Министерство высшего и среднего специального образования
СССР
Мсковского ордена Ленина и Ордена Трудового Красного
Знамени высшее техническое училище имени
Н.Э. Баумана

А.А. Болонкин

Утверждено
в качестве учебного
пособия

НОВЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Краткий конспект лекций по курсу
«ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ»

Редактор Ю.А. Почерников

Москва **1972**

Предисловие

У этой книги трудная судьба. Написана и сдана в печать она в 1971 году и была опубликована в издательстве МВТУ в 1972г., где автор преподавал на кафедре высшей математики.

Однако в 1972г ее автор Александр Болонкин был арестован КГБ за чтение и распространение произведений писателя лауреата Нобелевской премий А.И. Солженицына и правозащитника лауреата Нобелевской премии академика А.Д. Сахарова.

Пятнадцать лет его подвергали пыткам, истязаниям и издевательствам в специальных тюрьмах, концлагерях и ссылках. Более 3-х лет его продержали в тюрьме особого режима и более года практически раздетого в холодном карцере с обледенелыми стенами на 400 гр черного хлеба хлеба и воде. КГБ, стремясь стереть о нем память,изъял книгу из библиотек. Его имя стало известно заграницей, о нем неоднократно передавали "Голос Америки" и "Свобода". Он был на учете в Амнисти Интернейшин, в его защиту неоднократно выступал академик Сахаров и видные ученые мира. Был освобожен в 1987г. в связи с перестройкой и сразу же был выдворен за границу. Поселился он в США. Четыре года работал в Главных лабораториях Военно-Воздушных Сил США в Дейтоне (Огайо), Эглин (Флорида) и два года в НАСА (NASA, DFRC, Калифорния) над важнейшими оборонными проектами США. Выступал на Международных космических конгрессах (1992,1994,1996, 2002 гг), два раза на Всемирных авиационных конгрессах (1998, 1999гг.) и много раз на общеамериканских научных конференциях в США.

Он автор более 250 научных работ, книг и 17 изобретений.

Д.т.н. Кругляк

Фотокопия этой книги есть в ЦРБ № **Ф-801-83/869-6**. (бывшая Ленинка). См. также докторскую диссертацию Болонкина под тем же названием. ЛПИ 1969г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Министерство высшего и среднего специального образования СССР
Московское ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени
высшее техническое училище имени Н.Э.Баумана

А.А.Болонкин

Утверждено
в качестве
учебного пособия

НОВЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Краткий конспект лекций по курсу
"ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ"

Редактор Ю.А.Почерников

Москва 1972

Конспект лекций "Новые методы оптимизации и их применение" составлен в соответствии с программой курса "Теория оптимальных систем" для специальностей факультетов М и П. Утвержден на заседании кафедры высшей математики 10/IУ-71 г. и одобрен Методической комиссией факультета ОТ.

Излагаемый в книге материал представляет собой краткий конспект лекций по курсу "Теория оптимальных систем", прочитанных автором для студентов старших курсов, аспирантов, инженеров и преподавателей в 1967/68, 1968/69 гг. в Московском авиационном технологическом институте и в 1969/70, 1970/71 гг. в МВТУ им. Н.Э.Баумана.

При изложении предполагалось, что слушатели знакомы с обычным курсом математического анализа, читаемым в технических вузах и содержащим дифференцирование, интегрирование функций, теорию экстремумов функций многих переменных (включая условные экстремумы) и теорию дифференциальных уравнений, а также с основами вариационного исчисления и принципом максимума Л.С.Понтрягина.

Рецензенты Л.Н.Гродко
П.М.Рив

Александр Александрович Болонкин

Редактор В.Т.Карасева Корректор Л.И.Малютина

Заказ Л-89047 от 17/IУ-72г.	Объем 13 п.л. Цена 45 к.	Тираж 600 экз. Печ. 1972 г.

Ротапринт МВТУ им. Баумана. Москва, Б-5, 2-я Бауманская, 5.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая книга состоит из двух частей. Первая часть посвящена математическим основам новых методов оптимизации, вторая часть – приложению этих методов к ряду технических задач.

В отличие от классической постановки задачи оптимизации:

а) дан функционал, требуется найти его абсолютную минималь (максималь), в первой части рассматриваются также иные постановки задач;

б) найти более "узкое" подмножество, содержащее абсолютную минималь;

в) найти подмножество решений лучших, чем данное;

г) найти оценки снизу данного функционала.

В настоящее время большинство исследователей, работающих в области оптимизации, заняты решением задачи в традиционной (классической) постановке – отысканием точной минимали (задача а). Инженера же, как правило, в реальных задачах интересует подмножество квазиоптимальных решений, выбирая из которого, он заранее уверен в получении значения функционала не хуже заданной величины (задача в) и оценок снизу, показывающих, насколько далек он от точного оптимального решения (задача г). К тому же у него обычно есть много дополнительных соображений, которые нельзя учесть в математической модели или которые бы ее сильно усложнили. Постановка задачи оптимизации в форме в) дает ему определенную свободу выбора. Задача г) имеет и самостоятельный интерес. Если есть оценка снизу, близкая к точной нижней грани функционала, то задачу оптимизации часто можно решить подбором квазиоптимального решения. Задача же б) может существенно облегчить решение любой из перечисленных задач, так как сужает множество, на котором следует искать решение.

Перечисленные неклассические постановки задач потребовали новых методов решения, отличных от известных методов вариационного исчисления, принципа максимума или динамического программирования. Оказалось, что новые методы обладают значительной общностью и при попытке решить с их помощью одну из перечисленных задач можно в качестве побочного продукта получить решение другой задачи. Это может принести пользу. Так, если получена хорошая оценка снизу, то, сравнивая с ней разные инженерные решения, часто удается получить решение, очень мало отличающееся от оптимального.

Излагаемый в первой части материал несложен, но он опирается на ряд элементарных понятий и символику из теории множеств, не изучаемых обычно в технических вузах. Ниже приводятся эти понятия [I , 2].

В книге принята двойная нумерация формул, теорем и рисунков. Первая цифра в нумерации формул и теорем обозначает номер параграфа, вторая - номер формулы или теоремы в этом параграфе. Первая цифра у рисунков обозначает номер главы, вторая - номер рисунка.

Некоторые сведения из теории множеств

Понятие множества (совокупности, семейства) является одним из первичных в науке и не определяется через другие, более простые понятия. Это - объединение в одно целое объектов по какому-нибудь признаку. Примеры множеств: множество страниц книги, множество звезд и планет, множество студентов, множество рациональных чисел и т.п.

Множества обычно обозначаются прописными буквами: $X, Y, M, N, P, \ldots$ Объекты, составляющие множество, называются его <u>элементами</u> и обозначаются строчными буквами $x, y, \ldots$ Знак $\in$ означает принадлежность; $x \in X$ читается: элемент x принадлежит множеству X. Если x не принадлежит Y (не входит), то пишут $x \notin Y$, что читается: x не является элементом множества Y. Тот факт, что множество X состоит из элементов x, можно записать и так: $X = \{x\}$. Если множество содержит конечное число элементов, то говорят, что оно конечно; в противном случае множество называется бесконечным.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется <u>пустым</u> и обозначается $\varnothing$. Если все элементы из множества A принадлежат множеству B, то говорят, что A содержится (или включено) в B; употребляют также выражения: B содержит A или A есть часть (подмножество) множества B. В этом случае пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Если возможен случай $A = B$, то [illegible]

Множество может быть задано следующими способами:

а) перечислением всех его элементов, например, множество цифр $\{0, I, \ldots, 9\}$;

б) описанием ограничительного свойства. Например, $M = \{x : \beta(x) \geq \beta(\hat{x})\}$ - множество, состоящее из элементов x, удовлетворяющих условию $\beta(x) \geq \beta(\hat{x})$, где $\hat{x}$ - фиксированный элемент, $\beta(x)$ - некоторая действительная функция.

Множество может быть выделено и более сложным образом. Так, оно может зависеть от некоторой переменной y. Пример:

$$M(y) = \{x : \beta(x, y) \geq \beta(\hat{x}(y), y),\ y \in Y\};$$

в) при помощи некоторых операций над множествами. Так, <u>сумма</u>, или <u>объединение</u>, двух множеств A и B, обозначаемое $A + B$ или $A \cup B$, состоит из элементов, принадлежащих как множеству A, так и B (рис.I).

Рис. I

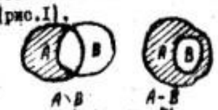

Рис. 2

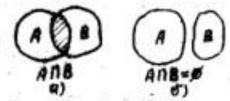

Рис. 3

<u>Разностью</u> двух множеств A и B называется множество, содержащее все элементы множества A, не входящие в множество B, и не содержащее никаких других элементов (рис.2а). Обозначается разность множеств $A - B$ либо $A \setminus B$. Первое обозначение используется только тогда, когда $A \supseteq B$ (рис.2б).

<u>Пересечением</u> множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих как множеству A, так и множеству B, и только из них (рис.3а). Обозначение пересечения: $A \cap B$ или $A \cdot B$. Если $A = A_1 A_2 \cdots A_n$, то это кратко записывается как $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Если $A \cap B = \varnothing$, то множества A и B называются <u>непересекающимися</u> (рис.3б).

Пусть даны два множества $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. Множество упорядоченных пар элементов (a, b), из которых первый принадлежит A, а второй B, называется (декартовым) <u>произведением</u> множеств A и B и обозначается $A \times B$.

Пусть $c = (a, b)$ - элементы множества $A \times B$. Элемент a есть <u>проекция</u> элемента c на множество A. Если $E \subset A \times B$, то проекцией E на A называется множество тех элементов из A, которые являются проекциями элементов из E на A. Обозначение: $pr_1 E$ или $пр_1 E$. <u>Сечением</u> $x = a$ множества E называется множество элементов $y \in B$, для которых $(a, y) \in E$.

Действительное число b называется <u>мажорантой</u> (соответственно минорантой) некоторого множества A действительных чисел, если $a \leq b$ (соответственно $b \leq a$) для всякого $a \in A$. Выражение "для всякого" (любого) часто заменяют символом $\forall$. Множество $A \subset R$ (R - числовая ось) называется <u>мажорируемым</u>, или <u>ограниченным сверху</u> (соответственно минорируемым, или ограниченным снизу), если множество мажорант (соответственно минорант) множества A не пусто. Множество, ограниченное сверху и снизу, называется <u>ограниченным</u>.

Если мажоранта множества A принадлежит A, то она называется максимумом множества A и обозначается $\max\limits_{x \in X} A(x)$ или $\max\limits_{X} A(x)$. Соответственно для миноранты вводится понятие минимума: $\min\limits_{x \in X} A(x)$ или $\min\limits_{X} A(x)$.

Если множество мажорант (минорант) имеет минимум (максимум), то этот элемент называется <u>верхней</u> (нижней) <u>гранью</u> множества A и обозначается соответственно:

$$\sup A, \ \sup_{x \in A} A(x), \ \sup_{X} A(x), \ \inf A, \ \inf_{x \in X} A(x), \ \inf_{X} A(x).$$

Знаки $\sup, \inf$ читаются: супремум, инфинум. Иногда используются обозначения: $\sup A(x), x \in X$ или $\inf A(x), x \in X$. Верхняя и нижняя грань множества A могут и не принадлежать A.

Иногда под $\max(\min)$ понимаются локальные максимумы (минимумы), а под $\sup(\inf)$ - глобальные максимумы (минимумы). Максимум $f(\bar{x})$ действительной функции $f(x)$, заданной на множестве X, в котором введено понятие расстояния между элементами, называется <u>локальным</u>, если существует такая окрестность элемента (точки) $\bar{x}$, в которой $f(\bar{x}) > f(x)$ при $x \neq \bar{x}$. Аналогично определяется локальный минимум функции*/.

Напомним ряд свойств операции $\sup\inf$ и $\inf\sup$. Пусть $f(x,y)$ - действительная функция, зависящая от двух переменных, определенная для $x \in A$ и $y \in B$. Если $\sup\limits_{x \in A}\inf\limits_{y \in B} f(x,y)$ и $\inf\limits_{y \in B}\sup\limits_{x \in A} f(x,y)$ существуют, то

$$\sup_{x \in A}\inf_{y \in B} f(x,y) \leq \inf_{y \in B}\sup_{x \in A} f(x,y).$$

Пусть $f(x,y)$ - действительная функция, определенная на $A \times B$. Точка (x_0, y_0), где $x_0 \in A$ и $y_0 \in B$, называется <u>седловой</u>**/,

*/ Функция (оператор), определенная на произвольном множестве, значениями которой являются числа, называется функционалом.

**/ Такое определение седловой точки принято в теории игр (см., например, Мак Кинси, Введение в теорию игр. Физматгиз, 1960, стр. 24).

если выполняются следующие условия: 1. $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$ для $\forall x \in A$; 2. $f(x_0, y_0) \leq f(x_0, y)$ для $\forall y \in B$.

Таким образом, для седловой точки $f(x,y_0) \leq f(x_0,y_0) \leq f(x_0,y)$.

Пусть $f(x,y)$ - функционал, определенный на $A \times B$, и существуют $\max\limits_{A}\min\limits_{B} f(x,y)$ и $\min\limits_{B}\max\limits_{A} f(x,y)$. Тогда необходимое и достаточное условие равенства $\max\limits_{A}\min\limits_{B} f(x,y) = \min\limits_{B}\max\limits_{A} f(x,y)$ состоит в том, что $f(x,y)$ должен иметь седловую точку. Кроме того, если (x_0, y_0) есть седловая точка функционала $f(x,y)$, то

$$f(x_0, y_0) = \max_{A}\min_{B} f(x,y) = \min_{B}\max_{A} f(x,y).$$

По аналогии с локальным максимумом и минимумом можно ввести понятие <u>локальной седловой точки</u>, когда существует такая окрестность $A_1 \times B_1 \subset A \times B$ у точки (x_0, y_0), в которой: 1. $f(x,y_0) \leq f(x_0,y_0)$ для $\forall x \in A_1$; 2. $f(x_0,y_0) \leq f(x_0,y)$ для $\forall y \in B_1$.

<u>Замечание</u>. Нам удобнее пользоваться иным определением седловой точки, чем в теории игр, а именно: мы определим седловую точку как точку, удовлетворяющую условиям: 1. $f(x,y_0) \geq f(x_0,y_0)$ для $\forall x \in A$; 2. $f(x_0,y_0) \geq f(x_0,y)$ для $\forall y \in B$.

Таким образом, если (x_0, y_0) есть седловая точка в нашем понимании, то $f(x_0,y) \leq f(x_0,y_0) \leq f(x,y_0)$

и $f(x_0,y_0) = \max\limits_{B}\min\limits_{A} f(x,y) = \min\limits_{A}\max\limits_{B} f(x,y)$.

От определения седловой точки в теории игр наше определение отличается тем, что аргументы функции переставлены местами.

<u>Свойства неравенств</u>

1. Добавление (вычитание) к обеим частям неравенства одного и того же числа. Если $a > b$, то $a+c > b+c$.

2. Сложение неравенств одинакового смысла. Если $a > b$, $c > d$, то $a+c > b+d$. Если $a < b$, $c < d$, то $a+c < b+d$.

3. Вычитание неравенств противоположного смысла. Если $a > b$, $c < d$, то $a-c > b-d$.

4. Умножение неравенства на число. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$. Если же $c < 0$, то $ac < bc$.

5. Умножение неравенств одного смысла. Если a, b, c, d положительны и $a > b$, $c > d$, то $ac > bd$.

6. Если $a > b > 0$, то при любом натуральном n $a^n > b^n$.

7. Если $a > b > 0$, то при любом натуральном $n \geq 2$ $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

8. Обращение неравенства. Если $a > b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Эти свойства справедливы и для нестрогих неравенств.

Литература

1. И.П. Макаров. Теория функций действительного переменного. "Высшая школа", 1962.
2. Ж.Дьедонне. Основы современного анализа. "Мир", 1964.

Часть первая

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Глава I

МЕТОДЫ β - И γ -ФУНКЦИОНАЛОВ

§1. Методы β -функционала

1. Постановки задач. Основные теоремы. Алгоритм I

А). Пусть состояние системы характеризуется элементом x, совокупность которых образует множество $X (x \in X)$. На X определен функционал $I(x)$, ограниченный снизу. Связи и ограничения, наложенные на систему, выделяют из этого множества некоторое подмножество допустимых состояний X^*, $X^* \subseteq X$.

Традиционная постановка задачи оптимизации:

а) Найти абсолютную минималь[*] x^* функционала $I(x)$ на X^*.

Наряду с данной задачей мы будем рассматривать также следующие задачи:

б) Выделить более "узкое" подмножество $M \subset X^*$, содержащее абсолютную минималь $x^* \in X^*$.

в) Найти подмножество $N \subset X^*$ такое, что $I(x) < c$ на N, где c -некоторое число, $c \geq I(x^*)$.

г) Найти оценки снизу $I(x)$ на X^*.

Для простоты предполагается, что x^* на X^* существует и единственно. Это ограничение не является существенным, так как большинство результатов без труда обобщается на случай неединственности x^* и даже отсутствия оптимального x^* (но существует $\inf\limits_{X^*} I(x)$).

Б). Введем множество $Y = \{y\}$ и определим на $X \times Y$ ограниченный функционал[*] $\beta(x,y)$. Назовем его β -функционалом. Построим обобщенный функционал $J(x,y) = I(x) + \beta(x,y)$. Зафиксируем y. Назовем нашу исходную задачу отыскания x^* и $I(x^*) = \inf\limits_{X^*} I(x) = m$ задачей I, а задачу отыскания абсолютной минимали $\bar{x}$ и $\bar{J}(y) = \inf\limits_{X}[I(x) + \beta(x,y)]$, - задачей 2. Предполагается, что $\bar{x}$ на $X \times Y$ существует.

Теорема 1.1 (выделение подмножеств, содержащих лучшие, худшие решения и абсолютную минималь). Пусть $X^* \subseteq X$, $\bar{x}(y)$ - абсолютная минималь задачи 2: $\bar{J}(y) = \inf J(x,y), x \in X$. Тогда: 1) абсолютная минималь задачи I находится в множестве $M(y) = \{x : \beta(x,y) \geq \beta(\bar{x}(y),y), x \in X\}$; 2) множество $N(y) = \{x : J + I < \bar{I} + \bar{J}\}$ содержит такие или лучшие решения (т.е. на N $I(x) < I(\bar{x})$); 3) множество $P(y) = \{x : \beta(x,y) < \beta(\bar{x}(y),y), y \in Y\}$ содержит такие или худшие решения (т.е. на P $I(x) \geq I(\bar{x})$).

Доказательство: 3. Вычитая из неравенства $I(x) + \beta(x,y) \geq I(\bar{x}) + \beta(\bar{x}(y),y)$ неравенство $\beta(x,y) < \beta(\bar{x}(y),y)$, получим $I(x) \geq I(\bar{x})$ на P.

1. Так как $X = M + P$, а на P $I(x) \geq I(\bar{x})$, то $x^* \in M$.

2. Вычитая $J \geq \bar{J}$ из неравенства $J + I < \bar{J} + \bar{I}$, получим $I(x) < I(\bar{x})$ на N.

Теорема I доказана.

Следствие 1. Элемент $\bar{x}$ является абсолютной минималью функционала $I(x)$ на множестве $P \subseteq X$.

Следствие 2. $\bar{x}$ является элементом, на котором достигается максимум функционала $I(x)$ на множестве $N \subset X$.

Следствие 3. Если $X = X^* \subseteq P$, то $\bar{x}$ является абсолютной минималью задачи I на X^*. В этом случае $M = \{\bar{x}\}$.

Следствие 4. Если $\beta = \beta(x)$, $x \in N$, то $M = \{x : \beta(x) \geq \beta(\bar{x})\}$, $P = \{x : \beta(x) < \beta(\bar{x})\}$, $N = \{x : J + I < \bar{J} + \bar{I}\}$.

Теорема 1.1 верна и для случая $X^* \neq X$, когда M, N, P содержат элементы из X^*.

Следствие 5. Пусть $X^* \neq X$. Если $X^* \cap M = \emptyset$, то $I(\bar{x})$ есть оценка снизу $I(x)$ на X^* (ибо в этом случае $X^* \subseteq P$).

Следствие 6. Пусть $X^* \neq X$. Если $X^* \subset N$, то справедлива оценка сверху: $I(x) < I(\bar{x})$ на X^*.

Множества M, N, P всегда содержат хотя бы один элемент из X^*, если $\bar{x} \in X^*$. Таким элементом является $\bar{x}$.

---

[*] Для определенности мы будем рассматривать всюду задачу минимизации. Задача максимизации может быть сведена к задаче минимизации путем изменения знака у функционала.

[*] Целесообразность введения множества Y будет видна из дальнейшего (см., в частности, гл. III).

Замечания: I. Множество $N \subseteq M$.
Докажем это. Обозначим $\hat{P} = P - \{\bar{x}\}$. $\hat{P} \cap N = \emptyset$, ибо на $\hat{P}$ $I(x) > I(\bar{x})$, а на N $I(x) \leq I(\bar{x})$. Но $N \subset X$ и $M = X \setminus \hat{P}$. Следовательно, $N \subseteq M$, что и требовалось доказать.

2. Пусть в определении множеств N, P (см. теорему I.I) фигурирует строгое неравенство. Тогда множество N будет содержать решения лучшие, чем $\bar{x}$, а множество P – худшие по сравнению с $\bar{x}$.

3. Зависимость множеств M, N, P от y может быть использована для изменения "размеров" этих множеств.

4. β-функционалы существуют и число их бесконечно. Последнее утверждение очевидно, ибо $\beta(x,y)$ ничем не ограничено на $X \times Y$ и может быть задано бесчисленным количеством способов.

Отсюда вытекает алгоритм I (метод выделения подмножества, содержащего абсолютную минималь или лучшие решения при помощи β-функционалов): задаемся такими $\beta_i(x,y)$, чтобы упростилось решение задачи 2. Находим множества M_i и N_i. Тогда $M = \bigcap M_i$ (оно всегда не пусто) есть множество, содержащее x^* [*], а $N = \bigcap N_i$ (если оно не пусто) есть множество, заведомо содержащее $\min\{I(\bar{x}_i)\}$ или лучшие решения.

Теорема I.2 (оценка снизу). Пусть $\beta(x,y)$ определено и ограничено на $X \times Y$. Справедлива оценка снизу на X:

$$I(x) \geq I(\bar{x}(y)) + \beta(\bar{x}(y), y) - \sup_X \beta(x, y) \text{ при } \forall y \in Y. \qquad (I.I)$$

Доказательство. I. Складывая неравенства $I(x) + \beta(x,y) \geq I(\bar{x}) + \beta(\bar{x}, y)$ на X и $-\beta(x,y) \geq -\sup_X \beta(x,y)$ на X, получим искомую оценку.

Замечания: I. Для случая $\beta = \beta(x)$ оценка (I.I) принимает вид

$$I(x) \geq \inf_X J(x) - \sup_X \beta(x). \qquad (I.I')$$

2. Когда $X \neq X^*$, оценка (I.I) справедлива и на X^*, ибо $X^* \subseteq X$. В этом случае можно использовать более точные оценки:

$$I(x) \geq \inf_{X^*} J(x) - \sup_X \beta(x), \quad I(x) \geq \inf_X J(x) - \sup_{X^*} \beta(x);$$
$$I(x) \geq \inf_{X^*} J(x) - \sup_{X^*} \beta(x). \qquad (I.I'')$$

Когда найдено множество M для другого β_i, полезна бывает оценка

$$I(x) \geq \inf_X J(x) - \sup_M \beta(x). \qquad (I.I''')$$

Доказательство (I.I''), (I.I''') аналогично доказательству теоремы I.2.

[*] На этом более "узком" множестве найти x^* уже проще. Заметим, что сужение области поиска решения особенно важно в методе динамического программирования, так как приводит к резкому уменьшению потребной оперативной памяти и количества вычислений.

3. Зависимость оценки (I.I) от y может быть использована для ее улучшения

$$I(x) \geq \sup_y \left[\inf_X J(x,y) - \sup_X \beta(x,y)\right]. \qquad (I.I'''')$$

При использовании оценок (I.I') – (I.I'''') приходится решать задачу β-$\sup\beta$. Решение этой задачи может быть также использовано для отыскания множеств M, N, P, а именно верна

теорема I.3. Пусть $X = X^*$, $\hat{x}$ – абсолютная максималь задачи $\hat{\beta} = \sup \beta(x,y)$. Тогда: I) абсолютная минималь задачи I находится в множестве $M(y) = \{x : \hat{I} + \beta \leq \hat{I} + \hat{\beta}, y \in Y\}$; 2) множество $N(y) = \{x : \beta - I \geq \hat{\beta} - \hat{I}, y \in Y\}$ содержит такие или лучшие решения; 3) множество $P(y) = \{x : I + \beta \geq \hat{I} + \hat{\beta}, y \in Y\}$ содержит такие или худшие решения.

Здесь $\hat{I} = I(\hat{x})$.

Доказательство. I, 3. Вычитая $\beta \leq \hat{\beta}$ из неравенства $I + \beta \geq \hat{I} + \hat{\beta}$, получим на P $I \geq \hat{I}$. Отсюда следует п. I. 2. Вычитая $\beta \geq \hat{\beta}$ из неравенства $\beta - I \geq \hat{\beta} - \hat{I}$ и умножая полученный результат на $-I$, получим, что на N $I \leq \hat{I}$. Теорема доказана.

Замечание: Для доказательства теорем I.I – I.3 существование x^*, $\bar{x}$, $\hat{x}$ – неважно, но соответствующие $\inf$ и $\sup$ должны существовать.

Пример I.I. Найти минимум функционала

$$I = -e^{-x^2}\cos x^2 - \frac{0.1}{x^2 - 0.2x + 1}, \quad -\infty < x < \infty. \qquad (I.2)$$

Возьмем $\beta(x) = \frac{0.1}{x^2 - 0.2x + 1}$. Тогда $J = I + \beta = -e^{-x^2}\cos x^2$. Минимум этого выражения найти легко: $\bar{x} = 0$. Следовательно, согласно теореме I.I, абсолютная минималь исходного функционала находится в множестве $M = \{x : \beta(x) \geq \beta(0)\}$, т.е. $\frac{0.1}{x^2 - 0.2x + 1} \geq 0.1$. Решив это неравенство, получим $0 \leq x \leq 0.2$. В этом узком диапазоне найти абсолютный минимум уже нетрудно любым из известных методов. Оценка снизу (теорема I.2) дает $J(0) - \sup\beta = -1 - 0.101 = -1.101$. Значение $I(0) = -1.100$, т.е. $I(x)$ при $x = 0$ весьма мало отличается от абсолютного минимума.

Пример I.2. Найти минимум

$$I = -\frac{0.1}{x^2 - 2x + 10} + \cos 4\pi x - 4\cos 2\pi x, \quad -\infty < x < \infty. \qquad (I.3)$$

Возьмем $\beta(x) = -\cos 4\pi x + 4\cos 2\pi x$, $J = I + \beta = -\frac{0.1}{(x-1)^2 + 9}$, $\bar{x} = 1$. Это решение является абсолютной минималью задачи I на множестве $P = \{x : \beta(x) \leq \beta(1)\}$, т.е. $-\cos 4\pi x + 4\cos 2\pi x \leq 3$. Преобразуя это неравенство, получим [*] $-8\sin^4 \pi x \leq 0$. Следовательно, $P = \{x : |x| < \infty\}$, т.е. множество P совпало с X^*. Таким образом (см. следствие I) $\bar{x} = 1$ – абсолютная (и единственная) минималь $I(x)$.

[*] И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. Справочник по математике. Гостехиздат, 1954, стр. 184.

Пример I.3. Найти минимум

$$I=2x^4+x^2-2x+1 \qquad \text{на} \qquad X^*=\{x:|x|<\infty\}. \qquad (I.4)$$

Задаемся рядом $\beta_i(x)$ и по теореме I.I находим множества M:

1) $\beta_1=2x,\ J=I+\beta=2x^4+x^2+1,\ \bar{x}=0,\ \beta\geq\bar{\beta},\ M_1=\{x: x\geq 0\}$;

2) $\beta_2=-x^2+2x,\ J=2x^4+1,\ \bar{x}=0,\ \beta\geq\bar{\beta},\ M_2=\{x: 0\leq x\leq 2\}$ (теорема I.2).
$\beta\leq\bar{\beta},\ M=\{x:|x|\leq 1\}$ (теорема I.3).

3) $\beta_3=-2x^2+2x-\frac{1}{2},\ J=2x^4-x^2+\frac{1}{2},\ \bar{x}_{1,2}=\mp\frac{1}{2},\ M_3=\{x:-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}\},\ M_4=\{x:\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}\}$.

Мы видим, что диаметр множества $M=\bigcap M_i$ последовательно уменьшался, пока множество не превратилось в точку $\bar{x}=1/2$. Следовательно, эта точка и есть единственная абсолютная минималь нашей задачи, $I(\bar{x})=3/8$.

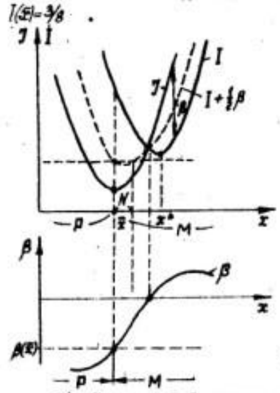

Рис. I.I

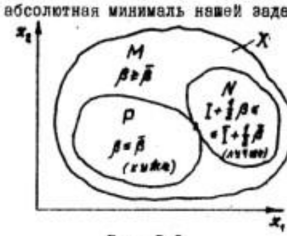

Рис. I.2

В). На рис. I.I дается геометрическая иллюстрация теоремы I.I. На нем нанесены кривые $I(x)$,$J(x)$, $\beta(x)$, $I(x)+\frac{1}{2}\beta(x)$ и точка $\bar{x}$. Множество P - это совокупность x , для которых $\beta(x)\leq\beta(\bar{x})$, множество $M=X\setminus P$ и множество N - это совокупность x , для которых $I(x)+\frac{1}{2}\beta(x)\leq I(\bar{x})+\frac{1}{2}\beta(\bar{x})$. На рис. I.I, в частности, видно, что $N\subset M$.

На рис. I.2 изображен случай, когда $I=I(x_1,x_2)$ - функция двух переменных.

2. О сходимости алгоритма I

Рассмотрим условия сходимости $\inf\limits_{x\in X} J(x)$ к $\inf\limits_{x\in X^*} I(x)$ и $\bar{x}$ к x^* при применении алгоритма I, когда задана последовательность $\beta_i(x), i=1,2,\ldots$. Эта последовательность порождает последовательность множеств M_i , N_i и значений функционала $J(\bar{x}_i)$.

Последовательность $\{\inf J(\bar{x}_i)\}$ при $i\to\infty$ монотонно убывает и ограничена снизу, поэтому она имеет предел. Если этот предел равен одной из нижних оценок, то $J(\bar{x})=I(x^*)$. Рассмотрим теперь последовательность диаметров $d(M)$, $d(N)$ множеств $M=\bigcap M_i$; $N=\bigcap N_i$ при $i\to\infty$. Эта последовательность монотонно убывает и ограничена снизу: $d\geq 0$. Значит, она также имеет предел. Отсюда вытекает следующий простой критерий сходимости:

Теорема I.4. Пусть абсолютная минималь $I(x)$ на $X=X^*$ единственная. Если $d(M)\to 0$, то $\bar{x}=\lim\limits_{i\to\infty} M(i)=x^*$.

В самом деле, в этом случае множество, содержащее абсолютную минималь $M=\bigcap M_i$, стягивается в точку. Следовательно, эта точка и является абсолютной минималью задачи I.

Пусть $W_s(x), s=1,2\ldots$ - некоторая последовательность функций. Возьмем $\beta_i(x)$ в виде

$$\beta_i=\sum_{s=1}^{i} C_s W_s(x), \qquad (I.5)$$

где C_s - постоянные.

Постоянные C_s будем выбирать из условия

$$\Delta_i=\min_{C}\left|I(\bar{x}_i)-\inf_X J_i(x)+\sup_X\beta_i(x)\right|.$$

Величина Δ_i представляет собой разность между функционалом $I(x)$ и его оценкой снизу. Т.е. Δ показывает, насколько значение $I(\bar{x}_i)$ отличается от оптимального. Условимся называть эту величину Δ -оценкой (дельта-оценкой). Очевидно, что последовательность $\{\Delta_i\}$ монотонно убывает, ибо каждая последующая сумма $\sum\limits_{s=1}^{i} C_s W_s(x)$ содержит предыдущую. В то же время, она ограничена снизу ($\Delta_i\geq 0$). Значит, последовательность $\{\Delta_i\}$ сходится. Из определения Δ_i вытекает следующее утверждение.

Теорема I.5. Если $\Delta_i\to 0$; то $\inf\limits_X J(x)\to\inf\limits_{X^*} I(x)$.

Теорема I.6. Пусть $X=X^*$, $\beta_i=C_i\beta(x)$; $I(x)$, $\beta(x)$ непрерывны и $\beta(x)$ ограничено на X . Тогда при $C_i\to 0$ $J(\bar{x})\to m=\inf I(x)$ на X^*.

Утверждение теоремы I.6 прямо вытекает из непрерывности $J(x)$

Эта теорема может быть полезна при отыскании локальных минимумов $I(x)$ методом последовательных приближений. В самом деле, пусть $C_1=1$ и задача $\inf J(x)$ решается просто. Тогда в силу непрерывности мы вправе ожидать, что при малых изменениях C минималь $\bar{x}$ сместится мало, т.е. $\bar{x}_1$ является хорошим начальным приближением для $C_2<C_1$. Как известно, хорошее начальное приближение играет важную роль в скорости сходимости. Последовательно уменьшая C до 0 , мы придем к x^*.

Предложенные критерии сходимости могут быть использованы при решении задач а, б, в, г (см. §I, A).

12-13

3. Модификация теоремы I.I

Выше был рассмотрен случай, когда к функционалу $I(x)$ подбиралась такая добавка $\beta(x,y)$, чтобы задача 2 решалась проще. Иногда удобнее сразу задаваться такими функционалами $\mathcal{J}(x,y)$, которые упростили бы решения задачи $\inf\limits_{X} \mathcal{J}(x,y)$. В этом случае теорему I.I удобнее сформулировать в следующем виде:

Теорема I.I'. Пусть $X = X^*$, $\bar{x}$ – абсолютная минималь задачи $\mathcal{J} = \inf\limits_{X} \mathcal{J}(x,y)$. Тогда: I) абсолютная минималь задачи I находится в множестве $M(y) = \{x: \mathcal{J} - I \geq \bar{\mathcal{J}} - \bar{I}\}$; 2) множество $N(y) = \{x: \mathcal{J} + I \leq \bar{\mathcal{J}} + \bar{I}\}$ содержит такие или лучшие решения; 3) множество $P(y) = \{x: \mathcal{J} - I \leq \bar{\mathcal{J}} - \bar{I}\}$ содержит такие или худшие решения.

Теорема I.I верна, если брать $\mathcal{J} = k\mathcal{J}_1$, где $k = const > 0$.

4. Метод спуска по множеству лучших решений. Алгоритм 2

Теорема I.I позволяет построить:

алгоритм 2 (метод спуска по множеству лучших решений). Берем любую точку x_1 из X^* и конструируем вспомогательный функционал $\mathcal{J}_1(x)$ таким образом, чтобы эта точка была его минималью. Находим множество таких или лучших решений N_1 . Берем из этого множества точку x_2 , по тому же принципу строим $\mathcal{J}_2(x)$, находим множество N_2 и т.д.

Очевидно, что $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \ldots$ Предположим, что в результате множество N_i выродилось в точку. Обозначим ее x_N .

Теорема I.7. Пусть X^* – открытое множество, $I(x), \mathcal{J}_i(x)$ – непрерывны и дифференцируемы (по Фреше) на X^* . Тогда точка x_N является стационарной точкой функционала $I(x)$ на X^* .

Доказательство. Точка x_N – минималь $\mathcal{J}(x)$, поэтому из непрерывности и дифференцируемости $\mathcal{J}(x)$ следует, что $\mathcal{J}'(x_N) = 0$. Так как x_N – единственная точка N_i на X^* , то на X^* справедливо неравенство $I(x) + \mathcal{J}(x) \geq I(x_N) + \mathcal{J}(x_N)$, т.е. $I(x_N) = \inf[I(x) + \mathcal{J}(x)]$. Вследствие непрерывности и дифференцируемости $I(x)^X$, $\mathcal{J}(x)$ получаем $I'(x_N) + \mathcal{J}'(x_N) = 0$. Учитывая, что $\mathcal{J}'(x_N) = 0$, находим, что и $I'(x_N) = 0$. Теорема доказана.

Теорема I.8. Если в точке x_N выполнено условие $\beta(x_N) - I(x_N) = \sup[\beta(x) - I(x)]$, то точка x_N является абсолютной минималью задачи I.

