Условия 2,3 теоремы I7 можно заменить более жесткими

$$2)\ \sup_{y_1,y_2}\inf_{x_1,x_2\in R} A,\quad \sup_{y}\inf_{x\in G,\,u\in U} B,\qquad 3)\ \bar{x},\bar{u}\in Q,\ \bar{y}\in W. \tag{10}$$

Замечание I п.I гл.3 принимает для данной задачи следующую форму: пусть существует функция $\psi(t,x,y)$ и хотя бы одна допустимая тройка $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{u}$, удовлетворяющая (9) (или (10)). Тогда любая другая тройка $\tilde{x}$, $\tilde{u}$, $\tilde{y}$, удовлетворяющая (9) (соответственно (10)) дает $\tilde{x}$, $\tilde{u}$ - абсолютную минималь задачи 1 и любая допустимая абсолютная минималь задачи 1 при соответствующем выборе множества Y удовлетворяет условию (9) или (10)).

Если t_1, t_2 - не фиксированы, то (10) принимает вид:

$$2)\ \sup_{y_1,y_2}\inf_{t_1,t_2,x_1,x_2\in R} A,\quad \sup_{y}\inf_{x\in G,\,u\in V} B\equiv 0 \text{ на } [t_1,t_2],\quad 3)\ \bar{x},\bar{u}\in Q,\ \bar{y}\in W \tag{11}$$

Доказана теорема I8: Пусть $\psi(t,x,y)$ непрерывная дифференцируемая функция. Имеет место оценка снизу

$$I(x,u)\ge\sup_{y(t)\in W}\Big(\inf_{x_1,x_2\in R} A+\int_{t_1}^{t_2}\inf_{x\in G,\,u\in U} B\,dt\Big). \tag{12}$$

Для решения задачи (2) разработан алгоритм 5 (метод подбора $\psi(t,x,y)$). Задаемся $\psi^{(1)}(t,x,y)$, решаем задачу

$$\inf_{x,u}\left[f_0-\psi^{(1)}_{x_i}f_i-\psi^{(1)}_{y_i}\dot{y}_i-\psi^{(1)}_t\right]=B^{(1)}(t,y,\dot{y}),\quad \inf_{x_1,x_2}\left(F+\psi^{(1)}_2-\psi^{(1)}_1\right)=A^{(1)}(y_1,y_2). \tag{13}$$

При этом находим

$$\bar{u}=\bar{u}(t,x,y),\qquad \bar{x}=\bar{x}(t,y,\dot{y}). \tag{14}$$

Рассматриваем $I^{(1)}=A^{(1)}(y_1,y_2)+\int_{t_1}^{t_2}B^{(1)}(t,y,v)\,dt$, как новый функционал для системы $\dot{y}_i=v_i$ $i=1,2,\dots,n$, где v_i - новые управления, $v\in V$. Еще раз задаемся $\psi^{(2)}(t,y)$ и решаем задачу

$$\sup_{y,v\in V}\left(B^{(1)}-\psi^{(2)}_{y_i}v_i-\psi^{(2)}_t\right)=B^{(2)}(t),\quad \sup_{y_1,y_2}\left(A^{(1)}+\psi^{(2)}_2-\psi^{(2)}_1\right)=A^{(2)}. \tag{15}$$

Найденные из (15) $\bar{y}(t)$, $\bar{v}(t)$ вставляем в (14), получаем $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$. Если $\bar{x},\bar{u}\in Q$ и $x(t_2), x(t_1)\in R$, то полученное решение есть минималь задачи 1, если нет, то $\bar{J}$ дает оценку снизу функционалу задачи 1.

Разработана разновидность этого алгоритма (метод последовательного подбора ψ), когда эта процедура продолжена. Задачи типа (I5) названы редуцированными задачами (I-ой, 2-ой и т.д. редукции). Вообще говоря, уже задача I-ой редукции проще исходной задачи (2), т.к. правые части уравнений $\dot{y} = v$ имеют очень простой вид. Кроме того, число управлений в редуцированной задаче равно числу фазовых координат. Для вычислений и теоретических анализов это обстоятельство может иметь большое значение.

Рассмотрены методы построения поля минималей. В частности, выведены уравнения максимина в частных производных (одна редукция)

$$\sup_{v}\Big[\inf_{x,u}\big(f_0 - \psi^{(1)}_{x_i} f_i - \psi^{(1)}_{y_i} v_i - \psi^{(1)}_{t}\big) - \psi^{(2)}_{y_i} v_i - \psi^{(2)}_{t}\Big] = \beta(t) \qquad (I6)$$

с краевым условием

$$\inf_{x_2}\big[F(x_2) + \psi^{(1)}_2\big] + \psi^{(2)}_2 = C.$$

Для случая редукции к - I порядка уравнение принимает вид

$$\inf_{w}{}^{1)} \ldots \Big\{\sup_{u,v}\Big[\inf_{x,u}\big(f_0 - \psi^{(1)}_{x_i} f_i - \psi^{(1)}_{y_i} v_i - \psi^{(1)}_{t}\big) - \psi^{(2)}_{y_i} v_i - \psi^{(2)}_{t}\Big] \ldots - \psi^{(k)}_{z_i} w_i - \psi^{(k)}_{t}\Big\} = \beta(t), \qquad (I7)$$

а краевое условие вид

$$\sup_{z_2} \ldots \Big\{\sup_{y_2}\Big[\inf_{x_2}\big(F(x_2) + \psi^{(1)}_2\big) + \psi^{(2)}_2\Big] \ldots + \psi^{(k)}_2\Big\} = C \qquad (I8)$$

Положим в (I6) $\psi^{(2)} \equiv 0$, $\psi^{(1)} = \psi^{(1)}(t,x)$ и выберем $\psi^{(1)}(t,x)$ так, чтобы оно удовлетворяло уравнению в частных производных $\inf_{u}\big(f_0 - \psi^{(1)}_{x_i} f_i - \psi^{(1)}_{t}\big) = 0$ при краевом условии $F(x_2) + \psi^{(1)}_2 = C$. Мы как частный случай получили уравнение Р. Беллмана.

Предлагаемые уравнения по сравнению с уравнением Р. Беллмана обладают следующими преимуществами: I) Уравнения в частных производных (I6),(I7) содержат несколько неизвестных функций, что расширяет прикладные возможности метода. В частности, частью из этих функций можно задаться. Например, задаваясь $\psi^{(1)}$ в (I6) получим уравнение

$$\sup_{v}\big[B^{(1)}(t,y,v) - \psi^{(2)}_{y_i} v_i - \psi^{(2)}_{t}\big] = \beta(t) \qquad (I9)$$

с краевым условием

$$A^{(1)}(y_2) + \psi^{(2)}_2 = C.$$

2) Уравнения вида (I9), вообще говоря, проще уравнения Беллмана, т.к. слагаемое $\psi^{(2)}_{y_i} v_i$ по сравнению со слагаемым $\psi_{x_i} f_i(t,x,u)$ имеет более простой вид. 3) Уравнение (I9) может быть задано многими способами (в зависимости от выбора $\psi^{(1)}(t,x,y)$), что может быть полезно, т.к. позволит выбирать более простой для

I) Знак будет $\inf$ или $\sup$ в зависимости от того - четкое или не четкое к.