Доказательство. Вычитая $\beta \geq \beta_N$ из неравенства $\beta - I \leq \beta_N - I_N$, получим $I \geq I_N$ на X^* , что и требовалось доказать.

Если условие теоремы I.8 выполнено только по отношению к некоторой окрестности точки x_N , то точка x_N является относительной минималью задачи I.

Пример к методу спуска по множеству лучших решений (для задачи условного экстремума) будет рассмотрен в §4 (примечание 4.3). Преимущество этого метода по сравнению с градиентным методом в том, что можно производить расчеты с крупным шагом, не рискуя получить худшие значения функционала.

5. Метод β -функционала в случае ограничений типа равенств и неравенств

А) Пусть на множестве X задан функционал $I(x)$, ограниченный снизу. Допустимое множество $X^* \neq \varnothing$ выделено из X при помощи функционалов

$$F_i(x) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,k, \quad \Phi_j(x) \leq 0, \; j = 1,2,\ldots,q. \tag{I.6}$$

Возьмем β -функционал в виде (по i, j – сумма)

$$\beta(x,y) = \lambda_i(x,y) F_i(x) + \omega_j(x,y) \Phi_j(x) \tag{I.7}$$

где $\lambda_i(x,y), \omega_j(x,y)$ – некоторые функции x, y, $y \in Y$, причем $\omega_j(x,y) \geq 0$.
Построим обобщенный функционал

$$\mathcal{J}(x,y) = I(x) + \lambda_i(x,y) F_i(x) + \omega_j(x,y) \Phi_j(x). \tag{I.8}$$

Теорема I.9. Пусть $x^* \in X^*$ существует, y фиксировано. Для того чтобы $\bar{x}$ был абсолютной минималью функционала $I(x)$ на X^* , необходимо и достаточно существование функционала $\beta(x,y)$ такого, что 1) $\mathcal{J}(\bar{x},y) = \inf\limits_{x \in X} \mathcal{J}(x,y)$, 2) $\bar{x} \in X^*$, 3) $\omega_j(x,y) \geq 0$ на X , 4) $\beta(\bar{x},y) = 0$ (I.9)

Доказательство. Достаточность. Из п.1 (I.9) имеем $I + \lambda_i F_i + \omega_j \Phi_j \geq \bar{I} + \bar{\lambda}_i \bar{F}_i + \bar{\omega}_j \bar{\Phi}_j$. Учитывая п. 4 (I.9), получаем $I + \lambda_i F_i + \omega_j \Phi_j \geq \bar{I}$. Рассмотрим это неравенство на X^* . На X^* $\lambda_i F_i = 0$, $\omega_j \Phi_j \leq 0$, т.е. $I(x) \geq I(\bar{x})$. Так как $\bar{x} \in X^*$, то это – абсолютная минималь $I(x)$ на X^* .

Необходимость (метод построения). Пусть $x^* \in X$ существует . Построим $\beta(x,y)$ следующим образом. Полагаем $\lambda_i \equiv 0$ на X^*, а на $X - X^*$ функции λ_i , $\omega_j \geq 0$ выберем таким образом, чтобы $\mathcal{J}(x) > m$. Тогда $\mathcal{J}(x^*) = \inf\limits_{x \in X} \mathcal{J}(x)$, $x^* \in X^*$, $\omega_j \geq 0$, $\beta = 0$ – по построению. Теорема доказана.

Достаточное заключение этой теоремы при фиксированном y совпадает с теоремой I в [2].

Теорема I.10 (оценка снизу). Пусть y фиксировано, $\bar{x}$ – минималь $\mathcal{J}$ (I.8) при условии $\omega_j(x,y) \geq 0$. Тогда $\mathcal{J}(\bar{x},y)$ – оценка снизу функционала $I(x)$ на X^* .

Доказательство. На X^* $\lambda_i F_i \equiv 0$, $\omega_j \Phi_j \leq 0$ (т.е. $\beta(\bar{x},y) \leq 0$) и поэтому на X^* $\mathcal{J}(\bar{x},y) \leq I(x)$, что и требовалось доказать.

Как и для всякого β -функционала, в данном случае можно выделить множества

$$M=\{x:\beta>\bar\beta\},\quad N=\{x: J+I<\bar J+\bar I\},\quad P=\{x:\beta<\bar\beta\}. \qquad (I.10)$$

Свободу в выборе y можно использовать для улучшения нижней оценки и уменьшения размеров множеств M, N. Заметим только, что $\bar x=\bar x(y)$ и для каждого y соответствующее $\bar x$ надо находить по $\inf J(x,y),\ x\in X$.

Замечание. β-функционал (I.7) можно строить в виде

$$\beta(x)=\frac{1}{2}a\sum_{i=1}^{n}F_i^2(x)+\sum_{j=1}^{q}a^{\Phi_j(x)}.$$

Можно показать, что при определенных условиях*/, когда $a\to\infty$, получим $J\to m$, $\bar x\to x^*$.

Б) Пусть $F_i(x)=0$ в (I.6) отсутствуют, т.е. задача имеет вид

$$I(x)=\min,\quad \Phi_j(x)\le 0,\quad j=1,2,\dots,q. \qquad (I.11)$$

Для ее решения можно использовать следующий алгоритм:

1. Берут произвольные функции $\omega_j(x,y)$ (не обязательно больше нуля) и находят абсолютную минималь $\bar x(y)$ на X (или в неявном виде $\xi(\bar x,y)=0$) обобщенного функционала

$$J=I(x)+\sum_{j=1}^{q}\omega_j(x,y)\,\Phi_j(x). \qquad (I.12)$$

2. Решают совместно систему

$$\xi(\bar x,y)=0,\quad \omega_j(\bar x,y)\,\Phi_j(\bar x)=0,\quad j=1,2,\dots,q. \qquad (I.13)$$

3. Из этих решений отбирают такие, которые удовлетворяют неравенствам

$$\omega_j(\bar x,\bar y)\ge 0,\quad j=1,2,\dots,q. \qquad (I.14)$$

Это и есть абсолютные минимали задачи (I.11), так как все условия теоремы 1.4 в этом случае выполнены.

Решить (I.13) можно по-разному, например, при помощи уравнения $\xi(\bar x,y)=0$ исключить $\bar x$ из последних уравнений (I.13):

$$\omega_j(\bar x(y),y)\,\Phi_j(\bar x(y))=0,\quad j=1,2,\dots,q \qquad (I.15)$$

и решить эту систему относительно y. Из этих y отбираются те, которые удовлетворяют ограничению

$$\omega_j(\bar x(y),y)\ge 0,\quad j=1,2,\dots,q. \qquad (I.16)$$

Или исключить из (I.13) y и решить систему относительно $\bar x$.

6. Применение метода β-функционала к решению задач линейного программирования

Задача линейного программирования такова:

$$I=\sum_{i=1}^{n}c_i x_i=\min,\quad \sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j-b_k\le 0,\quad k=1,2,\dots,m. \qquad (I.17)$$

Здесь c_i, a_{kj}, b_k постоянные.

---

*/ $I(x)$, $\Phi_j(x)$, $F_i(x)$ непрерывны, X – компакт, X^* замкнуто и не содержит изолированных точек; $x^*\in X^*$ существует.

Полагаем $\omega_j=y_j$. Тогда система (I.13) запишется:

$$y_k\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j-b_k\Big)=0,\quad k=1,2,\dots,m \qquad (I.18)$$

$$c_i+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}y_j=0,\quad i=1,2,\dots,n. \qquad (I.19)$$

Выберем из (I.18) l уравнений ($l\le n$, $l\le m$, $l=\max$) и l переменных x_j таких, что соответствующий определитель $|a_{kj}|\ne 0$ и из выбранных l линейных уравнений (I.18) (соответствующие $y_k\ne 0$) находим решение $\bar x_j$. Если это решение не удовлетворяет неравенствам (I.17), то выбираем другие l уравнений и повторяем процедуру, пока не найдем $\bar x_j$, удовлетворяющее (I.17). Если таких уравнений не окажется, то берем l-1 уравнение (I.18) и повторяем процедуру, затем l-2 уравнения и т.д., пока не дойдем до $l=0$. Если решений, удовлетворяющих (I.17), не оказалось, то система неравенств (I.17) противоречива и не может быть решена.

Пусть при помощи указанной процедуры мы нашли решение $\bar x_j$, удовлетворяющее (I.17). Полагаем в (I.19) все y_k, не принадлежащие выбранным уравнениям (I.18), равными нулю и решаем систему (I.19) относительно y. Если все полученные $\bar y_j\ge 0$, то $\bar x_i$ – минималь задачи (I.17). Если часть $\bar y_j<0$, то заменяем соответствующие им уравнения (I.18) другими и повторяем процедуру, пока не получим все $\bar y_j\ge 0$.

Есть основание полагать, что при такой процедуре все $\bar y_j\ge 0$ не будут отрицательными. В самом деле, неравенство $\bar y_j\ge 0$ означает, что антиградиент направлен внутрь соответствующего ограничения. Но вследствие линейности задачи и ограничений, будучи направленным внутрь ограничения в одной точке, он будет (в силу своего постоянства) направлен внутрь и в любой другой точке соответствующей гиперплоскости (I.17). А это значит, что в результате указанной процедуры число величин $\bar y_j\ge 0$ может только возрастать.

Пример 1.4. $I=x_1+x_2,\ -x_1\le 0,\ -x_2\le 0,\ x_1-1\le 0,\ x_2-1\le 0.$ (I.20)

Система (I.18), (I.19):

$$\begin{aligned}&-y_1x_1=0,\quad && y_3(x_1-1)=0,\quad && 1-y_1+y_3=0,\\ &-y_2x_2=0,\quad && y_4(x_2-1)=0,\quad && 1-y_2+y_4=0.\end{aligned} \qquad (I.21)$$

Выберем уравнения $x_1-1=0$, $x_2-1=0$. Их решение $\bar x_1=1$, $\bar x_2=1$ удовлетворяет (I.20). Из первого столбца в (I.21) имеем $y_1=y_2=0$, а из последнего столбца (I.21) находим $y_3=y_4=-1$. Неравенство $y_i\ge 0$ не выполнено. Заменяем уравнения другими $\bar x_1=0$, $\bar x_2=0$. Получаем $\bar y_1=\bar y_2=1>0$. Следовательно, решение $\bar x_1=\bar x_2=0$ – абсолютная минималь.

Пример I.5. $I = -x_1 - x_2$, $x_1 + x_2 \le 0$.

Система (I.18), (I.19): $y_1(x_1 + x_2) = 0$, $-1 + y = 0$, $-1 + y = 0$. Из уравнения $x_1 + x_2 = 0$ находим $\bar{x}_1 = -\bar{x}_2$. Из $-1 + y = 0$ получаем $y = 1 > 0$. Следовательно, любое $\bar{x}_1 = -\bar{x}_2$ оптимально.

7. Применение метода β-функционала к задаче квадратичного программирования

Эта задача следующая:

$$I = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - b_k \le 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m \qquad (I.22)$$

Предполагается, что квадратичная форма – положительно определенная.

Если не учитывать ограничения (I.22), то минимум этой задачи очевиден: $x_j^* = 0$. Когда это решение удовлетворяет неравенствам (I.22), то процесс отыскания минимали на этом и заканчивается. В частности, последнее обстоятельство справедливо при всех $b_k \ge 0$.

Рассмотрим случай нетривиального решения. Возьмем $\omega_j = y_j$. Система (I.13) и (I.14) примет вид:

$$y_k\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - b_k\Big) = 0, \; k = 1, 2, \ldots, n; \; \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_j + \sum_{j=1}^{m} y_j a_{jk} = 0, \; y_k \ge 0 \qquad (I.23)$$

Процедура здесь аналогична задаче линейного программирования.

Пример I.6. $I = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$, $-x_1 - x_2 + 1 \le 0$, $x_1 - 1 \le 0$, $x_2 - 1 \le 0$ (I.24)

Система (I.23): $y_1(-x_1 - x_2 + 1) = 0$, $y_2(x_1 - 1) = 0$, $y_3(x_2 - 1) = 0$,

$$x_1 - y_1 + y_2 = 0, \quad x_2 - y_1 + y_3 = 0. \qquad (I.25)$$

Возьмем 2-е и 3-е уравнения. Получим $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1$. Неравенствам (I.24) это решение удовлетворяет, но из последних двух уравнений (I.25) при $y_1 = 0$ следует, что $\bar{y}_2 = \bar{y}_3 = -1$. Это противоречит условию $\bar{y}_i \ge 0$. Возьмем первое уравнение в (I.25). Получим $\bar{x}_2 = 1 - \bar{x}_1$. Решая его совместно с системой $\bar{x}_1 - \bar{y}_1 = 0$, $\bar{x}_2 - \bar{y}_1 = 0$, находим: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \frac{1}{2}$, $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \frac{1}{2} > 0$. Следовательно, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ – абсолютная минималь.

§2. Метод совмещения экстремумов. Алгоритм В

Пусть даны задачи:

задача 1 $\quad I(x^*) = \inf I(x)$, $x \in X^*$;

задача 2 $\quad J(\bar{x}) = \inf [I(x) + \beta(x)]$, $x \in X$;

задача 3 $\quad \beta(\hat{x}) = \sup \beta(x)$, $x \in X$.

Предположим, что все $x_i^*, \bar{x}, \hat{x}$ существуют.

Теорема 2.1. Пусть $X = X^*$. Тогда для каждой пары $(\bar{x}_i, \hat{x}_i)$, удовлетворяющей условию $\bar{x}_i = \hat{x}_i$, имеем $\bar{x}_i = \hat{x}_i = x_i^*$.

Доказательство. Пусть $\bar{x}_i = \hat{x}_i$. Тогда

$$\inf J(x) - \sup \beta(x) = J(\bar{x}_i) - \beta(\hat{x}_i) = I(\bar{x}_i) + \beta(\bar{x}_i) - \beta(\bar{x}_i) = I(\bar{x}_i).$$

Но, с другой стороны, согласно теореме I.2 $\inf J - \sup \beta \le \inf I$, т.е. $I(\bar{x}_i) \le I(x^*)$. Так как x^* – абсолютная минималь и $X = X^*$, то может быть только $I(\bar{x}_i) = I(x^*)$. В силу существования $\bar{x}_i$ и всех x_i^* найдется такая минималь x_i^*, что $\bar{x}_i = x_i^*$.

Теорема 2.2. Пусть $X = X^*$. Если существует хотя бы одна пара $(\bar{x}_1, \hat{x}_1)$, такая, что $\bar{x}_1 = \hat{x}_1$, то в каждой точке x_i^* имеем: 1) $x_i^* = \hat{x}_i$, 2) $x_i^* = \bar{x}_i$.

Доказательство. 1). Предположим противное: $x_i^* \ne \hat{x}_i$. Тогда, складывая выражения $I(x_i^*) = I(\bar{x}_1)$ и $\beta(x_i^*) < \beta(\hat{x}_1) = \beta(\bar{x}_1)$, получим $J(x_i^*) < J(\bar{x}_1)$, что противоречит $J(\bar{x}_1) = \inf J(x)$. 2) Складывая $I(x_i^*) = I(\bar{x}_1)$ и $\beta(x_i^*) = \beta(\hat{x}_1)$, получим $J(x_i^*) = J(\bar{x}_1)$, т.е. $x_i^* = \bar{x}_i$. Теорема доказана.

Из теорем 2.1, 2.2 вытекает следствие: для того чтобы найти все минимали задачи 1, необходимо и достаточно найти все совпадающие пары $(\bar{x}_i, \hat{x}_i)$.

Назовем задачи 1 и 2 эквивалентными, если все соответствующие минимали этих задач совпадают между собой.

Из теоремы 2.2 вытекает: 1. Для того чтобы задачи 1 и 2 были эквивалентными, достаточно существования хотя бы одной пары $(\bar{x}_i, \hat{x}_i)$, такой, что $\bar{x}_i = \hat{x}_i$.

2. Пусть существует β-функционал и хотя бы одна пара $(\bar{x}_1, \hat{x}_1)$, такая, что $\bar{x}_1 = \hat{x}_1$. Тогда любая минималь задачи 2 и максималь задачи 3 есть минималь задачи 1 и, наоборот, любая минималь задачи 1 есть минималь задачи 2 и максималь задачи 3.

Замечания:

1. Если $\beta(x) = 0$, то $\inf J(x) = \inf I(x)$.

2. Если $\bar{x} = \hat{x}$, то оценка снизу (I.1) в §1 совпадает с точной нижней гранью функционала $I(x)$.

Из следствия 1 §2 вытекает следующий алгоритм В (метод совмещения экстремумов). Берем некоторый ограниченный функционал $\beta(x, y)$. Решаем задачу $\inf [I(x) + \beta(x, y)]$, определяем минималь $\bar{x}_2 = \bar{x}_2(y)$. Из условия $\sup_x \beta(x, y)$ находим $\hat{x} = \hat{x}_2(y)$. Приравниваем

$$\bar{x}_2(y) = \hat{x}_2(y), \qquad (2.1)$$

и из полученного уравнения находим корни y_i. Эти корни определяют минималь задачи 1: $\bar{x} = \bar{x}_2(y_i) = \hat{x}_2(y_i)$.

Таким образом, задача получения абсолютной минимали сводится к задаче определения хотя бы одного корня уравнения совмещения экстремумов (2.1). Существование и трудности отыскания корней уравнения (2.1) зависит от того, насколько удачно выбран

β-функционал и достаточную ли степень "свободы" дает в его деформации y .

Подчеркнем, что в отличие от обычного метода отыскания минимума функций конечного числа переменных, в котором берутся частные производные, приравниваются нулю и из полученной системы находятся стационарные точки, в данном методе мы находим не просто точки, подозрительные на локальный экстремум или точки перегиба, а абсолютные минимали. Т.е. существование решения у уравнения совмещенных экстремумов является достаточным условием абсолютного минимума у функционала $I(x)$. По вопросам существования решения в математике получены значительные результаты и уравнение (2.I) не только устанавливает связь между двумя различными проблемами, но и открывает определенные возможности в решении задач оптимизации. Отметим также, что уравнение (2.I) не требует, чтобы функционал был непрерывен и дифференцируем, т.е. оно имеет гораздо более широкую область применения.

Если минимали не выражаются явно, то уравнения совмещения экстремумов можно записать неявно, в виде системы

$$\varphi_1(x,y)=0, \quad \varphi_2(x,y)=0, \qquad (2.I')$$

где функции φ_1, φ_2 получены из условий $\inf\limits_X J(x,y)$, $\sup\limits_X \beta(x,y)$.

Пример 2.I. Найти минималь функций:

$$I=2x^4+x^2-2x+1, \quad -\infty<x<\infty .$$

Применим алгоритм 3. Возьмем $\beta=-yx^2+2x$. Тогда $J=I+\beta=2x^4+(1-y)x^2+1$. Обозначим $x^2=W$ и подставим в J : $J=2W^2+(1-y)W+1$. Найдем минимум этой функции: $J'_W=4W+(1-y)=0$, $\bar{W}=\bar{x}_1^2=\frac{1}{4}(y-1)$, а затем максимум: $\beta(x)=-yx^2+2x$, $\beta'_x=-2yx+2=0$, $\bar{x}_2=1/y$. Приравниваем экстремумы этих функций: $\bar{x}_1^2=\bar{x}_2^2$, $\frac{1}{4}(y-1)=1/y^2$, $y^3-y^2-4=(y-2)(y^2+y+2)$. Это уравнение имеет единственный корень: $\bar{y}=2$. Следовательно, $\bar{x}=1/y=1/2$.

§3. Замечание о γ-функционале

А). Если взять

$$\beta(x)=[\gamma(x)-1]\,I(x), \qquad (3.I)$$

то $J(x)=I(x)\gamma(x)$. Эта форма обобщенного функционала оказывается в ряде случаев более удобной, так как позволяет подбирать такой множитель к $I(x)$, который упростил бы функционал $J(x)$. Перенося некоторые из результатов по β-функционалу на данный случай, получим, что когда $X=X^*$ и найдена абсолютная минималь $\bar{x}$ задачи 2:

$$\inf_X J(x)=\inf_X I(x)\gamma(x), \qquad (3.2)$$

то:

I) множество $M=\{x: J-I\geq \bar{J}-\bar{I}, x\in X\}$ содержит абсолютную минималь задачи I;

2) множество $N=\{x: I\gamma+I\leq \bar{I}\bar{\gamma}+\bar{I}, x\in X\}$ содержит такие или лучшие решения задачи I, т.е. на N $I(x)\leq I(\bar{x})$;

3) множество $P=\{x: J-I\leq \bar{J}-\bar{I}, x\in X\}$ содержит такие или худшие решения задачи I (т.е. на P $I(x)\geq I(\bar{x})$).

Все эти утверждения следуют из (3.I) и теоремы I.I.

Оценка снизу (теорема I.3) с учетом (3.I) принимает вид:

$$I(x)\geq \inf_X J-\sup_X (J-I). \qquad (3.3)$$

Условие эквивалентности задач I и 2 (теоремы 2.I) в данном случае таково $(X=X^*)$: $\bar{x}$ и $\hat{x}$, найденные соответственно из решения задач $\inf J(x)$, и $\sup\limits_X [J(x)-I(x)]$ должны совпадать .

Алгоритм 3 (метод совмещения экстремумов) переносится на данный случай без изменений.

Б). Однако для данного случая можно получить и ряд новых результатов. Пусть на $X\times Y$ определен функционал $\gamma(x,y)\neq 0$.

Назовем его γ -функционалом. Построим функционал

$$J(x,y)=I(x)\gamma(x,y).$$

Теорема 3.I. Пусть $X=X^*$, $\bar{x}$ – абсолютная минималь задачи 2:

$$\inf J(x),\ x\in X, \qquad \text{где } J=I(x)\gamma(x).$$

Тогда: I) множество $P=\{x: 0<\gamma\leq\bar{\gamma}\}$ содержит такие или худшие решения задачи I (т.е. на P $I(x)\geq I(\bar{x})$);

2) множество $N=\{x: 0>\bar{\gamma}\geq\gamma\}$ содержит такие или лучшие решения задачи I (т.е. на N $I(x)\leq I(\bar{x})$);

3) абсолютная минималь находится в множестве $M=X-\mathring{P}$, где $\mathring{P}=\{x: 0<\gamma<\bar{\gamma}\}$.

Доказательство. I. Из неравенств $I\gamma\geq\bar{I}\bar{\gamma}$, $0<\gamma\leq\bar{\gamma}$ имеем $I\geq\bar{I}\frac{\bar{\gamma}}{\gamma}$, $\bar{\gamma}/\gamma\geq 1$, т.е. $I\geq\bar{I}$. 2. Из неравенств $I\gamma\geq\bar{I}\bar{\gamma}$, $0>\bar{\gamma}\geq\gamma$ получаем $I\leq\bar{I}\frac{\bar{\gamma}}{\gamma}$, $\bar{\gamma}/\gamma\leq 1$, т.е. $I\leq\bar{I}$. 3. Так как $X=M+\mathring{P}$ и $M\cap\mathring{P}\neq 0$, то $M=X-\mathring{P}$.

Теорема доказана.

Теорема 3.2. Пусть $\sup\limits_X\gamma>0$. Справедлива оценка снизу

$$I(x)\geq\frac{\bar{J}}{\sup\limits_X\gamma} \quad \text{на } X . \qquad (3.4)$$

Пусть $\sup\limits_X\gamma(x,y)>0$ при $\forall y\in Y$. Тогда верна оценка

$$I(x)\geq\sup_Y\left(\frac{\bar{J}}{\sup\limits_X\gamma}\right). \qquad (3.4')$$

Доказательство. I. При указанных условиях из $I\gamma\geq\bar{I}\bar{\gamma}$ имеем $I\geq\bar{J}/\gamma$ и $I\geq\bar{J}/\sup\limits_X\gamma$. 2. Максимизируя эту оценку по y , получим выражение (3.4').

Пример 3.I. Найти оценку снизу в функционале.

$$I=(x^2-\cos x+1)\,e^{(x-1)^2} \quad -\infty<x<\infty .$$

20-21

Возьмем $\delta = e^{-(x-1)^2}$. Тогда $J = x^2 - \cos x + 1$. Минималь этого функционала очевидна: $\hat{x} = 0$, $\hat{\delta} = 1 > 0$, $\sup\limits_{x}\delta = 1$. Применяя оценку (3.4), получим $I(x) \geq 0$. Но на $x = 0$, $I(0) = 0$, поэтому $x = 0$ – абсолютная минималь.

§4. Применение β-функционала к теории экстремумов функций конечного числа переменных и к задачам оптимизации, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями

а) Пусть дан функционал

$$I = f_0(x), \tag{4.1}$$

где x – n-мерный вектор, удовлетворяющий независимым уравнениям

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m < n. \tag{4.2}$$

Функции $f_i(x)$ определены в некоторой открытой области n-мерного векторного пространства X. Допустимое множество X^d выделено из X при помощи уравнений (4.2).

Возьмем какой-нибудь функционал $\beta(x)$, такой, чтобы было проще найти $\inf[f_0(x) + \beta(x)]$ на X^d. Тогда из решения задачи 2 согласно теоремам §I можно извлечь следующую информацию о задаче I:

I. Абсолютная минималь находится в множестве $M = \{x : \beta(x) \geq \beta(\hat{x})\}$.

2. Множество $N = \{x : f_0 + \beta \leq \hat{f}_0 + \hat{\beta}\}$ заведомо содержит такие или лучшие решения (т.е. на N $f_0(x) \leq f_0(\hat{x})$).

3. Множество $P = \{x : \beta(x) < \beta(\hat{x})\}$ содержит такие или худшие решения (т.е. на P $f_0(x) \geq f_0(\hat{x})$, теорема I.I).

4. Если $X = X^d \setminus P$, то $\hat{x}$ – абсолютная минималь задачи I (следствие 3 §I).

Предположим, что, стремясь упростить процесс решения, мы тем или иным способом расширили множество X^d, например, отбросили часть связей (4.2). Тогда помимо п. I-4 получаем п. 5.

5. Если $X^d \cap M = \emptyset$, то $J(\hat{x})$ – оценка снизу $f_0(x)$ на X^d (следствие 5, §I).

Иногда удобнее сразу задаться подходящим $J(x)$ и найти минималь задачи $\inf J(x)$ на X^d. Тогда соответствующие множества будут (теорема I.I'):

$$M = \{x : J - I \geq \hat{J} - \hat{I}\}, \quad N = \{x : J + I \leq \hat{J} + \hat{I}\}, \quad P = \{x : J - I \leq \hat{J} - \hat{I}\}.$$

Решим задачу $\beta(\hat{x}) = \sup \beta(x)$ на $X_1 \supseteq X^d$, получим еще одну оценку снизу

$$f_0(x) \geq f_0(\hat{x}) + \beta(\hat{x}) - \beta(\hat{\hat{x}})$$

(теорема I.3) и множества: $M = \{x : f_0 + \beta \leq \hat{f}_0 + \hat{\beta}\}$, $N = \{x : \beta - f_0 \geq \hat{\beta} - \hat{f}_0\}$, $P = \{x : f_0 + \beta > \hat{f}_0 + \hat{\beta}\}$ (теорема I.4).

Задаваясь рядом β_i, можно получить решение одной из поставленных задач §I или облегчить решение задачи а.

Примеры, когда множество $X^d = X$, приводились ранее (см. примеры I.I – I.3). Поясним на ряде простых примеров, как можно применять метод β-функционала к случаю, когда $X^d \neq X$, т.е. к задачам условного экстремума.

Пример 4.I. Найти минимум функции

$$I = x \qquad \text{на} \quad x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Возьмем какую-нибудь допустимую точку, например $\bar{x}_0 = 1$, $\bar{y}_0 = 0$, и в качестве $J(x)$ – функцию $J = (x - x_0)^2$. Минимум этой функции очевиден. Тогда множество, содержащее абсолютную минималь M, отделится неравенством $J - I \geq \hat{J} - \hat{I}$, т.е. $(x-1)^2 - x \geq -1$ или $|x - \frac{3}{2}| \geq \frac{1}{2}$.

Рис. I.3

Границы этого неравенства вместе с допустимым подмножеством (окружность) нанесены на рис. I.3а. Мы видим, что абсолютная минималь находится где-то на левой половине окружности. Возьмем теперь допустимую точку $\bar{x}_0 = 1$, $y = 0$ и J-функционал в более общем виде: $J = C(x - x_0)^2$, где $C > 0$. Тогда множество M отделится неравенством $Cx^2 + 2Cx + C - x \geq 1$. Взяв $C = \frac{1}{2}$, получим $|x| \geq 1$ рис. I.3б. Множество M содержит только две допустимые точки: $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Но $x = 1$, как следует из задания J_1, не является абсолютной минималью, следовательно, абсолютная минималь $\bar{x} = -1$, $\bar{y} = 0$.

Пример 4.2. Пусть даны функционал и связь

$$I = x^2 - x + y^2 - 2y + 1, \quad y - \ln(x \pm \sqrt{x-1}) = 0.$$

Возьмем $J = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Множество M отделится неравенством: $J - I \geq \hat{J} - \hat{I}$ или $2y(1 - y_0) \geq (2x_0 - 1)x + a$, где $a = x_0 - 2x_0^2 + 2y_0 - 2y_0^2$.

Возьмем допустимые $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. Тогда $M = \{x, y : y \geq \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\}$ (рис. I.4). Из рисунка видно, что множество, на котором надо искать абсолютную минималь, резко сузилось и найти минимум на нем уже проще.

22-23

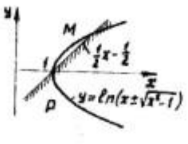

Рис. I.4

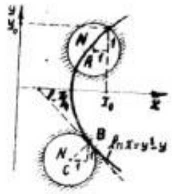

Рис. I.5

Пример 4.3. Дан функционал и связь

$$I = 2x + 2y\ ,\quad \ln x = y^2 - y\ .$$

Возьмем $J=(x-x_0)^2-(y-y_0)^2$, где x_0, y_0 – некоторая допустимая точка. Множество N согласно теореме I.I отделится неравенством $J+I \le \bar{J}+\bar{I}$, т.е. $[x-(x_0-1)]^2+[y-(y_0-1)]^2 \le 2$. Это внутренность круга (рис. I.5). Пусть центр этого круга совпадает с точкой А. Тогда множество N пересекается с допустимой кривой $\ln x = y^2 - y$. Взяв точки x_0, y_0 из этого пересечения, мы будем спускаться по этой кривой, пока множество N не выродится в точку. Это произойдет в точке B, в которой касательная к допустимой кривой наклонена под углом -45^0 (ибо центр окружности смещен от x_0, y_0 на -I, -I, т.е. под $+45^0$ (рис. I.5). Любое смещение от этой точки будет возвращать нас к ней. Можно показать, что точка B есть абсолютная минималь.

Обратим внимание, что при применении методов β-функционала (гл.I) в отличие от известных методов (например, теории экстремумов функций конечного числа переменных) не требуется непрерывность и дифференцируемость функционала (4.I) и связей (4.2).

Б) Рассмотрим, как можно применять методы, изложенные в §I, к задачам оптимизации, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями. Ниже формулируется постановка задачи, которой мы часто будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть поведение объекта описывается системой независимых дифференциальных уравнений.

$$\dot{x}_i = f_i(t,x,u)\ ,\quad i=1,\dots,n\ ,\quad t \in T=[t_1,t_2], \qquad (4.3)$$

где $x(t)$ – n-мерная непрерывная кусочно-дифференцируемая функция, $x \in G(t)$; $u(t)$ – z-мерная функция, непрерывная всюду на T за исключением конечного числа точек, где она может иметь разрывы I-го рода, $u \in U$. Граничные значения t_1, t_2 заданы, $x(t_1) \in G(t_1)$, $x(t_2) \in G(t_2)$.

Качество процесса оценивается функционалом

$$I = F(x_1,x_2) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt\ ,\quad x_1 = x(t_1),\ x_2 = x(t_2). \qquad (4.4)$$

Функции $F(x_1,x_2)$, $f_i(t,x,u)$, $i=0,1,\dots,n$ непрерывны на $T\times G\times U$. Совокупность непрерывных, почти всюду дифференцируемых функций $x(t)$ с $x \in G(t)$, обозначим D. Совокупность кусочно-непрерывных функций $u(t)$, могущих иметь конечное число разрывов I-го рода и таких, что $u \in U$, обозначим V. Совокупность пар $x(t)$, $u(t)$, обладающих перечисленными выше свойствами и почти всюду удовлетворяющих уравнению (4,3), назовем допустимыми и обозначим Q, $Q \subset D\times V$.

Ставится задача: а) Найти пару $u^0(t)$, $x^0(t) \in D$, доставляющую минимум функционалу (4.4) (традиционная постановка).

б) Найти подмножество $N \subset G\times U\times T$ такое, что на любой допустимой траектории из N $I(x) \le c$, где c – некоторое число.

в) Найти оценки снизу $I(x)$ на Q.

Введем функционал $\int_{t_1}^{t_2} \beta(t,x,u)\,dt$ с функцией $\beta(t,x,u)$, определенной и непрерывной на $T\times G\times U$.

Теорема 4.I. Пусть $F \equiv 0$ и решена задача 2: $J(\bar{x},\bar{u}) = \inf J(x,u)$ на Q, где $J = \int_{t_1}^{t_2}[f_0(t,x,u)+\beta(t,x,u)]\,dt$.

Тогда: I) множество $N=\{t,x,u:\ 2f_0+\beta \le 2\bar{f}_0+\bar{\beta},\ t \in T\}$ содержит такие или лучшие решения задачи I; 2) множество $P=\{t,x,u:\ \beta \le \bar{\beta},\ t\in T\}$ содержит такие или худшие решения задачи 1.

Доказательство. I. На Q из N имеем $\int_{t_1}^{t_2}(2f_0+\beta)\,dt \le \int_{t_1}^{t_2}(2\bar{f}_0+\bar{\beta})\,dt$. Вычитая из этого неравенства неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2}(f_0+\beta)\,dt \ge \int_{t_1}^{t_2}(\bar{f}_0+\bar{\beta})\,dt \qquad (4.5)$$

получим, что на Q из N $\int_{t_1}^{t_2} f_0\,dt \le \int_{t_1}^{t_2} \bar{f}_0\,dt$. 2. Аналогично вычитая из неравенства $\int_{t_1}^{t_2}\beta\,dt \le \int_{t_1}^{t_2}\bar{\beta}\,dt$ неравенство (4.5), получим, что на Q из P $\int_{t_1}^{t_2} f_0\,dt \ge \int_{t_1}^{t_2} \bar{f}_0\,dt$. Теорема доказана.

Множества N, P не пусты. Они содержат по крайне мере одну траекторию из Q. Этой траекторией является $\bar{x}(t), \bar{u}(t) \in Q$.

Если в дополнение к задаче $\inf_Q \int_{t_1}^{t_2}(f_0+\beta)\,dt$ решить задачу $\sup_Q \int_{t_1}^{t_2}\beta\,dt$, то получим дополнительную информацию о множествах N, P и оценку снизу, а именно:

Теорема 4.2. Пусть $F \equiv 0$ и решена задача: $\sup \int_{t_1}^{t_2}\beta(t,x,u)\,dt$ на Q. Тогда: I) множество $N=\{t,x,u:\ \beta-f_0 \ge \hat{\beta}-\hat{f}_0,\ t\in T\}$ содержит такие или лучшие решения; 2) множество $P=\{t,x,u:\ f_0+\beta \ge \hat{f}_0+\hat{\beta},\ t\in T\}$ содержит такие или худшие решения.

Здесь $\hat{f}_0 = f_0(t,\hat{x},\hat{u})$, $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ – абсолютная минималь задачи $\sup \int_{t_1}^{t_2}\beta\,dt$ на Q.

Доказательство. I. На Q из N имеем $\int_{t_1}^{t_2}(\beta-f_0)\,dt \ge \int_{t_1}^{t_2}(\hat{\beta}-\hat{f}_0)\,dt$. Вычитая из него неравенство $\int_{t_1}^{t_2}\beta\,dt \le \int_{t_1}^{t_2}\hat{\beta}\,dt$ получим $\int_{t_1}^{t_2} f_0\,dt \le \int_{t_1}^{t_2}\hat{f}_0\,dt$. 2. Аналогично вычитая $\int_{t_1}^{t_2}\beta\,dt \le \int_{t_1}^{t_2}\hat{\beta}\,dt$ из неравенства

24-25

$\int_{t_1}^{t_2}(f_0+\beta)dt \geq \int_{t_1}^{t_2}(\bar f_0+\bar\beta)dt$, получим $\int_{t_1}^{t_2} f_0 dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \bar f_0 dt$. Теорема доказана.

Теорема 4.3 (Оценка снизу) . Пусть $F\equiv 0$, концы $x(t)$ фиксированы, $\beta(t,x,u)$ определено и ограничено снизу на $G\times V\times T$. Тогда справедлива оценка снизу задачи I:

$$I(x,u) \geq \int_T [f_0(t,\bar x,\bar u) + \beta(t,\bar x,\bar u) - \beta(t,x,u)]dt . \quad (4.6)$$

Доказательство. Вычитая $\int_T \beta dt \leq \int_T \sup \beta dt$ из неравенства $\int_T (f_0+\beta)dt \geq \int_T (\bar f_0+\bar\beta)dt$, получим (4.6), что и требовалось доказать.

Следствие 1. Пара $\bar x, \bar u$ является абсолютной максималью задачи I на множестве N .

Следствие 2. Если множество $P \supseteq T\times G\times V$ (или множество достижимости), то $\bar x, \bar u$ (или $\bar x, \bar u$) является абсолютной минималью задачи I на Q .

Аналогичные результаты можно получить и для случая, когда $F\neq 0$ и концы $x(t)$ подвижны.

Пример 4.4. Пусть задача описывается условиями:

$$I=\int_0^1 (x^2+e^u)dt , \dot x = u , |u|\leq 1, x(0)=1 , x(1)=0$$

Применим теорему 4.1. Берем $\beta=-e^{+u}$. Получаем задачу

$$J=\int_0^1 x^2 dt , \dot x = u , |u|\leq 1 , x(0)=1, x(1)=0 .$$

Ее решение: $\bar x=-t, \bar u=-1, 0\leq t\leq 1$. Находим множество $P: \beta\leq\bar\beta$, т.е. $e^u \geq e^{-1}$, $u\geq 1$. Но значения $u<-1$ недопустимы. Следовательно, P покрывает все допустимое множество точек t , x , u . Поэтому $\bar x=-t$ - абсолютная минималь (см. следствие 2).

Пример 4.5. Найти минимум в задаче

$$I=\int_0^2 (|x|+\tfrac{1}{2}x^2)dt , \dot x = u , x(0)=1 , x(2)=0 , |u|\leq 1 .$$

Здесь неаналитический функционал. Подынтегральная функция не дифференцируема. Известные методы, такие, как вариационное исчисление, принцип максимума, применять нельзя.

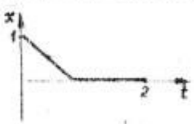

Рис. 1.6

Рис. 1.6

Заменим эту задачу следующей "хорошей" задачей: $L=-\int_0^2 \tfrac{1}{2}x^2 dt , \dot x = u ,$ $x(0)=1 , x(2)=0, |u|\leq 1$ и найдем $\sup_{x,u} L$. Решение дано на рис. 1.6. Согласно теореме 4.2 $P=\{x: |x|\geq|\bar x|\}$, т.е. P покрывает всю область достижимости. Следовательно, найденное решение - абсолютная минималь и задачи I.

§5. Метод β -функционала при построении минимизирующих последовательностей

А) Последовательность $\{x_s\}$, на которой $I(x_s) \xrightarrow[s\to\infty]{} \inf I(x)$ на X^* , называется минимизирующей (для задачи I).

К построению минимизирующих последовательностей приходится прибегать в методах последовательных приближений и в случае , когда минималь не принадлежит допустимому множеству.

Теорема 5.1. Пусть $\beta(x)\leq 0$ на X^* и существует последовательность $\{x_s\}\in X^*$ такая, что

$$J(x_s) \xrightarrow[s\to\infty]{} \inf J \text{ на } X \quad (5.1)$$

Тогда: 1) $I(x_s) \xrightarrow[s\to\infty]{} m = \inf I(x)$ на X^* ; 2) любая последовательность $\{x_s\}\in X$, удовлетворяющая (5.1) либо $I(x_s)\to \inf J$, минимизирует $I(x)$ на X^* (т.е. $I(x_s)\to m$); 3) любая последовательность, минимизирующая $I(x)$ на X^* , минимизирует и $J(x)$ на X .

Доказательство. 1. Так как $\beta(x)\leq 0$ на X^*, то $\inf_X J \leq I(x)$, т.е. $\inf_X J \leq \inf_{X^*} I$. Из $\{x_s\}\in X^*$ и (5.1) следует, что

$$\inf_X J = \inf_{X^*} I , \quad (5.2)$$

т.е. $I(x_s)\to m$. 2. Из (5.1) и (5.2) следует утверждение п. 2 теоремы. 3. Из $I(x_s) \xrightarrow[s\to\infty]{} m$ в силу (5.2) следует, что $J(x_s)\to \inf J$ на X . Теорема доказана.

Замечание. Требование $\beta(x)\leq 0$ на X^* теоремы 5.1 можно заменить требованием $\sup_{X^*} \beta\leq 0$, ибо из $\sup_{X^*} \beta\leq 0$ следует, что $\beta(x)\leq 0$ на X^* .

Теорема 5.2. Пусть существует последовательность $\{x_s\}\in X^*$ такая, что

$$J(x_s) \xrightarrow[s\to\infty]{} \inf J(x) \text{ на } X (\text{или } X^*), \text{ а } \beta(x_s)\to \sup\beta \text{ на } X (\text{или } X^*) \quad (5.3)$$

Тогда эта последовательность является минимизирующей.

Доказательство. Из $I(x_s)+\beta(x_s)\to \inf J$ и $\beta(x)\to \sup\beta$ получаем, что $I(x_s)\to \inf J - \sup\beta$. Так как $I(x_s)\geq \inf J - \sup\beta$ и существует $\{x_s\}\in X^*$, то $I(x_s)\to m = \inf J - \sup\beta$. Теорема доказана.

Замечание. Из (1.1), (1.1') видно, что X и X^* в (5.3) можно брать в любой комбинации.

Б) Рассмотрим теперь случай, когда задана не только последовательность $\{x_s\}$, но и последовательность функционалов $\{\beta_i(x)\}$.

Теорема 5.3. Для того чтобы $\{x_s\}\in X^*$ минимизировала $I(x)$ на X^*, достаточно существования последовательности функций $\{\beta_i(x)\}$ такой, что

1) $\beta_i(x)\leq 0$ на X^* при всех i ;
2) существовали числа $q_i=\inf J_i$, $q=\lim_{i\to\infty} q_i$;
3) $J(x_s)\to q$, либо $I(x_s)\to q$ при $s\to\infty$.

26-27

Теорема легко доказывается на базе теоремы 5.I, ибо $\varphi = \inf I$ на X^*.

Из теорем 5.I, 5.3 вытекает следующее утверждение: если существует хотя бы одна последовательность, удовлетворяющая теореме 5.3, то любая другая последовательность $\{x_s\} \in X$ и удовлетворяющая условию $I(x_s) \to \varphi$ или $J(x_s) \to \varphi$, будет минимизирующей для задачи I.

Приложение к главе I

I. Действия со знаком $\inf$, $\sup$

Ниже перечислены свойства знаков $\inf$, $\sup$, которые могут оказаться полезными при решении задач. Доказательства их достаточно просты и не приводятся. Предполагается, что указанные ограничения выполнены во всей области определения функций:

1. $\inf[-f(x)] = -\sup f(x)$, $\sup[-f(x)] = -\inf f(x)$.
2. $\inf c f(x) = c \inf f(x)$, если $c = const > 0$,
   $\inf c f(x) = -c \sup f(x)$, если $c = const < 0$.
3. $\inf[c + f(x)] = c + \inf f(x)$,
4. $\inf \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sup f(x)}$, если $f(x) \neq 0$.
5. Если $x(t)$ может иметь разрывы, а $f(t, x(t))$ интегрируема, то
$$\inf_{x(t)} \int_{t_0}^{t_1} f[t, x(t)]\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \inf_x f(t,x)\,dt.$$
6. Пусть $f(\psi)$ – монотонная функция, $\partial f/\partial\psi$ – непрерывна. Тогда
$$\inf_x f[\psi(x)] = f[\inf_x \psi(x)], \text{ если } \partial f/\partial\psi > 0,$$
$$\inf_x f[\psi(x)] = f[\sup_x \psi(x)], \text{ если } \partial f/\partial\psi < 0.$$

Следствия:

а) $\inf f^{2n}(x) = [\inf f(x)]^{2n}$, если $f(x) \geq 0$, n – целое, $n > 0$,
   $\inf f^{2n}(x) = [\inf f(x)]^{2n}$, если $f^{2n-1}(x) > 0$,
   $\inf f^{2n}(x) = [\sup f(x)]^{2n}$, если $f^{2n-1}(x) < 0$.
б) $\inf f^{2n+1}(x) = [\inf f(x)]^{2n+1}$
в) $\inf \log_a f(x) = \log_a \inf f(x)$, если $a > 1$,
   $\inf \log_a f(x) = \log_a \sup f(x)$, если $0 < a < 1$.
г) $\inf a^{f(x)} = a^{\inf f(x)}$, если $a > 1$,
   $\inf a^{f(x)} = a^{\sup f(x)}$, если $0 < a < 1$.
д) $\inf \sin f(x) = \sin \inf f(x)$ в обл. $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$
е) $\inf \cos f(x) = \cos \sup f(x)$ в обл. $0 \leq x \leq \pi$.
ж) $\inf \operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} \inf f(x)$.

з) $\inf \operatorname{tg} f(x) = \operatorname{tg} \inf f(x)$, если $|f(x)| < \frac{\pi}{2}$.
и) $\inf \sqrt{f(x)} = \sqrt{\inf f(x)}$.
к) $\inf \frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt} f(t)\Big|_{\bar t}$ в обл. $f''(t) > 0$. Здесь $\bar t = \arg\inf f(t)$
   $\inf \frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt} f(t)\Big|_{\bar t}$ в обл. $f''(t) < 0$. Здесь $\bar t = \arg\sup f(t)$.

Оценки

I. $\inf[f_1(x) + f_2(x)] \geq \inf f_1(x) + \inf f_2(x)$.
2. $\inf[f_1(x) \cdot f_2(x)] \geq \inf f_1(x) \cdot \inf f_2(x)$, если $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$.
3. $\inf \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \geq \frac{\inf f_1(x)}{\sup f_2(x)}$, если $f_1(x) > 0$, $f_2(x) > 0$.
   В пп. I–3 знак $=$, если $\bar x_1 = \bar x_2$.
4. $\inf_{x(t) \in Q} \int_{t_1}^{t_2} f(t, x(t))\,dt \geq \int_{t_1}^{t_2} \inf_x f(t,x)\,dt$.

Функции двух переменных

1. $\inf_{x,y}[f_1(x) + f_2(y)] = \inf_x f_1(x) + \inf_y f_2(y)$.
2. $\inf_{x,y}[f_1(x) \cdot f_2(y)] = \inf_x f_1(x) \cdot \inf_y f_2(y)$, если $f_1(x) \geq 0$, $f_2(y) \geq 0$.
3. $\inf_{x,y} \frac{f_1(x)}{f_2(y)} = \frac{\inf_x f_1(x)}{\sup f_2(y)}$, если $f_1(x) \geq 0$, $f_2(y) > 0$.
4. $\inf_{x,y} f(x,y) = \inf_y \inf_x f(x,y) = \inf_y f(\bar x(y), y)$.

2. Упражнения на β - и γ -функционалы

Подбирая β -функционал, найти квазиоптимальное решение с точностью до 5%.

Указание. Находим оценку снизу. Выделяем подмножество, содержащее абсолютную минималь, и из него подбираем квазиоптимальное решение:

№ 1. $I = x^4 + x^2 + 0{,}2x + 1$. Отв. $M = \{x: -0{,}2 \leq x \leq 0\}$, $I(0) = 1 > 0{,}99$
№ 2. $I = x^6 + x^2 + 0{,}2x + 1$. Отв. —— " ——, —— " ——
№ 3. $I = x^8 + x^2 - 0{,}2x + 1$. Отв. $M = \{x: 0 \leq x \leq 0{,}2\}$, —— " ——
№ 4. $I = x^{2n} + x^2 - 0{,}2x + 1$. Отв. —— " ——, —— " ——
№ 5. $I = |x|^m + x^2 - 0{,}4x + 1$. Отв. $M\{x: -0{,}2 \leq x \leq 0\}$, —— " ——
№ 6. $I = |x|^m + 2x^2 - x + 3$. Отв. $M\{x: -0{,}5 \leq x \leq 0\}$, $I(0) = 3 > 2\frac{7}{8}$
№ 7. $I = x^2 - 4x + 6 - 0{,}1\sqrt[3]{e^{-(x-1)^2}}$. Отв. 1) $M\{x: 0 \leq x \leq 2\}$, $I(2) = 2 \cdot 0{,}1e^{-1/3} \geq 1{,}9$
2) $M\{x: 1 \leq x \leq 3\}$,
№ 8. $I = x^2 - 4x + 6 - \frac{0{,}1}{(x-1)^4 + 10}$. Отв. $M\{x: 1 \leq x \leq 3\}$, $I(2) = 2 - \frac{1}{101} \geq 1{,}99$
№ 9. $I = x^2 - 2x + 5 - \frac{1}{x^2 - 4x + 14}$. Отв. $M\{x: 0 \leq x \leq 2\}$, $I(1) = 4 - \frac{1}{11} > 3{,}9$
№ 10. $I = x^2 + 4x + 6 - \frac{0{,}1}{x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2}$. Отв. $M\{x: -3 \leq x \leq -1\}$, $I(-2) = 1{,}95 \geq 1{,}90$

№ 11. $I=x^2+2x+3-\frac{0{,}1}{e^{x^2+2x+3}}$. Отв. $M=\{x: -3\le x\le 1\}$, $I(-1)=2-\frac{0{,}1}{e^2}\ge 1{,}9$

№ 12. $I=|x-1|^3+5-\frac{0{,}2}{(x-1)^2+10}$. Отв. $M=\{x=1\}$, $I(1)=4{,}98\ge 4{,}98$

№ 13. $I=\sqrt{x^2-4x+8}-\frac{0{,}1}{(x-1)^2+5}$. Отв. $M=\{x: 1\le x\le 3\}$, $I(2)=2-\frac{0{,}1}{6}\ge 2-\frac{0{,}1}{5}$

№ 14. $I=\sqrt[4]{x^2-4x+12}-\frac{0{,}1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$. Отв. $M=\{x: 1\le x\le 3\}$, $I(2)=2-\frac{0{,}1}{\sqrt{3}}\ge 2-\frac{0{,}1}{2}$.

№ 15. $I=\sqrt{x^2+4x+8}-\frac{0{,}1}{\sqrt{x^4+3x^3+3x^2+2}}$. Отв. $M=\{x: -3\le x\le -1\}$, $I(-2)=1{,}95\ge 1{,}90$

№ 16. $I=|x-x_0|^n+c_1-\frac{d}{|x-x_1|^m+c_2}$, $d>0, c_2>0, n>0, m>0$. Отв. $M=\{x: |x-x_1|\le |x_1-x_0|\}$, $I(x)\ge c_1-\frac{d}{c_2}$.

№ 17. $I=\sqrt[k]{|x-x_0|^n+c_1}-\frac{d}{\sqrt[k_1]{|x-x_1|^m+c_2}}$, $d>0, c_1>0, c_2>0, n>0, m>0, k_1>0$. Отв. $M=\{x: |x-x_1|\le |x_1-x_0|\}$. $I(x)\ge\sqrt[k]{c_1}-\frac{d}{\sqrt[k_1]{c_2}}$.

№ 18. $I=|x(x-2)|-\frac{0{,}1}{|x-1|+10}$. Отв. $M=\{x: 0\le x\le 2\}$. $I(0)=0-\frac{0{,}1}{11}\ge -\frac{0{,}1}{10}$.

№ 19. $I=|x(x-a)|-\frac{d}{|x-b|+c}$, $d>0, c>0$. Отв. $M_1=\{x: |x-b|\le |a-b|\}$, $M_2=\{x: 0\le x\le 2b\}$, $I\ge -\frac{d}{c}$

№ 20. $I=\frac{|x|}{x}+|x|$. Отв. $M=\{x: x<0\}$, $I(0)=-1\ge -1$.

Указание: $\beta=-|x|$

№ 21. $I=x^2-1{,}8x+1+\frac{1}{1+e^{x}}$. Отв. $M=\{x: 0{,}8\le x\le 1\}$, $I(1{,}0)=0{,}2\cdot 0\ge 0{,}19$

№ 22. $I=x^2-0{,}2x+10{,}1+\frac{1}{10+\lg|\cos x|}$. Отв. $M=\{x: |\cos x|\ge\cos 0{,}1\}$, $I(0)=10{,}11\ge 10{,}10$

№ 23. $I=x^2+xe^{4x}+10$. Отв. $M=\{x: x\le 0\}$, $I(0)=10\ge 10-\frac{1}{4e}$

№ 24. $I=\frac{e^x}{x}+x\ln^2 x$, $x>0$. Отв. $M=\{x: 0<x\le 1\}$, $I(1)=e\ge e$.

№ 25. $I=x^6+y^6+2x^2-4xy+2y^2$. Отв. $M=\{x,y: x=y\}$, $I(0,0)=0\ge 0$

№ 26. $I=|x|-e^{-x^2}+x^2-2xy+y^2$. Отв. $M=\{x,y: x=y\}$, $I(0,0)=1\ge 1$

№ 27. $I=|x|+|y-1|+|z+1|+\frac{1}{e^{x^2+y^2+z^2}}+6$. Отв. $M=\{x,y,z: x^2+y^2+z^2\le 2\}$, $I(0,1,-1)=6+\frac{1}{e^2}\ge\ldots$

№ 28. Среди целочисленных решений $x>1$ найти такое, которое доставляет минимум функционалу

$$I=(x-32)^2+\frac{(\log_2 x-5)(\log_2 x-5{,}1)}{\lg x}.$$

Указание. Взять за β-функционал второе слагаемое и рассмотреть на расширенном множестве $0<x<\infty$. Найдем, что $M=\{x: 32\le x\le 34{,}3\}$. Вычисляем значения I при $x=32,33,34$ и выбираем лучшее.

Применяя β-функционал, найти оценки снизу

№ 29. $I=\frac{x^4(x-2)^4}{2-\sin x}$. Отв. $I(x)\ge 0$, $x_1^*=0$, $x_2^*=2$.

№ 30. $I=(x-e)^2(1+\ln^2 x)$. Отв. $I(x)\ge 0$, $x^*=e$.

№ 31. $I=(|x|+|y|)e^{-(x^2+y^2)}$. Отв. $M=\{0,0\}$, $I(0,0)=0\ge 0$.

Литература к главе I

1. А.А.Болонкин. Об одном методе решения оптимальных задач. "Известия Сибирского отделения АН СССР, серия технических наук", № 8, вып. 2, июнь, 1970.
2. М.М.Хрусталев. О достаточных условиях оптимальности в задачах с ограничениями на фазовые координаты. "Автоматика и телемеханика", № 4, 1967.

Глава II

МЕТОДЫ α- ФУНКЦИОНАЛА

§1. Теория α-функционала. Оценки

1. α-функционал на произвольном множестве

А) Частным случаем β-функционала является $\tilde{\alpha}$-функционал, определенный на $Z=X\times Y$ и обладающий следующими свойствами:
1) существует подмножество $K\subset Z$ с проекцией K на X: $pr_1 K=X^*$
2) $\tilde{\alpha}(x,y)=0$ на K.

Теорема 1.1. Пусть $\tilde{\alpha}(x,y)$ есть $\tilde{\alpha}$-функционал и существует $x^*\in X^*$. Для того чтобы $\bar{x}$ был абсолютной минималью функционала $I(x)$ на X^*, достаточно существования $\tilde{\alpha}(x,y)$, такого, что:
1) $J(\bar{x},\bar{y})=\inf[I(x)+\alpha(x,y)]$ $x,y\in Z$, 2) $\bar{x},\bar{y}\in K$.

Доказательство. Так как $\bar{x},\bar{y}\in K$, то $\alpha(\bar{x},\bar{y})=0$ и $J(\bar{x},\bar{y})=\inf_Z[I(x)+\tilde{\alpha}(x,y)]=\inf_K[I(x)+\alpha(x,y)]=\inf_{X^*}I(x)$, что и требовалось доказать.

Можно поступить наоборот. Определим множество $K_1=\{x,y: \tilde{\alpha}(x,y)=0, x\in X, y\in Y\}$. Найдем $X_1=pr_1 K_1$. Тогда $\bar{x}$ будет минималью $I(x)$ на X_1, если $\bar{x},\bar{y}\in K_1$.

Частным случаем $\tilde{\alpha}$-функционала является α-функционал, определенный на Z и такой, что $\alpha(x,y)=0$ на X^* при $\forall y\in Y$.

Теорема 1.2. Пусть $\alpha(x,y)=0$ на X^* при $\forall y\in Y$ и существует $x^*\in X^*$. Для того чтобы $\bar{x}$ был абсолютной минималью функционала

$I(x)$ на X^* , достаточно существования $\alpha(x,y)$ такого, что:
1) $J(\bar{x},y)=\inf[I(x)+\alpha(x,y)]$, $x,y \in Z$, 2) $\bar{x}\in X^*$. (I.I)

Доказательство. Так как $\bar{x}\in X^*$, то $\alpha(\bar{x},y)=0$ и $J(\bar{x},y)=\inf_{X}[I(x)+\alpha(x,y)]=\inf_{X}[I(x)+\alpha(x,y)]=\inf_{X^*} I(x)$, что и требовалось доказать. Если y не фиксировать, то зависимость α от y может быть использована, в частности, для выполнения условия $\bar{x}\in X^*$.

Теорема I.3. $J-\alpha$ -функционалы существуют и число их бесконечно.

Теорема I.4. Если в (I.I) $\bar{x}\notin X^*$, то получаем оценку снизу величины функционала $I(x)$ на X^*: $J(\bar{x},y)\le I(x)$ при $\forall y\in Y$.

Оценка следует из $\alpha(x,y)=0$ на X^* при $\forall y\in Y$ и принципа расширения*/, ибо $X^*\subseteq X$. Зависимость J от y может быть использована для улучшения оценки. В частности, можно взять $\alpha=\alpha(x)$. Тогда из теорем I.2, I.3 вытекают следствия:

Следствие I. Пусть $\alpha(x)=0$ на X^* и существует $x^*\in X^*$. Для того чтобы элемент $\bar{x}$ был абсолютной минималью функционала $I(x)$ на X^* , необходимо и достаточно существование $\alpha(x)$ такого, что:
1) $J(\bar{x})=\inf[I(x)+\alpha(x)]$, $x\in X$, 2) $\bar{x}\in X^*$. (I.I')

Следствие 2. Если $\bar{x}\in X^*$, $\beta=\alpha$, то $\inf_{X} J=\inf_{X^*} I$.

Поскольку α -функционал является частным случаем β-функционала, то теорема I.I гл. I справедлива и в этом случае.

Теорема I.5. Пусть $\bar{x}$ - абсолютная минималь задачи 2: $\inf[I(x)+\alpha(x)]$, $x\in X$. Тогда: I) абсолютная минималь задачи I находится в множестве $M^*=M\cap X^*$, где $M=\{x:\alpha\ge\bar{\alpha}\}$; 2) множество $N^*=N\cap X^*$, где $N=\{x:J+I\le\bar{J}+\bar{I}\}$, содержит такие или лучшие решения, т.е. на N $I(x)\le I(\bar{x})$, 3) множество $P^*=P\cap X^*$, где $P=\{x:\alpha\le\bar{\alpha}\}$, содержит такие или худшие решения (т.е. на P $I(x)\ge I(\bar{x})$).

Аналогично можно сформулировать для этого случая теорему I.I. Так как множество X^* выделено при помощи равенства $\alpha(x)=0$, то из теоремы I.5 вытекают следствия:

Следствие 3. Если $\alpha(\bar{x})>0$, то $X^*\subseteq P$.

Следствие 4. Если $\alpha(\bar{x})<0$, то $X^*\subseteq M$.

Следствие 5. Если $\alpha(\bar{x})=0$, то $\bar{x}\in X^*$.

Из теорем I.2-I.4 и следствия I получаем алгоритм 4. Берем ограниченный снизу функционал $\alpha(x,y)$, определенный на $X\times Y$.

*/ Принцип расширения гласит: любое расширение множества, на котором ищут минимум функционала, может только уменьшить величину минимума [5] .

Находим минималь $\bar{x}=\bar{x}(y)$ задачи 2: $\inf(I+\alpha)$, $x\in X$, или в неявном виде $f(\bar{x},y)=0$. Решаем совместно систему (уравнения совмещения α -функционала) : $f(\bar{x},y)=0$, $\alpha(\bar{x},y)=0$.

Тогда компонента $\bar{x}$ корня этой системы и будет абсолютной минималью задачи I: $\inf I(x)$, $x\in X^*$.

Алгоритм 4' (решение путем подбора α -функционала). Берем ограниченный снизу функционал α , определенный на X (или $X\times Y$). Решаем задачу 2: $\inf(I+\alpha)$, $x\in X$. Если $\bar{x}\in X^*$, то мы получаем минималь задачи I. Если $\bar{x}\notin X^*$, то получаем оценку снизу $J(\bar{x})\le I(x^*)$ величины функционала $I(x)$ на X^* и множества M, N, P .

Замечания. I. Если допустимое подмножество X^* выделено при помощи функционалов $F_i(x)=0$, α -функционал можно искать в виде $\alpha=\lambda_i(x)F_i(x)$ (по i - сумма), где $\lambda_i(x)$ - некоторые функции x .

2. Если допустимое подмножество выделено при помощи неравенств $\Phi_j(x)\le 0$, α -функционал можно искать в виде

$$\alpha=\omega_j(x)[\Phi_j(x)+|\Phi_j(x)|],$$

где $\omega_j(x)$ - некоторые функции x , либо в виде

$$\alpha=\omega_j(x)\Phi_j(x),$$

где $\omega_j(x)\ge 0$ и выполнено условие $\omega_j(x)\Phi_j(x)=0$ на X^* .

3. Пусть имеются α -функционал и элемент $\bar{x}\in X^*$ такие, что $J(\bar{x})=\inf[I(x)+\alpha(x)]$, $x\in X$. Тогда любой элемент $x_1\in X^*$ и удовлетворяющий условию

$$J(x_1)=\inf[I(x)+\alpha(x)],\ x\in X, \qquad (I.I'')$$

есть абсолютная минималь функционала $I(x)$ на X^* и любая абсолютная минималь функционала $I(x)$ на X^* удовлетворяет условию (I.I").

Прямое утверждение непосредственно вытекает из следствия I. Докажем обратное утверждение. Так как абсолютная минималь $x_1\in X^*$, т.е. $\alpha(x_1)=0$, то

$$I(x_1)=\inf_{X^*} I(x)=J(x_1)=J(\bar{x})=\inf_{X}[I(x)+\alpha(x)],$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, если существует хотя бы один элемент, удовлетворяющий (I.I), то и все остальные минимали задачи I обязательно ему удовлетворяют.

Поясним идею введения α-функционала следующим примером. Пусть некоторая функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Допустимыми для нее являются целые значения $n\in[a,b]$. Надо найти ее минимум. Добавка α -функционала не меняет значения $f(n)$, но деформирует функцию $f(x)$ в промежутках между этими значениями (рис. 2.I). Если α-функционал "хороший", то $\inf_{x\in[a,b]}[f(x)+\alpha(x)]>\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ Если к тому же $\bar{x}=n$, то мы получим минималь задачи I.

32-33

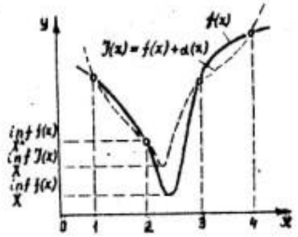

Рис. 2.I

Заметим, что к решению задач методом α -функционала можно подходить различно: а) можно взять в качестве α -функционала известную функцию $\alpha(x)$; б) можно считать $\alpha(x)$ неизвестной функцией, которую следует искать совместно с минималью; в) можно взять $\alpha(x,y)$, где α -известная функция, а $y=y(x)$ - неизвестная функция x, и искать ее совместно с минималью.

Обратимся к примерам. В качестве примеров взяты неаналитические функционалы, решение которых другими методами затруднено.

Пример I.I. Найти минимум функционала

$$I=\frac{4x^2+4\pi x+4{,}1+\pi^2}{4(x^2+\pi x+1)+\pi^2}\cdot\frac{\sin^3 x-\sin^2 x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)(\sin^3 x+\cos^3 x)}\quad \text{на } X^*=\left\{x=\tfrac{1}{2}\pi n;\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots\right\}. \qquad (I.2)$$

Известные методы здесь трудно применить, ибо функционал задан на дискретном множестве. Почти единственное, что может быть предложено существующими теориями, - это простой перебор $x\in X^*$. Но число элементов множества X^* бесконечно, а потому перебор может оказаться бессмысленным.

Решим этот пример предлагаемым методом. Возьмем $\alpha(x)$ в виде

$$\alpha=-\frac{4x^2+4\pi x+4{,}1+\pi^2}{4(x^2+\pi x+1)+\pi^2}\cdot\frac{\tfrac{1}{2}\sin 2x\cos x}{(\sin x-\cos x)(\sin^3 x+\cos^3 x)}.$$

Нетрудно видеть, что при таком задании $\alpha(x)$: $\alpha(x)=0$ на X^*, ибо при $x=\frac{1}{2}\pi n$ $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, $\sin 2x=\sin\pi n=0$. Составим обобщенный функционал

$$J=I+\alpha=\frac{4x^2+4\pi x+4{,}1+\pi^2}{4(x^2+\pi x+1)+\pi^2}\cdot\frac{\sin^3 x-\sin^2 x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x-\tfrac{1}{2}\sin 2x\cos x}{(\sin x-\cos x)(\sin^3 x+\cos^3 x)}.$$

В этом функционале x уже непрерывно и $-\infty<x<\infty$ (множество X).
Благодаря добавке $\alpha(x)$ этот функционал можно привести к простому виду:

$$J=\frac{4x^2+4\pi x+4{,}1+\pi^2}{4(x^2+\pi x+1)+\pi^2}\cdot\frac{(\sin^2 x-\cos^2 x)(1-\sin x\cos x)\sin x}{(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}=\left(\frac{0{,}1}{4+(2x+\pi)^2}+1\right)\sin x$$

Полученный функционал несложен. В силу непрерывности x его абсолютный минимум без труда можно найти, применив обычные методы теории экстремумов функции одного переменного. Здесь $\bar{x}=-\frac{\pi}{2}$ и

$\bar{x}\in X^*$ при $\bar{n}=-1$, $\bar{I}=-1{,}025$. Следовательно, это абсолютный минимум (и притом единственный) и исходного функционала (I.2.)

Аналогично находят минимум другого функционала (по x):

$$I=\cos^2\varphi+\tfrac{1}{2}\cos 2x\cos 2\varphi-2\cos x\cos\varphi\cos(x+\varphi)+\tfrac{1}{2}-0{,}1e^{-x^2},\quad X^*=\left\{x=\tfrac{1}{2}\pi n:\ n=0,\pm1,\ldots\right\}$$

Здесь φ задано, x дискретно. Зададимся $\alpha=-\frac{1}{2}\sin 2x\sin 2\varphi$, после чего обобщенный функционал $J=I+\alpha$ можно преобразовать к простому виду: $J=-0{,}1e^{-x^2}+\sin^2 x$. Абсолютная минималь задачи 2: $\bar{x}=0$. Она входит в допустимое множество X^* при $\bar{n}=0$, а потому является и абсолютной минималью задачи I.

Может показаться, что в случае ограниченности допустимого дискретного множества в задачах, подобных предыдущему примеру, применим метод множителей Лагранжа [7] . Покажем, что это не так.

Пример I.2. Найти минимум

$$I=x^3-3x^2+2x\quad \text{на } X^*=\{x=0,\ x=3\}. \qquad (I.3)$$

Составляем функцию Лагранжа $F=x^3-3x^2+2x+\lambda_1 x+\lambda_2(x-3)$,
где λ_1,λ_2 - неопределенные множители Лагранжа. Вычисляем I-ю производную $F'=3x^2-6x+2+\lambda_2+\lambda_1$.
Подставляя сюда $x=0$, $x=3$ и приравнивая $F'(0)=0$, $F'(3)=0$, получаем систему, из которой находим λ_1 , λ_2 . Вторая производная $F''=6x-6$. При $x=0$ $F''(0)=-6<0$, при $x=3$ $F''(3)=12>0$. Следовательно, $x=0$ есть точка максимума, а $x=3$ - точка минимума. Проверяем, подставляя $x=0$, $x=3$ в (I.3), находим $I(0)=0$, $I(3)=6$. Мы видим, что метод Лагранжа дал прямо противоположные результаты: на точку максимума, а на точку максимума - как на точку минимума. Здесь нарушено одно из условий применимости метода Лагранжа - число уравнений связи больше числа независимых переменных. Этот пример показывает, что для метода Лагранжа это нарушение недопустимо.

Решим этот пример предлагаемым методом. Возьмем $\alpha(x)$ в виде

$$\alpha=x(x-3)(\tfrac{2}{3}-x).$$

Тогда

$$J=I+\alpha=x^3-3x^2+2x+x(x-3)(\tfrac{2}{3}-x),\quad J'=\tfrac{4}{3}x=0,\quad \bar{x}=0\in X^*,\quad J''=\tfrac{4}{3}>0.$$

Таким образом, согласно следствию I $\bar{x}=0$ - абсолютная минималь функционала (I.3). Все это показывает, что α -функционал имеет более широкое применение, чем метод множителей Лагранжа.

Пример I.3. Найти минимум интеграла:

$$I=\int_{1{,}99\cdot 8}^{a}(\ln\ln t-10^{-4})\,dt\quad \text{на } X^*=\{a=10^{-2}\pi n:\ n=1,2,\ldots,400\}. \qquad (I.4)$$

Здесь интервал интегрирования дискретен. Прямой перебор затруднен вдобавок тем, что интеграл (I.4) не выражается через элементарные функции и для него не составлены таблицы.

Будем искать α-функционал в виде $\alpha = 10^{-6}\sin 10^{4} a$. На X^* $\alpha(x) = 0$. Далее
$$J = I + \alpha = \int_{10^{-3}}^{a} (\ln \operatorname{tg} t - 10^{-3})\,dt - 10^{-6}\sin 10^{4} a, \quad (I.5)$$
$$J'_a = \ln \operatorname{tg} a - 10^{-3} - 10^{-3}\cos 10^{4} a = 0, \quad \bar{a} = \frac{\pi}{4} \in X^* \text{ при } \bar{n} = 250,$$
$$J'' = \frac{2}{\sin 2a} + \sin 10^{4} a .$$
Так как $10^{-3} < x < 0{,}45$, то $J'' > 0$ в этом интервале, т.е. корень единственный и $\bar{n} = 250$ – точка абсолютного минимума.

Аналогично находит минимум другого интеграла, не выражающегося через элементарные функции,
$$I = -\int_0^a [\sin(t^2) + 10^{-3}\sqrt{\pi}]\,dt \quad \text{на } X^* = \{a = 10^{-3}\sqrt{\pi}\, n : n = 0, 1, \dots, 1{,}5\cdot 10^{3}\} \quad (I.6)$$
Здесь $\alpha = 10^{-6}\sin 10^{3}\sqrt{\pi}\, a$; $\bar{n} = 1000$.

Пример I.4. Найти минимум интеграла
$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{\cos at}{t} + 20a^2\right)dt \quad \text{на } X^* = \{a = 10^{-3} n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (I.7)$$
Здесь дискретна подынтегральная функция. Интеграл от нее также не выражается через элементарные функции.

Возьмем $\alpha = 10^{-3}\sin^2 10^{3}\pi a$, $J = I + \alpha$. Тогда $J'_a = I'_a + \alpha'_a =$
$$= \int_{\pi/2}^{\pi} (-\sin at + 40a)\,dt + 2\cdot 10^{-3}\pi \sin 2\cdot 10^{3}\pi a =$$
$$= -\frac{2}{a}\sin\frac{3}{4}\pi a \sin\frac{\pi}{4}a + 20\pi a + 10\pi \sin 2\cdot 10^{3}\pi a . \quad (I.8)$$
Эта производная не существует при $\bar{a} = 0 \in X^*$. При $a > 0, J' > 0$; при $a < 0, J' < 0$ (или $J' > 0$ при $\forall a \neq 0$). Следовательно, $\bar{n} = 0$ есть абсолютная минималь.

Б) Рассмотрим случай, когда оптимального x^* на X^* не существует, но существует последовательность $\{x_n\} \subset X^*$ $n = 1, 2, \dots$ такая, что $\lim_{n\to\infty} I(x_n) = m$. Такая последовательность называется минимизирующей (см. §5 гл. I).

Аналогично п. А можно показать, что справедливо обобщение следствия I на данный случай.

Следствие I'. Пусть $\alpha(x) = 0$ только на X^*. Для того чтобы последовательность $\{x_n\} \subset X^*$ была минимизирующей, необходимо и достаточно существование функционала $\alpha(x)$ такого, что
$$\lim_{n\to\infty} [I(x_n) + \alpha(x_n)] = \inf [I(x) + \alpha(x)], \quad x \in X . \quad (I.9)$$
Достаточное заключение этого следствия совпадает с леммой в [2], а $J(x)$ – с функционалом L, введенным там же.