решения вид.

Разработаны методы отыскания отдельных минималей. Например, пусть мы перешли к редуцированной задаче (I-ая редукция)

$$I^{(1)} = A^{(1)}(y_1,y_2) + \int_{t_1}^{t_2} B^{(1)}(t,y,v)\,dt, \quad \dot{y}_i = v_i \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad v \in V. \qquad (20)$$

Выражения ($\psi^{(2)} = p_i(t)\, y_i$)

$$\dot{p}_i = -B^{(1)}_{y_i}, \qquad \bar{H}^{(1)} = \inf_{v} H^{(1)} \qquad (2I)$$

совместно с краевым условием: $\sup_{y_1,y_2}\big[A^{(1)}(y_1,y_2) + \psi^{(2)}_2 - \psi^{(2)}_1\big]$ позволяют найти экстремаль редуцированной задачи, а по ней уже без всяких интеграций восстанавливается кривая подозрительная на экстремум исходной задачи.

Заметим, что редуцированная задача (20) обычно проще основной задачи, т.к. I) Правые части в уравнениях (20) просты. 2) Правые части в уравнениях (2I) не зависят от p_i. 3) Зависимость $H^{(1)}(u)$, вообще говоря, проще в силу (20). Вероятность того, что при произвольном задании ψ минималь $\bar{x},\bar{u} \in Q$ в методе максимина значительно выше, а оценка снизу лучше, чем в методах α - функционала.

Разработаны методы условного максимина (относительно вспомогательного и относительно основного неизвестного) для задачи (2). В отличие от уравнений Эйлера в классическом вариационном исчислении или уравнений принципа максимума, уравнения условного максимина, если их удалось построить, дают не решение, подозрительное на экстремум (экстремаль), а абсолютную минималь.

Показано, что метод максимина является довольно общим. Из него как частные случаи следует ряд методов α - функционала главы 2, а также некоторые известные методы. Иногда он позволяет вдвое понижать порядок дифференциальных уравнений вариационной задачи. Показано, как получать уравнение совместности, гарантирующее, что наше решение будет допустимым.

На большом числе примеров демонстрируется как методика методов максимина, так и его преимущества.

3°. В § 3 показано, что метод максимина может быть использован не только в задачах оптимизации, но и как метод оценки максимальных отклонений фазовых координат для некоторой совокупности начальных условий. Краткая постановка задачи: поведение объекта описывается системой уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x) \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad t_1 \le t \le t_2, \quad x(t_1) \in R. \qquad (22)$$

Надо найти оценку снизу (сверху) функций $I = F[x(t_2)]$ для совокупности $x(t_1) \in R$, где R - множество начальных условий.

Представляет интерес и такая задача: не решая уравнений $\dot{x}_i = f_i(x)$ найти оценку снизу (сверху) в момент t_2 отклонения какой-либо координаты (или всех координат).

Для решения этих задач используются методы максимина. Методика демонстрируется на нелинейных системах 2-го и 3-го порядков.

4^0. Параграф № 4 посвящен другому необычному применению метода максимина – как методу построения в выбранном классе функций – функции Ляпунова (если она существует в этом классе) и в исследовании устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Приведем некоторые результаты.

Предположим, что (22) уравнения возмущенного движения, $R = X$ – все пространство, $B = -\psi_{x_i} f_i - \psi_t$.

Теорема I9. Пусть функция $\psi(x,y)$ – непрерывна, дифференцируема на $X \times Y$ и обладает свойствами: а) $\psi(x,y)$ – положительно определена на X при $\forall y \in Y$. б) $\psi(0,y) \equiv 0$ на Y.
Тогда: I) Если $\sup\limits_y \inf\limits_x B = 0$, то невозмущенное движение устойчиво. 2) Если $\sup\limits_y \inf\limits_x B = 0$ причем $\bar{x} = 0$ единственно, то невозмущенное движение устойчиво ассимптотически. 3) Если $\inf\limits_y \sup\limits_x B = 0$ причем $B \neq 0$ в окрестности $x = 0$, то невозмущенное движение неустойчиво. 4) Если $\inf\limits_y \sup\limits_x B = 0$ причем $\bar{x} = 0$ и единственно, то невозмущенное движение неустойчиво абсолютно.

Теорема 20 (Об отсуствии функции Ляпунова в данном классе). Пусть: I) $\psi(x,y)$ – непрерывная, дифференцируемая и положительно определенная функция по x для $\forall y \in Y$. 2) $\psi(0,y) = 0$ на Y. Если $\sup\limits_Y \inf\limits_X B < 0, \bar{x} \in Q$, то среди данного семейства функций $\psi(x,y)$, $y \in Y$ нет функции удовлетворяющей п.I теоремы I9.

Теорема типа I9 доказана и для неавтономных систем.

Предлагаемый метод демонстрируется на нелинейных системах 3-го порядка. При помощи его доказывается устойчивость по скорости горизонтального полета ракеты с двигателем постоянной тяги, горизонтального полета самолета с двигателем постоянной мощности и устойчивость по скорости вертикального подъема ракеты в атмосфере постоянной плотности с постоянной тягой.

Глава 4. Численная реализация некоторых алгоритмов максимина и α – функционала. I^0. В § 1 рассмотрена численная реализация метода максимина для задач оптимизации (2), описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Пусть t_1, t_2 – заданы, концы $x_i(t_1)$, $x_i(t_2)$ – для простоты фиксированы, U – постоянно, $\psi = y_i x_i$. Составим $H = y_i f_i - f_0$. Исключим u при помощи условия $\sup H, u \in U$. Показано, что в этом случае процедура расче-

та состоит в задании исходного приближения $\tilde{x}_i(t), \tilde{y}_i(t)$ и в определении к нему поправок по формулам

$$\delta x_i = \tau_{i1}(\dot{y}_i + H_{x_i}), \qquad \delta y_i = \tau_{i2}(\dot{x}_i - f_i),$$

где

$$\tau_{i1}(t) > 0 \text{ на } (t_1, t_2), \ \tau_{i1}(t_1) = \tau_{i1}(t_2) = 0; \quad \tau_{i2}(t) > 0 \text{ на } [t_1, t_2].$$

Новая траектория будет такой

$$x_{i,\beta+1} = x_{i,\beta} + \delta x_{i,\beta}, \quad y_{i,\beta+1} = y_{i,\beta} + \delta y_{i,\beta}.$$

Здесь $\beta = 1, 2, \dots$ – номер итерации. Она может быть взята в качестве новой опорной траектории и т.д. Даются рекомендации по выбору шага τ, по оценке степени близости траектории к минимуму, по окончании счета. Метод распространен на случай свободных концов и ограничений на фазовые координаты. Подробно описана схема реализации метода на ЭВМ при помощи стандартной подпрограммы. Эта схема и вся вычислительная процедура оказывается чрезвычайно простой. Показано, что предложенный метод последовательных приближений по сравнению с методами спуска в пространстве управлений Шатровского Л.И., методами Брайсона, Келли и принципом максимума Понтрягина Л.С. обладает следующими преимуществами: I) Полностью исчезает краевая задача, ибо краевые условия всегда точно выполнены. 2) В результате всегда получаем сильный относительный минимум. 3) Особые режимы (а следовательно, после соответствующего преобразования и скользящие режимы) не являются помехой методу максимина. 4) Можно точно учесть ограничения на фазовые координаты и управления.