Можно обобщить замечание 3 п. А и на этот случай: если имеется α-функционал и хотя бы одна последовательность $\{x_n\} \subset X^*$, удовлетворяющая (I.9), то любая последовательность $\{x_n\} \subset X^*$, удовлетворяющая (I.9), есть минимизирующая и, наоборот, любая минимизирующая последовательность удовлетворяет условию (I.9).

2. α-функционал в банаховом пространстве.

Применим теорему I.2 к задаче оптимизации, описываемой в банаховом пространстве уравнением
$$\frac{dx}{dt} = f(x, u), \quad t_1 \le t \le t_2, \quad x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2, \quad (I.10)$$
где $x, f(x,u)$ – элементы полных линейных и нормированных пространств X_1 и X_2 соответственно, причем $X \subseteq X_1$, $t \in [t_1, t_2] = T$ – отрезок числовой оси.

Назовем допустимым управлением измеримую ограниченную функцию (в смысле [I], стр. 85) со значениями $u \in U$, где U – множество в произвольном топологическом пространстве. В частности, U может быть метрическим, замкнутым и ограниченным. Будем предполагать, что для всякого управления $u(t)$ уравнение (I.10) имеет единственное решение $x(t)$ с $x \in X_1$ почти для всех $t \in [t_1, t_2]$, где $x(t)$ – непрерывная, почти всюду дифференцируемая на $[t_1, t_2]$ функция.

Оператор $f(x, u)$ определен на прямом произведении $X \times U$, непрерывен и ограничен. Граничные условия t_1, t_2, $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ заданы.

Ставится задача: найти такое допустимое управление $u(t)$, переводящее систему из заданного начального состояния в заданное конечное состояние, чтобы функционал
$$I = \int_{t_1}^{t_2} f_0(x, u)\,dt \quad (I.11)$$
принимал наименьшее значение.

Совокупность измеримых функций $u(t)$ обозначим V; совокупность непрерывных, почти всюду дифференцируемых на $[t_1, t_2]$, функций $x(t)$ обозначим D. Совокупность пар $x(t), u(t)$, обладающих перечисленными свойствами и почти всюду удовлетворяющих уравнению (I.10), назовем допустимыми и обозначим Q. Очевидно, что $Q \subset D \times V$.

Пусть $\psi = \psi(t, x)$ – некоторый однозначный непрерывный, дифференцируемый функционал, определенный на $X \times T$. Назовем его характеристическим функционалом. Будем искать α-функционал в виде
$$\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \psi_x \circ [\dot{x} - f(x, u)]\,dt \quad (I.12)$$
Здесь $\psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ – частная производная Фреше ψ по x, являющаяся линейным функционалом, $\circ$ – знак композиции. Очевидно, что требование определения α-функционала выполнено.

Составляя обобщенный функционал $I = J + \alpha$ и учитывая, что $\dot{\psi} = \psi_x \circ \dot{x} + \psi_t$, получим
$$J = \psi[t_2, x(t_2)] - \psi[t_1, x(t_1)] + \int_{t_1}^{t_2} (f_0 - \psi_t - \psi_x \circ f)\,dt = \psi_2 - \psi_1 + \int_{t_1}^{t_2} B\,dt, \quad (I.13)$$
где $B = f_0 - \psi_t - \psi_x \circ f$. Так как множество Q отличается от множества $D \times V$ только тем, что пары $x(t), u(t)$ удовлетворяют почти всюду (I.10), то при задании α-функционала в форме (I.12) согласно теореме I.2 исходную задачу I – отыскание минимума (I.11) на Q –

можно заменить задачей 2 – отыскание минимума (I.I3) на более широком множестве $D \times V$, на котором $x(t), u(t)$ уже не связаны уравнением (I.I0). Итак, имеем

$$\bar{J} = \Psi_2 - \Psi_1 + \inf_{x \in D,\, u \in V} \int_{t_1}^{t_2} B(t,x,u)\,dt. \qquad (I.I4)$$

Теорема I.6. Если функция $\bar{u}(t)$, полученная из решения задачи $\inf_{x \in D} \int_{t_1}^{t_2} \inf_{u \in V} B\,dt$ такова, что $\bar{u}(t) \in V$, то она совпадает почти всюду с функцией, полученной из решения задачи $\inf_{x(t) \in D,\, u(t) \in V} \int_{t_1}^{t_2} B\,dt$ и

$$\inf_{x \in D,\, u \in V} \int_{t_1}^{t_2} B\,dt = \inf_{x \in D} \int_{t_1}^{t_2} \inf_{u \in V} B\,dt. \qquad (I.I5)$$

Доказательство. Предположим противное: $B(u^*) \neq \inf_{u \in V} B(u)$ на подмножестве отрезка $[t_1, t_2]$ с мерой, не равной нулю. Тогда на этом подмножестве $B(u^*) > B(\bar{u})$, т.е. $\int_{t_1}^{t_2} B(u^*)dt > \int_{t_1}^{t_2} B(\bar{u})dt$, а это противоречит тому, что $u^*(t)$ доставляет минимум интегралу $\int_{t_1}^{t_2} B\,dt$.

Из требования (I.I4) и теоремы I.6 получаем

$$\bar{J} = \Psi_2 - \Psi_1 + \inf_{x \in D} \int_{t_1}^{t_2} \inf_{u \in V} B\,dt. \qquad (I.I6)$$

Если функционал $\alpha[x(t), u(t)]$, такой, что абсолютная минималь задачи (I.I6) : $\bar{x}(t), \bar{u}(t) \in Q$, то согласно теореме I.I $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$ – абсолютная минималь исходной задачи.

Итак, доказана теорема I.7. Для того чтобы пара функции $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t) \in Q$ была абсолютной минималью функционала I, достаточно существование характеристического функционала $\Psi(t,x)$ такого, что

$$1)\ B(t,x,\bar{u}) = \inf_{u \in V} B(t,x,u);\quad 2)\ \int_{t_1}^{t_2} B(t,\bar{x},\bar{u})\,dt = \inf_{x(t) \in D} \int_{t_1}^{t_2} B(t,x,\bar{u})\,dt;\quad 3)\ \bar{x}(t), \bar{u}(t) \in Q. \quad (I.I7)$$

В частности, если принять, что $\Psi = p(t) \circ x$, где $p(t)$ – линейный функционал, $h \in X_1$, то из п. I и условия стационарности п. 2 (I.I7) следует

$$H(t,\bar{x},\bar{u}) = \sup_{u \in V} H(t,x,u), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad (I.I8)$$

где $H = p(t) \circ f(x,u) - f_0(x,u)$. Предполагается, что $\partial H / \partial x$ – производная Фреше – непрерывна. Мы видим, что необходимые условия задачи 2, вытекающие из (I.I7), совпали с необходимыми условиями принципа максимума Понтрягина, обобщенного на банаховы пространства.

3. О построении α-функционала в случае выделения допустимого множества при помощи двух функционалов, связанных логическими условиями

Предположим, что на множестве X определены два функционала $F_1(x)$, $F_2(x)$. Допустимыми являются только такие точки $x \in X$, для которых между F_1 и F_2 выполнены определенные логические

связи. Пусть $F_i(x) = 0$ – "истина" и $F_i(x) \neq 0$ – "ложь". Пять основных связок ($\leftrightarrow, \veebar, \vee, \wedge, \sim$) логики представлены в следующих таблицах:

F_1	F_2	$F_1 \leftrightarrow F_2$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Двойная импликация

F_1	F_2	$F_1 \veebar F_2$
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Дизъюнкция в исключающем смысле

F_1	F_2	$F_1 \vee F_2$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Дизъюнкция в неисключающем смысле

F_1	F_2	$F_1 \wedge F_2$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Конъюнкция

F	$\sim F$
И	Л
Л	И

Отрицание

Будем использовать символ $\operatorname{sign} F = \begin{cases} 1, & \text{если } F > 0, \\ 0, & \text{если } F = 0, \\ -1, & \text{если } F < 0. \end{cases}$

В этих случаях α-функционал можно искать в виде:

1) $X^* = \{x : F_1(x) \leftrightarrow F_2(x)\}$, $\quad \alpha = (p_1 F_1 + p_2 F_2)[1 - |\operatorname{sign}(F_1 F_2)|]$,
2) $X^* = \{x : F_1 \veebar F_2\}$, $\quad \alpha = p_1 F_1 F_2 + p_2[1 - |\operatorname{sign}(F_1^2 + F_2^2)|]$,
3) $X^* = \{x : F_1 \vee F_2\}$, $\quad \alpha = p F_1 F_2$,
4) $X^* = \{x : F_1 \wedge F_2\}$, $\quad \alpha = p_1 F_1 + p_2 F_2$,
5) $X^* = \{x : \sim F\}$, $\quad \alpha = p[1 - |\operatorname{sign} F|]$.

Здесь p, p_1, p_2 – некоторые функции x.

Поскольку с помощью этих пяти связок могут быть построены все другие сколь угодно сложные высказывания, то формы α-функционалов могут использоваться для сложных логических связей.

§2. Общий принцип взаимности оптимальных задач

Пусть требуется решить задачу минимизации гл. I §4 п. А:

$$I = f_0(x), \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (2.I)$$

Составим обобщенный функционал в виде

$$J = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i(x,y) f_i(x), \qquad (2.2)$$

где $\lambda_i(x,y)$ – произвольные функционалы x, y.

Пусть $\bar{x}(y)$ – абсолютная минималь (2.2) на X.

Общий принцип взаимности оптимальных задач. I. При всяком $y \in Y$ абсолютная минималь функционала J (2.2) является абсолютной минималью любого из функционалов

$$\lambda_j(x,y) f_j(x), \quad j = 0, 1, \ldots, m \ (\text{по } j\text{-несумма}) \qquad (2.3)$$

для связей вида

$$\lambda_i(x,y) f_i(x) = \lambda_i(\bar{x}(y),y) f_i(\bar{x}(y)), \quad i=q,\dots,m, \; i \ne j \;\; (\text{по } i - \text{не сумма}), \qquad (2.4)$$

При этом любое число равенств (2.4) можно заменить ограничениями вида

$$\lambda_i(x,y) f_i(x) \le \lambda_i(\bar{x}(y),y) f_i(\bar{x}(y)) \qquad (2.5)$$

2. При всяком $y \in Y$ абсолютная минималь функционала J (2.2) является абсолютной минималью любой суммы функционалов

$$\sum_j \lambda_j(x,y) f_j(x) \qquad (2.3')$$

для связей, не вошедших в сумму (2.3),

$$\lambda_i(x,y) f_i(x) = \lambda_i(\bar{x}(y),y) f_i(\bar{x}(y)) \quad (\text{по } i - \text{не сумма}). \qquad (2.4')$$

При этом любое число равенств (2.4') можно заменить ограничениями вида (2.5).

<u>Доказательство</u>. I. Для каждого из функционалов (2.3) при соблюдении равенств (2.4) выполнена теорема I.2, т.е. $\bar{x}(y)$ является его абсолютной минималью. Так как каждый функционал достигает своей нижней грани, то очевидно, что замена равенств (2.4) ограничениями вида (2.5) не может сказаться на величине минимума. Аналогично доказывается п. 2. Принцип доказан.

<u>Следствие I</u>. Значение $J(\bar{x}(y),y)$ является оценкой снизу для любого из функционалов (2.3), (2.3'), если часть или все равенства(2.4), (2.4') заменить равенствами вида

$$\lambda_i(x,y) f_i(x) = 0. \qquad (2.6)$$

<u>Следствие 2</u>. В случае, соответствующем (2.6), абсолютная минималь любого из функционалов (2.3) содержится в множестве

$$M_j(y) = \left\{ x : \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x,y) f_i(x) \ge \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\bar{x}(y),y) f_i(\bar{x}(y)) \right\}. \qquad (2.7)$$

<u>Следствие 3</u>. Если возможно решение задачи (2.I) алгоритмом 4, то существуют такие y, что

$$\lambda_i(\bar{x}(y),y) f_i(\bar{x}(y)) = 0 \qquad (\text{по } i - \text{не сумма}) \qquad (2.8)$$

В самом деле из существования решения задачи (2.I) следует, что $f_i(\bar{x}) = 0$. Так как $\lambda_i f_i$ – минимум, то (2.8) очевидна.

§3. <u>Применение α -функционала к известным задачам оптимизации</u>

I. <u>Задача поиска условного экстремума функции конечного числа переменных</u>

Дано

$$I = f_0(x), \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1,2,\dots,m < n. \qquad (3.I)$$

Здесь x – n-мерный вектор, функции $f(x)$ определены в некоторой открытой области n – мерного векторного пространства X.

Возьмем α -функционал в виде

$$\alpha = p_i(x) f_i(x), \quad i = 1,2,\dots,m \qquad (3.2)$$

(по повторяющимся индексам – суммирование). Здесь $p_i(x)$ – некоторые функции x, определенные на X: $X^* = \{x : \sum_{i=1}^{m} |f_i(x)| = 0\}$, $X^* \subset X$.

Построим обобщенный функционал $J(x) = f_0(x) + \alpha(x)$. Зададимся некоторыми $p_i(x)$ и решим задачу $\inf J(x)$, $x \in X$. Из этого решения задачи 2, согласно теоремам §I, мы можем извлечь следующую информацию о задаче I:

I) Если $\bar{x} \in X^*$, то $\bar{x}$ – абсолютная минималь задачи I (следствие I, §I).

2) Если $\bar{x} \notin X^*$, то: а) $J(\bar{x})$ – оценка снизу функционала $f(x)$ на X^* (теорема I.4); б) при $\alpha(\bar{x}) > 0$ x^* находится в множестве $P = \{x : \alpha(x) \le \alpha(\bar{x})\}$ (следствие 3, §I); в) при $\alpha(\bar{x}) < 0$, x^* находится в множестве $M = \{x : \alpha(x) \ge \alpha(\bar{x})\}$, (следствие 4, §I); г) множество $N^* = N \cap X^*$, где $N = \{x : 2f_0 \le 2f_0 + \alpha\}$, содержит такие или худшие решения (теоремы I.5).

Таким образом, если даже $\bar{x} \notin X^*$, мы видим, что вычисления не бесполезны. Мы получаем оценку снизу и сужаем область поиска оптимального решения. Задаваясь рядом α_i, в результате можно получить решение одной из поставленных задач а, б, в, г или облегчить решение задачи а (см. гл. I, §I).

Обратим внимание на то, что данный метод в отличие от классического метода множителей Лагранжа не требует непрерывности и дифференцируемости функций $f_0(x)$, $f_i(x)$. Он может быть применен и не к аналитическим функционалам, например, к функционалам, заданным на дискретных множествах, и экстремальным задачам комбинаторики (см. гл. I0).

2. <u>Применение теорем §I к задачам оптимизации, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями</u>

Пусть поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = f_i(t,x,u), \quad i = 1,2,\dots,n, \quad t \in T = [t_1,t_2], \qquad (3.3)$$

где $x(t)$ – n -мерная непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция, $x \in G(t)$; $u(t)$ – r -мерная функция, непрерывная всюду на T, за исключением конечного числа точек, где она может иметь разрывы I-го рода, $u \in V(t)$. Граничные значения t_1, t_2 заданы, $x(t_1)$, $x(t_2) \in R$. Качество процесса оценивается функционалом

$$I = F(x_1,x_2) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt, \quad x_2 = x(t_2), \quad x_1 = x(t_1). \qquad (3.4)$$

Функции $F(x_1,x_2)$, $f_i(x,u,t)$, $i = 0,1,\dots,n$ непрерывны, $F(x_1,x_2) > -\infty$. Совокупность непрерывных, почти всюду дифференцируемых функций $x(t)$ с $x\in G(t)$ обозначим D. Совокупность кусочно-непрерывных (с разрывами I-го рода) функций $u(t)$ таких, что $u\in U(t)$, обозначим V. Пары $x(t)$, $u(t)$, обладающие перечисленными выше свойствами и почти всюду удовлетворяющие уравнениям (3.3), называются <u>допустимыми</u>. Обозначим их Q, $Q\subset D\times V$.

Введем в исследование n однозначных функций $\lambda_i(t,x)$ $i=1,2,\dots,n$ непрерывных и имеющих непрерывные производные на $T\times G$. Запишем α-функционал в виде

$$\alpha=\int_{t_1}^{t_2}\lambda_i(t,x)[\dot{x}_i-f_i(t,x,u)]dt. \qquad (3.5)$$

Очевидно, что на Q $\alpha=0$. Составляем обобщенный функционал $J=I+\alpha$, интегрируем член $\lambda_i\dot{x}_i$ по частям и исключаем $\dot{x}_i$ при помощи (3.3). Получим

$$J=F+\lambda_i x_i\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\Big[f_0-\Big(x_j\frac{\partial\lambda_j}{\partial x_i}+\lambda_i\Big)f_i-x_i\frac{\partial\lambda_i}{\partial t}\Big]dt. \qquad (3.6)$$

Обозначим $A=F+\lambda_i x_i\Big|_{t_1}^{t_2}$, $B=f_0-\Big(x_j\frac{\partial\lambda_j}{\partial x_i}+\lambda_i\Big)f_i-x_i\frac{\partial\lambda_i}{\partial t}$. Применим к (3.6) следствие I §I. Здесь роль множества X^*, фигурирующего в следствии I, играет Q, а роль множества X – множество $D\times V$. Так как функции из $D\times V$ уже не связаны уравнениями (3.3), то на парах $x(t)$, $u(t)$ из $D\times V$ с концами в R при условии $\bar{x}(t)\in D$, $\bar{u}(t)\in V$, $x_1=\bar{x}(t_1)$, $x_2=\bar{x}(t_2)$

$$\inf_{D\times V}\Big(A+\int_{t_1}^{t_2}Bdt\Big)=\inf_{x_1,x_2\in R}A+\int_{t_1}^{t_2}\inf_{x\in G,u\in V}B\,dt$$

или окончательно

$$\bar{J}=\inf_{x_1,x_2\in R}A+\int_{t_1}^{t_2}\inf_{x\in G,u\in V}B\,dt. \qquad (3.7)$$

Итак, доказана <u>теорема 3.I</u>. Для того чтобы пара вектор-функций $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ была абсолютной минималью функционала (3.4), достаточно[*] существования n дифференцируемых функций $\lambda_i(t,x)$ таких, что

$$1)\ \bar{B}=\inf_{x\in G,u\in V}B,\quad 2)\ \bar{A}=\inf_{x_1,x_2\in R}A>-\infty,\quad 3)\ \bar{x}(t),\bar{u}(t)\in Q. \qquad (3.8)$$

Из (3.6) следует, что если найти хотя бы одно решение уравнения в частных производных с n неизвестными функциями $\lambda_i(t,x)$

$$\inf_{u\in V}\Big[f_0-\Big(x_j\frac{\partial\lambda_j}{\partial x_i}+\lambda_i\Big)f_i-x_i\frac{\partial\lambda_i}{\partial t}\Big]=0, \qquad (3.9)$$

при краевом условии $A=const$, то п. I, 2 теоремы 3.I будут выполнены. Любое неудачное задание $\lambda_i(t,x)$ (в смысле $\bar{x}(t),\bar{u}(t)\notin Q$)

---

[*] Утверждать необходимость нельзя, так как мы заранее не знаем, существуют ли непрерывные и дифференцируемые $\lambda_i(t,x)$. Однако, если в результате решения задачи (3.8) они найдены, то ясно, что они существуют.

согласно теореме I.4 дает оценку снизу величины минимума.

Пусть, например, $x_n\neq 0$[*]. Зададимся всеми $\lambda_i=0$ $i=1,2,\dots,n-1$, кроме $\lambda_n=\varphi(t,x)/x_n$. Подставим их в (3.7), получим результат, опубликованный в работах [2][**], [3] (условие Беллмана-Пиконе-Кротова):

$$\bar{J}=\inf_{x_1\in G_1,x_2\in G_2}\Phi-\int_{t_1}^{t_2}\sup_{x\in G,u\in V}R(t,x,u)dt. \qquad (3.10)$$

Здесь $\Phi=F+\varphi\Big|_{t_1}^{t_2}$, $R=\varphi_t+\varphi_{x_i}f_i-f_0=-B$. Однако практически иногда удобнее задаваться функцией $\psi(t,x)$ или в других обозначениях (см. [4]) $\psi(t,x)$. Тогда A, B пишутся:

$$A=F+\psi_2-\psi_1,\qquad B=f_0-\psi_{x_i}f_i-\psi_t. \qquad (3.11)$$

и теорема 3.I совпадает с [2], № I2 (см. также [3]).

Функционал α для этой задачи можно определить еще следующим образом. Зададимся некоторой функцией $\psi(t,x)$. Тогда

$$\alpha=\int_{t_1}^{t_2}\psi_{x_i}[\dot{x}_i-f_i(t,x,u)]dt.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям, получим

$$\alpha=\psi\Big|_1^2-\int_{t_1}^{t_2}(\psi_{x_i}f_i+\psi_t)dt.$$

<u>Замечания</u>. I. Теорема 3.I справедлива и в записи (3.8) п.I: $\int_{t_1}^{t_2}\bar{B}dt=\inf_{x(t)\in D}\int_{t_1}^{t_2}\inf_{u\in V}B\,dt$. Именно такая форма предлагается в [4]. Разница между этими формами существенна при рассмотрении 2-й вариации и условий в угловых точках, а также в некоторых других случаях. Возьмем последнюю исправленную формулировку принципа оптимальности В.Ф. Кротова [8] (задача быстродействия) и рассмотрим <u>пример 3.I</u>. Найти минимальное t_1 в задаче

$$I=\int_0^{t_1}dt,\quad \dot{x}=u,\quad |u|\leq 1,\quad x(0)=1,\quad x(t_1)=0.$$

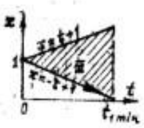

Рис. 2.2

Беря $\psi\equiv 0$, получим $R=-1$. Следовательно, $\sup_{x,u}R$ достигается на любой кривой, например, $u=-0{,}01$ $(I=100)$. В случае же, когда минимум стоит перед интегралом при задании $\psi\equiv 0$, имеем $\inf_{x(t)\in D}\int_0^{t_1}dt=\inf_{x(t)\in D}t_1[x(t)]$. Так как множество всех непрерывных кривых с ограниченной производной $|\dot{x}|\leq 1$ при $x(0)=1$ заключено между прямыми $x=t+1$, $x=-t+1$ (рис. 2.3), то получим $\bar{x}=1-t$, $\bar{u}=-1$ и $I=t_{1min}=1$.

---

[*] Это ограничение не является существенным, так как отрезок $[t_1,t_2]$ всегда можно разбить на отрезки, где какое-нибудь $x_i\neq 0$.

[**] Отметим, что в предлагаемом выводе в отличие от [2] не требуется априорного предположения о существовании единой потенциальной функции $\varphi(t,x)$ такой, что $\varphi_{x_i}=\lambda_i$.

42-43

Замечания. I. В качестве множества D можно взять множество $\{x(t)\}$ с ограниченной производной $\dot{x}_i \in \dot{X}_i = \{f_i(t,x,u): u \in V\}$. Такое сужение множества может помочь в отыскании оптимального решения.

2. Замечание 3 §I в данном случае имеет следующий вид: пусть существует функция $\psi(t,x)$ и хотя бы одна допустимая пара $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$, удовлетворяющая (3.8). Тогда любая другая пара, удовлетворяющая (3.8), есть минималь задачи I, и любая допустимая минималь задачи I удовлетворяет п. I, 2 (3.8).

3. Если моменты t_1, t_2 не фиксированы, то можно показать, что п. I,2 (3.8) принимают вид:

$$1)\ \bar{B} = \inf_{x \in G,\, u \in V} B = 0, \qquad 2)\ \bar{A} = \inf_{t_1, t_2, x_1, x_2 \in R} A > -\infty.$$

Условие $\inf B = 0$ можно выполнить, взяв $\psi = \varphi(t,x) + y_{n+1}$ и приняв

$$\dot{y}_{n+1} = f_0 - \varphi_{x_i} f_i - \varphi_t .$$

4. Теорема 3.I является частным случаем более общей теоремы 2.I, рассмотренной в гл. III.

Предположим, что мы задались некоторыми $\lambda_i(t,x)$ (или $\psi(t,x)$).

Теорема 3.2. Пусть $F \equiv 0$ и решена задача $\inf_{x,u} B$. Тогда: I) множество $N = \{t,x,u:\ B + f_0 \le \bar{B} + \bar{f}_0,\ t \in T\}$ содержит такие или лучшие решения задачи I; 2) множество $P = \{t,x,u:\ B - f_0 \le \bar{B} - \bar{f}_0,\ t \in T\}$ содержит такие или худшие решения задачи I.

Доказательство. I) Вычитая $B \ge \bar{B}$ из неравенства $B + f_0 \le \bar{B} + \bar{f}_0$, получим $f_0 \le \bar{f}_0$ на T, т.е. $\int_T f_0\,dt \le \int_T \bar{f}_0\,dt$. 2) Вычитая $B \ge \bar{B}$ из неравенства $B - f_0 \le \bar{B} - \bar{f}_0$, получим $-f_0 \le -\bar{f}_0$ на T, т.е. $\int_T f_0\,dt \ge \int_T \bar{f}_0\,dt$, что и требовалось доказать.

Возьмем вместо функционала (3.4) другой более простой функционал $\int_T B_1(t,x,u)\,dt$.

Теорема 3.3. Пусть $F \equiv 0$, и решена задача $\bar{J}_1 = \inf \int_T B_1(t,x,u)\,dt$ */ на Q. Тогда: I) множество $N = \{t,x,u:\ f_0 + B_1 \le \bar{f}_0 + \bar{B}_1,\ t \in T\}$ содержит такие или лучшие решения задачи I; 2) множество $P = \{t,x,u:\ B_1 - f_0 \le \bar{B}_1 - \bar{f}_0,\ t \in T\}$ содержит такие или худшие решения задачи I.

Доказательство. I. Из N следует, что $\int_T (f_0 + B_1)\,dt \le \int_T (\bar{f}_0 + \bar{B}_1)\,dt$. Вычитая из этого неравенства неравенство $\int_T B_1\,dt \ge \int_T \bar{B}_1\,dt$, получим $\int_T f_0\,dt \le \int_T \bar{f}_0\,dt$. 2. Из P получаем $\int_T (B_1 - f_0)\,dt \le \int_T (\bar{B}_1 - \bar{f}_0)\,dt$. Вычитая $\int_T B_1\,dt \ge \int_T \bar{B}_1\,dt$, получим $\int_T f_0\,dt \ge \int_T \bar{f}_0\,dt$, что и требовалось доказать.

Следствие. Если множество P покрывает множество $T \times G \times V$ (или множество достижимости) и $\bar{x}, \bar{u} \in Q$, то $\bar{x}, \bar{u}$ является абсолютной минималью задачи I.

*/ Здесь $B_1(t,x,u)$ – заданное подынтегральное выражение.

Замечание. Отбросим часть связей (3.1) или (3.3) */. Тогда из принципа расширения [5] следуют оценки снизу: $I(x) \ge I(\bar{x})$ и $I(x,u) \ge I(\bar{x},\bar{u})$, где $\bar{x}$ и $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$ – абсолютные минимали "усеченной" задачи.

Когда правые части уравнений (3.3), (3.4) не зависят явно от фазовых координат, можно выделить не только множества N, P, но и множество M, а именно справедлива

Теорема 3.4. Пусть $F \equiv 0$, концы $x(t)$ свободны, правые части уравнений (3.3), (3.4) зависят только от t, u, т.е.: $f_i = f_i(t,u)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ и решена задача $\inf_{t,u} B_1(t,u)$. Тогда: I) множество $M = \{t,u:\ B_1 - f_0 \ge \bar{B}_1 - \bar{f}_0,\ t \in T\}$ содержит абсолютную минималь задачи I; 2) множество $N = \{t,u:\ B_1 - f_0 \ge \bar{B}_1 - \bar{f}_0,\ t \in T\}$ содержит такие или лучшие решения; 3) множество $P = \{t,u:\ B_1 - f_0 \le \bar{B}_1 - \bar{f}_0\}$ содержит такие или худшие решения задачи I.

Доказательство для множеств N, P полностью совпадает с доказательством теоремы 3.2. Утверждение относительно множества M следует из разрывности $u(t)$ и зависимости правых частей только от u.

3. Задача динамического программирования Р. Беллмана [6]

Пусть имеется физическая система S, процесс управления которой расчленен на m шагов (этапов). На каждом i-м шаге в нашем распоряжении имеется управление U_i, посредством которого мы переводим систему из допустимого состояния S_{i-1}, достигнутого в результате $(i-1)$-го шага, в новое допустимое состояние S_i, причем $S_i = S_i(S_{i-1}, U_i)$. Этот переход стеснен некоторыми связями. Качество процесса оценивается функционалом $W = \sum_{i=1}^{m} w_i(S_{i-1}, U_i)$.

Построим обобщенный функционал $J_i = W_i + \alpha_i$, где $W_i = \sum_{k=i}^{m} w_k$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и тогда вместо задачи условного минимума $\inf W_i$ можно рассматривать задачу безусловного минимума $\inf_U J_i$. Если связи отсутствуют или таковы, что перебор U_i на каждом шаге удобно делать с учетом связей, то в силу $\alpha = 0$ на допустимых элементах получаем функциональное уравнение Беллмана [6]

$$\bar{W}_i(S_{i-1}) = \min_{U_i} \{W_i(S_{i-1}, U_i)\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

*/ В случае (3.3) x_i, соответствующие отброшенным уравнениям, в оставшихся уравнениях рассматриваются как управления.

4. Применение α-функционала к решению задач с распределенными параметрами

Рассмотрим задачу об абсолютном минимуме функционала

$$I(x,u) = \int_P f_0(t,x,u)\,dt + F(x(\tau)), \qquad (3.12)$$

где $t=(t_1,t_2,\dots,t_m)$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $u=(u_1,u_2,\dots,u_k)$ – элементы векторных пространств T, X, V^* соответственно; P – замкнутая область в пространстве T, ограниченная непрерывной, кусочно-гладкой, фиксированной гиперповерхностью S; причем на S $t=\tau$; P^* – внутренняя часть этой области. Функции $x_i(t)$ на P абсолютно-непрерывны, $u_k(t)$ измеримы на P и u_k принимают значения из области V которая может быть замкнутой и ограниченной.

Функции $x(t), u(t)$ почти всюду удовлетворяют системе nm независимых дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial x_i}{\partial t_j} = f_j^i(t,x,u), \quad i=1,2,\dots,n; \quad j=1,2,\dots,m. \qquad (3.13)$$

Функции f_j^i, f_0 непрерывны вместе со своими частными производными I-го порядка. Функции $x(t)$, $u(t)$ назовем допустимыми, если они удовлетворяют перечисленным условиям (множество Q).

Ставится задача: найти такую пару функций $u(t)$, $x(t)$, на которых функционал I (3.12) принимает наименьшее значение.

Наложим на систему (3.13) условия интегрируемости:

$$\varphi^\gamma = \frac{\partial f_j^i}{\partial t_k} - \frac{\partial f_k^i}{\partial t_j} = 0, \quad i=1,2,\dots,n; \quad j,k=1,2,\dots,\gamma, \quad k>j. \qquad (3.14)$$

Нетрудно подсчитать, что число разных уравнений (3.14) может быть*/ $\frac{1}{2}(m-1)mn$, т.е. $\gamma=1,2,\dots,\frac{1}{2}(m-1)mn$. Для простоты будем полагать, что все функции φ^γ в (3.14) содержат u, что эти u могут быть найдены из (3.14). Пусть число независимых уравнений (3.14) меньше k.

Введем в рассмотрение m-мерную функцию $\psi(t,x)=(\psi^1,\psi^2,\dots,\psi^m)$, компоненты которой $\psi^j(t,x)$ $j=1,2,\dots,m$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные почти всюду на T. Назовем эту функцию характеристической. Введем также интегрируемые вектор-функции

$$\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_p(t).$$

Возьмем α-функционал в виде

$$\alpha = \int_S \psi^j(\tau,x)\cos(n,t^j)\,d\tau - \int_P \left(\psi^j_{t_j} + \psi^j_{x_i} f_j^i + \lambda_\gamma \varphi^\gamma\right) dt, \qquad (3.15)$$

где n – внешняя нормаль к поверхности S; $d\tau$ – элемент поверхности S. Функционал $J=I+\alpha$ представим в виде $J=A+\int_P B\,dt$, где

$$A = F(x(\tau)) + \int_S \psi^j(\tau,x)\cos(n,t^j)\,d\tau, \quad B = f_0 - \psi^j_{t_j} - \psi^j_{x_i} f_j^i + \lambda_\gamma \varphi^\gamma. \qquad (3.16)$$

*/ Число сочетаний $C_m^2 \cdot n$.

Теорема 3.5. Пусть $u(t) \in V$. Для того чтобы пара $u(t), x(t)$ была абсолютной минималью функционала (3.12), достаточно*/ существования α-функционала (3.15) такого, что

$$1)\ \bar{B} = \inf_{x,u \in Q} B(t,x,u), \quad 2)\ \bar{A} = \inf_{x(\tau)} A > -\infty, \quad 3)\ \bar{x}(t), \bar{u}(t) \in Q. \qquad (3.17)$$

Ход рассуждений здесь идентичен [2] №7, но в отличие от [2] теорема 3.5 содержит условия интегрируемости.

Если $\bar{x}(t), \bar{u}(t) \notin Q$, то $\bar{J}$ – оценка снизу функционала (3.12). Если существуют функции ψ, λ и хотя бы одна пара $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$, удовлетворяющая (3.17), то любая другая пара, удовлетворяющая (3.17), есть минималь функционала (3.12) и любая допустимая минималь функционала (3.12) удовлетворяет п. I,2 (3.17) (следствие замечания 3 §I). Множество, содержащее такие или лучшие решения, чем $\bar{x}, \bar{u}$, будет

$$N = \{t,x,u:\ B(t,x,u) + f_0(t,x,u) \geq \bar{B} + \bar{f}_0\} \text{ на } P^* \times V.$$

Пусть $f_j^i(t,x,u)$, $\varphi^\gamma(t,x,u)$ непрерывны и дифференцируемы. Возьмем ψ^j в виде $\psi^j = p_{ij}(t)x_i$. Обозначим

$$H = p_{ij}(t) f_{ij}(t,x,u) - f_0(t,x,u) + \lambda_\gamma(t)\varphi^\gamma(t,x,u).$$

Тогда п. I (3.17) теоремы 3.4 можно переписать: $H(\bar{u}) = \sup_{u \in V} H$, а необходимое условие минимума (условие стационарности), вытекающее из п. 2 (3.17), дает

$$\frac{\partial B}{\partial x_i} \equiv -\frac{\partial p_{ij}}{\partial t_j} - \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0, \quad i=1,2,\dots,n. \qquad (3.18)$$

§4. Метод обратной подстановки

А. Из предыдущего параграфа следует, что, зная минималь какого-либо функционала на допустимом множестве, можно извлечь определенную информацию о решениях задачи I и даже решить одну из задач а,б,в,г §I.

Известно, что большинство прямых задач $\inf f_0(x)$ на X^* или $\inf \int_{t_1}^{t_2} f_0\,dt$ на Q, т.е. нахождение минимали для заданного функционала, решается с большим трудом или вообще не имеет удовлетворительных решений. Однако, если функционал заранее не оговаривать, то решение для такого произвольного функционала найти просто. В этом нет ничего удивительного. В математике давно известно, что многие обратные задачи в отличие от прямых решаются без особого труда. Примером может быть задача отыскания корней алгебраического уравнения. Для общего случая при $n \geq 5$

*/ Утверждать необходимость существования α-функционала нельзя в силу тех же причин, что и в теореме 3.I.

она решается с трудом и ее решение не выражается через радикалы. Если же корни заданы, то соответствующее им алгебраическое уравнение находится при помощи простых действий. На базе этой идеи ниже излагается метод, позволяющий построить функционал, для которого некоторый допустимый элемент был бы абсолютной минималью на допустимом множестве. Поскольку нам при этом приходится решать задачу, обратную исходной (находить не минималь для заданного функционала, а какой-либо функционал для некоторой минимали или поле минималей), то этот метод назван <u>методом обратной подстановки</u>. Метод излагается для двух случаев: задач теории экстремумов функций конечного числа переменных (п. Б) и задач оптимизации, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (п. В) .

Б. Рассмотрим обычную задачу теории экстремумов функций нескольких переменных

$$I = f_0(x)\ , \quad f_i(x) = 0\ , \quad i = 1, 2, \ldots, m < n. \qquad (4.1)$$

Преобразуем ее. Выберем m компонент x и будем называть их <u>основными</u>. Пусть для определенности это первые m компонент вектора x. Оставшиеся $n-m=r$ компонент x обозначим $u_j\ (j=1,2,\ldots,r)$. Тогда задачу (4.1) можно переписать:

$$I = f_0(x,u)\ , \quad f_i(x,u) = 0\ , \quad i = 1, 2, \ldots, m < n, \qquad (4.2)$$

где x – m-мерный вектор, $x \in X$; u – r-мерный вектор, $u \in U$.