Рассмотрен пример, содержащий участок особого режима.

2^0. В § 2 разработан метод градиентного спуска в пространстве состояний для задач оптимизации описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Этот метод также состоит в задании исходного приближения $x_i(t)$, удовлетворяющего заданным граничным условиям и в последовательном нахождении к нему поправок. Он распространен на случай свободных концов и ограничений на фазовые координаты (и управления). Этот метод имеет те же преимущества, что и метод § I гл.4, но требует вдвое меньший объем памяти. Однако сходимость его в ряде случаев несколько хуже. Подробно описана вычислительная процедура этого метода на уровне стандартной подпрограммы для ЭВМ. Эта процедура по сравнению с известными методами отличается простотой. Доказана сходимость предлагаемого метода. Для сравнения пример с участком особого режима § I гл.4 решен данным методом. Интересно, что если задать ограничения на фазовые координаты несовместные с системой (2), то метод дает некоторую компромиссную траекторию, взвешенную между требованием близости к допустимой и величиной минимума.

3^0. В § 3 разработан метод, названный методом спуска по допустимому множеству. Он применен к задачам поиска экстремума функций конечного числа переменных. Это задачи на условный минимум (I).

В главе 5 "Импульсные режимы" одним из предлагаемых методов исследуется теория оптимальных задач, в которых функции фазовых координат в определенных случаях могут иметь разрывы I-го рода (реализуемые системой исходных уравнений). Анализируется поведение функции $B(u)$ и вводится классификация разрывов (импульсов): сосредоточенные, "плавающие" и "распределенные" импульсы, импульсы I-го, 2-го и т.д. порядков.

Пусть поведение системы описывается системой дифференциальных уравнений: $\dot{x}_i = f_i(t, x, u)$ – правые части которых неограничены по u при некоторых значениях t, x. Введем в рассмотрение множество $U^* = \{u^* : |f_i(t,x,u)| = \infty\}$, т.е. множество $u \in U$, на котором правые части f_i обращаются в бесконечность, $U^* \subset U$. Импульс (разрыв $x(t)$) допустим, если $u \in U^*$. Множество может состоять как из изолированных точек, так и быть многообразием ненулевого измерения. В общем случае $U^* = U^*(t, x)$. Если U^* не пусто только в отдельных точках $t_\kappa \in [t_1, t_2]$ число которых конечно и положение известно, имеем случай "сосредоточенных" импульсов, если положение t_ν неизвестно – "плавающих" импульсов.

Из функций f_0, f_i выделена функция f_s, обладающая на U^* наивысшим порядком бесконечности. Показано, что когда движение системы в импульсе можно описать системой уравнений

$$x_i' = \varphi_i(\tau, x, u^*) \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad u^* \in U^*, \text{ где } x_i' = dx_i/d\tau, \quad \varphi_i = f_i/f_s$$

Здесь независимым переменным является $\tau = x_s$.

В случае сосредоточенных и "плавающих" импульсов формулируется теорема о достаточных условиях абсолютного минимума. Рассмотрены алгоритмы отыскания минимали, выведены условия входа и выхода из импульса, "склейки" обычных и импульсных экстремалей. Доказаны теоремы, устанавливающие условия, при которых участки минимали между точками разрыва не зависят от граничных условий, вся минималь и величина функционала не зависит от граничных условий, абсолютный минимум достигается на минималях с импульсами. Примеры:

Теорема 2I. Пусть многообразия разрывов являются областями

полной управляемости, любая непрерывная траектория $x(t)$ системы (2) пересекает эти области, $f_0(t, x, u)$ – ограничено снизу и $\varphi_0 \equiv 0$. Тогда: I) Участки минимали между точками разрыва не зависят от граничных условий; 2) Абсолютная минималь, вообще говоря, находится среди минималей с импульсами.

Теорема 22. Пусть концевые точки t_1, t_2 кривой $x(t)$ являются точками разрыва, многообразия разрыва в которых являются областями полной управляемости, $x(t_1)$, $x(t_2)$ принадлежат этим многообразиям и $\varphi_0 \equiv 0$.

Тогда вид минимали $\bar{x}(t)$ на $t_1 < t < t_2$ и величина функционала не зависят от граничных условий.

Приводится ряд примеров.

Аналогичная теория строится и для случая распределенных импульсов. Рассмотрен случай, когда уравнения имеют вид:

$$\dot{x}_i = f_i(x, u) \quad i = 0, 1, \ldots, n, \quad x_0(t_2) = \min, \quad u \in U. \qquad \text{(A)}$$

Теорема 23. Пусть I) f_0 имеет вид: $f_0(x)$ и ограничено снизу, x^0 – точка $\inf_x f_0(x)$; 2) $x(t_1) \in Y_1(x^0)$ – область управляемости относительно точки x^0; 3) $x(t_2) \in Y_2(x^0)$ – область достижимости относительно x^0; 4) $\varphi_0 \equiv 0$.

Тогда: I) $x \equiv X_0$ – есть предельная абсолютная минималь системы (A) (с импульсами в концах); 2) если существует такое $u \in U$, что x^0 удовлетворяет системе (A), то x^0 – гладкая минималь, если такого и не существует, то абсолютный минимум достигается на минимизирующей последовательности $x_{(n)}(t)$ такой, что при $n \to \infty$ $|x_{(n)} - x^0| \to 0$ (абсолютной минимали с распределенными импульсами).

Теорема 24. Пусть: I) функции $f_i(x, u)$ $u \in U - U^*$, $\varphi_i(x, u^*)$ $u^* \in U^*$ – непрерывны в точке x_0 и некоторой ее окрестности вместе со своими частными производными первого порядка; 2) $\varphi \equiv 0$; 3) Множества $U - U^*$, U^* – не пусты.

Тогда для существования в окрестности x^0 допустимой минимизирующей последовательности $x_n \to x^0$, необходимо и достаточно существование таких $u \in U - U^*$, $u^* \in U^*$, чтобы имели место равенства

$$f_i(x^0, u) = f_\kappa(x^0, u)\,\varphi_i(x^0, u^*) \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad i \neq \kappa.$$

В качестве примеров решено несколько систем довольно общего вида. В частности решается вопрос о наивыгоднейшей форме воздушного тормоза. Все решение в этой задаче состоит только из разрыва. Решение же, найденное обычными методами, не является оптимальным (не дает абсолютного минимума).