Зададимся более простым функционалом $J_1(x,u)$ и найдем его абсолютную минималь на $X \times U$. Это решение можно использовать для построения множеств M, N, P :

$$M = \{x,u:\ J_1 - f_0 \geq \bar{J}_1 - \bar{f}_0\}\ , \qquad (4.3)$$

$$N = \{x,u:\ J_1 + f_0 \leq \bar{J}_1 + \bar{f}_0\}\ , \qquad (4.4)$$

$$P = \{x,u:\ J_1 - f_0 = \bar{J}_1 - \bar{f}_0\}\ . \qquad (4.5)$$

Недостаток этого способа в том, что некоторые из этих множеств могут не содержать допустимых элементов (т.е. x, u, удовлетворяющих $f_i = 0$) .

Предположим, что связи $f_i(x,u) = 0$ в (4.2) могут быть разрешены относительно x :

$$x_i = x_i(u)\ , \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (4.6)$$

и $x \in X$ для $\forall u \in U$. Зададимся достаточно простым функционалом $J_1(x,u)$, подставим в него (4.6) и найдем $\inf\limits_U J_1(x(u),u)$, $\bar{u}$, а по (4.6) $\bar{x}$. Это решение аналогично (4.3) – (4.5) можно использовать для нахождения множеств M, N, P, причем пересечения этих множеств с допустимым уже не пусты. Можно взять $J_1(x,y,u)$, тогда $\bar{u} = \bar{u}(y)$ и зависимость M, N, P от y можно использовать для

изменения "размеров" этих множеств. Очевидна оценка $\Delta = \inf\limits_y \sup\limits_u |J_1(x(u),u) - I(x(u),u)|$

В. В п. 2 §3 рассматривалась задача оптимизации, описываемая обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt\ , \quad \dot{x}_i = f_i(t,x,u)\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n\ , \quad u \in U. \qquad (4.7)$$

Было показано, что если задаться некоторой функцией $\Psi(t,x)$ и найти минимум выражений: $\inf\limits_{x,u} B$ на (t_1, t_2) и $\inf\limits_{x_1, x_2} A$, то получим либо минималь задачи I, либо оценку снизу.

<u>Поставим задачу</u> иначе: найти функционал, который соответствует данной функции $\Psi(t,x)$ и минималь этого функционала на допустимом множестве[*/].

<u>Теорема 4.1</u>. Функционал, соответствующий функции $\Psi(t,x)$, определяется выражением

$$J_1 = \int_{t_1}^{t_2} B_1(t,x)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} -\inf_{u \in U}[-\Psi_{x_i} f_i(t,x,u) - \Psi_t]\,dt, \qquad (4.8)$$

а соответствующая ему допустимая минималь уравнениями:

$$\dot{x}_i = f_i[t, x, \bar{u}(t, x, \Psi_{x_i}, \Psi_t)]\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (4.9)$$

где $\bar{u} = \bar{u}(t, x, \Psi_{x_i}, \Psi_t)$ находится из (4.8).

<u>Доказательство</u>. Составим выражение B (см. (3.11)) для задачи (4.7) и проверим условия (3.8) теоремы 3.1:

$$B_2(t) = \inf_{x,u}[B_1(t,x) - \Psi_{x_i} f_i(t,x,u) - \Psi_t]. \qquad (4.10)$$

Очевидно, что (4.10) тождественно равно нулю при $\Psi = \Psi(t,x)$ в силу (4.8) и $\bar{x}, \bar{u}$ удовлетворяют уравнениям (4.7). Если в качестве значений $x(t_1)$ принять значения $x(t)$, получающиеся из (4.9) при t_1 , то п. 2 (3.8) исчезает и все условия (3.8) теоремы 3.1 будут выполнены. Теорема доказана.

<u>Следствие</u>. Если $B_1 = f_0(t,x)$, то $x(t)$, получаемые из (4.10), дают поле минималей для граничного условия $\Psi_2 = \Psi$. В частности, когда концы кривой $x(t)$ из (4.9) совпадают с заданными граничными значениями, то эта кривая – минималь задачи I.

<u>Замечание</u>. Граничные условия на левом конце, очевидно, всегда могут быть выполнены. Для этого достаточно начать с заданных

---

*/ Заметим, что предлагаемый подход не имеет ничего общего с обратной задачей вариационного исчисления. Там задача ставится так: дана кривая, найти, какой функционал или множество функционалов она минимизирует на данном допустимом подмножестве. Эта задача, вообще говоря, даже труднее, чем прямая задача. У нас же минималь не задана. Она находится по данной функции $\Psi(t,x)$.

значений интегрирование системы (4.9). Добиться выполнения граничных условий на правом конце можно следующим приемом. Задаемся $\Psi(t,x,c)$, где c – n-мерная константа. Подставляем $\Psi(t,x,c)$ в (4.9) и подбираем c так, чтобы удовлетворить заданным граничным условиям на правом конце.

Полученный функционал может быть использован для построения множеств N, P теоремы 3.3 :

$$N=\{t,x:\ f_0+B_1\leq \bar{f}_0+\bar{B}_1\}\ ,\quad P=\{t,x:\ B_1-f_0\leq \bar{B}_1-\bar{f}_0\},$$

где $f_0=f_0[t,x,\bar{u}(t,x,\Psi_x,\Psi_t)]$, а $\Psi(t,x)$ задана. Если найти

$$\bar{J}=\Psi_2-\Psi_1+\int_{t_1}^{t_2}\inf_x(f_0-B_1)\,dt,$$

то получим еще и оценку снизу.

Отметим, что задание $\Psi(t,x)$ определило нам не просто функционал и его минималь, а поле минималей, удовлетворяющих граничному условию $\Psi_2-\Psi_1=C$.

Замечание . Можно задаться $\Psi(t,x,y)$. Тогда $B_1(t,x,y)$. Если можно подобрать такие $\bar{y}(t)$, что $B_1(t,x,\bar{y})\equiv f_0(t,x)$ и краевые условия выполнены, то $\bar{u}(t,x,\bar{y})$ – оптимальный синтез задачи I.

Г. Попутно покажем, как можно найти функционал для заданного синтеза управления $u=u(t,x)$.

Приравняем заданное $u(t,x)$ управлению, найденному из (4.8), получим уравнение в частных производных

$$u(t,x)=\bar{u}(t,x,\Psi_{x_i},\Psi_t). \qquad (4.11)$$

Подставляя его решение $\Psi(t,x)$ и заданное $u(t,x)$ в (4.8), находим тот функционал, которому оно соответствует. Если $B_1=f_0(t,x)$, то это синтез задачи I для граничного условия $\Psi_2=\Psi$.

Возможен и другой подход. Задаемся $u=u(t,x,c)$, $\Psi=\Psi(t,x,y)$. Подставляем их в (4.8). Тогда $B_1=B_1(t,x,c,y)$. За счет y можно попытаться добиться тождества $f_0\equiv B_1$, а за счет выбора c минимизировать функционал I .

Пример 4.1. Пусть дана задача аналитического конструирования регулятора

$$I=\int_0^\infty b_{ij}x_ix_j\,dt, \qquad (4.12)$$

$$\dot{x}_i=a_{ij}x_j+u\ ,\quad 0\leq t\leq\infty, \qquad (4.13)$$

$$x_i(0)=x_{i0}\ ,\ x_i(\infty)=0, \qquad (4.14)$$

где $f_0=b_{ij}x_ix_j$ – положительно определенная форма.

Зададим $u=c_ix_i$, где c_i – постоянная.

Будем искать Ψ в виде квадратичной формы $\Psi=A_{ij}x_ix_j$ с неопределенными коэффициентами. Полагаем $f_0\equiv\dot{\Psi}$, т.е.

$$b_{ij}x_ix_j=A_{ij}x_i(a_{ij}x_j+c_jx_j).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых $x_i x_j$ слева и справа, получаем систему $\frac{n(n+1)}{2}$ линейных неоднородных уравнений с таким же числом неизвестных A_{ij} . Предполагая, что определитель этой системы $\Delta\neq 0$, находим A_{ij} . Подставляя $f_0=\dot{\Psi}$ в (4.12) и интегрируя, находим: $I=\Psi(\infty,c)-\Psi(0,c)$ или с учетом (4.14) $I=-\Psi(x_{i0},c)$. Отыскав минимум этого выражения по c, получим оптимальный синтез. Если $-\Psi(x,\bar{c})$ – положительно определенная форма, то эта функция является функцией Ляпунова (ибо $-\dot{\Psi}\geq 0$) и регулятор асимптотически устойчив.

§5. Метод совмещения экстремумов в задачах условного минимума

В данном параграфе будет показано, как метод совмещения экстремумов, рассмотренный в §2 гл. I, можно распространить на задачи теории функций конечного числа переменных (п. А) и задачи, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

А) Снова рассмотрим задачу теории экстремумов функции конечного числа переменных

$$I=f_0(x)\ ,\ f_i(x)=0\ ,\ i=1,2,\ldots,m. \qquad (5.1)$$

Построим функционал

$$J(x,c)=f_0(x)+\beta(x,c)+\alpha_1(x). \qquad (5.2)$$

Здесь $\alpha_1(x)$ есть α-функционал; c – n-мерная постоянная. Из условия

$$\inf_{x\in X^*} J(x,c) \qquad (5.3)$$

находим $\varphi_1(x^{(1)},c)=0$. Из условия

$$\Phi(x,c)=\sup_{x\in X^*}[\beta(x,c)+\alpha_2(x)] \qquad (5.4)$$

находим $\varphi_2(x^{(2)},c)=0$. Решая совместно с (5.1) систему (уравнения совмещения) :

$$\varphi_1(x^{(1)},c)=0\ ,\ \varphi_2(x^{(2)},c)=0\ ,\ x^{(1)}=x^{(2)}, \qquad (5.5)$$

получаем абсолютную минималь задачи I. Добавка $\beta(x,c)$ подбирается так, чтобы задачи (5.3), (5.4) решались проще.

Пусть, например, $\alpha_1=\lambda_i f_i$, $\alpha_2=\vartheta_i f_i$, функции $f_i(x)$ $i=0,1,\ldots,n$ непрерывны и дифференцируемы, функции $J(x,c)$, $\Phi(x,c)$ имеют единственный минимум и максимум соответственно при любом c . Тогда для определения минимали получаем систему $(3n+2m)$ уравнений с таким же числом неизвестных $x^{(1)}, x^{(2)}, c, \lambda, \vartheta$:

$$J'_{x_j}(x^{(1)},c,\lambda)=0,\ \Phi'_{x_j}(x^{(2)},c,\vartheta)=0,\ f_i(x^{(1)})=0,\ f_i(x^{(2)})=0,\ x_j^{(1)}=x_j^{(2)} \qquad (5.6)$$
$$j=1,2,\ldots,n\ ;\quad i=1,2,\ldots,m.$$

Эту систему можно упростить, если взять вектор c размерности $(n-m)$ и при помощи последнего уравнения в (5.6) исключить $x^{(2)}$. В результате получим систему $(2n+m)$ уравнений:

$$\mathcal{J}'_{x_j}(x,c,\lambda)=0,\quad \Phi'_{x_j}(x,c,\vartheta)=0,\quad f_i(x)=0 \qquad (5.6')$$

с $(2n+m)$ неизвестными x, λ, ϑ, c.

Это же замечание относится и к системе (5.5), (5.1), которая в этом случае принимает вид:

$$\varphi_1(x,c)=0,\quad \varphi_2(x,c)=0,\quad f(x)=0.$$

Пример 5.1. Найти минимум в задаче

$$I=\frac{1}{4}x_1^4+\frac{1}{4}x_2^4+x_1^2+2x_2^2+x_1x_2-6x_1+1,\quad x_1+x_2=0.$$

Возьмем $\beta=-x_1^2-2x_2^2-x_1x_2+6x_1+c_1x_1$, $d_1=\lambda(x_1+x_2)$. Тогда

$$\mathcal{J}=I+\beta+d_1=\frac{1}{4}x_1^4+\frac{1}{4}x_2^4+c_1x_1+\lambda(x_1+x_2),$$

$$\mathcal{J}'_{x_1}=\bar{x}_1^3+c_1+\lambda=0,\quad \mathcal{J}'_{x_2}=\bar{x}_2^3+\lambda=0,$$

Откуда

$$\bar{x}_1=-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c_1},\quad \bar{x}_2=\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c_1}. \qquad (5.7)$$

Точно также

$$\Phi=\beta+d_1=-x_1^2-2x_2^2-x_1x_2+6x_1+c_1x_1+\vartheta(x_1+x_2),$$

$$\Phi'_{x_1}=-2\hat{x}_1-\hat{x}_2+6+c_1+\vartheta=0,\quad \Phi'_{x_2}=-\hat{x}_1-4\hat{x}_2+\vartheta=0,$$

$$\hat{x}_1=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}c_1,\quad \hat{x}_2=-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}c_1. \qquad (5.8)$$

Приравниваем $\bar{x}_1=\hat{x}_1$, $\bar{x}_2=\hat{x}_2$ и получаем уравнение*/

$$z^3+3z+3=0 \qquad \text{или} \qquad (z+1)(z^2-z+3)=0,$$

где $z^3=\frac{1}{2}c_1$. Это уравнение имеет единственный действительный корень $z=-1$, т.е. $c_1=2$. Поэтому по (5.7) получаем $\bar{x}_1=1$, $\bar{x}_2=-1$.

Б) Рассмотрим задачу, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$I=\int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt,\quad \dot{x}_i=f_i(t,x,u),\ i=1,2,\dots,n,\quad u\in U,\ x(t_1)=x_1,\ x(t_2)=x_2. \qquad (5.9)$$

Полагаем $\psi^{(1)}=p_i^{(1)}(t)x_i^{(1)}$ и составляем функцию

$$B_1=f_0+\beta(t,x^{(1)},u^{(1)},z)-p_i^{(1)}f_i^{(1)}-\dot{p}_i^{(1)}x_i^{(1)}=-H^{(1)}-\dot{p}_i^{(1)}x_i^{(1)}.$$

где $z(t)$ – ℓ-мерная функция. Она может иметь конечное число разрывов I-го рода.

*/ Уравнения совпали между собой. Поэтому записано только одно.

Из условия $\inf\limits_{x,u} B_1$ и (5.9) находим

$$\dot{p}^{(1)}=-H_x^{(1)},\quad \bar{u}^{(1)}=\bar{u}^{(1)}(t,x^{(1)},p^{(1)},z),\quad \dot{x}^{(1)}=f(t,x^{(1)},u^{(1)}). \qquad (5.10)$$

Полагаем $\psi^{(2)}=p_i^{(2)}x_i^{(2)}$ и составляем функцию

$$B_2=\beta(t,x^{(2)},u^{(2)},z)-p_i^{(2)}f_i^{(2)}-\dot{p}_i^{(2)}x_i^{(2)}=-H^{(2)}-\dot{p}_i^{(2)}x_i^{(2)}.$$

Из условия $\sup\limits_{x,u} B_2$ и (5.9) находим

$$\dot{p}^{(2)}=-H_x^{(2)},\quad \bar{u}^{(2)}=\bar{u}^{(2)}(t,x^{(2)},p^{(2)},z),\quad \dot{x}^{(2)}=f(t,x^{(2)},u^{(2)}). \qquad (5.11)$$

Учитывая уравнения совмещения: $x^{(1)}=x^{(2)}$, $u^{(1)}=u^{(2)}$, получаем окончательно:

$$\dot{x}=f(t,x,\bar{u}^{(1)}),\quad \dot{p}^{(1)}=-H_x^{(1)},\quad \dot{p}^{(2)}=-H_x^{(2)},\quad \bar{u}^{(1)}(t,x,p^{(1)},z)=\bar{u}^{(2)}(t,x,p^{(2)},z). \qquad (5.12)$$

Это система $(3n+\ell)$ уравнений с $(3n+\ell)$ неизвестными $x, p^{(1)}, p^{(2)}, z$. Последнее уравнение в (5.12) является уравнением совмещения. Добавка β подбирается так, чтобы упростить решение задач по нахождению инфинума и супремума.

§6. Обобщение теоремы 3.1 на случай разрывной $\psi(t,x)$

Теорема 6.1. Пусть имеется всюду определенная на $T\times G$, ограниченная снизу, кусочно-дифференцируемая и кусочно-непрерывная функция $\psi(t,x)$ с разрывами I-го рода как функции $\psi(t,x)$ так и ее производных на конечном числе многообразий $\Phi_\theta(t_\theta,x)$, $\theta=1,2,\dots,k-1$ нулевой меры. Эта функция такая, что существуют:

1) $\inf\limits_{R}(F+\psi_k-\psi_0)$, 2) $\inf\limits_{t_\theta,x\in\Phi_\theta}(\psi_\theta^- - \psi_\theta^+)$, $t_\theta>t_{\theta-1}$, $t_k>t_{k-1}$, $\theta=1,2,\dots,k-1$,

3) $\inf\limits_{x\in V} B=0$, 4) $\bar{x}(t),\bar{u}(t)\in Q$.

Тогда $\bar{x},\bar{u}$ (полученные из п. 1–3) есть абсолютная минималь задачи I.

Здесь $\psi_\theta^-,\psi_\theta^+$ – значения ψ слева и справа (по $x(t)$) от разрыва как ψ, так и ее производных.

Доказательство. Из п. 1–3 имеем

$$\mathcal{J}=\inf_R(F+\psi_k-\psi_0)+\sum_{\theta=1}^{k-1}\inf_{t_\theta,x}(\psi_\theta^- - \psi_\theta^+)+\sum_{\theta=0}^{k-1}\int_{t_\theta}^{t_{\theta+1}}\inf_{x,u}B\,dt.$$

На допустимых кривых (из θ) $\mathcal{J}$ превращается в функционал $I=F+\int_{t_1}^{t_2}f_0\,dt$. Тогда в результате применения следствия 4 §1 в силу п. 4 условия утверждение теоремы становится очевидным. Теорема доказана.

В частности, если разрывы только по t и t_θ фиксированы, р. 2–3 принимают вид: 2) $\inf\limits_{x\in\Phi_\theta(t_\theta)}(\psi_\theta^- - \psi_\theta^+)$ $\theta=1,2,\dots,k-1$, 3) $\inf\limits_{x\in V}B$,

52-53

а если $\psi(t,x)$ непрерывна, то в силу $\psi_\theta^- = \psi_\theta^+$ условие 2 всегда выполнено, а п. 3 заменяется на $\inf\limits_{\beta \in U} B$. Таким образом, теорема 3.I верна и для кусочно-дифференцируемой непрерывной $\psi(t,x)$ (см. 3.8 гл. II). можно показать, что она верна и для всюду определенных и интегрируемых $f_i(t,x,u)$, имеющих конечное число разрывов I-го рода на многообразиях меры нуль в $T \times G \times U$. Она без труда обобщается на случай, когда допустимых $\bar{x}, \bar{u}$ не существует (но существует минимизирующая последовательность, сходящийся к минимуму).

<u>Замечание</u>. Условие 3 теоремы 6.I иногда оказывается трудно выполнимым. В этом случае п. 2-3 теоремы можно заменить условием

$$\inf_{t_\theta}\Big[\inf_x(\psi_\theta^- - \psi_\theta^+) + \int_{t_{\theta-1}}^{t_\theta} \inf_{\beta \in U} B\,dt + \int_{t_\theta}^{t_{\theta+1}} \inf_{\beta \in U} B\,dt\Big],$$

которое следует проверить для каждой точки t_θ, $\theta = 1,2,\dots,\kappa-1$.

§7. <u>Задачи оптимизации, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с ограничениями</u>

В теореме 3.I гл. II минимум A, B ищут на допустимых множествах соответственно R и $U \times G$. Наиболее распространенным методом определения допустимых множеств является выделение их из другого более широкого множества, на котором функционал определен при помощи равенств или неравенств. Но тогда найти минимум можно методом α и β -функционалов.

Рассмотрим кратко наиболее распространенные случаи.

I. <u>Ограничения типа равенств</u>

а) Пусть допустимое множество R выделено при помощи равенств:

$$g_i(x_1,x_2) = 0, \quad i = 1,2,\dots,\ell < 2n. \tag{7.1}$$

Тогда задачу $\inf A$ можно заменить задачей

$$\inf_{x_1,x_2}\big[A + \mu_i(x_1,x_2,z_i)\,g_i(x_1,x_2)\big]. \tag{7.2}$$

Здесь μ_i – известные функции, z ℓ-мерный неопределенный вектор, В частности, можно взять $\mu_i = z_i$.

б) Допустимое множество $U \times G$ выделено при помощи равенств

$$\varphi_i(t,u,x) = 0, \quad i = 1,2,\dots,\ell < r. \tag{7.3}$$

Пусть из (7.3) можно найти ℓ компонент вектора u. Тогда задачу $\inf\limits_{u \in U} B$ можно заменить задачей

$$\inf_{x,u}\big[B + \lambda_i(t,x,w)\,\varphi_i(t,x,u)\big], \tag{7.4}$$

где λ_i известные функции, w ℓ -мерная неопределенная вектор-

функция. В частности, можно взять $\lambda_i = w_i$.

в) Допустимое множество G выделено равенствами:

$$\varphi_i(t,x) = 0, \quad i = 1,2,\dots,\ell < n. \tag{7.5}$$

Продифференцируем (7.5) полным образом по t и найдем

$$\varphi_i^{(1)}(t,x,u) \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} f_j(t,x,u) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1,2,\dots,\ell < n. \tag{7.6}$$

Если среди уравнений (7.5) есть уравнения, не содержащие u, то дифференцируем их еще раз и т.д., пока не получим систему, в которой все ℓ уравнений содержат u. Пусть ℓ компонент u можно найти из этой системы $(\ell < r)$.

Тогда задача (7.5) сводится к задачам п. а,б, в которых (7.6) есть (7.3), а (7.5) и все уравнения (7.6), не содержащие u, есть (7.1).

2. <u>Ограничения типа неравенств</u>

а) Допустимое множество R выделено при помощи неравенств:

$$g_i(x_1,x_2) \le 0, \quad i = 1,2,\dots,\ell.$$

Тогда согласно теореме I.4 гл. I задачу $\inf\limits_R A$ заменяем задачей (7.2) при дополнительных условиях:

$$\bar{\lambda}_i g_i = 0, \quad \bar{\lambda}_i \ge 0 \qquad (\text{по } i \text{ – не сумма}). \tag{7.7}$$

б) Допустимое множество $U \times G$ выделено при помощи неравеств:

$$\varphi_i(t,x,u) \le 0, \quad i = 1,2,\dots,\ell. \tag{7.8}$$

Причем все они содержат u. Тогда задачу $\inf\limits_{U \times G} B$ заменяем задачей (7.4) при условиях:

$$\bar{\lambda}_i \varphi_i = 0, \quad \bar{\lambda}_i \ge 0 \qquad (\text{по } i \text{ – не сумма}). \tag{7.9}$$

<u>Пример 7.I</u>. Пусть в задаче

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x,u)\,dt, \quad \dot{x}_i = f_i(t,x,u), \quad i = 1,2,\dots,n,$$

управление u –скаляр, а допустимое множество U ограничено неравенствами $a \le u \le b$ $(a < b)$. Составим (7.4): $\inf[B + \lambda_1(u-b) + \lambda_2(-u+a)]$. Согласно (7.9) на допустимых u: $\bar{\lambda}_1(\bar{u}-b)=0$, $\bar{\lambda}_2(-\bar{u}+a)=0$ и поэтому имеем

$$\inf_u\big[B + \lambda_1(u-b) + \lambda_2(-u+a)\big] = \inf_{a \le u \le b} B.$$

Справа стоит одно из условий принципа максимума.

в) Допустимое множество G выделено дифференцируемыми неравенствами

$$\varphi_i(t,x) \le 0, \quad i = 1,2,\dots,\ell. \tag{7.10}$$

Дифференцируя (7.10) полным образом по t, получим неравенства

$$\varphi_i^{(1)}(t,x,u) \equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} f_j(t,x,u) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0, \quad i = 1,2,\dots,\ell. \tag{7.11}$$

54-55

Если среди них есть неравенства, не содержащие u, то дифференцируем их еще раз и т.д., пока не получим систему, в которой все неравенства содержат u. Обозначим их $\dot\Phi^j(t,x,u)\le0$, $j=1,2,\dots,\ell$, а неравенства (7.I0) и (7.II), не содержащие u, обозначим

$$\Phi^j(t,x)\le0,\quad j=1,2,\dots,k. \qquad (7.I2)$$

Воспользуемся теоремой 6.I, где за возможные разрывы функций $\Psi(t,x)$ возьмем многообразия $\Phi^j(t_s,x)=0$ с ограничением (7.I2). Кроме того, в процессе движения по ограничению действуют и неравенства $\dot\Phi_j\le0$. Поэтому (3.7) гл. II можно записать в виде

$$J=\inf_k A+\inf_{t_s}\Big[\inf_x\big(\Psi_s|_-^+ +\nu_j\Phi^j\big)+\sum_{s=0}^{k-1}\int_{t_s}^{t_{s+1}}\inf_{u}\big(B+\lambda_j\dot\Phi^j\big)dt\Big] \qquad (7.13)$$

при дополнительных условиях, следующих из теоремы I,4 гл. I:

$$\nu_j\Phi^j=0,\quad \nu_j\ge0,\quad \lambda_j\dot\Phi^j\ge0,\quad \lambda_j\ge0 \text{ (по } j \text{ - не сумма)} \qquad (7.I4)$$

Здесь индексы - минус и плюс - обозначают величины слева и справа от точки входа на ограничения.

Пусть для простоты $\ell=k=1$, т.е. имеется одно ограничение. Из необходимых условий минимума первого слагаемого в квадратных скобках в (7.I3) следует, что на минимали

$$\Psi_{x_i}^- - \Psi_{x_i}^+ + \nu\Phi_{x_i}=0,\quad i=1,2,\dots,n. \qquad (7.I5)$$

А из необходимых условий минимума по t_s получаем

$$[f_0-\Psi_{x_i}f_i]^- - [f_0-\Psi_{x_i}f_i]^+ = -\nu\Phi_t.$$

Умножая выражения (7.I5), кроме первого, на f_i^- и складывая между собой, получим

$$(\Psi_{x_i}^- f_i^- - f_0^-)-(\Psi_{x_i}^+ f_i^- - f_0^-)=-\nu\dot\Phi^- +\nu\Phi_t.$$

Аналогично умножая (7.I5) на f_i^+ и складывая, найдем

$$(-\Psi_{x_i}^+ f_i^+ + f_0^+)-(\Psi_{x_i}^- f_i^+ - f_0^+)=-\nu\dot\Phi+\nu\Phi_t.$$

Вычитая эти выражения и используя обозначения для B, получим

$$[B^+(u^-)-B^-]+[B^-(u^+)-B^+]=\nu(\dot\Phi^- - \dot\Phi^+). \qquad (7.I6)$$

Так как $x_i^-=x_i^+$, а на минимали из $\inf B$ имеем, что $B(\cdot)\ge\bar B$, то $B^+(u^-)\ge B^-$, $B^-(u^+)\ge B^+$, т.е. левая часть неотрицательна. Кроме того, очевидно, что $\dot\Phi^-\ge0$, $\dot\Phi^+\le0$, т.е. первая часть (7.I6) неположительна. Поэтому $\nu(\dot\Phi^- - \dot\Phi^+)=0$. Так как $\dot\Phi^+=0$, то $\nu\ne0$ может быть только в точках, в которых кривая $t, x(t)$ в моменты t_s касается гиперповерхности ограничения.

Если взять $\Psi=y_ix_i$, $\lambda=\lambda(t)$ и обозначить $H=y_if_i-f_0$, то необходимые условия минимума, следующие из подынтегрального

выражения в (7.I3), дадут систему для расчета экстремали между точками входа и схода с ограничениями:

$$\dot x_i=f_i(t,x,u),\ \dot y_i=-H_{x_i}+\lambda\dot\Phi_{x_i},\ \lambda\dot\Phi=0,\ \lambda\ge0,\ \sup_u H, \qquad (7.I7)$$

а условия (7.I5) позволят рассчитать значения y_i^+ при входе и сходе:

$$[f_0-y_if_i]^- - [f_0-y_if_i]^+ = -\nu\Phi_t,\quad y_i^- - y_i^+=\nu\Phi_{x_i},\ i=1,2,\dots,n,\quad \nu\ge0. \qquad (7.I8)$$

Алгоритм расчета состоит в следующем. Задаемся $y_i(t_1)$ и интегрируем уравнения (7.I7), пока не наступит равенство $\Phi(t,x)=0$. Далее по (7.I8) находим y_i^+ и ν. Если $\nu\ge0$, то по (7.I7) определяем λ. Если $\lambda\ge0$, то идем по ограничению. При $\nu<0$ или $\lambda<0$ условия входа на ограничение не выполнены и надо подбирать $y_i(t_1)$, до тех пор, пока они не будут выполнены. Сход с ограничения возможен в любой момент, пока $\nu\ge0$. Момент схода подбирается так, чтобы удовлетворить заданные граничные условия на правом конце. Движение по ограничению возможно до тех пор, пока $\lambda\ge0$ или пока система (7.I7) совместна.

<u>Пример 7.2</u>. Решить задачу

$$I=\int_0^4\tfrac12(x^2+u^2)dt,\quad \dot x=u,\quad x\ge\tfrac12,\quad x(0)=1,\quad x(4)=1. \qquad (7.I9)$$

Дифференцируя ограничение $\Phi=0{,}5-x\le0$, найдем $\dot\Phi=-u\le0$. Возьмем $\Psi=yx$. Тогда

$$J=yx|_-^+ +\nu(0{,}5-x)+\int_0^4\big(\tfrac12x^2+\tfrac12u^2-yu-\lambda u-\dot yx\big)dt.$$

Необходимые условия минимума уравнения (7.I7)

$$\dot x=u,\quad \dot y=x,\quad u=y+\lambda,\quad \lambda u=0,\quad \lambda\ge0. \qquad (7.20)$$

Рассмотрим область $x>0{,}5$. Здесь, вообще говоря, $u\ne0$ поэтому $\lambda=0$. Итак, $\dot x=u$, $\dot y=x$, $u=y$. Решая ее, находим

$$y=C_1e^t+C_2e^{-t},\quad x=C_1e^t-C_2e^{-t},$$

где C_1, C_2 - постоянные интегрирования. Так как $x(0)=1$, то $C_1-C_2=1$, и

$$y=C_1(e^t+e^{-t})-e^{-t},\quad x=C_1(e^t-e^{-t})+e^{-t}. \qquad (7.2I)$$

Условия входа на ограничение:

$$y^- - y^+=\nu,\quad \big[\tfrac12x^2+\tfrac12u^2-yu\big]^-=\big[\tfrac12x^2+\tfrac12u^2-yu\big]^+.$$

Подставляя слева $u^-=y$, а справа $u^+=0$, получим $-\frac12(y^-)^2=0$, т.е. $y^-=0$, $y^+=-\nu$. Таким образом, чтобы войти на ограничение, надо в момент $x(t_1)=0{,}5$ подобрать $y(0)$ так, чтобы $y^-(t_1)=0$, где t_1 - момент входа. Так как $\dot x=y$, то это равносильно требованию входа по касательной к ограничению. Подставляя $y(t_1)=0$, $x(t_1)=0{,}5$ в (7.2I), находим C_1, t_1: $t_1=-\ln(2-\sqrt3)=1{,}31$, $C_1=\frac12(2-\sqrt3)$.

Из $\psi^{+}(t_1)=-\nu$ и $\nu \geq 0$ следует, что можно взять любое $\psi^{+}(t_1) \leq 0$. Так как на ограничении $u \equiv 0$, то $\lambda = -\psi$ и, пока $\psi(t) \leq 0$, величина $\lambda \geq 0$ и движение по ограничению возможно. На ограничении $x \equiv 0{,}5$ и из (7.20) имеем $\psi = \frac{1}{2}t + c$ или, учитывая начальное условие $\psi(t_1)$, найдем, что на ограничении

$$\psi = \frac{1}{2}t + \left[\psi(t_1) - \frac{1}{2}t_1\right].$$

Эта функция растет, но при $\psi(t_1) < 0$ некоторое время она отрицательна. Будем сходить с ограничения при $\psi(t) = 0$, т.е. регулировать момент схода t_2 подбором $\psi^{+}(t_1)$. При сходе получим (см. (7.18)).

$$\psi^{-}(t_2) - \psi^{+}(t_2) = \nu(t_2), \quad \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}u^2 - \psi u\right]^{-} = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}u^2 - \psi u\right]^{+}.$$

Подставляя сюда $\bar{u} = 0$, $u^{+} = \psi$, получим, что $\psi^{+}(t_2) = 0$. Из $\dot{x} = \psi$ видно, что в момент схода касательная к $x(t)$ совпадает с ограничением.

После схода интегрируется система:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{\psi} = x, \quad u = \psi, \quad \psi(t_2) = 0, \quad x(t_2) = 0{,}5.$$

Так как $\dot{\psi} > 0$, $\psi(t_2) = 0$, то при $t > t_2$ $\psi(t) > 0$, $u(t) > 0$ и $x(t) > 0{,}5$, т.е. траектория будет удаляться. Она также описывается уравнениями (7.21), в которых t_2, C_1, C_2 находятся из граничных условий $x(1) = 1$, $\psi(t_2) = 0$, $x(t_2) = 0{,}5$. Вид траектории изображен на рис. 2.3.

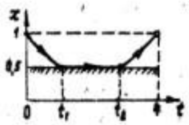

Рис. 2.3

г) Допустимое множество D кривых $x(t)$ выделено неравенствами

$$\dot{x}_i - f_i(t, x, u) \leq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Зададимся $\psi(t, x)$ и возьмем β-функционал в виде

$$\beta = \int_{t_0}^{t_1} \psi_{x_i}\left[\dot{x}_i - f_i(t, x, u)\right] dt. \qquad (7.22)$$

Составим функционал $J = I + \beta$.

Интегрируя первый член в (7.22) по частям, получим $J = A + \int_{t_0}^{t_1} B\,dt$. Мы пришли к задаче (3.8) при дополнительных условиях.

§8. Оптимизация дискретных систем

А) Пусть имеются множества произвольной природы X и U с элементами x и u соответственно и конечный натуральный ряд чисел $K = (0, 1, 2, \ldots, N)$. Каждому $k \in K$ соответствует допустимое подмножество $V(k)$ прямого произведения $X \times U$, т.е. $V(k) = X(k) \times U(k)$

Предположим, что задан оператор, определенный на прямом произведении $K \times X \times U$ и при каждом $k \in K$ отображающий последнее на множество $X(k+1)$, а именно[*]

$$x_i(k+1) = f_i^{k}[k, x(k), u(k)] \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (8.1)$$

На конечные значения $x(0)$, $x(N)$ наложены связи

$$g_\alpha[x(0), x(N)] = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p \leq 2n. \qquad (8.2)$$

Элемент x называют состоянием системы, или фазовым состоянием, а u – управлением. Первый отличается от второго тем, что входит в уравнения (8.1) при разных k. Элемент $u = \{u(k)\}$, $k \in K$ называют <u>допустимым управлением</u>, если $u(k) \in U(k)$, $k \in K$, а соответствующий ему по (8.1) элемент $x = \{x(k)\}$, $k \in K$ – <u>допустимым фазовым состоянием</u>, если $x(k) \in X(k)$, $k \in K$. Множество допустимых x, u обозначим Q.

Качество состояния оценивается функционалом

$$I = g_0(x(0), x(N)) + \sum_{k=1}^{N-1} f_0^{k}[k, x(k), u(k)], \qquad (8.3)$$

где $f^{0}(k, x, u)$ – функция, определенная на $K \times X \times U$. Требуется на множестве допустимых x, u найти пару x^{*}, u^{*}, дающую функционалу (8.3) наименьшее значение. Предполагается, что $\inf\limits_{Q} I$ существует.

Б) Зададим α-функционал в виде

$$\alpha = \lambda_\alpha g_\alpha[x(0), x(N)] + \psi(N, x) - \psi(1, f(0, x, u)) - \sum_{k=1}^{N-1}\left[\psi(k+1, f^{k}(k, x, u)) - \psi(k, x)\right], \qquad (8.4)$$

где $\psi(k, x)$ – функции, определенные на $K \times X$, $\lambda_\alpha(x)$ – функции, определенные на $X(0) \times X(N)$.

Функционал $J = I + \alpha$ представим в виде $J = A + \sum_{k=1}^{N-1} B_k$,

где
$$A = g(x(0), x(N)) + \lambda_\alpha g_\alpha[x(0), x(N)] + \psi(N, x) - \psi[1, f(0, x, u)],$$
$$B_k(k, x, u) = f_0(k, x, u) - \psi[k+1, f(k, x, u)] + \psi(k, x). \qquad (8.5)$$

Тогда из следствия I §I гл. II вытекает:

<u>теорема 8.1</u>. Для того, чтобы пара $\bar{x}, \bar{u}$ была абсолютной минималью функционала (8.3) на допустимом множестве Q, достаточно существования α-функционала в (8.4) такого, что

$$1)\ \bar{B}_k = \inf_{V(k)} B_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1, \qquad (8.6)$$

$$2)\ \bar{A} = \inf_{X(0) \times X(N)} A, \quad 3)\ \bar{x}, \bar{u} \in Q.$$

---

[*] Верхний индекс у f_i^{k} показывает, что уравнения (8.1) могут меняться от ступени к ступени, т.е. процесс гетерогенный.

Этот результат для гомогенного процесса (f_i – неизменные от ступени к ступени) получен в [2], а теоремой 8.I обобщен для гетерогенного процесса.

Если окажется, что $\bar{x}, \bar{u} \notin Q$, то $\bar{J}$ есть оценка снизу (8.3) на Q.

В этом случае множество, содержащее абсолютную минималь, есть пересечение множества $M(k)$ и $V(k)$, где

$$M(k) = \{x(k), u(x) : \Psi(k+1, f^k(k, x, u)) \leq \Psi(k, \bar{x})\}, k = 1, 2, \ldots, N-1, \quad (8.7)$$

$$M(0) \times M(N) = \{x(0), u(0), x(N) : A - g_0 \geq \bar{A} - \bar{g}_0\}. \quad (8.8)$$

Множество, содержащее заведомо лучшие решения, чем данное, есть пересечение множеств $N(k)$ и $V(k)$, где

$$N(k) = \{x(k), u(k) : B_k + f_{0,k} \leq \bar{B}_k + \bar{f}_{0,k}\}, k = 1, 2, \ldots, N-1, \quad (8.9)$$

$$N(0) \times N(N) = \{x(0), u(0), x(N) : A + g_0 \leq \bar{A} + \bar{g}_0\}. \quad (8.10)$$

Как (8.7), так и (8.9) следуют из определения множеств M и N и (8.3).

§9. Оптимизация функционалов, зависящих от промежуточных значений

Пусть в задаче §3, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями, функционал зависит от значений, принимаемых функцией $x(t)$ в промежуточной точке t_0 $(t_1 < t_0 < t_2)$, а именно

$$I = F(x_1, x_2) + \Phi(t_0, x_0) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x, u)\, dt.$$

Составим обобщенный функционал как сумму двух функционалов по $[t_1, t_0]$ и (t_0, t_2):

$$J = F + \Psi_2 - \Psi_1 + \Phi + \Psi_0^+ - \Psi_0^- + \int_{t_1}^{t_0} B\, dt + \int_{t_0}^{t_2} B\, dt.$$

Отсюда видно, что вместо условия 2 (3.8) теоремы 3.I появляются условия:

$$\inf_{t_0, x_0} [\Phi(t_0, x_0) + \Psi^+(t_0, x_0) - \Psi^-(t_0, x_0)], \quad \inf_{x, u} B = 0.$$

§10. Замечание об эквивалентности разных форм вариационных задач

А) В §3 была рассмотрена задача минимизации функционала

$$I = F(x_1, x_2) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x, u)\, dt. \quad (10.1)$$

на решениях уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(t, x, u), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (10.2)$$

При теоретическом анализе ради упрощения выкладок мы часто полагали, что в (3.I) $F = 0$ или $f_0 = 0$. Покажем, что это не ограничивает общности наших рассуждений. Пусть $I = \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x, u)\, dt$. Дифференцируя это выражение по переменному верхнему пределу и вводя новую переменную $\dot{x}_{n+1} = f_0$, придем к задаче

$$I = x_{n+1}(t_2), \quad \dot{x}_i = f_i, \quad \dot{x}_{n+1} = f_0. \quad (10.3)$$

Б) Пусть $I = F(x_1, x_2)$. Дифференцируя это выражение по t, а затем интегрируя, получим функционал

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (F_{x_i} f_i)\, dt. \quad (10.4)$$

Аналогично (10.1) можно превратить в (10.4) и в (10.3).

В) Предположим, что (10.1) и (10.2) зависят от постоянных c_k, которые также надо выбрать оптимальными. Обозначим $c_k = x_{n+k}$ и добавим к (3.2) уравнения $\dot{x}_{n+k} = 0$. Мы свели задачу с параметрами к обычной задаче.

Однако практически удобнее решать задачу (10.1), (10.2) при фиксированных параметрах, а затем менять их (например, по методу градиентного спуска) так, чтобы функционал (3.I) убывал.

Г) Задачу с f_i, зависящими явно от t можно свести к задаче с f_i, не зависящим явно от t, если полагать $t = x_{n+1}$ и к (10.1) добавить уравнение $\dot{x}_{n+1} = 1$.

Д) Покажем, как задачу с подвижным t_1 или t_2 привести к задаче с фиксированным интервалом интегрирования. Введем новую переменную интегрирования $t = c\tau$. Тогда задача (10.1), (10.2) с переменным t_1 или t_2 превратится в задачу с фиксированным интервалом (τ_1, τ_2)

$$I = F + \int_{\tau_1}^{\tau_2} c f_0(\tau, x, u)\, d\tau, \quad x_i' = c f_i(c\tau, x, u),$$

где штрих обозначает производную по τ. Постоянная $c > 0$ выбирается из условия минимума I.

Приложения к главе II

I. Теорема 3.I и известные методы решения задач оптимизации, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями

Из теоремы 3.I можно получить условия, совпадающие с известными алгоритмами решения задач оптимального управления, как: принцип максимума Л.С. Понтрягина [I], уравнение Беллмана [6], классическое вариационное исчисление [7].

Потребуем дополнительно, чтобы f, Ψ имели непрерывные соответствующие производные.

а) Принцип максимума Понтрягина. Следуя [2], возьмем $\Psi(t,x)$ в виде $\Psi = p_i(t)\Delta x_i$, где $p_i(t)$ – некоторые дифференцируемые функции t, $\Delta x_i = x_i - \bar{x}_i$. Составим гамильтониан

$$H = p_i(t) f_i(t,x,u) - f_0(t,x,u). \qquad (1)$$

Тогда $B = -H - \dot{p}_i x_i$, необходимые условия минимума B по x, вытекающие из п. I (3.8) теоремы 3.I (условия стационарности), таковы

$$B_{x_i} \equiv -\dot{p}_i - H_{x_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (2)$$

Кроме того, из п. I (3.8) имеем

$$B(t,x,\bar{u}) = \inf_{u \in U} B(t,x,u) \quad \text{или} \quad \inf_{u \in U}(-H) = -\sup_{u \in U} H. \qquad (3)$$

Условия (2), (3) совместно с (3.3) совпадают с соответствующими условиями принципа максимума[*] [1].

б) Уравнение Беллмана. Пусть $x_n \neq 0$. Зададимся всеми $\lambda_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,n-1$, кроме $\lambda_n = \Psi(t,x)/x_n$. Подставим их в (3.9) §3, получим известное уравнение Беллмана [6]

$$\inf_{u \in U}(f_0 - \Psi_{x_i} f_i - \Psi_t) = 0. \qquad (4)$$

Краевым условием для него является $A = const$. В результате решения этого уравнения мы получим все поле оптимальных траекторий.

в) Классическое вариационное исчисление. Из п. I, 2 теоремы 3.I легко извлечь условия относительного минимума, совпадающие с соответствующими условиями вариационного исчисления [7].

Пусть U – открытая область, $x(t)$, $u(t)$ непрерывны, $f_i(t,x,u)$ имеют непрерывные частные производные до 3-го порядка. Возьмем $\Psi = p_i(t)\Delta x_i$. Из (3) следует, что в точке минимума

$$B_{u_i}(t,x,u) = -H_{u_i}(t,x,u) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,s. \qquad (5)$$

Уравнения (2), (4) совпадают с обычными уравнениями Эйлера-Лагранжа [7] §2, п. I. Из [3] также следует

$$-H_{u_i u_j}\delta u_i \delta u_j \geq 0, \quad i,j = 1,2,\ldots,s. \qquad (6)$$

Это совпадает с условием Клебша слабого относительного минимума [7], §2, п. 2.

---

[*] Это нельзя понимать как получение необходимых условий из достаточных. Мы получили необходимые условия минимума задачи 2: $\inf[f(x) + \varphi(x)]$ на X, и оказалось, что эти условия являются также и известными необходимыми условиями задачи I: $\inf f(x)$ на X^*. Этого следовало ожидать, так как теорема 3.3 дает достаточные условия совпадения решений задач I и 2.

Из (3) можно получить условие, совпадающее с условием Вейерштрасса. В самом деле, если B выбрано согласно (3), то

$$B(t,x,u) - B(t,x,\bar{u}) \geq 0. \qquad (7)$$

Возьмем Ψ в виде $\Psi = p_i(t)\Delta x_i$. Принимая во внимание (I), неравенство (7) можно переписать в виде

$$f_0(t,x,u) - p_i(t) f_i(t,x,u) - f_0(t,x,\bar{u}) + p_i(t) f_i(t,x,\bar{u}) \geq 0. \qquad (8)$$

Здесь u – любые, а $\bar{u}$ – значения, соответствующие $\inf_{u \in U} B$. Добавим к (8) тождественные нули

$$p_i[\dot{X}_i - f_i(t,x,u)] = 0, \quad p_i[\dot{x}_i - f_i(t,x,\bar{u})] = 0. \qquad (9)$$

Тогда

$$f_0 + p_i(\dot{X}_i - f_i) - \bar{f}_0 - p_i(\dot{x}_i - \bar{f}_i) - p_i f_i + p_i \bar{f}_i \geq 0. \qquad (10)$$

Здесь $\bar{f}_i = f_i(t,x,\bar{u})$. Выпишем известную в вариационном исчислении функцию Лагранжа

$$\bar{F} = f_0(t,x,\bar{u}) + p_i(t)[\dot{x}_i - f_i(t,x,\bar{u})], \qquad (11)$$

где роль неопределенных множителей (множителей Лагранжа) играют $p_i(t)$. Согласно (9) $p_i = \partial\bar{F}/\partial\dot{x}_i$. Использовав (10) и (11), без труда получаем

$$F - \bar{F} - (\dot{X}_i - \dot{x}_i)\bar{F}_{\dot{x}_i} \geq 0, \qquad (12)$$

где $F = f_0 + p_i(\dot{X}_i - f_i)$. Неравенство (12) совпадает с условием Вейерштрасса сильного относительного минимума.

Из выражений п. 2 (3.8) теоремы 3.I можно получить условие, совпадающее с условием трансверсальности вариационного исчисления. Пусть, например, множество R есть все пространство E_n. Тогда условие стационарности, следующее из п. 2 (3.8) теоремы 3.I, дает условие, совпадающее с условием трансверсальности:

$$\left.\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}\right]\right|_t = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (13)$$

Условие, совпадающее с условием Якоби относительного минимума, можно получить из п. I,2 (3.8) теоремы 3.I. Пусть для простоты концы фиксированы. Вычисляя $d^2 J$, получим

$$d^2 J = d^2\int_{t_1}^{t_2} B\,dt = \int_{t_1}^{t_2}(B_{x_i x_j}\delta x_i \delta x_j + 2B_{x_i u_\beta}\delta x_i \delta u_\beta + B_{u_\beta u_\gamma}\delta u_\beta \delta u_\gamma)\,dt \geq 0, \qquad (14)$$
$$i,j = 1,2,\ldots,n, \quad \beta,\gamma = 1,2,\ldots,m,$$

где $\delta x_i(t)$, $\delta u_\beta(t)$ подчинены уравнениям связи в вариациях

$$\delta\dot{x}_i = f^i_{x_j}\delta x_j + f^i_{u_\beta}\delta u_\beta, \quad i,j = 1,2,\ldots,n, \quad f_i = f^i.$$

Легко видеть, что выражение, стоящее справа под интегралом в (14), совпадает со второй вариацией от F (3.7), если $\Psi = p_i(t)\Delta x_i$.

62-63

Замечание о достаточном условии Пиконе-Беллмана-Кротова.

а) В работе [3] Пиконе рассматривал задачу об абсолютном минимуме функционала:

$$I(y)=\int_a^b f(x,y,y')\,dx, \qquad (15)$$

где $y(x)$ – n-мерный вектор, $y\in T$, $y'\in G$, $y(a)$, $y(b)$ заданы. Здесь используются обозначения работы [3]. Он доказал теорему (см. теорему I в [3]), что вектор-функция $\bar y(x)$ минимизирует $I(y)$, если можно определить n дифференцируемых функций $B^i(x,y)$, $B_x^i(x,y)$ таким образом, что при каждом $x\in(a,b)$ и любых y, y' из $T\times G$ справедливо неравенство (см. выражение (13) в [3]):

$$\Omega(x,y,p)\equiv f(x,y,p)-\bar f+\sum_{i=1}^n B^i\bar y_i'-\sum_{i=1}^n B^i p_i-\int_{\bar y_i}^{y_i}\sum_{i=1}^n B_x^i\,dy\geq 0. \qquad (16)$$

Он же указал, что для существования B^i, B_x^i достаточно существования такой функции

$$g(x,y)=\bar g(x)+\int_{\bar y_i}^{y_i}\sum_{i=1}^n B^i(x,y)\,dy_i,$$

что

$$g_{y_i}=B^i, \quad g_x-\bar g_x=\int_{\bar y_i}^{y_i}\sum_{i=1}^n B_x^i\,dy. \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (16), получим

$$\Omega(x,y,p)=(f-g_{y_i}f_i-g_x)-(\bar f-\bar g_{y_i}\bar f_i-\bar g_x)\geq 0 \qquad (18)$$

Если обозначить $g=\varphi$, $x=t$, $R=\varphi_{x_i}f_i+\varphi_t-f_0$, то (18) можно переписать как достаточное условие абсолютного минимума Кротова ([2] № 12): $\sup\limits_{x,u} R$ для задачи (15).

б) Достаточное условие Кротова $\sup\limits_{x,u} R$ [2] непосредственно следует также из неравенства Беллмана: для того, чтобы допустимая пара $\bar x,\bar u$ была абсолютной минималью задачи

$$I=\int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt,\quad \dot x_i=f_i(t,x,u)\quad i=1,2,\dots,n,\quad x(t_1)=x_1,\ x(t_2)=x_2, \qquad (19)$$

достаточно существование такой дифференцируемой функции $\omega(t,x)$, чтобы для любой пары x,u и любого $t\in(t_1,t_2)$ имело место неравенство

$$\sum_{i=1}^n \omega_{x_i}(t,x)f_i(t,x,u)+\omega_t(t,x)-f_0(t,x,u)\leq\sum_{i=1}^n \omega_{x_i}(t,\bar x)f_i(t,\bar x,\bar u)+\omega_t(t,\bar x)-f_0(t,\bar x,\bar u) \qquad (20)$$

(см., например, такое неравенство для автономной задачи быстродействия в [1] стр. 82, выр.(82)). Полагая $\omega(t,x)=\varphi(t,x)$, неравенство (20) можно переписать

$$\mu=\sup_{x,u} R(t,x,u) \qquad \text{при } \forall t\in(t_1,t_2). \qquad (21)$$

Условие (21) есть достаточное условие Кротова [2]. Однако при использовании работы [2] надо иметь в виду, что она содержит ряд некорректностей (см., например, [8], [9]).

2. Получение из α-функционала метода "штрафа"

А) Рассмотрим задачу поиска экстремума функций конечного числа переменных

$$I=f_0(x),\quad f_i(x)=0,\quad i=1,2,\dots,m<n. \qquad (1)$$

Зададимся α-функционалом в виде

$$\alpha=a_i f_i^2, \qquad (2)$$

где a_i – постоянные, $a_i>0$. Очевидно, что (2) это – α-функционал, так как на допустимых x он обращается в нуль. Построим обобщенный функционал

$$J=f_0(x)+a_i f_i^2. \qquad (3)$$

Известно, что при определенных условиях при $a_i\to\infty$ минималь обобщенного функционала стремится к минимали задачи (I).

Однако из теоремы 1.4 вытекает и новый факт: минимум обобщенного функционала (3) при любом α является оценкой снизу функционала (I).

Б) Рассмотрим задачу оптимизации, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$I=F(x_1,x_2)+\int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt,\quad \dot x_i=f_i(t,x,u),\ i=1,2,\dots,n \qquad (4)$$

и подробно изложенную в §3 п. Б.

Зададим α-функционал в виде

$$\alpha=\int_{t_1}^{t_2}\frac{a_i}{2}\left[\dot x_i-f_i(t,x,u)\right]^2 dt, \qquad (5)$$

где $a_i>0$, и будем искать минимум функционала

$$\hat I=F+\int_{t_1}^{t_2}\left[f_0+\frac{a_i}{2}(\dot x_i-f_i)^2\right]dt. \qquad (6)$$

Для решения этой задачи можно применить теорему 3.1.

Введем обозначения $\dot x_i=V_i$, $i=1,2,\dots,n$,

где V_i – новые управления. Тогда обобщенный функционал запишется:

$$J=F+\Psi\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left[f_0+\frac{a_i}{2}(V_i-f_i)^2-\Psi_{x_i}V_i-\Psi_t\right]dt=A+\int_{t_1}^{t_2}B\,dt, \qquad (7)$$

Пусть концы $x(t)$ фиксированы. Возьмем $\Psi=p_i(t)x_i$. Подставим его в (7). Из условия $\inf\limits_{x,u,v} B$ получаем (U открыто):

$$B_{V_i}=a_i(V_i-f_i)-p_i=0 \quad\text{или}\quad V_i=f_i+\frac{p_i}{a_i}, \qquad (8)$$

т.е.

$$\dot x_i=f_i+\frac{p_i}{a_i}. \qquad (9)$$

Далее учитывая (8), находим

$$B_{x_j}\equiv\frac{\partial f_0}{\partial x_j}+a_i(V_i-f_i)\left(-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)-\dot p_i=\frac{\partial f_0}{\partial x_j}-p_i\frac{\partial f_i}{\partial x_j}-\dot p_i=0, \qquad (10)$$

$$B_{u_k}\equiv\frac{\partial f_0}{\partial u_k}-p_i\frac{\partial f_i}{\partial u_k}=0. \qquad (11)$$

64-65

Используя обозначения гамильтониана $H = p_i f_i - f_0$, получаем окончательно

$$\dot{p}_i = -H_{x_i}, \; i = 1,2,\dots,n, \; H_{u_k} = 0, \; k = 1,2,\dots,r. \quad (12)$$

Таким образом, видим, что (12) для функционала (6) совпадает с сопряженной системой принципа максимума, а правые части уравнений связи (4) отличаются добавкой p_i/a_i (см. (9)). Отсюда видно, (см. (9)), что в случае ограниченности $p_i(t)$ на $[t_1, t_2]$ при $a_i \to \infty$ минималь функционала (6) стремится к минимали функционала (4).

Из теоремы 1.4 вытекает также и новый результат: минимум функционала (6) при любом $a < \infty$ является оценкой снизу величины функционала (4).

3. Построение функции Ψ путем решения интегро-дифференциального уравнения

Возьмем $\Psi(t,x)$ в виде

$$\Psi(t,x) = \int_{\bar{x}_i}^{x_i} \Psi_{x_i}(t,x)\,dx_i, \quad (1)$$

где $\Psi_{x_i} = \partial\Psi/\partial x_i$.

Здесь в каждом слагаемом все компоненты вектора x, кроме x_i, при интегрировании играют роль параметров.

Пусть Ψ_{x_i} непрерывны и $\Psi_{x_i t}$ существует. Тогда

$$\Psi_t(t,x) = \int_{\bar{x}_i}^{x_i} \Psi_{x_i t}(t,x)\,dx_i \quad (\Psi_t = \partial\Psi/\partial t, \; \Psi_{x_i t} = \partial^2\Psi/\partial x_i \partial t). \quad (2)$$

Подставив Ψ_t в (4) приложения 1, придем к интегро-дифференциальному уравнению

$$\inf_u \left(f_0 - \Psi_{x_i} f_i - \int_{\bar{x}_i}^{x_i} \Psi_{x_i t}(t,x)\,dx_i \right) = 0,$$

в случае решения которого найдем все поле оптимальных траекторий.

4. Общий принцип взаимности в вариационных задачах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями

А) Пусть в (3.4) $f_0 \equiv 0$ */, а $F = F(t_1, x_1, x_2)$. Предположим, что мы решили уравнение в частных производных

$$\inf_u \left[-\Psi_{x_i} f_i(t,x,u) - \Psi_t \right] = 0 \quad (1)$$

с краевым условием $\Psi(t_2, x_2) = 0$. Тогда обобщенный функционал будет

$$J = F(t_1, x_1, x_2) - \Psi(t_1, x_1). \quad (2)$$

*/ Это не нарушает общности вариационной задачи.

Условия теоремы 3.1 сведутся к выполнению единственного требования

$$\inf_R J(t_1, x_1, x_2). \quad (3)$$

Если теперь задаваться разными F и R' */, то решая (3) для любого из этих функционалов, можно найти величину абсолютного минимума для любых заданных граничных условий. Таким образом, решение уравнения (1) сводит вариационную задачу для любого функционала к задаче условного минимума функции конечного числа переменных.

Б) Пусть по-прежнему в (3.4) $f_0 \equiv 0$, а $x(t_1)$ заданы. Зададимся функцией $\Psi(t,x,y)$, значениями $y(t_1)$ и, используя условие $\inf_{x,u} B$ на (t_1, t_2) и уравнения (3.3), найдем значения $x(t_2), y(t_2)$. Пусть при этом $\bar{x}(t)$ оказались допустимыми. Тогда обобщенный функционал будет

$$J = F(x_1, x_2) + \Psi(t_2, x_2, y_2) - \Psi(t_1, x_1, y_1) + C, \quad y_1 = y(t_1), \; y_2 = y(t_2).$$

Условия теоремы 3.1 сведутся к выполнению единственного требования

$$\inf_R J(x_1, x_2). \quad (4)$$

Будем задаваться разными F. Если окажется, что значения $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ из (4) совпадут со значениями $x(t_1), x(t_2)$ и (3.3), то это – абсолютная минималь для выбранного функционала, если нет, то согласно общему принципу взаимности выражение (4) дает оценку снизу для выбранного функционала или граничных условий.

Предположим, что мы задались $\Psi(t,x)$, нашли $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$ из $\inf_{x,u} B$ и оказалось, что они не удовлетворяют уравнениям (3.3). Тогда (4) для любого из функционалов дает только оценку снизу.

Рассмотрим важный частный случай, когда $\Psi = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. В этом случае

$$J = F(x_{i1}, x_{i2}) + \sum_{i=1}^{n} x_{i2} y_{i2} - \sum_{i=1}^{n} x_{i1} y_{i1} + C. \quad (5)$$

Здесь используются обозначения типа $x_i(t_1) = x_{i1}$, $y_i(t_1) = y_{i1}$ и т.д.

Предположим, нам надо найти минимум координаты $x_i(t_2)$, т.е. $F = x_{i2}$, при условии, что все остальные координаты заданы. Решим краевую задачу, т.е. подберем такие y_{i1}, чтобы значения x_{i2} совпали с заданными, а $y_{i2} = -1$. Иными словами решим поставленную задачу. Тогда это будет минималь и для любого функционала вида $-x_{i2} y_{i2}, x_{i1} y_{i1}$ (по j – не сумма) при условии, что все остальные координаты имеют значения x_{j1}, x_{j2} $(j \neq i)$. В самом деле значения y_{i12} определены с точностью до постоянного множителя a (ибо система $\dot{y}_i = -H_{x_i}$ однородная), а потому

*/ Множество R может в этом пункте содержать переменное t_1.

полагая $F=-x_{i1}y_{i1}$ или $F=x_{i1}y_{i1}$, получим, что условие $\inf J$ по $x_{i1}\,y_{i1}$ или $-x_{i1}y_{i1}$ выполнено, ибо J не будет зависеть от этих величин. Таким образом, когда в (5) $y_{i1}<0$, то соответствующая координата x_{i1} достигает минимума, а если $y_{i1}>0$, то – максимума. Для значений x_{i1} – наоборот. Это же решение будет минимально и для функционалов вида $F=\frac{1}{2}y_{i1}x_{i1}^2$, $y_{i1}>0$. Если конечные значения не совпадают с заданными, то (5) дает оценку снизу.

5. Применение α-функционала к задаче относительного условного минимума в теории функций конечного числа переменных

Пусть требуется найти минимум

$$I=f_0(x),\quad f_i(x)=0\quad,\ i=1,\dots,m. \tag{I}$$

Здесь x – n-мерный вектор $(m<n)$, $f(x)$ непрерывные и дважды дифференцируемы. Применим теорему 2.5. Будем искать α-функционал в окрестности точки минимума в виде

$$\alpha=\left(a_i+\frac{1}{2}b_{ij}\Delta x_j\right)f_i(x),\ a,b=const,\ j=1,\dots,n,\ \Delta x_j=x_j-\bar x_j. \tag{2}$$

Составим $J=I+\alpha$. Вычисляя I-й дифференциал, получим

$$dJ=\left[\frac{\partial f_0}{\partial x_\alpha}+\left(a_i+\frac{1}{2}b_{ij}\Delta x_j\right)\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\right]\delta x_\alpha+\frac{1}{2}b_{ij}f_i(x)\,\delta x_j\ ,\ \alpha,j=1,\dots,n,$$

откуда ввиду $dJ=0$ и произвольности δx_j в точке относительного минимума $\bar x\in X^*$ следует система

$$\frac{\partial f_0}{\partial x_\alpha}+a_i\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}=0,\quad i=1,\dots,m,\ \alpha=1,\dots,n. \tag{3}$$

Из этой системы и (I) находим $\bar x_j$, $\bar a_i$, вычисляем 2-й дифференциал в точке $\bar x$:

$$d^2J=\left[\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_\alpha\partial x_\kappa}+a_i\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_\alpha\partial x_\kappa}+b_{i\kappa}\frac{\partial f_i}{\partial x_\alpha}\right]_{\bar x}\delta x_\kappa\,\delta x_\alpha=C_{\kappa\alpha}\,\delta x_\kappa\,\delta x_\alpha. \tag{4}$$

Заметим, что коэффициенты квадратичной формы (4) отличаются от коэффициентов обычной квадратичной формы, например в методе Лагранжа, добавкой $b_{i\kappa}\frac{\partial f_i}{\partial x_\kappa}$ с $n\times m$ – произвольными постоянными $b_{i\kappa}$. Если нам удастся подобрать их так, чтобы форма (4) стала положительно определенной, то $\bar x$ есть точка локального минимума. С этой целью можно, например, найти хотя бы одно решение системы линейных неравенств, вытекающих из критерия Сильвестра относительно $b_{i\kappa}$.

<u>Пример</u>. Найти минимум $I=x+y$ при условии $x^2+y^2=2$. Составляем систему (3): $1+2xa_1=0$, $1+2ya_1=0$, $x^2+y^2=2$.

Отсюда находим две точки экстремума: $\bar x=-1$, $\bar y=-1$, $a_1=\frac{1}{2}$ и

$\bar x=1$, $\bar y=1$, $a_1=-\frac{1}{2}$. Вычисляем коэффициенты $C_{\kappa\alpha}$ в (4): $C_{11}=2a_1+2xb_{11}$, $C_{21}=2yb_{11}$, $C_{12}=2xb_{12}$, $C_{22}=2a_1+2yb_{12}$. Из критерия Сильвестра $C_{11}>0$, $C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}>0$ в I-й точке имеем $2a_1-2b_{11}>0$, $(2a_1-2b_{11})(2a_1-2b_{12})-4b_{11}b_{12}>0$. Одно из возможных решений этих неравенств: $b_{11}=0$, $b_{12}=\frac{1}{3}$. Следовательно, точка (-I,-I) есть точка минимума. Аналогично можно показать, что точка (I,I) есть точка максимума.

Упражнения на α-функционал

Используя метод α-функционала, найти квазиминималь следующих функционалов с точностью до 5%.

<u>Указание</u>. Если $\varphi(\bar x)\neq 0$, то подбираем x_1, мало отличающееся от $\bar x$, но допустимое $\varphi(x_1)=0$, и сравниваем $I(x_1)$ с нижней оценкой $J(\bar x)$.

I. $I=2y^2-2x-2x\cos xy$, $\varphi=x+\frac{y}{2}-2\cos xy=0$.

Отв. $\bar J=0$, $\bar x=1$, $\bar y=0$, $\bar\varphi=0$.

2. $I=x^2-2x+yx^2-y^2-y$, $\varphi=x^2-y^2-x-y=0$.

Отв. $\bar J=-1$, $\bar x=1$, $\bar y=0$, $\bar\varphi=0$.

3. $I=\frac{4}{x}+\frac{8}{y}+y|x-4|-x|y-2|$, $(x>0,y>0)$, $\varphi=-\frac{1}{x}+\frac{|x-4|}{x}-\frac{|y-2|}{y}=0$.

Отв. $\bar J=6$, $\bar x=4$, $\bar y=2$, $\bar\varphi\neq0$, $\bar I(3,2)=6\frac{1}{3}>6$.

4. $I=\frac{y-x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}+\frac{|\sin\frac{\pi}{2}xy|}{\sqrt3}$; $\varphi=\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt3}|\sin\frac{\pi}{2}xy|-1=0$.

Отв. $\bar J=-\sqrt3$, $\bar x=1$, $\bar y=-1$, $\bar\varphi=0$.

5. $I=x^2+y^2+z^2-2z+x^3+y^2x+z^2x-9$, $\varphi=x^2+y^2+z^2+y-1=0$.

Отв. $\bar J=-10\frac{1}{3}$, $\bar x=-\frac{2}{3}$, $\bar y=-\frac{1}{3}$, $\bar z=1$, $\varphi\neq0$, $\bar I(0,0,1)=-10$.

6. $I=\frac{z^2}{y}-\frac{1}{4}x\cos\pi xyz+\frac{z}{2}+6$ $(x>0,y>0,z>0)$, $\varphi=5\cos\pi xyz+\frac{y^2}{2}+4=0$.

Отв. $\bar J=10$, $\bar x=\frac{1}{2}$, $\bar y=1$, $\bar z=1$, $\bar\varphi\neq0$, $\bar I(1,1,1)=10\frac{1}{4}>10$.

Пример решения

$$I=x^2-x+y^2-y\sin\frac{\pi}{2}xy+20,\qquad \varphi=\sin\frac{\pi}{2}xy-1=0.$$

Подберем $\alpha=\lambda(x,y)\varphi(x,y)$ так, чтобы минимум $J(x,y)$ находился просто. Для этого достаточно принять $\alpha=y\varphi$. Тогда $J=x^2-x+y^2-y+20$, $\bar x=\frac{1}{2}$, $\bar y=\frac{1}{2}$, $\bar J=19\frac{1}{2}$, т.е. наше решение не является допустимым. Следовательно, $\bar J=19\frac{1}{2}$ – оценка снизу. Когда функция $I(x,y)$ меняется достаточно плавно, можно попробовать подобрать допустимое решение, близкое к $\bar{x}, \bar{y}$, и сравнить его с оценкой. Так, в нашем примере возьмем $\bar{x}=1$, $\bar{y}=1$. Так как $\varphi(1,1)=0$, то оно допустимое. $\bar{I}(1,1)=20 \geq 19\frac{1}{2}$. Из неравенства $0.5/\mathit{1{,}456405}$ следует, что $\bar{x}=1$, $\bar{y}=1$ можно принять за квазиминималь.

Литература к главе II

I. Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, М.С. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, I96I.

2. В.Ф. Кротов. Решение вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума. "Автоматика и телемеханика", 1962, № I2, I963, № 5, I964, №7.

3. Picone Mauro, Criteri sufficienti per il minimo absoluto nel vettere minimante. Atti Accad. naz. Lincei. Mem. Cl. Sci. Fis., mat. e natur. 1961, sez. 1,6.

4. А.А. Болонкин. Метод решения оптимальных задач. В сб. "Сложные системы управления", Киев. "Наукова Думка", I965, стр. 34-67.

5. А.А. Болонкин. Принцип расширения и условие Якоби вариационного исчисления. Доклады АН УССР, I964, №7.

6. Р. Беллман. Динамическое программирование. Изд. иностр. лит., I960.

7. Г.А. Блисс. Лекции по вариационному исчислению. Изд. иностр. лит., I950.

8. И.Б. Вапнярский. Теорема существования оптимального управления в задаче Больца, некоторые ее применения и необходимые условия оптимальности скользящих и особых режимов. Журнал вычислительной математики и математической физики, №2, I967.

9. А.Д. Иоффе. Докл. АН СССР, I966, I68, № 2.

Глава III

МЕТОД МАКСИМИНА

§I. Основы метода максимина

I. Общий случай. Основные теоремы. Оценки. Уравнения максимина. Алгоритмы 5, 5', 5"

А) Продолжим рассмотрение задачи, сформулированной в §I гл. I: на X задан функционал $I(x)$. Ищут минимум его на допустимом подмножестве $X^* \subseteq X$.

Метод α -функционал неудобен тем, что он оставляет открытым вопрос о подборе $\alpha(x)$ такого, чтобы $\bar{x} \in X^*$. Рассматриваемый ниже подход дает алгоритм, в значительной мере лишенный этого недостатка.

<u>Теорема I.I</u>. Пусть: I) $\alpha(x,y)=0$ только на X^* при $\forall y \in Y$. 2) $\alpha(x,y)$ таково, что для $\forall x \in X \setminus X^*$ найдется $y \in Y$, при котором $I(x)+\alpha(x,y) > m = \inf\limits_{X^*} I(x)$. 3) Существует пара $\bar{x}, \bar{y}$, удовлетворяющая условию

$$J(\bar{x},\bar{y}) = \sup_Y \inf_X [I(x)+\alpha(x,y)] \tag{I.I}$$

4) $J(\bar{x},y) \leq J(\bar{x},\bar{y})$ на Y. Тогда: I) $\bar{x}$ принадлежит X^*; 2) $\bar{x}$ является абсолютной минималью задачи 1: $\inf I(x)$, $x \in X^*$.

<u>Доказательство</u>. I. Пусть $\bar{x} \notin X^*$. Из теоремы I.4 гл. II имеем $\inf\limits_X J(x) \leq m$. Так как это неравенство справедливо при любом $y \in Y$, то $J(\bar{x},\bar{y}) = \sup\limits_Y \inf\limits_X J \leq m$ и $J(\bar{x},y) \leq J(\bar{x},\bar{y}) \leq m$ на Y. Но это противоречит п. 2 условия теоремы. Следовательно, $\bar{x} \in X^*$. 2. Из $\bar{x} \in X^*$ и $\alpha(\bar{x},\bar{y})=0$ следует, что $J(\bar{x},\bar{y}) = \inf I(x)$, $x \in X^*$, т.е. $\bar{x} = \mathring{x}$. Теорема доказана*/.

<u>Следствие I</u>. При выполнении условий теоремы I.I точка $\bar{x}, \bar{y}$ является седловой точкой функционала $J(x,y)$**/, т.е.

$$J(\bar{x},y) \leq J(\bar{x},\bar{y}) \leq J(x,\bar{y}). \tag{I.2}$$

---

*/ Заметим, что $J(\bar{x},y) \leq J(\bar{x},\bar{y})$ (здесь $\bar{x}, \bar{y}$ фиксировано) представляет самостоятельное условие, не следующее из (I.I). Из (I.I) вытекает $\sup\inf J(x,y) = \sup[\bar{x}(y), y]$. Отсюда видно, что супремум ищут не при фиксированном $\bar{x}$, а на подмножестве x, y, связанных условием $\bar{x} = \varphi(y)$. Поэтому неравенство $J(\bar{x},y) \leq J(\bar{x},\bar{y})$, вытекающее из (I.I), справедливо на этом подмножестве и может быть неверным при фиксированном $\bar{x}$.

**/ Где y идет первым аргументом, а x - вторым (ибо у нас $\max\limits_y \min\limits_x J(x,y)$), а не $\min\limits_y \max\limits_x J(x,y)$), как принято в определении седловой точки.

<u>Следствие 2</u>. Из следствия I вытекает при выполнении условий теоремы I.I:
$$J(\bar x,\bar y)=\sup_y \inf_x J(x,y)=\inf_x \sup_y J(x,y).$$

<u>Доказательство следствия I</u>. Из условия теоремы I.I имеем: $J(\bar x,y)\le J(\bar x,\bar y)$. Зафиксируем $y=\bar y$. Тогда из (I.I) $J(\bar x,\bar y)=\inf_x J(x,\bar y)$ т.е. $J(\bar x,\bar y)\le J(x,\bar y)$. Отсюда вытекает (I.2).

<u>Замечания</u>: I. Пусть $\bar x,\bar y$ – седловая точка функционала $J(x,y)$ и $\bar x\in X^*$. Тогда $\bar x$ – абсолютная минималь задачи I.

<u>Доказательст о замечания I</u>. Из определения седловой точки (I.2) имеем
$$I(\bar x)+\alpha(\bar x,y)\le I(\bar x)+\alpha(\bar x,\bar y)\le I(x)+\alpha(x,\bar y). \qquad (I.2')$$
На X^* $\alpha=0$ при $\forall y,\ \bar x\in X^*$. Поэтому на X^* из (I.2') следует: $I(\bar x)\le I(x)$, что и требовалось доказать.