Глава 6 "Специальные экстремали в задачах оптимального управления" одна из самых больших по объему в диссертации. Она посвящена теории особых и скользящих экстремалей. I^{0}. Вводится ряд понятий, которые играют важную роль в дальнейших построениях. Так экстремаль названа особой на интервале, если на этом интервале существует открытая область $U_1 \subset U$ и содержащая экстремаль ($\bar{u} \in U_1$), в которой ранг σ матрицы $F = \| B_{u_i u_j} \|$ (или $F_1 = \| H_{u_i u_j} \|$) меньше[I)] m. Здесь m – число управлений, оптимальные значения которых лежат внутри области допустимых значений. Порядком особенности экстремали названо число $\mu = m - \sigma$ (дефект ранга матрицы F или F_1). Если $\mu > 1$, то особый режим назван многократным (2-х, 3-х и т.д. кратным).

В главе в основном изучается система вида

$$\dot{x}_i = \gamma_i(t,x,u) + \alpha_j \varphi_{ij}(t,x,u) \quad i=0,1,\dots,n, \; j=1,2,\dots,\lambda \le n+1, \; I = x_0, \; |\alpha| \le 1. \qquad (23)$$

Пусть после s-го дифференцирования выражений $H_{\alpha_j} = 0$ (H – гамильтониан) по t в $d^s/dt^s(H_{\alpha_j}) = 0$ впервые появилось α_j. Доказывается

Теорема 25. Необходимое условие оптимальности особой экстремали. Пусть $\frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left[\frac{d^s}{dt^s}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right]\Big|_{\bar{x}} \ne 0$ $\nu = 1,\dots,\varkappa$. Тогда для оптимальности особой экстремали необходимо, чтобы α в $\frac{d^s}{dt^s}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right) = 0$ входило при s – четном, $s = 2k$.

Целое число $k(j) = \frac{1}{2} s(j)$ названо частным порядком сложности особой экстремали от особого управления α_j. Число $K = \sum_{j=1}^{\varkappa} k(j)$ названо общим порядком сложности особой экстремали с $\varkappa$ – кратной особенностью. Если $k(j) = 1$ $j = 1,2,\dots,\varkappa$, то особая экстремаль названа экстремалью с простой особенностью. Если общий порядок сложности выше порядка особенности ($K > \varkappa$), то такая особая экстремаль названа экстремалью со сложной особенностью.

Теорема 26. Необходимое условие оптимальности особой экстремали с общим порядком сложности K и порядком особенности $\varkappa$. Пусть $k(j)$ = пост. Для оптимальности многократной особой экстремали со сложной особенностью необходимо, чтобы в каждой точке особого участка за исключением может быть конечного числа угловых точек была положительна квадратичная форма

$$-(-1)^k \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right]\delta\xi_j \delta\xi_\nu - 2(-1)^k \frac{\partial}{\partial u_\beta}\left[\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right]\delta u_\beta \delta\xi_j - \frac{\partial^2 H}{\partial u_\beta \partial u_\gamma}\delta u_\beta \delta u_\gamma . \qquad (24)$$

$$\nu, j = 1,2,\dots,\varkappa; \quad \beta, \gamma = 1,2,\dots,m.$$

На примере показано, что это условие является более сильным, чем условие Коппа-Мойера или принцип максимума. Последние могут быть выполнены, а (24) – нет. Выведены явные зависимости

I) Заметим, что в этом определении в отличие от общепринятого требуется чтобы $\sigma < m$ не просто на экстремали, а в области.

коэффициентов квадратичной формы (24) от параметров системы (23) для случая $H_{x_i \alpha_j} \equiv 0$.

Теорема 27. Необходимые условия оптимальности особой экстремали типа равенств. Пусть $k(i)$ = пост. Для оптимальности особой экстремали необходимо выполнение равенств [I)]

$$\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left[\frac{d^\gamma}{dt^\gamma}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right] = 0; \quad \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left[\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right] = 0; \quad \frac{d^\tau}{dt^\tau}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left[\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right]\right\} = 0 \qquad (25)$$

$$\gamma = 0,1,\dots,k-1; \quad m = 0,1,\dots,2k-1; \quad \nu_j = 1,2,\dots,\varkappa; \quad \beta = 1,2,\dots,m; \quad \tau = 1,2,\dots,\theta(\nu,j)-1.$$

Здесь считается, что в последних выражениях α появится при θ – дифференцировании. Доказывается теорема о порядке вырождения особой экстремали.

2^{0}. Рассмотрены условия входа и схода с особых экстремалей. Вход и сход, когда значения $u(t)$ слева при входе (и справа при сходе) определены и непрерывны, названы регулярным входом (сходом) с особой экстремали. Доказывается, что регулярный вход (сход) с непрерывными множителями может быть только при k – нечетном. Доказывается, что необходимым условием регулярного входа является выполнение (25), а необходимым и достаточным условием гарантированного регулярного схода ($j = 1$) выполнение неравенства $\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right)\right] > 0$. Вход на особую экстремаль назван осциллирующим входом, если при приближении к особой экстремали число переключений неограниченно возрастает. (Пример: вход на экстремаль $x \equiv 0$ с управлением $u = \operatorname{sign} \sin \frac{1}{x}$ при $x \to 0$ будет осциллирующим).

Теорема 28. Пусть система с одним особым управлением описывается уравнениями

$$I = \int_{t_1}^{t_2}[f_0(x) + c_0 u]\,dt, \quad \dot{x}_1 = f_1(x) + c_1 u_1, \quad \dot{x}_2 = f_2(x) + c_2 u_2 \quad |u| \le 1. \qquad (26)$$

и содержит оптимальную особую экстремаль с порядком сложности два. Тогда в достаточно малой окрестности особой экстремали оптимальный вход на особую экстремаль будет осциллирующим и линией переключения будет кривая вида: $x_1 + k_1 x_1 + k_2 x_2 |x_2| = 0$, $k_1, k_2 = пост.$

Доказывается также теорема об условиях вычисления особого управления. Даются примеры, в том числе и на многократные особые экстремали. Показано, что для общей системы 2-го порядка и автономной системы 3-го порядка с незакрепленным временем с одним управлением поверхность особых решений (а следовательно и синтез управления) можно получить без всяких интеграций. Показано, что когда число особых управлений $\varkappa = n+1$ (для автономн. систем $\varkappa = n+2$), то особую экстремаль с кратностью $\varkappa$, можно получить также без всяких интеграций. Приводятся примеры синтеза систем 2-го и 3-го

I) Принято, что $\frac{d^0}{dt^0}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial H}{\partial \alpha}$.

порядков довольно общего вида, содержащих как импульсные, так и особые экстремали. Рассматриваются особые экстремали в системе n -го порядка специального вида. Выводятся условия инвариантности.

3°. Изучается система вида
$\dot{z}_i = f_i(t,z,u)$ $i=0,1,\dots,\nu=n-\chi$, $\dot{z}_{\nu+j}=f_{\nu+j}(t,z,u)+d_j\varphi_j(t,z,u)$ $j=1,2,\dots,\chi$, (27)
по j – не сумма.

Для системы (27) получены также необходимые условия оптимальности, условия входа и схода, порядок вырождения вариационной задачи, условия вычисления особого управления, перенесены понятия порядка особенности, порядка сложности и т.п. Доказывается, что при прочих равных условиях абсолютная минималь вариационной задачи находится в подгруппе минималей, имеющих наивысший порядок особенности, а в случае одинаковых особенностей – среди минималей, имеющих наивысший порядок сложности.[I] Поэтому изучение и использование особых минималей – целесообразно. Для иллюстрации помимо математических примеров решается ряд небольших задач из авиации.

4°. Аналогичная теория развивается и для уравнений общего вида: $\dot{x}_i=f_i(t,x,u)$ $i=1,2,\dots,n$. Показано, что если $\sigma<m$, то между переменными t, x системы имеется $m-\sigma$ тождеств: $L^\kappa(t,x,p)=0$ $k=1,2,\dots,\mu$, где p – переменные сопряженной системы. Дифференцируя эти тождества соответствующее число раз (ξ) и исключая $\dot{x}$, $\dot{p}$ при помощи выражений: $\dot{x}_i=f_i(t,x,u)$, $\dot{p}_i=-H_{x_i}$, можно получить μ уравнений, $G^\alpha(t,x,p,u)=0$ $\alpha=1,2,\dots,\mu$, содержащих u, с функциональным определителем порядка m относительно u отличным от нуля. Кроме того, получим некоторое число конечных уравнений относительно t,x,p , не содержащих u. Обозначим алгебраически независимые из них $T^\kappa(t,x,p)=0$ $k=1,2,\dots,\xi$.

Теорема 29. Пусть матрица $F=\|H_{u_\beta u_\gamma}\|$ $\gamma,\beta=1,2,\dots,m$ в некоторой области пространства переменных t,x,p,u (мера $|t_1,t_2|\neq0$) имеет дефект ранга $\mu>0$, а функции f_i, p_i дифференцируемы нужное число раз. Тогда: I) если после конечного числа дифференцирований наступило неравенство $\xi>2n$, то в этой области особая минималь с порядком особенности μ – невозможна. 2) Если при $\zeta=\mu$ имеем $\xi\leq 2n$, то особая минималь (с порядком особенности μ)

I) Для минималей, особых на всем отрезке $[t_1,t_2]$.

удовлетворяет системе уравнений
$$B_{u_\beta}(t,x,u,p)=0 \quad \beta=1,2,\dots,\sigma, \quad G^\alpha(t,x,p,u)=0 \quad \alpha=1,2,\dots,\mu.$$
Здесь $\psi(t,x)$ взята в виде: $\psi=p_i(t)\Delta x_i$, $\Delta x_i=x_i-\bar{x}_i$.

Теорема 30. О порядке вырождения особой экстремали. Пусть на участке особого режима с порядком особенности μ , матрица $\|T^\kappa_z\|$ $\kappa=1,2,\dots,\xi'$, $z=\{x,p\}$ имеет ранг $\xi\leq2n$. Тогда на этом участке происходит вырождение вариационной задачи не менее чем на ξ единиц.

Теорема 31. Необходимое условие входа в особый режим. Регулярный вход в особый режим с порядком особенности μ оптимален только в том случае, если в момент входа выполнены равенства:
$$T^\kappa(t,x,p)=0 \quad \kappa=1,2,\dots,\xi.$$
Следующая теорема позволяет отыскивать тождества типа: $L^\kappa(t,x,p)=0$ и устанавливает одно их свойство.

Теорема 32. Пусть функциональная матрица $F=\|f^i_{u_\beta}\|$ $i,\beta=1,2,\dots,m$ системы
$$f^i(x_1,\dots,x_n;u_1,\dots,u_m)=0 \quad i=1,2,\dots,m \tag{28}$$
имеет ранг $\sigma<m$ и наивысший минор, определяющий ее ранг, расположен в верхнем левом углу матрицы. Разрешим уравнения (28) относительно переменных
$$u_\kappa=g_\kappa(x_1,\dots,x_n;u_{\sigma+1},\dots,u_m) \quad \kappa=1,2,\dots,\sigma \tag{29}$$
Исключим из $\mu=m-\sigma$ уравнений $f^\alpha(x,u)=0$ $\alpha=\sigma+1,\dots,m$, не вошедших в наивысший минор, определяющий ранг F, переменные $u_1,\dots,u_\sigma$ при помощи σ выражений (29).

Тогда полученные при таком исключении выражения $F^\alpha=0$ $\alpha=\sigma+1,\dots,m$: I) не содержат u , 2) имеют непрерывные частные производные до того же порядка, что и функции f^i.

Далее особые решения исследуются методами уравнений в частных производных. При этом исследовании в частности показано, что выражения типа (25) являются скобками Якоби и равенство их нулю – необходимое условие того, что система находится в инволюции (замкнута).

5°. Методом построения выпуклой оболочки функции $B=B(u)$ показано, как искать решение сразу на замыкании класса непрерывных кривых. Доказывается, что в этом случае мы приходим к системе вида (23), а потому скользящие режимы являются частным случаем особых экстремалей, и следовательно, вся теория особых экстремалей может быть применена к анализу скользящих режимов. Приводятся примеры, в том числе и экстремали с двойным скольжением.

Заметим, что если уравнения нелинейные, а управление входит линейно, или функция $B(u)$ не выпукла или не ограничена снизу, то возможны специальные экстремали (особые, скользящие, импульсные). Поскольку функция $B(u)$ не выпукла в большинстве случаев, то специальные экстремали так же часты как и обычные. Как показано в диссертации, специальные экстремали, как правило, упрощают решение, т.к. приводят к вырождению вариационных задач и понижению порядка интегрируемой системы. Приводятся примеры, в которых решение задачи (23) находится на элементах вообще не являющихся функциями.

Глава 7: "Специальные экстремали и разрешимость краевых задач оптимального управления". При применении классического вариационного исчисления и принципа максимума Л.С.Понтрягина к техническим задачам в большинстве случаев краевую задачу не удается решить несмотря на большие расходы машинного времени. Типичные трудности, которые при этом возникают: отсутствие сходимости, большая чувствительность траектории к незначительным изменениям начальных значений неопределенных множителей, попадание в местные "ямы" и т.д. Вместе с тем, существование оптимального решения для заданных краевых условий бывает ясно из физических соображений.

В главе на простых примерах показано, что чувствительность к начальным множителям, отсутствие сходимости, "ямы", в большинстве случаев связаны с присутствием в составе экстремали участков специальных режимов. Таким образом, эти трудности возникают не потому, что "плохи" методы решения краевых задач, а потому, что в рамках классического вариационного исчисления и принципа максимума, многие краевые задачи не имеют решения. На многочисленных примерах показано, что включение в состав экстремалей специальных режимов позволяет избежать многих трудностей. Таким образом теория особых и импульсных экстремалей, рассматриваемая в гл.5, 6 находит применение в основной проблеме оптимального управления - разрешимости краевых задач. Предложены методы преодоления местных "ям", ликвидации разрывов функции "невязки" и удаления сопряженных точек. Излагаемые идеи иллюстрируются, в частности, на примере знаменитой задачи о брахистохроне.