2. Если $\bar x,\bar y$ – седловая точка относительно некоторой своей окрестности и $\bar x\in X^*$, то $\bar x$ – относительная минималь задачи I.

3. Пусть имеется α -функционал и элемент $\bar x\in X^*$ такие, что $J(\bar x,\bar y)=\sup_y\inf_x[I(x)+\alpha(x,y)]$. Тогда любой элемент $x_1\in X^*$ и удовлетворяющий условию
$$J(x_1,\bar y)=\sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}[I(x)+\alpha(x,y)] \qquad (I.I')$$
есть абсолютная минималь функционала $I(x)$ на X^* и любая абсолютная минималь функционала $I(x)$ на X^* при соответствующем выборе множества Y удовлетворяет условию (I.I').

<u>Доказательство</u>. Из $x_1\in X^*$ и (I.I') следует: $J(x_1)=\inf_{x\in X^*}I(x)=I(x_1)$. Обратно: пусть x_1 – абсолютная минималь $I(x)$ на X^*. Из $x_1\in X^*$ получаем
$$I(x_1)=\inf_{x\in X^*}I(x)=J(\bar x)=\sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}[I(x)+\alpha(x,y)].$$

<u>Теорема I.2</u> (о существовании α -функционала, удовлетворяющего теореме I.I).

Пусть $x^*\in X^*$ существует. Тогда: I) существует такое $\alpha(x,y)$, что $x^*,\bar y$ является седловой точкой функционала $J(x,y)$; 2) это $\alpha(x,y)$ удовлетворяет (I.I).

<u>Доказательство</u> (метод построения). I. Зададим $\alpha(x,y)$ так, чтобы $\alpha=0$ на X^* при $\forall y\in Y$. Зафиксируем некоторое $y=\bar y$. Тогда на X^* $J(x^*,\bar y)\le J(x,\bar y)$, ибо x^* – минималь задачи I на X^*. На $X-X^*$ $\alpha(x,\bar y)$ произвольна и ее всегда можно выбрать так, что $J(x,\bar y)>J(x^*,\bar y)$. Кроме того, в силу нашего построения, $J(x^*,y)=J(x^*,\bar y)$, ибо $x^*\in X^*$, $\alpha(x^*,y)=0$. Итак, построенная нами добавка $\alpha(x,y)$ дает $J(x^*,y)\le J(x^*,\bar y)\le J(x,\bar y)$ на $x\in X,\ y\in Y$. А это есть определение седловой точки. 2. Из п. I вытекает*/ п. 2. Теорема доказана.

*/ Дж. Мак Кинси. Введение в теорию игр. Физматгиз, 1960, стр. 25.

<u>Замечание 4</u>. Аналогично можно построить $\alpha(x,y)$, удовлетворяющие условию $J(x^*,y)<J(x^*,\bar y)<J(x,\bar y)$ при $(x,y)\ne(x^*,\bar y)$.

<u>Замечание 5</u>. Из доказательства теоремы I.2 ясно, что число α -функционалов, удовлетворяющих теореме I.I, бесконечно.

<u>Теорема I.3</u>. Пусть $\alpha(x,y)=0$ только на X^* при $\forall y\in Y$. Тогда (I.I) дает оценку снизу $I(x)$ на X^*.

<u>Доказательство</u>. $J(\bar x,y)=\inf_x J(x,y)\le m$ при $\forall y\in Y$. Следовательно, $\sup_y J(\bar x,y)\le m$, что и требовалось доказать.

<u>Замечание 6</u>. Теоремы I.2–I.4 гл. II вытекают как частный случай из теорем I.I–I.3, если зафиксировать y.

Из теоремы I.I вытекает <u>алгоритм 5</u> (<u>метод максимина</u>). Чтобы найти x^*, надо решить задачу (I.I).

Решить задачу (I.I) можно различно:

а) <u>Алгоритм 5'</u>. Взяв одновременно $\inf_x$ и $\sup_y$, получим систему
$$\omega_1(\bar x,\bar y)=0,\quad \omega_2(\bar x,\bar y)=0 \qquad (I.3)$$
(уравнения максимина*/), решив которую и получим точки $\bar x,\bar y$.

б) <u>Алгоритм 5''</u>. Берем вначале $\inf_x J$, находим
$$\omega_3(\bar x,y)=0 \qquad (I.4)$$
и $J_1(y)=\inf J(x,y)$, а затем $\sup_y J_1(y)$ и
$$\omega_4(y)=0. \qquad (I.4')$$
Назовем их <u>уравнениями последовательного максимина</u>. Отыскиваем корни (I.4') и из $\omega_3=0$ (1.4) находим минималь $\bar x$.

В) Будем искать (I.I) при дополнительном условии $\alpha(x,y)=0$. Находим вначале $\inf_x[I(x)+\alpha(x,y)]$ и $\bar x=\bar x(y)$. Выберем теперь y таким образом, чтобы $\alpha=0$, т.е. $\alpha(\bar x(y),y)=0$. Обозначим эту пару x^*,y_1. Тогда требование $\sup_y J(\bar x(y),y)$ будет выполнено. В самом деле, из теоремы I.3 гл. II имеем $\inf_x J(x,y)\le m$ на Y, т.е. $J(\bar x(y),y)\le I(x^*)=J(x^*,y_1)$. Так как y_1 принадлежит к области определения $\alpha(x,y)$, а $x^*=\bar x(y_1)$, то $J(x^*,y_1)=\sup_y J(\bar x(y),y)$, т.е. требование $\sup_y J(\bar x(y),y)$ выполнено автоматически. Таким образом, получаем

<u>алгоритм 6</u> (<u>метод условного максимина</u>).

Чтобы найти x^*, надо решить систему
$$\bar x=\bar x(y),\quad \alpha(\bar x,y)=0, \qquad (1.5)$$
где $\bar x$ – минималь задачи $\inf_x[I(x)+\alpha(x,y)]$.

Первое уравнение (1.5) может быть и в неявном виде. Уравнения (1.5) при этом примут вид
$$\xi(\bar x,y)=0,\quad \alpha(\bar x,y)=0. \qquad (1.5')$$

*/ Вообще говоря, это векторные уравнения.

Назовем их <u>общими уравнениями условного максимина</u>.

Если при помощи одного из уравнений исключить $\bar{x}$, придем к уравнению[*/]

$$\omega_1(y)=0\,, \qquad (\mathrm{I}.5')$$

а если исключить y, то – к уравнению

$$\omega_2(\bar{x})=0. \qquad (\mathrm{I}.5'')$$

Первое из них мы назовем <u>уравнением условного максимина относительно вспомогательного неизвестного</u>, а второе – <u>уравнением условного максимина относительно основного неизвестного</u>.

Формально метод условного максимина совпадает с алгоритмом 4 гл. II.

<u>Пример I.I</u>. Найти минимум $I=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$ при условии $x_1+x_2\le 1$. Решение (алгоритм 5): берем $\mathcal{A}=y(x_1+x_2-1)$, $\mathcal{J}=I+\mathcal{A}=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+y(x_1+x_2-1)$, $\inf_x \mathcal{J}$, $\mathcal{J}'_{x_1}=x_1+y=0$, $\mathcal{J}'_{x_2}=x_2+y=0$, $\mathcal{J}=\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^2-2y^2-y=y^2-y$, $\sup_y \mathcal{J}$, $\bar{y}=-\frac{1}{2}$, $\bar{x}_1=\bar{x}_2=\frac{1}{2}$.

То обстоятельство, что $\bar{x},\bar{y}$ – седловая точка функционала $\mathcal{J}(x,y)$, открывает определенные возможности для решения задачи (I.I). Например, когда X,Y – конечномерные пространства и $\mathcal{J}(x,y)$ непрерывна и дифференцируема на $X\times Y$, можно применить уравнения градиентного метода для нахождения седловой точки: $\dot{x}=-\nabla_x \mathcal{J}(x,y)$, $\dot{y}=\nabla_y \mathcal{J}(x,y)$ где ∇_x,∇_y обозначают градиенты, вычисленные по соответствующим переменным.

В) Обобщим теорему I.I на случай, когда оптимального x^* на X^* не существует. Пусть существует последовательность $\{x_s\}$, $x_s\in X$ такая, что $I(x_s)\xrightarrow[s\to\infty]{} m$. Такая последовательность называется минимизирующей.

<u>Теорема I.4.</u> Пусть: I) $\mathcal{A}(x,y)=0$ только на $X^*\times Y$; 2) $\mathcal{A}(x,y)$ таково, что для $\forall x\in(X-X^*)$ найдется $y\in Y$, при котором $\mathcal{J}(x,y)>m$; 3) существует последовательность $\{x_s,y_s\}$, такая, что $\mathcal{J}(x_s,y_s)\to\mathcal{V}=\sup_y\inf_x \mathcal{J}(x,y)$; 4) $\mathcal{J}(x_s,y)\le\mathcal{J}(x_s,y_s)$ на Y, начиная с некоторого $s\ge s'_0$. Тогда $I(x_s)\xrightarrow[s\to\infty]{} m$.

<u>Доказательство</u>. Возможны два случая: I) Начиная с некоторого $s\ge s_1$, $x_s\in X^*$. Тогда в силу п. I для $s\ge s_1$, имеем $\mathcal{J}\equiv I$ на X^* и в силу п. 3 $\mathcal{J}(x_s)=I(x_s)\to m$. 2) В последовательности $\{x_s\}$ при сколь угодно больших s встречаются члены $x_s\notin X^*$. Пусть $\lim \mathcal{J}(x_s,y_s)\ne m$, т.е. $\lim \mathcal{J}(x_s,y_s)=m+\delta$, где δ – некоторое число, $\delta\ne 0$. Из п. I.3 $\mathcal{V}\le m$ (теорема I.3), т.е. $m+\delta\le m$. Так как $\delta\ne 0$, то $\delta<m$. В силу п. 4 для $s\ge s_0$ $\mathcal{J}(x_s,y)\le\mathcal{J}(x_s,y_s)\le m+\delta$, а это противоречит п. 2 условия. Теорема доказана.

[*/] Во всех наших рассуждениях, не оговаривая этого особо, используем классическую схему изложения, т.е. предполагаем, что соответствующие действия выполнимы (или имеются условия, при которых они выполнимы)

<u>2. Метод максимина для β-функционала с ограничениями типа равенств и неравенств</u>

Пусть на X задан функционал $I(x)$, ограниченный снизу. Допустимое множество $X^*\ne\emptyset$ выделено при помощи функционалов

$$F_i(x)=0\ ,\ i=1,2,\dots,\kappa,\quad \Phi_j(x)\le 0\ ,\ j=1,2,\dots,q. \qquad (\mathrm{I}.6)$$

Возьмем β-функционал в виде (по i,j – сумма)

$$\beta(x,y)=\lambda_i(x,y)F_i(x)+\omega_j(x,y)\,\Phi_j(x), \qquad (\mathrm{I}.7)$$

где $\lambda_i(x,y)$, $\omega_j(x,y)$ – некоторые функции x,y, $y\in Y$ причем $\omega_j(x,y)\ge 0$. Построим обобщенный функционал

$$\mathcal{J}(x,y)=I(x)+\lambda_i(x,y)F_i(x)+\omega_j(x,y)\,\Phi_j(x). \qquad (\mathrm{I}.8)$$

<u>Теорема I.5</u> (<u>условие максимина для β-функционала</u>). Предположим: а) $\omega_j(x,y)\ge 0$, $\lambda_i(x,y)$ таково, что для $\forall x\in(X-X^*)$ найдется $y\in Y$, при котором $\mathcal{J}(x,y)>m$. Найдем $\bar{x}$ из условия

$$\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y})=\sup_y\inf_x\left[I(x)+\beta(x,y)\right]. \qquad (\mathrm{I}.9)$$

Пусть: б) $\mathcal{J}(\bar{x},y)\le\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y})$ на Y; в) $\beta(\bar{x},\bar{y})=0$; г) $\bar{x},\bar{y}$ существует. Тогда: I) $\bar{x}$ принадлежит X^*; 2) $\bar{x},\bar{y}$ является седловой точкой функционала $\mathcal{J}(x,y)$; 3) $\bar{x}$ – абсолютная минималь задачи I. 4) $\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y})=I(\bar{x})=m$.

<u>Доказательство</u>. I. Предположим противное: $\bar{x}\notin X^*$. Из теоремы I.I0 гл. I имеем $\inf_{x\in X}\mathcal{J}(x,y)\le m$. Так как это неравенство справедливо при $\forall y\in Y$, то $\mathcal{J}(\bar{x},y)=\sup_y\inf_x \mathcal{J}\le m$ и $\mathcal{J}(\bar{x},y)\le\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y})\le m$ на Y. Но это противоречит условию теоремы – на $X-X^*$ существует $y\in Y$, такое, что $\mathcal{J}(x,y)>m$. Следовательно, $\bar{x}\in X^*$.

2. Из (I.9) при любом фиксированном y следует $\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y})\le\mathcal{J}(x,\bar{y})$. Учитывая п. 2 условия, получаем

$$\mathcal{J}(\bar{x},y)\le\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y})\le\mathcal{J}(x,\bar{y}), \qquad (\mathrm{I}.\mathrm{I}0)$$

а это и есть определение седловой точки.

3. Так как $\beta=0$, то из (I.5): $I(\bar{x})\le I(x)+\beta(x,\bar{y})$. На X^* $\beta(x,\bar{y})\le 0$. Следовательно, $I(\bar{x})\le I(x)$ на X^*. Так как $\bar{x}\in X^*$, то $\bar{x}$ – абсолютная минималь задачи I на X^*.

4. Ввиду $\beta=0$ $\mathcal{J}(\bar{x},\bar{y})=I(\bar{x})=m$. Теорема доказана.

<u>Замечание</u>. П. 3 утверждения теоремы I.5 для частного случая, когда $F_i(x)$ отсутствуют и $\omega_j=y_j$, можно получить сразу из п. 2 этой теоремы, используя известную теорему Куна-Таккера о седловой точке: если $\bar{x},\bar{y}$ – седловая точка функции $I(x)+y\,\Phi(x)$, то $\bar{x}$ – оп-

тимальный вектор задачи максимизации.

Таким образом, теорема Куна-Таккера является частью теоремы I.5 для одного частного случая.

§2. Применение метода максимина к задачам оптимизации, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями

I. Основная теорема максимина. Методы редукции. Алгоритмы 5,5'. Оценки

А) В §3 гл. П была сформулирована типовая задача оптимизации, описанная обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_i = f_i(t,x,u)\ ,\ i=1,2,\dots,n,\ x(t_1), x(t_2)\in R. \qquad (2.I)$$

Значения t_1, t_2 заданы, $u\in U$, $[t_1,t_2]=T$, $x\in G$. Как и в §3 гл. П D – множество непрерывных, кусочно-дифференцируемых $x(t)$, V – множество $u(t)$, которые могут иметь разрывы I-го рода с $u\in U$, Q – множество пар $x(t), u(t)\in D\times V$, удовлетворяющих (2.I). Качество процесса оценивается функционалом

$$I = F(x_1,x_2) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt. \qquad (2.2)$$

Зададимся некоторой непрерывной дифференцируемой функцией $\Psi(t,x,y)$, определенной на $T\times G\times Y$, где y – n-мерный вектор, построим функции

$$A = F + \Psi_2 - \Psi_1\ ,\quad B = f_0 - \Psi_{x_i} f_i - \Psi_{y_i}\dot{y}_i - \Psi_t \qquad (2.3)$$

и обобщенный функционал

$$J = A + \int_{t_1}^{t_2} B\,dt \qquad (2.4)$$

Здесь $\Psi_1 = \Psi[t_1, x(t_1), y(t_1)]$, $\Psi_2 = \Psi[t_2, x(t_2), y(t_2)]$.

[illegible] дифференцируемых [illegible]

Теорема 2.I. [illegible] дифференцируемая функция $\Psi(t,x,y)$, удовлетворяющая условиям:

1) для $\forall x,u\in Q$ найдется $y\in W$ такое, что $J > m$ */;

2) $J(\bar{x},\bar{y},\bar{u}) = \sup\limits_{y\in W}\left(\inf\limits_{x_1,x_2\in R} A + \int_{t_1}^{t_2}\inf\limits_{x\in G,\,u\in V} B\,dt\right)$; $\qquad (2.5)$

3) $\bar{x}(t)\in D$, $\bar{u}(t)\in V$; $\qquad$ 4) $J(\bar{x},\bar{u},y)\le J(\bar{x},\bar{y},\bar{u})$ на W.

Тогда пара $\bar{x},\bar{u}\in Q$ и $\bar{x},\bar{u}$ является абсолютной минималью функционала (2.2).

---

*/ Это требование можно заменить более простым: $\Psi_{x_i}(t,x,y)$ неограничено сверху по y на $x\in(X\setminus X^*)$. В самом деле, полагая $\alpha = \int_{t_1}^{t_2}\Psi_{x_i}(\dot{x}_i - f_i(t,x,u))dt - \Psi|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}(\Psi_{y_i}\dot{y}_i + \Psi_t)dt$, видим, что если $x(t), u(t)$ недопустимы на множестве ненулевой меры, то $\alpha\to\infty$, $J\to\infty > m$.

Следствие I (см. §I): в условиях теоремы 2.I точка $\bar{x},\bar{y}$ является седловой точкой функционала (2.4).

Замечания: I. Если $\bar{x},\bar{u}\in Q$, то условие $J(\bar{x},\bar{u},y)\le J(\bar{x},\bar{u},\bar{y})$ всегда выполнено, ибо на Q $\alpha = 0$. Его можно заменить более жесткими $A(\bar{x}_1,\bar{x}_2,y_1,y_2)\le A(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{y}_1,\bar{y}_2)$ на $Y_1\times Y_2$, $B(t,\bar{x},\bar{u},y)\le B(t,\bar{x},\bar{u},\bar{y})$ на (t_1,t_2).

2. Если (2.5) заменить условием

$$J = \max_{y(t)}\left(\min_{x_1,x_2} A + \int_{t_1}^{t_2}\min_{x}\inf_{u\in V} B\,dt\right),$$

где под $\min$, $\max$ понимаются локальные минимумы и максимумы, то $\bar{x},\bar{u}$ – сильная относительная минималь.

3. Условия 2.3 теоремы можно заменить более жесткими:

$$2)\ \sup_{y_1,y_2}\inf_{x_1,x_2\in R} A\ ,\ \sup_{y}\inf_{x\in G,\,u\in V} B\ ;\ 3)\ \bar{x},\bar{u}\in Q,\ \bar{y}\in W. \qquad (2.5')$$

4. Простейшая функция $\Psi(t,x,y)$ – это $\Psi = y_i x_i$.

5. Замечание 3 §I гл. Ш принимает для данной задачи следующую форму: пусть существует функция $\Psi(t,x,y)$ и хотя бы одна допустимая тройка $\bar{x},\bar{y},\bar{u}$, удовлетворяющая (2.5) (или (2.5')). Тогда любая другая тройка $\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{u}}$, удовлетворяющая (2.5) (соответственно (2.5')), дает $\bar{\bar{x}},\bar{\bar{u}}$ – абсолютную минималь задачи I и любая допустимая абсолютная минималь задачи I при соответствующем выборе множества Y удовлетворяет условию (2.5) (или (2.5')).

6. Можно показать, что если t_1, t_2 не фиксированы, то (2.5) таковы:

$$2)\ \sup_{y_1,y_2}\inf_{t_1,t_2,x_1,x_2\in R} A\ ,\ \sup_{y}\inf_{x\in G,\,u\in V} B = 0 \text{ на } [t_1,t_2],\ 3)\ \bar{x},\bar{u}\in Q,\ \bar{y}\in W \qquad (2.5'')$$

7. Теорема 3.I гл. П является частным случаем теоремы 2.I, если зафиксировать y.

Из теоремы I.2 для [illegible]

Теорема 2.2. Пусть [illegible] функция. Справедлива оценка [illegible]

$$I(x,u) \ge \sup_{y\in W}\left(\inf_{x_1,x_2\in R} A + \int_{t_1}^{t_2}\inf_{x\in G,\,u\in V} B\,dt\right). \qquad (2.6)$$

С учетом п. 2 (2.5) получаем еще одну оценку

$$I(x,u) \ge \sup_{y_1,y_2}\left(\inf_{x_1,x_2\in R} A + \int_{t_1}^{t_2}\sup_{y}\inf_{x\in G,\,u\in V} B\,dt\right). \qquad (2.6)$$

Эта оценка проще в смысле вычислений, но, вообще говоря, грубее, чем (2.6).

Для решения задачи (2.5) можно использовать

алгоритм 7 (метод подбора $\Psi(t,x,y)$). Задаемся $\Psi^{(1)}(t,x,y)$ */, решаем задачу (см. (3.8) гл. П):

$$\inf_{x,u}\left[f_0 - \Psi^{(1)}_{x_i} f_i - \Psi^{(1)}_{y_i}\dot{y}_i - \Psi^{(1)}_t\right] = B^{(1)}(t,y,\dot{y}),\quad \inf_{x_1,x_2}\left(F + \Psi^{(1)}_2 - \Psi^{(1)}_1\right) = A^{(1)}(y_1,y_2) \quad (2.7)$$

---

*/ Индекс сверху у Ψ означает номер функции.

76-77

При этом находим $\bar{u}=\bar{u}(t,y,x)$, $\bar{x}=\bar{x}(t,y,\dot{y})$. (2.8)

Рассматриваем
$$I^{(1)}=A^{(1)}(y_1,y_2)+\int_{t_1}^{t_2}B^{(1)}(t,x,v)\,dt \qquad (2.9)$$
как новый функционал для системы
$$\dot{y}_i=v_i\ ,\quad i=1,2,\dots,n, \qquad (2.10)$$
где новые управления $v\in V(t,y)$, $V(t,y)$ – множество значений вектора v . Оно является следствием U, G и $f_i(t,x,u)$.

Еще раз задаемся $\psi^{(1)}(t,y)$ и решаем задачу
$$\sup_{y,v}(B^{(1)}-\psi^{(1)}_{y_i}v_i-\psi^{(1)}_t)=B^{(2)}(t)\ ,\quad \sup_{y_1,y_2}(A^{(1)}+\psi^{(1)}_2-\psi^{(1)}_1)=A^{(2)} \qquad (2.11)$$
Найденные из (2.11) $\bar{y}(t),\bar{v}(t)$ вставляем в (2.8), получаем $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$. Если $\bar{x},\bar{u}\in Q$ (т.е. удовлетворяют (2.1)) и $x(t_1),x(t_2)\in R$, то полученное решение есть минималь задачи I, если нет, то $J(\bar{x},\bar{y},\bar{u})$ дает оценку снизу функционалу (2.2). Заметим, что эта оценка, вообще говоря, лучше (в смысле ближе к m), так как функция $\psi(t,x,y)$ обладает большей "свободой" (за счет y), чем функция $\psi(t,x)$.

Б) <u>Алгоритм 5'</u> (<u>метод последовательного подбора ψ</u>). В (2.11) задаемся $\psi^{(1)}(t,y,z)$, $z\in Z$. В этом случае, решая (2.11), находим $B^{(2)}=B^{(2)}(t,z,\dot{z})$, $A^{(2)}=A^{(2)}(z_1,z_2)$ и
$$\bar{v}=v(t,\dot{z})\ ,\quad \bar{y}=y(t,z,\dot{z}). \qquad (2.12)$$

Рассматриваем
$$I^{(2)}=A^{(2)}(z_1,z_2)+\int_{t_1}^{t_2}B^{(2)}(t,z,w)\,dt \qquad (2.13)$$
как новый функционал для системы
$$\dot{z}_i=w_i\ ,\quad i=1,2,\dots,n. \qquad (2.14)$$
Задаемся $\psi^{(2)}(t,z)$ и решаем задачу
$$\inf_{z,w}(B^{(2)}-\psi^{(2)}_{z_i}w_i-\psi^{(2)}_t)=B^{(3)}(t),\quad \inf_{z_1,z_2}(A^{(2)}+\psi^{(2)}_2-\psi^{(2)}_1)=A^{(3)}. \qquad (2.15)$$
Найденные из (2.15) $\bar{z}(t),\bar{w}(t)$ вставляем в (2.12), $\bar{v},\bar{y}$ из (2.12) вставляем в (2.8), получаем $\bar{x},\bar{u}$. В итоге, если $\bar{x},\bar{u}\in Q$, а $x_1,x_2\in R$, то это минималь, если – нет, то $J(\bar{x},\bar{u},\bar{y})$ дает оценку снизу (2.2) на Q .

Таким образом, действия п. Б можно повторить неограниченное число раз. При этом $\psi^{(i)}$ следует подбирать каждый раз так, чтобы упростить решение каждой последующей задачи.

Задачу (2.9), (2.10) назовем <u>редуцированной задачей</u> 1-й редукции, задачи (2.13), (2.14) – редуцированной задачей 2-й редукции и т.д.

Вообще говоря, уже задача 1-й редукции проще исходной задачи (2.1), (2.2), так как правые части (2.10) имеют очень простой вид. Кроме того, число управлений v_i в редуцированной задаче равно числу фазовых координат. Это может иметь большое значение. Например, когда редуцированная задача решается методом динамического

программирования, так называемая элементарная операция упрощается и количество вычислений резко сокращается.

В) Иногда с целью упрощения вычислений удобно считать $y(t)$ постоянной. В этом случае теорема 2.2 принимает вид

<u>Теорема 2.2'</u>. Пусть $\psi(t,x,c)$ (c – константа) – непрерывная дифференцируемая функция. Справедлива оценка снизу
$$I(x,u)\geq \sup_c\Big(\inf_{x_1,x_2}A+\int_{t_1}^{t_2}\inf_{x,u}B\,dt\Big). \qquad (2.16)$$

<u>Пример 2.1</u>. Найти оценку снизу в задаче построения оптимального регулятора
$$I=\int_{t_1}^{t_2}(0{,}1x^2+0{,}5u^2)\,dt\ ,\quad \dot{x}=u\ ,\quad x(t_1)=x_1,\ x(t_2)=x_2. \qquad (2.17)$$
Используем теорему 2.2'. Полагаем $\psi=cx$. Тогда
$$J=c(x_2-x_1)+\int_{t_1}^{t_2}\inf_{x,u}(0{,}1x^2+0{,}5u^2-cu)\,dt=c(x_2-x_1)-\tfrac{1}{2}c^2(t_2-t_1).$$
Отыскиваем $\sup_c J$: $J'_c=(x_2-x_1)-c(t_2-t_1)=0$, $\bar{c}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$, т.е.
$$I(x,u)\geq\sup_c J=\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}-\frac{1}{2}\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}=\frac{1}{2}\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}.$$
Пусть $x_2=0,\ t_2-t_1=1$. Тогда $I(x,u)\geq\frac{1}{2}x_1^2$. Если $x_1=0$, то $I(x,u)\geq 0$. Оценка снизу совпадает со значением на кривой $x=u\equiv 0$. Следовательно, это кривая есть абсолютная минималь. Если $x_1=1$, то $I(x,u)\geq 0{,}5$. Возьмем кривую $x=-t$. Она удовлетворяет заданным граничным условиям. Значение функционала на ней равно: $I=(0{,}1t^3/3+0{,}5t)\big|_0^1=0{,}503$, что весьма близко к нижней оценке. Следовательно, кривую $x=-t$ можно принять в качестве квазиоптимального решения.

2. <u>Методы построения поля минимолей. Сведения к уравнениям максимина в частных производных</u>

Рассмотрим ряд методов построения поля оптимальных траекторий. Эти методы сводятся к нахождению решения уравнений в частных производных.

Подставим (2.7) в (2.11), получим
$$\sup_{y,v}\Big[\inf_{x,u}(f_0-\psi^{(1)}_{x_i}f_i-\psi^{(1)}_{y_i}v_i-\psi^{(1)}_t)-\psi^{(2)}_{y_i}v_i-\psi^{(2)}_t\Big]=B^{(2)}, \qquad (2.18)$$
$$\sup_{y_1,y_2}\Big[\inf_{x_1,x_2}(F+\psi^{(1)}_2)+\psi^{(2)}_2\Big]=A^{(2)}. \qquad (2.19)$$

Предположим, что в (2.18) $B^{(2)}=b(t)$ – некоторой функции t , а $A^{(2)}=C$ некоторой постоянной. В частности, можно считать, что $b(t)\equiv 0$.

Возможны следующие варианты:

а) Пусть $\psi^{(1)}$ равно $\psi^{(1)}(t,x,y)$ – известной функции, удовлетворящей п. I условия теоремы 2.I, а $\Psi^{(2)}(t,y)$ выберем так, чтобы она удовлетворяла уравнению в частных производных

$$\sup_v\left[\inf_{x,u}\left(f_0-\Psi^{(1)}_{x_i}f_i-\Psi^{(1)}_{y_i}v_i-\Psi^{(1)}_t\right)-\Psi^{(2)}_{y_i}v_i-\Psi^{(2)}_t\right]=b(t) \qquad (2.20)$$

при краевом условии

$$\inf_{x_1,x_2}\left[F(x_2)+\Psi_2^{(1)}-\Psi_1^{(1)}\right]+\Psi_2^{(2)}=C \qquad (2.2I)$$

или в более компактной записи

$$\sup_v\left[B^{(1)}(t,y,v)-\Psi^{(2)}_{y_i}v_i-\Psi^{(2)}_t\right]=b(t), \qquad (2.20')$$

$$A^{(1)}(y_1,y_2)+\Psi_2^{(2)}=C. \qquad (2.2I')$$

Тогда все требования теоремы 2.I будут выполнены, в том числе и условие $\sup_v J$, ибо в этом случае J в силу (2.20), (2.2I) перестает зависеть от v. Найденная таким способом $\Psi^{(2)}(t,y)$ полностью решает задачу Q.

б) Найдем какое-нибудь решение уравнения в частных производных (2.20) при краевом условии (2.2I), рассматривая его как уравнение с двумя неизвестными функциями $\Psi^{(1)}(t,x,y)$ и $\Psi^{(2)}(t,y)$. Тогда все требования теоремы 2.I будут выполнены. Найденные таким способом $\Psi^{(1)}(t,v)$ полностью решают задачу Q и мы получаем оптимальные траектории как основной, так и редуцированной задачи.

Если сделать редукцию дважды (см. п. В), то получим следующее уравнение в частных производных:

$$\inf_w\left\{\sup_{y,v}\left[\inf_{u,x}\left(f_0-\Psi^{(1)}_{x_i}f_i-\Psi^{(1)}_{y_i}v_i-\Psi^{(1)}_t\right)-\Psi^{(2)}_{y_i}v_i-\Psi^{(2)}_t\right]-\Psi^{(3)}_{z_i}w_i-\Psi^{(3)}_t\right\}=b(t) \qquad (2.22)$$

при краевом условии

$$\inf_{z_2}\left\{\sup_{y_2}\left[\inf_{x_2}\left(F+\Psi_2^{(1)}-\Psi_1^{(1)}\right)+\Psi_2^{(2)}\right]+\Psi_2^{(3)}\right\}=C. \qquad (2.23)$$

И вообще, если сделать редукцию k раз, то получим уравнение в частных производных

$$\inf_w \ldots^{*/}\left\{\sup_{y,v}\left[\inf_{x,u}\left(f_0-\Psi^{(1)}_{x_i}f_i-\Psi^{(1)}_{y_i}v_i-\Psi^{(1)}_t\right)-\Psi^{(2)}_{y_i}v_i-\Psi^{(2)}_t\right]\ldots-\Psi^{(k+1)}_{z_i}w_i-\Psi^{(k+1)}_t\right\}=b(t) \qquad (2.24)$$

при краевом условии

$$\inf_{z_1,z_2}\ldots^{*/}\left\{\sup_{y_2}\left[\inf_{x_2}\left(F+\Psi_2^{(1)}+\Psi_2^{(2)}\right]\ldots+\Psi_2^{(k+1)}\right\}=C. \qquad (2.25)$$

Замечание. Полагая в (2.20) $\Psi^{(2)}(t,y)=0,\ \Psi^{(1)}=\Psi^{(1)}(t,x)$ и выбирая $\Psi^{(1)}(t,x)$ так, чтобы оно удовлетворяло уравнению в частных производных

$$\inf_u\left(f_0-\Psi^{(1)}_{x_i}f_i-\Psi^{(1)}_t\right)=0 \qquad (2.26)$$

при краевом условии

$$\inf_{x_1,x_2}\left(F-\Psi_2^{(1)}-\Psi_1^{(1)}\right)=C, \qquad (2.27)$$

*/ Знак будет inf или sup в зависимости от того, четное или нечетное k.

мы как частный случай получили уравнение Р. Беллмана.

Предлагаемые уравнения редуцированной задачи по сравнению с уравнением Беллмана обладают следующими преимуществами:

I) Уравнения в частных производных (2.20), (2.22), (2.24) содержат несколько неизвестных функций, что расширяет прикладные возможности метода.

2) Уравнение (2.20), вообще говоря, проще уравнения Беллмана, так как слагаемое $\Psi^{(2)}_{y_i}v_i$ по сравнению со слагаемым $\Psi_{x_i}f_i(t,x,u)$ имеет более простой вид.

3) Уравнение (2.20) может быть задано многими способами (в зависимости от выбора $\Psi^{(1)}(t,x,y)$), что может быть полезно, так как позволит выбирать более простой для решения вид.

Пример 2.2. Пусть задача описывается уравнениями

$$I=\int_{t_1}^{t_2}0{,}5(u^2+x_1^2+x_2^2)\,dt,\quad \dot x_1=x_2+u,\quad \dot x_2=x_1+u, \qquad x_i(t_j) \text{ заданы } (i,j=1,2)$$

Возьмем $\Psi^{(1)}=x_1y_1+x_2y_2$ и редуцируем задачу

$$\inf_{x,u}B=\inf_{x,u}\left[\tfrac{1}{2}(u^2+x_1^2+x_2^2)-y_1(x_2+u)-y_2(x_1+u)-x_1\dot y_1-x_2\dot y_2\right], \qquad (2.28)$$

откуда

$$B_{x_1}=x_1-y_2-\dot y_1=0,\quad B_{x_2}=x_2-y_1-\dot y_2=0,\quad B_u=u-y_1-y_2=0.$$

Подставив все это в (2.28) и обозначив $\dot y_1=V_1,\ \dot y_2=V_2$, получим новый функционал

$$I^{(1)}=A^{(1)}+\int_{t_1}^{t_2}B^{(1)}dt=\left[x_1y_1+x_2y_2-y_1y_2\right]_1^2-\int_{t_1}^{t_2}\left(y_1^2+y_2^2+y_1y_2+\tfrac{1}{2}V_1^2+\tfrac{1}{2}V_2^2\right)dt$$

для системы

$$\dot y_1=V_1,\quad \dot y_2=V_2.$$

Уравнение (2.20) для этого функционала таково*/

$$\sup_V\left(-y_1^2-y_2^2-y_1-y_2-\tfrac{1}{2}V_1^2-\tfrac{1}{2}V_2^2-\Psi_{y_1}V_1-\Psi_{y_2}V_2-\Psi_t\right)=0,$$

откуда следует, что

$$V_1=-\Psi_{y_1},\quad V_2=-\Psi_{y_2}.$$

Исключая V_1, V_2 при помощи этих равенств, получаем окончательно уравнение в частных производных редуцированной задачи

$$\Psi_{y_1}^2+\Psi_{y_2}^2-2\Psi_t=2(y_1^2+y_1y_2+y_2^2). \qquad (2.29)$$

Уравнение Беллмана после исключения u для данной задачи имеет вид $(\Psi_{x_1}+\Psi_{x_2})^2+x_2\Psi_{x_1}+x_1\Psi_{x_2}+\Psi_t=-x_1^2-x_2^2$.

Ясно, что оно: I) не совпадает с уравнением (2.29), 2) имеет более громоздкий вид.

*/ Верхний индекс $^{(2)}$ у Ψ для простоты опущен.

3. Методы нахождения отдельных минималей. Методы условного максимина (относительно вспомогательного и относительно основного неизвестного)

Пусть мы перешли к редуцированной задаче (I-я редукция) с функционалом

$$I^{(1)}=A^{(1)}(y_1,y_2)+\int_{t_1}^{t_2}B^{(1)}(t,y,V)\,dt \qquad (2.30)$$

и системой

$$\dot y_i=V_i\ ,\quad i=1,2,\dots,n\ ,\quad V\in V. \qquad (2.31)$$

Применим к этой задаче теорему 3.I гл. II. Зададимся функцией $\psi^{(1)}(t,y)$ в виде $\psi^{(1)}=p_i(t)\Delta y_i$, где $\Delta y_i=y_i-\bar y_i$. Тогда из условия

$$B^{(1)}=\sup_{y,V}\left[B^{(1)}(t,y,V)-p_iV_i-\dot p_i\Delta y_i\right]=\sup_{y,V}\left[-H^{(1)}-\dot p_i\Delta y_i\right] \qquad (2.32)$$

получаем

$$B^{(1)}_{y_i}\equiv\dot p_i+B^{(1)}_{y_i}=0\ ,\qquad \bar H^{(1)}=\inf H^{(1)}. \qquad (2.33)$$

Выражения (2.33), (2.31) совместно с краевым условием[x/]

$$\sup_{y_1,y_2}\left[A^{(1)}(y_1,y_2)+\psi_2^{(1)}-\psi_1^{(1)}\right] \qquad (2.34)$$

позволяют найти экстремаль редуцированной задачи[xx/], а по ней при помощи (2.8) уже без всяких интеграций восстанавливается кривая, подозрительная на экстремум исходной задачи.