Часть II. Приложение методов ч.I к техническим задачам.

Глава 8. Некоторые задачи автоматики.

Раздел I. Задачи, решаемые методом максимина и методами

β - функционала.

1°. В § 1 рассмотрена задача минимизации энергии сигнала. Эта задача описывается выражениями

$$I=\int_0^{\infty}\tfrac{1}{2}u^2dt,\quad \dot{x}_i=a_{ij}x_j+b_iu,\quad 0\leq t\leq\infty,\quad x_i(0)=x_{i0},\quad x_i(\infty)=0. \qquad (30)$$

Функционал в (30) часто связан с энергией сигнала $u(t)$, например, в электрических цепях, в регулировании положения ротора двигателя постоянного тока с управлением по току возбуждения и т.д. Эта задача решается методом максимина. В результате получен синтез оптимального управления вида: $u=\ell_i x_i$. Показано, что решение методом максимина обладает следующими преимуществами: I. В отличие от решения по принципу максимума или классическим вариационным исчислением, интегрируется система порядка n, а не $2n$, что резко снижает трудоемкость расчетов. 2. Попутно решается вопрос об устойчивости системы с оптимальным управлением. Получены условия асимптотической устойчивости. 3. Не приходится решать краевую задачу. Дается пример.

2°. В § 2 рассмотрена задача линейная относительно фазовых координат и нелинейная относительно управления:

$$I=\int_{t_1}^{t_2}[a_{0j}(t)x_j+\varphi_0(t,x)]dt,\quad \dot{x}_i=a_{ij}(t)x_j+\varphi_i(t,u),\quad x_i(t_1)=x_{i1},\quad x_i(t_2)=x_{i2},\quad u\in U. \qquad (31)$$

Задача решается методом максимина. В результате получен так называемый полный синтез вида: $u=u(t,x,t_1,x_{i1})$. Интересно, что здесь также для получения синтеза, точнее для более общей задачи - полного синтеза пришлось интегрировать систему порядка n, а не $2n$, как это пришлось бы делать во всех других методах. При построении же полного синтеза известными методами в случае, когда невозможно найти решение дифуравнений в общем виде систему порядка $2n$ пришлось бы интегрировать бесконечное число раз. Таким образом, проинтегрировав систему вдвое более низкого порядка, чем в других методах, получаем решение не обычной задачи синтеза - попадание в заданную точку из любого начального положения, а значительно более общую задачу, точнее все множество обычных синтезов - оптимальное попадание в любую точку из любого начального положения. Повидимому метод максимина наиболее полно использует любые упрощения в уравнениях задачи. При решении этой задачи методом максимина нет необходимости решать краевую задачу, что является очень большим упрощением по сравнению с существующими методами. Дается пример. Попутно в этом примере решается и вопрос устойчивости.

3°. В § 3 показано как методы β - функционала можно применить в задачах о точном регулировании и в задачах о минимуме расхода топлива. Все это задачи с неаналитическими (не дифференцируемыми) функционалами вида

$$I=\int_0^{\infty}|x|\,dt,\quad I=\int_{t_1}^{t_2}|x|^q dt,\quad I=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt[p]{|x|^q}\,dt,\quad I=\int_{t_1}^{t_2}|u|^q dt,\quad q>0,\ p>0.$$

Все они либо не решаются, либо с трудом поддаются решению существующими методами. При этом решается задача "в" (находится подмножество лучших решений).

В разделе II рассмотрена задача "Особые решения в задаче аналитического конструирования оптимальных регуляторов". Пусть движение объекта регулирования описывается системой линейных дифференциальных уравнений: $\dot\eta_\kappa=\theta_{\kappa\alpha}\eta_\alpha+m_{\kappa\beta}\xi_\beta$, $\kappa,\alpha=1,2,\dots,n$; $\beta=1,2,\dots,\tau\le n$, $0\le t\le\infty$ с граничными условиями $\eta(0)=\eta_0$, $\eta(\infty)=0$. Здесь ξ_β – управления. Требуется найти закон регулирования, который образует устойчивую систему и гарантирует минимум функционала: $I=\int_0^{\infty}\alpha_\kappa\eta_\kappa^2\,dt$.

Получено, что 1) в окрестности начала координат пространства переменных η существует особая экстремаль с порядком особенности κ, проходящая через начало координат; 2) на особой минимали закон регулирования имеет вид: $\xi_\beta=\ell_{\beta\alpha}\eta_\alpha$, $\beta=1,2,\dots,\tau$; $\alpha=1,2,\dots,\nu$, $\nu=n-\tau$, $\ell_{\beta\alpha}$ – пост., т.е. зависит от меньшего числа переменных, чем в задаче А.М.Летова; 3) доказано, что существует окрестность, содержащая начало координат, в которой регулятор устойчив; 4) при прочих равных условиях абсолютный минимум достигается на особой минимали, имеющий наивысший порядок особенности; 5) по особому решению можно идти и в скользящем режиме, используя закон $\xi_\beta=sign(n_{\beta\alpha}\eta_\alpha)$, где $n_{\beta\alpha}$ = пост.; 6) множество особых решений с порядком особенности I образует в пространстве переменных η гиперплоскость. Пересечение двух таких гиперплоскостей образует многообразие (измерения $n-2$) особых решений с 2-х кратной особенностью, пересечение трех таких плоскостей – многообразие (измерения $n-3$) особых решений с трехкратной особенностью и т.д.; 7) в качестве примера для системы 2-го порядка в случае отрицательных действительных корней и комплексных корней с отрицательной вещественной частью – построен синтез управления.

В разделе III решена задача – "задача построения предельного цикла для задача стабилизации колебаний". Пусть поведение объекта описывается уравнениями: $\dot x_i=x_{i+1}$, $i=1,2,\dots,n-1$, $\dot x_n=h_j x_j+mu$, $j=1,2,\dots,n$, $(|u|\le1,\ m\ne0)$. Здесь h_j, m – пост., u – скаляр. Задан предельный цикл $V_j=V_j(t)$, $j=1,2,\dots,n$, где $V_j(t)$ – периодические функции с общим периодом, представимые в виде ряда. Требуется выбрать такое управление u, чтобы $x_i(t)$ были максимально близки к соответствующим $V_i(t)$ в смысле минимума интегральной оценки $I=\int_0^{\infty}q_j[x_j-V_j(t)]^2dt$, $q>0$.

Получены результаты: 1) в открытой области управления при $t\to\infty$ решение $x(t)$ стремится к некоторому устойчивому периодическому особому решению $X_i(t)$ (предельному циклу); 2) оптимальное управление на особом решении имеет вид: $\xi_\beta=\ell_{\beta i}z_i+L_\beta(t)$, где $L_\beta(t)$ – периодическая функция (главная часть управления), $z_i=x_i-X_i$ – отклонение от предельного цикла $X_i(t)$ и $\ell_{\beta i}$ – пост.; 3) существуют гиперплоскости особых решений, проходящие через начало в системе координат z_i $i=1,2,\dots,n$; 4) по особому решению можно идти и в скользящем режиме, используя синтез:

$$\xi_\beta=sign(c_{j\beta}z_j).$$

Глава 9. Некоторые задачи динамики полета.

1°. В § 1 рассматривается задача о минимуме интегрального тепла при входе летательного аппарата в атмосферу. Предполагается, что угол входа θ достаточно мал, поэтому $\cos\theta\approx1$. Уравнения движения таковы

$$\dot H=V\sin\theta,\quad \dot V=-\frac{X(\alpha,V,H)}{m}-g\sin\theta,\quad \dot\theta=\frac{Y(\alpha,V,H)}{mV}-\frac{g}{V}+\frac{R}{V}. \tag{32}$$

Обозначения общепринятые, например: H – высота полета, V – скорость, m – масса, X – сопротивление, Y – подъемная сила. Заданы начальные условия входа: H_0, V_0, θ_0 моменты t_1, t_2 и конечная высота H_κ. Значения V_κ, θ_κ – свободны. Управление осуществляется углом атаки α. Требуется указать множество траекторий, при движении по которым к летательному аппарату будет подведено тепла меньше некоторой величины (задача "в"). Количество тепла, подведенного к аппарату, дается интегралом: $I=\int_{t_1}^{t_2}K_q\rho^{0.5}V^{3.15}dt$, K_q – пост., ρ – плотность атмосферы, $\rho=\rho(H)$. Для решения этой задачи используются методы β – функционала в сочетании с методом обратной подстановки. Взято ψ в виде: $\psi=c_1\left(Hg+\frac{1}{2}V^2\right)+c_2\theta$, где c_1, c_2 – постоянные. Найден функционал, которому эта ψ соответствует и оптимальный (в смысле абсолютного минимума) синтез управления: $\bar\alpha=\frac{A}{2B}\cdot\frac{c_2}{c_1V^2}$, где A, B – постоянные. В результате получаем "коридор входа", при движении внутри которого летательный аппарат будет нагреваться меньше, чем с управлением $\bar\alpha$. В отличие от других методов для построения этого коридора входа не нужно многократно интегрировать уравнения движения (32).

2°. В § 2 методом максимина строится оценка максимальной дальности горизонтального полета летательного аппарата с двигателем постоянной тяги (см.гл.3, § 3). Уравнения движения летательного аппарата следующие

$$\dot{L} = V, \quad \dot{V} = \frac{V_e \beta - X(V)}{m}, \quad \dot{m} = -\beta. \tag{33}$$

Здесь L – дальность полета, β – расход топлива (управление) V_e – скорость истечения продуктов сгорания, $V_e > 0$, $X = aV^2$ – сопротивление среды. Заданы время полета $t_2 - t_1$ и расход массы $m_1 - m_2$. Начальная и конечная скорости равны друг другу: $V_1 = V_2$.

Для этой задачи получена оценка

$$L_{max} \le \sqrt{\frac{V_e (t_2 - t_1)(m_1 - m_2)}{a}}.$$

Проверка этой оценки на разных типах самолетов показала, что она близка к нижней грани функционала. Интересно, что для построения этой оценки не пришлось интегрировать систему (33). Вся процедура построения оценки свелась к простым алгебраическим операциям.

3°. В § 3 аналогично построена оценка в задаче полета на максимальную дальность горизонтального полета самолета (дирижабля) с двигателем постоянной мощности (ТВД и ПД). Уравнения движения

$$\dot{L} = V, \quad \dot{V} = \frac{B\frac{\beta}{V} - aV^2}{m}, \quad \dot{m} = -\beta. \tag{34}$$

Пусть t_1, t_2, m_1, m_2 – заданы, а $V_1 = V_2$. Используя теорию гл.3 § 3 методом максимина построена оценка $L_{max} \le \sqrt[3]{\frac{B(m_1 - m_2)(t_2 - t_1)^2}{a}}$.

Оценка проверялась на разнообразных примерах и показала хорошие результаты.

Глава IO. Применение метода гл.2 к экстремальным задачам комбинаторного типа. Обычно задача комбинаторного типа ставится следующим образом: дано конечное множество X некоторых комбинаций π_i $(i = 1, 2, \dots, N)$. На множестве X определена функция $f_0(\pi_i)$ т.е. существует алгоритм вычисления $f_0(\pi_i)$ для любой $\pi_i \in X$. При помощи каких-то условий выделены допустимые комбинации, множество которых $X^* \subset X$. Требуется определить $\pi_i \in X^*$, на котором $f_0(\pi_i)$ достигает минимума (максимума).

Решение этих задач чрезвычайно трудно. Простой перебор обычно невозможен ввиду гигантского количества возможных вариантов. Для ряда таких задач имеются алгоритмы (иногда эвристические) поиска лучшего решения по сравнению с исходным вариантом. Однако вопрос об оптимальности полученного решения часто остается открытым. Методы гл.1-2 позволяет просто получить достаточные условия абсолютного минимума в таких задачах, а иногда и подсказывают алгоритм отыскания решения, удовлетворяющего этим условиям.

1°. В § 1 рассмотрена задача [illegible] (проблема выбора). Имеется n механизмов (станков, машин, людей и т.п.), каждый из которых может быть использован на одном из n видов работ (выпуске определенного вида продукции, обработке деталей, должностях и т.п.). Производительности их на каждой работе известны (заданы в виде квадратной матрицы $\|c_{ij}\|$ порядка n). Требуется так распределить механизмы по одному на каждую из работ, чтобы суммарная производительность всех механизмов была максимальной.

Математически задача описывается следующим образом: Найти минимум функции

$$I = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{35}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad x_{ij} = \{0,1\} \quad i,j = 1,2,\dots,n. \tag{36}$$

Доказана теорема, дающая достаточные условия абсолютного минимума в таких задачах. Из нее, в частности, следует: чтобы допустимая комбинация $\bar{x}_{ij}$ была единственной абсолютной минималью функционала I достаточно существования решения у системы неравенств

$$(1 - 2x_{ij})(\lambda_i + \nu_j + c_{ij}) > 0 \quad i,j = 1,2,\dots,n. \tag{37}$$

относительно неизвестных λ_i, ν_j.

Получены алгоритмы для отыскания оптимального решения и оценки снизу. Например, задаваясь разными λ_i, ν_i сразу получаем из (37) комбинацию $\bar{x}_{ij} = \{0,1\}$. Если она допустимая, то это минималь функционала (35), если нет, то $J(\bar{x}_{ij}) = \bar{I} + \bar{\alpha}$ [где $\alpha = c_{ij} x_{ij} + \lambda_j \left(\sum_i x_{ij} - 1\right) + \nu_i \left(\sum_j x_{ij} - 1\right)$] – есть оценка снизу. Кроме того, получаем подмножество, содержащее абсолютную минималь и подмножество лучших решений.

2°. В § 2 рассмотрена задача целочисленного программирования:

$$I = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad x_j = \{0,1\} \quad i = 1,2,\dots,m, \; j = 1,2,\dots,n. \tag{38}$$

Доказана теорема 33. Для того, чтобы допустимая комбинация была абсолютной минималью задачи (38) достаточно существования таких постоянных λ_i, чтобы на этой комбинации имели место неравенства

$$(1 - 2x_j)\left(c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i\right) \ge 0, \quad \lambda_i \ge 0, \quad j = 1,2,\dots,n, \quad i = 1,2,\dots,m, \tag{39}$$

а λ_i соответствующие $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_j < b_i$ были равны нулю.

Из условий теоремы вытекает, в частности, следующий алгоритм поиска оптимального решения: задаемся $\lambda_i \ge 0$. Из (39) находим $\tilde{x}_j = \{0,1\}$. Если найденные $\tilde{x}_j$, удовлетворяют (38), а λ_i соответствующие $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{x}_j < b_i$ равны нулю, то найденное решение является оптимальным, если нет, то получаем оценку снизу величины функционала.

Если вторые выражения в (38) имеют вид: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$, то соответствующие ограничения $\lambda_i \ge 0$ – снимаются.

3⁰. В § 3 аналогичные результаты (достаточные условия абсолютного минимума и оценки) выведены для задачи коммивояжера. Эта задача состоит в следующем. Коммивояжер должен посетить n городов. Предполагается, что на переезд из города i в город j затрачивается t_{ij} единиц времени. Перед коммивояжером, который находится в одном из пунктов i, стоит задача объехать все пункты, побывав в каждом ровно один раз, вернуться в исходный пункт и затратить на это минимально возможное время. Если под t_{ij} понимать стоимость переезда из города i в город j, то функционалом может быть минимальная стоимость поездки.

4⁰. В § 4 рассмотрена задача целочисленного квадратичного программирования

$$I = \sum_{j=1}^{n} (t_j x_j^2 + c_j x_j), \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad x_j = \{0,1\} \quad i = 1,2,\dots,n \qquad (40)$$

Доказана теорема 34. Для того, чтобы допустимая комбинация $\bar{x}_j$ $j = 1,2,\dots,n$ была абсолютной минималью задачи (40) достаточно существования таких чисел $\lambda_i \ge 0$, чтобы на этой комбинации имели место неравенства

$$t_j + (1-2x_j)(2t_j x_j + c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \lambda_i) \ge 0 \quad j = 1,2,\dots,n, \qquad (41)$$

а λ_i соответствующие строгим неравенствам в (40) были равны нулю.

Здесь также предложен алгоритм, аналогичный предыдущим параграфам: задаемся $\lambda_i \ge 0$ из (41) находим соответствующие x_j и если они являются допустимыми; т.е. удовлетворяют ограничениям (40), а соответствующие строгим неравенствам в (40) $\lambda_i = 0$, то это решение является оптимальным. Если же полученное решение не является допустимым, то оно дает оценку снизу абсолютного минимума.

Все параграфы снабжены примерами. Заметим, что задачи, описываемые такими же или близкими уравнениями, играют большую роль в технике и автоматике. Например, задачи оптимального проектирования автоматических устройств из набора элементов, деталей, узлов и агрегатов с известными характеристиками, задачи выбора технологического процесса изготовления или сборки из большого набора возможных операций и т.д.

К диссертации имеется приложение, состоящее из 3-х частей. В первой части методы, изложенные в диссертации, применяются к задачам с противодействием, т.е. к игровым ситуациям, когда

интересы противников различны. Главным образом рассматривается случай, когда один из игроков имеет ранг рефлекции (умственного развития) – единица, а второй игрок – нуль. Получены ряд достаточных условий оптимального поведения (стратегий) для каждого из игроков, предлагаются численные методы решения этой задачи, а также методы приближенного синтеза.

Во второй части излагается метод покусочной оптимизации и предлагаются четыре метода решения краевых задач: метод скольжения по направляющей, метод разложения, метод спуска по фазовым траекториям и метод итераций.

Третья часть приложения посвящена расчетам на быстродействующих цифровых машинах БЭСМ-3, БЭСМ-6, М-20. Расчеты проводились с целью проверки и отработки предлагаемых численных методов. Помимо математических примеров решаются две технические задачи.

Основное содержание диссертации опубликовано в работах:

1. Болонкин А.А. Об одном методе решения оптимальных задач. Известия СО АН СССР, вып.2, № 9, июнь 1970 г.
2. Болонкин А.А. О разрешимости краевых задач оптимального управления. Труды академии им.Н.Е.Жуковского, вып.1131, 1966 г., стр.[illegible]-128.
3. Болонкин А.А. Специальные экстремали в задачах оптимального управления. Журн."Техническая кибернетика", № 2, 1969 г.
4. Болонкин А.А., О решении общей задачи линейного оптимального быстродействия с одним управлением. Прикладная механика, т.4, вып.4, 1968 г., стр.111 - 121.
5. Болонкин А.А. Импульсные решения в задачах оптимального управления. Известия Сиб. отд. АН СССР, сер.техн.наук, № 13, вып.3, 1968 г.
6. Болонкин А.А. Достаточные условия в разрывных вариационных задачах с ограниченным управлением. Приложение к статье "Оптимизация траекторий многоступенчатых летательных аппаратов". в сб." Исследования по динамике полета", Машиностроение, 1965 стр.44-79.
7. Болонкин А.А. Принцип расширения и условие Якоби вариационного исчисления. ДАН УССР, № 7, 1964 г.
8. Болонкин А.А. Особые, скользящие и импульсные режимы в задачах динамики полета. Сб." Сложные системы управления". Киев, Наукова Думка, 1965 г., стр.68-90.
9. Болонкин А.А. Оптимизация параметров в вариационных задачах. ДАН УССР, № 5, 1964 г.
10. Болонкин А.А. Оптимизация траекторий многоступенчатых летательных аппаратов. Сб." Исследование по динамике полета", Машиностроение, 1965 г., стр.20 - 43.
11. Болонкин А.А. Вариационное исчисление и функциональное уравнение Беллмана. ДАН УССР, № 10, 1964 г.
12. Болонкин А.А. Исследование динамики старта самолета с вертикальным взлетом. Сб." Исследования по динамике полета". Машиностроение, 1965 г., стр.119 - 147.
13. Болонкин А.А. Решение дискретных задач оптимального управления на основе общего принципа минимума. Сб. Вычислительная и прикладная математика. КГУ, вып.7, 1969 г.
14. Болонкин А.А. Метод решения оптимальных задач. Сб."Сложные системы управления". Киев, Наукова Думка, 1965 г., стр.34-67.