Заметим, что редуцированная задача (2.30), (2.31) обычно проще основной задачи, так как: 1) правые части в уравнениях (2.31) просты, 2) правые части в уравнениях (2.33) $\dot p_i=B^{(1)}_{y_i}$ не зависят от p_i, 3) вообще говоря, в силу (2.31) упрощаются зависимость $H^{(1)}(V)=B^{(1)}(t,y,V)-p_iV_i$ и отыскание $\inf\limits_V H^{(1)}$.

Если $\bar x,\bar u$ из (2.8) удовлетворяют (2.1), то это – абсолютная минималь задачи I, если нет, то $J(\bar x,\bar y)$ дает оценку снизу функционалу (2.2) на допустимом множестве. Вероятность того, что $\bar x,\bar u\in Q$ здесь значительно выше, чем в методе $\alpha(x)$-функционала (см. §3 гл. II), ибо (2.2) на $\bar x,\bar u\in Q$ завышается, насколько только позволяет функция $\psi^{(1)}(t,y)$, а оценка снизу в силу тех же причин в большинстве случаев лучше, чем в методе α-функционала.

Редуцированную задачу (2.30), (2.31) можно решить и при помощи классического вариационного исчисления. Для этого удобно переписать ее в виде

$$I^{(1)}=A^{(1)}(y_1,y_2)+\int_{t_1}^{t_2}B^{(1)}(t,y,\dot y)\,dt. \qquad (2.35)$$

[x/] При этом приходится решать краевую задачу.

[xx/] Мы говорим об экстремали, так как первое уравнение в (2.33) обеспечивает только выполнение необходимого условия стационарности функционала по y.

Уравнения Эйлера для этой задачи запишутся так:

$$\frac{d}{dt}B^{(1)}_{\dot y_i}=B^{(1)}_{y_i}\ ,\quad i=1,\dots,n. \qquad (2.36)$$

Условие Вейерштрасса:

$$B^{(1)}(t,y,\dot Y)-\dot Y_iB^{(1)}_{\dot y_i}(t,y,\dot y)\geq B^{(1)}(t,y,\dot y)-\dot y_iB^{(1)}_{\dot y_i}(t,y,\dot y) \qquad (2.37)$$

или

$$\inf_{\dot Y}\left[B^{(1)}(t,y,\dot Y)-\dot Y_iB^{(1)}_{\dot y_i}(t,y,\dot y)\right]. \qquad (2.38)$$

Угловые условия:

$$B^{(1)-}_{\dot y_i}=B^{(1)+}_{\dot y_i}\ ,\quad\left[B^{(1)}-\dot y_iB^{(1)}_{\dot y_i}\right]^-=\left[B^{(1)}-\dot y_iB^{(1)}_{\dot y_i}\right]^+. \qquad (2.39)$$

Простейшая форма, в которой можно брать $\psi^{(1)}$, это

$$\psi^{(1)}=y_ix_i, \qquad (2.40)$$

(или $\psi^{(1)}=y_i\Delta x_i$, где $\Delta x_i=x_i-\bar x_i$), а также $\psi^{(1)}=p_i(t)y_i$ (или $\psi^{(1)}=p_i(t)\Delta y_i$, где $\Delta y_i=y_i-\bar y_i$).

Пример 2.3. Пусть

$$I=\int_0^1 0{,}5u^2dt\ ,\quad \dot x=u\ ,\quad x(0)=1,\quad x(1)=0. \qquad (2.41)$$

Возьмем $\psi^{(1)}=xy$. Тогда $B=0{,}5u^2-yu-\dot yx$, $B^{(1)}=\inf\limits_{x,u}B$, $B_x=-\dot y=0$, $y=const$; $B_u=u-y=0$, $\bar u=y$, $B^{(1)}=-0{,}5y^2$, $A^{(1)}=xy\big|_0^1$. Редуцированная задача ($\psi^{(1)}=p(t)y$):

$$J=A^{(1)}+\int_0^1B^{(1)}dt=xy\big|_0^1+py\big|_0^1+\int_0^1(-0{,}5y^2+\dot py)\,dt\ ,\quad \dot y=0.$$

Из $\sup\limits_y B^{(1)}=\sup\limits_y(-0{,}5y^2+\dot py)$ следует $\dot p=-y$, $p=-yt+c$, из $\sup\limits_{y_1,y_2}A^{(1)}=\sup\limits_{y_1,y_2}\left[xy\big|_0^1+py\big|_0^1\right]$ вытекает $p(0)=-x(0)=-1$, $p(1)=-x(1)=0$. Подставив их в $p=-yt+c$, найдем $y=-1$. Подставив это y в исходную задачу получим окончательно: $\bar u=y=-1$, $\dot{\bar x}=-1$, $\bar x=-t$.

Пример 2.4. Решим пример 2.2 способами данного пункта:

$$I=\int_{t_1}^{t_2}0{,}5(u^2+x_1^2+x_2^2)\,dt,\ \dot x_1=x_2+u,\ \dot x_2=x_1+u,\ x_i(t_j)\text{ - заданы }(i,j=1,2) \qquad (2.42)$$

Возьмем $\psi^{(1)}=x_1y_1+x_2y_2$. Из

$$\inf_{x,u}B=\inf_{x,u}\left[0{,}5(u^2+x_1^2+x_2^2)-y_1(x_2+u)-y_2(x_1+u)-x_1\dot y_1-x_2\dot y_2\right] \qquad (2.43)$$

находим

$$B_{x_1}=x_1-y_2-\dot y_1=0\ ,\quad B_{x_2}=x_2-y_1-\dot y_2=0,\ B_u=u-y_1-y_2=0. \qquad (2.44)$$

Подставив все это в (2.43), получим

$$\bar B=-y_1^2-y_2^2-y_1y_2-\frac12\dot y_1^2-\frac12\dot y_2^2-\frac{d}{dt}(y_1y_2). \qquad (2.45)$$

Обозначив $\dot y_1=V_1$, $\dot y_2=V_2$, получим следующую редуцированную задачу

$$I^{(1)}=A^{(1)}+\int_{t_1}^{t_2}B^{(1)}dt=\left[x_1y_1+x_2y_2-y_1y_2\right]_1^2+\int_{t_1}^{t_2}\left(-y_1^2-y_2^2-y_1y_2-\frac{V_1^2}{2}-\frac{V_2^2}{2}\right)dt \qquad (2.46)$$

$$\dot y_1=V_1\ ,\quad \dot y_2=V_2. \qquad (2.47)$$

Возьмем $\psi^{(1)}=p_1(t)y_1+p_2(t)y_2$ и составим обобщенный функционал для редуцированной задачи $J^{(1)}=A^{(1)}+\int_{t_1}^{t_2}B^{(1)}dt=$
$=\left[x_1y_1+x_2y_2-y_1y_2+p_1y_1+p_2y_2\right]_1^2+\int_{t_1}^{t_2}\left(-y_1^2-y_2^2-y_1y_2-\frac{V_1^2}{2}-\frac{V_2^2}{2}-p_1V_1-p_2V_2-\dot p_1y_1\ \dots\right.$

82-83

Из $\sup_{\dot y, y} B^{(1)}$ получаем систему уравнений оптимали редуцированной задачи:

$$B_{y_1}=2y_1-y_2-\dot p_1=0,\ B_{y_2}=-2y_2-y_1-\dot p_2=0,\ B_{x_1}=-y_1-p_1=0,\ B_{x_2}=-y_2-p_2=0 \qquad (2.48)$$

Из $\sup_{y_1,y_2} A^{(1)}$ определяем краевые условия:

$$A_{y_1}\big|_2=(x_1+p_1-y_2)\big|_2=0,\quad A_{y_1}\big|_1=(x_1-p_1+y_2)\big|_1=0, \qquad (2.49)$$

$$A_{y_2}\big|_2=(x_2+p_2-y_1)\big|_2=0,\quad A_{y_2}\big|_1=(-x_2-p_2+y_1)\big|_1=0.$$

Интегрируя (2.48) при краевых условиях (2.49), находим $y_1(t)$, $y_2(t)$. Подставляя их в (2.44), получаем* (уже без интеграций) решение, подозрительное как экстремаль исходной задачи. Если оно допустимое, т.е. совместно с (2.42), то это – абсолютная минималь исходной задачи. Проверить это без всяких интеграций можно путем подстановки в (2.42) либо следующим образом. Продифференцируем первые два уравнения (2.44) и исключим $\dot x_1, \dot x_2, x_1, x_2$ при помощи (2.42), (2.44). Получим уравнения совместности:

$$\ddot y_1=2y_1+y_2,\quad \ddot y_2=y_1+2y_2. \qquad (2.50)$$

Пусть $y_1(t), y_2(t)$ удовлетворяют этим уравнениям. Так как они получены из (2.42), (2.44), то следовательно, y_1, y_2 удовлетворяют и (2.42), (2.44).

Рассмотрим метод условного максимина в задачах оптимизации, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Пусть поведение системы описывается по-прежнему уравнениями (2.I) с функционалом (2.2). Предположим, что мы задались некоторой функцией $\Psi(t,x,y)$, зависящей от n-мерного вектора y, и из условий

$$B^{(1)}(t,y,\dot y)=\inf_{x,u}(f_0-\Psi_{x_i}f_i-\Psi_{y_i}\dot y_i-\Psi_t),\quad A(y_1,y_2)=\inf_{x_1,x_2\in R}(F+\Psi_2-\Psi_1) \qquad (2.51)$$

нашли

$$\dot y=\xi_1(t,\bar x,y,\bar u),\quad \xi_2(t,\bar u,\bar x,y)=0,\quad \xi(y_1,y_2,\bar x_1,\bar x_2)=0. \qquad (2.52)$$

Заметим, что в силу (2.5I) первое из них линейно относительно $\dot y$, а второе не содержит $\dot y$. Отметим также, что каждое из них представляет векторное равенство – первое размерности n, второе – z, и третье – $2n$.

Найдем из $\xi_2(t,\bar u,\bar x,y)=0$ управление

$$\bar u=\xi_3(t,y,\bar x). \qquad (2.53)$$

Исключая во 2-м уравнении в (2.52) $\bar x$ при помощи I-го уравнения в (2.52) и разрешая полученное уравнение относительно u, можно (2.53) записать еще в таком виде:

$$\bar u=\xi_4(t,y,\dot y) \qquad (2.53')$$

Подставим (2.53) в первое выражение (2.52) и в (2.I), получим

$$\dot y=\xi(t,\bar x,y),\quad \dot x=f[t,x,u(t,y,\bar x)]. \qquad (2.54)$$

Потребуем теперь, чтобы $\bar x=x$, т.е. $\bar x$ обязательно было допустимым. Тогда условие $\alpha=\int_{t_1}^{t_2}\Psi_{x_i}(\dot x_i-f_i)dt=0$ будет выполнено. Но в этом случае согласно алгоритму 6 и условие $\sup J$ автоматически будет выполнено. Таким образом,

$$\dot y=\xi(t,x,y),\quad \dot x=\varphi(t,x,y) \qquad (2.54')$$

будут представлять собой уравнения условного максимина (общий случай) для задач оптимизации, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Решая краевую задачу для (2.54') при краевых условиях (2.52) $\xi(y_1,y_2,x_1,x_2)=0$, мы найдем абсолютную минималь.

<u>Замечание</u>. Если I-е уравнение в (2.54') не зависит от x, то оно может быть проинтегрировано отдельно от 2-го уравнения в (2.54). Переход к редуцированной задаче в этом случае делается следующим образом.

Подставляем найденное общее решение $y=y(t,y_1)$, где $y_1=y(t_1)$, в подынтегральное выражение (2.30): $B^{(1)}(t,y,\dot y)=B^{(1)}(t,y_1)$ и интегрируем

$$L(y_1)=\int_{t_1}^{t_2}B^{(1)}(t,y_1)\,dt. \qquad (2.55)$$

Начальное значение y_1, соответствующее заданным граничным значениям x_1, x_2, выбираем из условия

$$\sup_{y_1,y_2}\Big\{\inf_{x_1,x_2\in R}\big[F(x_1,x_2)+\Psi(t_2,x_2,y_2)-\Psi(t_1,x_1,y_1)\big]+L(y_1)\Big\} \qquad (2.56)$$

<u>Пример 2.5</u>. Найти синтез в следующей задаче построения оптимального регулятора: $I=\int_0^\infty 0{,}5u^2dt$, $\dot x=x+u$, $x(0)=x_1$, $x(\infty)=x_2=0$. Берем $\Psi=xy$. $J=\Psi_2-\Psi_1+\int_0^\infty B\,dt$, $B=\frac{u^2}{2}-y(x+u)-\dot y x$. Из $\inf_{x,u}B$ получаем $B_x=-y-\dot y=0$. Видим, что это уравнение не зависит от x. Интегрируя его, находим $y=y_1e^{-t}$. Далее $B_u=u-y=0$, $u=y_1e^{-t}$. Подставляя все это в (2.55) и вычисляя L, получаем $L=\int_0^\infty-\frac12 y^2dt=\int_0^\infty-\frac{y_1^2}{2}e^{-2t}dt=-\frac14 y_1^2$. Так как x_1, x_2 заданы, то требование $\inf_{x_1,x_2}(\Psi_2-\Psi_1)$ пропадает и из (2.56) получаем $\sup_{y_1}(-y_1x_1-\frac14 y_1^2)$ и $y_1=2x_1$.

Подставим y_1 в $u=y_1e^{-t}$: $u=-2x_1e^{-t}$. Считая каждый момент за начальный $t=0$, находим синтез $u=-2x$. Система асимптотически устойчива в целом. В самом деле примем за функцию Ляпунова $V=\Psi=yx$. Так как $y=-2x$, то $V=\Psi=-2x^2$, и $\dot\Psi=-4x(x+u)=-4x(x+v)=4x^2$. Мы видим, что $V<0$, $\dot V>0$ при $x\neq0$. Это и говорит об устойчивости.

Интересно отметить, что если решать эту задачу по принципу максимума, то нужно интегрировать систему дифференциальных уравнений 2-го порядка (основную и сопряженную). В данном же случае мы интегрировали только одно уравнение (I-го порядка): $\dot y + y = 0$. Можно показать, что это обстоятельство при некоторых условиях встречается и в более общем случае, т.е. вместо интегрирования системы порядка $2n$ (основной и сопряженной) для построения синтеза можно обойтись интегрированием системы порядка n: $\dot y = \xi(t,y)$ В самом деле, зная $y = y(t, y_1)$, подставим его в (2.53'): $\bar u = \xi_3(t,y,\dot y)$ и исключим y_1 при помощи (2.56). Получим $\bar u = \xi_4(t,x_1,x_2)$. Считая здесь каждый момент за начальный $t=0$, найдем полный синтез: $\bar u = \xi_5(x_1,x_2)$ */. Мы видим, что переход к редуцированной задаче может оказаться полезен.

Если в $B^{(1)}(t,x,y,\dot y)$ не удастся исключить x, то подставляя $y = y(t,y_1)$ в (2.53'), получим $\bar u = \xi_6(t,y_1)$, а подставляя $\bar u$ в (2.1), подбираем y_1 так, чтобы кривая $x(t)$ удовлетворяла заданным условиям на правом конце.

Подчеркнем, что в отличие от уравнений Эйлера в классическом вариационном исчислении или уравнений принципа максимума, уравнения условного максимина, если их удалось построить, дают не решение, подозрительное на экстремум (экстремаль), а абсолютную минималь.

Покажем, каким образом можно получить уравнение условного максимина для вспомогательного неизвестного и основного неизвестного.

а) Уравнение условного максимина для вспомогательного неизвестного

Решим**/ I-е уравнение (2.5) относительного x:

$$x = \xi_3(t, y, \dot y). \tag{2.57}$$

Продифференцируем (2.57) полным образом по t и исключим $\dot x$ при помощи 2-го уравнения в (2.54'):

$$\varphi(t,x,y) = \xi_4(t,y,\dot y,\ddot y).$$

Заметим, что оно линейно относительно $\ddot y$. Исключая из него x при помощи (2.57), получим окончательно уравнение (векторное) условного максимина для вспомогательного неизвестного

$$\omega(t,y,\dot y,\ddot y) = 0 \tag{2.58}$$

*/ То есть синтез для любых граничных условий на правом конце. Таким образом, мы решили более общую задачу, чем обычным методом. Так находится синтез только для фиксированного правого конца.

**/ Предполагается, что соответствующие обратные операторы, производные существуют и функциональные матрицы имеют нужный ранг.

Краевые условия для $y(t)$ находим по заданным $x(t_1), x(t_2)$ при помощи 3-го уравнения в (2.52) и I-го в (2.54'). Решаем краевую задачу для (2.58) и по (2.57), (2.53) уже без всяких интеграций находим $\bar x(t), \bar u(t)$. В силу наших построений оно будет допустимым и удовлетворит заданным граничным условиям. Отметим, что уравнение (2.58) не является уравнением Эйлера в классическом смысле этого слова. В отличие от уравнения Эйлера оно определяется неоднозначно (зависит от выбора $\Psi(t,x,y)$), что может быть использовано для построения его в более простой форме, и дает не экстремаль, а абсолютную минималь.

Уравнение (2.58) можно рассматривать также как уравнение совместности задачи (2.30), (2.3I) с исходной задачей (2.I), (2.2). Из вывода этого уравнения следует, что если $y(t)$, полученные по (2.3I), (2.33), удовлетворяют уравнению (2.58), то $x(t), u(t)$, восстановленные при помощи (2.8), являются допустимыми.

б) Уравнение условного максимина для основного неизвестного

Разрешим 2-е уравнение (2.54') относительно y:

$$y = \varphi^{-1}(t,x,\dot x). \tag{2.59}$$

Продифференцируем его полным образом по t и исключим $\dot y$ при помощи I-го уравнения (2.54'): $\xi(t,x,y) = \xi_5(t,x,\dot x,\ddot x)$. Исключая из этого уравнения y при помощи (2.59), получим окончательно

$$\omega(t,x,\dot x,\ddot x) = 0. \tag{2.60}$$

Заметим, что оно линейно относительно $\ddot x$. Краевые условия для него находим из 3-го уравнения в (2.52) и 2-го уравнения в (2.54'). Решая краевую задачу для (2.60), получаем сразу оптимальное решение $\bar x(t)$, подставляя которое во 2-е уравнение (2.54), находим $y(t)$ и, подставляя его в (2.53'), определяем $\bar u(t)$.

Пример 2.6. Решим пример 2.4 методами условного максимина.

а) Сведение решения к уравнению (2.58) относительно вспомогательных неизвестных.

Найдем из (2.44) x_1, x_2

$$x_1 = y_2 + \dot y_1, \quad x_2 = y_1 + \dot y_2. \tag{2.6I}$$

Продифференцируем их по t и подставим в (2.42)

$$x_2 + u = \dot y_2 + \ddot y_1, \quad x_1 + u = \dot y_1 + \ddot y_2. \tag{2.62}$$

Исключим x_1, x_2, u при помощи (2.6I), (2.44), получим окончательно

$$\ddot y_1 = 2y_1 + y_2, \quad \ddot y_2 = y_1 + 2y_2. \tag{2.63}$$

Это и есть уравнение (2.58). Краевые условия получим для него из (2.64):

$$\psi_2(t_1)+\dot{\psi}_1(t_1)=x_1(t_1)\ ,\quad \psi_2(t_2)+\dot{\psi}_1(t_2)=x_1(t_2),$$
$$\psi_1(t_1)+\dot{\psi}_2(t_1)=x_2(t_1)\ ,\quad \psi_1(t_2)+\dot{\psi}_2(t_2)=x_2(t_2), \qquad (2.64)$$

где $x_i(t_j)\ ,(i,j=1,2)$ нам известны.

Интегрируя (2.63) при краевых условиях (2.64), получаем $\psi_1(t),\ \psi_2(t)$. Вставляя их в (2.44) примера 2.4, находим абсолютную минималь $x_1(t),x_2(t)$ уже без всяких интеграций. При этом x_1,x_2 получаются допустимыми.

б) Сведение решения к уравнению (2.60) относительно основных неизвестных.

Подставляем u из (2.44) в (2.42)

$$\dot{x}_1=x_1+\psi_1+\psi_2\ ,\quad \dot{x}_2=x_1+\psi_1+\psi_2. \qquad (2.65)$$

Дифференцируем по t и исключаем $\dot{\psi}_1,\dot{\psi}_2,\psi_1,\psi_2$ при помощи (2.65), (2.44). Получаем уравнение условного максимина относительно основных функций

$$\ddot{x}_1=x_1+2x_2+\dot{x}_2-\dot{x}_1\ ,\quad \ddot{x}_2=2x_1+x_2+\dot{x}_1-\dot{x}_2$$

Краевые условия $x_i(t_j),\ i,j=1,2$ для них известны. Интегрируя их, находим абсолютную минималь.

§3. Метод максимина как метод оценки решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

В данном параграфе показано, что метод максимина может быть использован не только в задачах оптимизации, но и как метод оценки максимальных отклонений фазовых координат для некоторой совокупности начальных условий. Эта задача имеет большое значение для теории автоматического регулирования.

А) Математическая постановка задачи. Поведение объекта описывается системой уравнений:

$$\dot{x}_i=f_i(x)\ ,\ i=1,2,\dots,n,\ t_1\le t\le t_2\ ,\ x(t_1)\in R. \qquad (3.1)$$

Надо найти оценку снизу функции

$$I=F[x(t_2)] \qquad (3.2)$$

для совокупности $x(t_1)\in R$, где R - множество начальных условий.

Если начальное условие задано, то найти точное значение функции (3.2) не представляет особого труда, например, путем интегрирования системы (3.1) на ЭВМ. Однако, если множество R начальных условий содержит большое число элементов, этот способ становится неприемлемым.

В настоящее время нет удовлетворительных методов решения этой задачи. Число же технических задач, укладывающихся в рамки данной постановки, достаточно велико. Это - и наибольшее потребное отклонение руля высоты или направления самолета, и максимальный промах ракеты при неблагоприятном стечении обстоятельств и многое другое.

Представляет интерес и такая задача: не решая уравнений (3.I), найти оценку снизу в момент t_2 отклонения какой-нибудь координаты (или всех координат).

В рамки данной постановки укладывается и задача получения оценки сверху отклонения фазовых координат (или функции (3.2)) в момент t_2.

Б) Поставленную задачу можно рассматривать как частный случай задачи оптимизации, когда управления отсутствуют и $f_0\equiv 0$. Применим для ее решения метод максимина. Возьмем функцию $\psi(t,x,u)$ и составим выражения:

$$B=-\psi_{x_i}f_i-\psi_t\ ;\quad A=F+\psi_2-\psi_1. \qquad (3.2')$$

Из теоремы 2.2 следует оценка снизу

$$F[x(t_2)]\ge\sup_{\psi}\Big(\inf_{x\in R}A+\int_{t_1}^{t_2}\inf_x B\,dt\Big). \qquad (3.3)$$

Для получения этой оценки можно применить методы условного максимина §2 (уравнения (2.54), (2.58), (2.60)) или уравнения максимина в частных производных (2.20), (2.2I).

В простейшем случае можно считать ψ постоянными. Тогда для получения оценки достаточно найти минимум по x, вычислить интеграл и найти максимум по ψ в правой части выражения (3.3).

<u>Пример 3.I</u>. Поведение объекта описывается системой:

$$\dot{x}_1=-x_1+\tfrac{1}{2}x_2^2\ ,\quad \dot{x}_2=x_1^2-x_2\ ,\quad t_1\le t\le t_2. \qquad (3.4)$$

Найти оценку снизу для функции $x_1(t_2)+x_2(t_2)$, когда $x_1(t_1),x_2(t_1)$ - любые. Зададимся $\psi=\psi_1x_1+\psi_2x_2$ и будем считать, что ψ_1,ψ_2 - постоянные. Тогда $B=-\psi_1(-x_1+\frac{1}{2}x_2^2)-\psi_2(x_1^2-x_2)$, $A=(x_1+x_2+\psi_1x_1+\psi_2x_2)|_{t_2}-(\psi_1x_1+\psi_2x_2)|_{t_1}$. Из $\bar{B}=\inf B$ находим

$$B_{x_1}=\psi_1-2x_1\psi_2=0\ ,\ x_1=\frac{\psi_1}{2\psi_2}\ ,\ B_{x_1x_1}=-\psi_2\ge 0\ ,\ \psi_2\le 0,$$
$$B_{x_2}=-\psi_1x_2+\psi_2=0,\ x_2=\frac{\psi_2}{\psi_1}\ ,\ B_{x_2x_2}=-\psi_1\ge 0\ ,\ \psi_1\le 0, \qquad \bar{B}=\frac{\psi_1^2}{4\psi_2}+\frac{\psi_2^2}{2\psi_1}.$$

Из $\bar{A}=\inf_{x\in R}A>-\infty$ находим $\psi_1=-1,\ \psi_2=-1$. Подставляя эти значения в $\bar{B}$, получаем $\bar{B}=-\frac{3}{4}$. Следовательно, $\int_{t_1}^{t_2}\bar{B}dt=-\frac{3}{4}(t_2-t_1)$, $\bar{A}=x_1(t_1)+x_2(t_1)$. Итак, согласно (3.3) оценка снизу

$$x_1(t_2)+x_2(t_2)\ge x_1(t_1)+x_2(t_1)-\tfrac{3}{4}(t_2-t_1).$$

или максимальное отклонение (вниз) фазовых координат ограничено величиной $\Delta x_1+\Delta x_2\ge-\frac{3}{4}(t_2-t_1)$.

Пример 3.2. Поведение объекта описывается системой:

$$\dot x_1 = x_2 - 3x_3 - x_1(x_2-2x_3)^2,$$
$$\dot x_2 = -2x_1 + 3x_3 - x_2(x_1+x_3)^2, \qquad (3.5)$$
$$\dot x_3 = 2x_1 - x_2 - x_3, \quad t_1 \le t \le t_2 .$$

Найти оценку снизу и сверху возможного отклонения координаты $x_1(t_2)$ для произвольных начальных условий $x_1(t_1), x_2(t_1), x_3(t_1)$ и произвольного момента t_2 .

Задаемся $\Psi = y(2x_1^2+x_2^2+x_3^2)$, где y – постоянная. Находим

$$B = -\Psi_{x_i} f_i - \Psi_t = y\left[2x_1^2(x_2-2x_3)^2 + x_2^2(x_1+x_3)^2 + x_3^2\right].$$

Если $y>0$, минимум B по x существует и очевиден: $x_i=0,\ B=0$. Составим выражение для A (оценка снизу $F=x_1(t_2)$):

$$A = \left[x_1 + y(2x_1^2+x_2^2+x_3^2)\right]\Big|_{t_2} - y(2x_1^2+x_2^2+x_3^2)\Big|_{t_1}.$$

Из условия минимума A по x/t_2 находим $(y>0)$:

$$x_2|_{t_2}=0,\quad x_3|_{t_2}=0,\quad B_{x_1}=1+4yx_1|_{t_2}=0,\quad x_1(t_2)=-1/4y.$$
$$A(y) = -\frac{1}{8y} - y(2x_1^2+x_2^2+x_3^2)\Big|_{t_1}.$$

Из условия максимума A по y следует:

$$A_y = \frac{1}{8y^2} - (2x_1^2+x_2^2+x_3^2)\Big|_{t_1} = 0,\quad y = \frac{1}{\sqrt{8(2x_1^2+x_2^2+x_3^2)|_{t_1}}},$$
$$A = -\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{(2x_1^2+x_2^2+x_3^2)|_{t_1}}.$$

Подставляя A, B в (3.3), находим окончательно

$$x_1(t_2) \ge -\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{(2x_1^2+x_2^2+x_3^2)|_{t_1}} . \qquad (3.6)$$

Найдем теперь оценку для $x_1(t_2)$ сверху. Для этого достаточно принять $F=-x_1(t_2)$ и подставить его в выражение для $A = F + \Psi\big|_{t_1}^{t_2}$. Аналогично предыдущему получим .

$$-x_1(t_2) \ge -\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{(2x_1^2+x_2^2+x_3^2)|_{t_1}} . \qquad (3.7)$$

Объединив (3.6) и (3.7), найдем окончательно

$$|x_1(t_2)| \le \frac{1}{\sqrt2}\sqrt{(2x_1^2+x_2^2+x_3^2)|_{t_1}} .$$

Отсюда видно, что возмущения для координаты $x_1(t)$ с течением времени не возрастают. В частности, если $x_2|_{t_1}=0,\ x_3|_{t_1}=0$, то $|x_1(t)| \le |x_1(t_1)|$.

Замечание. Очевидно, что если $\hat x(t)$, полученное из правой части (3.3), является решением системы (3.I) (т.е. допустимым), то в (3.3) будет знак равенства и мы получим точное значение максимального отклонения. Напомним, что методы условного максимина гарантируют допустимость решения.

§4. Применение метода максимина в исследовании устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений

Метод максимина может быть применен также и в другой необычной роли – как метод построения в выбранном классе функции Ляпунова и исследования устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем используется терминология работы [2].

А) Рассмотрим вначале случай автономной системы. Пусть

$$\dot x_i = f_i(x) ,\ i=1,2,\dots,n,\ 0\le t\le\infty \qquad (4.I)$$

уравнения возмущенного движения объекта, т.е. $f_i(0)\equiv 0$

Возьмем непрерывную и дифференцируемую функцию $\Psi(x,y)$ на $X\times Y$ и обладающую следующими свойствами:
I) $\Psi(x,y)$ положительно определена по x при $\forall y\in Y$; 2) $\Psi(0,y)=0$ на Y.

Уравнения (4.I) можно рассматривать как частный случай задачи оптимизации, когда управления отсутствуют и функционал тождественно равен нулю. Составим выражение $B=-\Psi_{x_i} f_i - \Psi_t$.

Теорема 4.I. Пусть функция $\Psi(x,y)$ непрерывна, дифференцируема на $X\times Y$ и обладает свойствами: а) $\Psi(x,y)$ положительно определена по x при $\forall y\in Y$; б) $\Psi(0,y)\equiv 0$ на Y .

Тогда:

I) если $\sup_x \inf_y B = 0$, то невозмущенное движение устойчиво;

2) если $\sup_x \inf_y B=0$, причем $\hat x=0$ и единственно, то невозмущенное движение устойчиво ассимптотически;

3) если $\inf_x \sup_y B=0$, причем $B\ne0$ в окрестности $x=0$, то невозмущенное движение неустойчиво*/;

4) если $\inf_x \sup_y B=0$, причем $\hat x=0$ и единственно, то невозмущенное движение неустойчиво абсолютно.

Доказательство. I) Примем за функцию Ляпунова V функцию $\Psi(x,\hat y)$. Эта функция знакоопределенная. Найдем знак ее производной. Согласно п. I теоремы имеем $B(\hat x,\hat y)=\sup_x\inf_y(-\dot\Psi)=-\inf_x\sup_y\dot\Psi=0$, т.е. $\dot\Psi(x,\hat y)\le 0$ на X . Применяя I-ю теорему Ляпунова ([2] стр. 9I), получаем заключение теоремы.

2) Аналогично предыдущему получаем $\Psi(x,\hat y)>0$ при $x\ne0$ и в силу единственности x $\dot\Psi(x,\hat y)<0$ на X при $x\ne0$. Применяя теоре-

---

*/ Для справедливости данного утверждения положительной определенности от Ψ не требуется, но должна существовать сколь угодно малая окрестность $x=0$, где $\Psi>0$.

му 2 ([2] стр. 100), получаем утверждение п. 2 нашей теоремы[x/].

3) Аналогично п. I получаем в некоторой окрестности $x=0$ $\dot\Psi(x,y)>0$ при $x\neq 0$ $\Psi(x,y)>0$. Применяя теорему 3 ([2] , стр. III) о неустойчивости движения, видим справедливость нашего заключения.

4) Этот пункт доказывается точно так же. Причем используется теорема в работе [2] на стр. II5.

Замечания. I. Теорема 4.I может быть применима не на всем множестве X , а на некотором подмножестве $X_1\subset X$ и таком, что $0\in X_1$ и $x=0$ является внутренней точкой в X_1 . Тогда она будет действительна только по отношению к X_1 . Это позволяет выявлять области устойчивости, асимптотической устойчивости, условной устойчивости и неустойчивости. Задача может ставиться и сразу по отношению к некоторому множеству $R\subset X$.

2. Теорема 4.I будет верна и в том случае, если $\Psi(x,y)$ отрицательно-определенная функция на X при $\forall y\in Y$. Только знак $\sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{x}$ надо везде заменить знаком $\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x}$ и $\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x}$ – знаком $\sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{x}$ соответственно.

Как частный случай из теоремы 4.I вытекает

следствие. Пусть $\Psi(x)$ – непрерывная, дифференцируемая, положительно-определенная функция, такая, что $\Psi(0)=0$. Тогда:

I) если $\inf\limits_{x} B=0$, то невозмущенное движение устойчиво;

2) если $\inf\limits_{x} B=0$ $\dot x=0$ и единственно, то оно устойчиво асимптотически;

3) если $\sup\limits_{x} B=0$, причем $B\neq 0$ в окрестности $x=0$, то оно неустойчиво;

4) если $\sup\limits_{x} B=0$ $\dot x=0$ и единственно, то оно неустойчиво абсолютно.

Теорема 4.2 (об отсутствии функции Ляпунова в данном классе).

Пусть: I) $\Psi(x,y)$ – непрерывная, дифференцируемая и положительно-определенная функция по x для $\forall y\in Y$.

2) $\Psi(0,y)=0$ на Y .

Если $\sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{x} B<0, \dot x\in Q$, то среди данного семейства функций $\Psi(x,y),\ y\in Y$ нет функции, удовлетворяющей п. I теоремы 4.I.

Здесь Q – множество решений системы (4.I) при разных начальных $x_0\in X$.

x/ Функции $\Psi(x,y), \dot\Psi(x,y)$ допускают бесконечно малый высший предел, так как не зависят явно от t .

Доказательство. Предположим противное, что она существует. Тогда, подставив в нее $\dot x\in Q$, получим согласно п. I теоремы 4.I $\sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{x} B=0$, что противоречит условию теоремы 4.2. Теорема доказана.

Б) Обобщим некоторые предыдущие результаты на случай

$$\dot x_i=f_i(t,x),\ i=1,2,\dots,n,\ 0\le t\le\infty \qquad (4.2)$$

где $f_i(t,x)=0$ при $x=0$

Теорема 4.3. Пусть: I) $f_i(t,x)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условию $f_i(t,0)=0$.

2) $\Psi(t,x,y)$ – непрерывная, дифференцируемая функция с непрерывными частными производными, удовлетворяющая условию $\Psi(t,0,y)\equiv 0$ при $\forall y\in Y$ и $t\geq 0$.

3) $\Psi(t,x,y)$ – знакоопределенная (положительная) по x на Y функция.

4) При $\forall y\in Y$ $\Psi(t,x,y)$ допускает бесконечно малый высший предел.

Тогда при любых начальных возмущениях: I) если выполнены п. 1-3 условия и $\sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{x} B=0$ почти всюду на $0\le t\le\infty$, то невозмущенное движение устойчиво;

2) если выполнены п. I,2,4 и существует t_0 такое, что $\inf\limits_{y\in Y}\sup\limits_{x} B=0$, а $B\neq 0$ в сколь угодно малой окрестности $x=0$, при $\forall t\geq t_0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 4.I.

I) Примем за функцию V Ляпунова функцию $\Psi(t,x,y)$. По условию эта функция знакоопределенная. Найдем знак ее производной. Из условия $\sup\limits_{y\in Y}\inf\limits_{x} B=0$ получаем $\dot\Psi(t,x,y)\le 0$ на X при $t\geq 0$. Применяя I-ю теорему Ляпунова ([2] , стр. 91), получаем заключение п. I утверждения теоремы.

2) Аналогично п. I получаем $\Psi(t,x,y)>0$ при $x\neq 0$, $\dot\Psi(t,x,y)>0$ для $t>t_0$. Применяя теорему 3 ([2] , стр. III), видим справедливость нашего утверждения.

Для проверки условий п. I теорем 4.I и 4.3 можно использовать методы условного максимина §2 (уравнения (2.54), (2.58), (2.60)), или уравнения максимина в частных производных (2.20), (2.2I), полагая $f_0=0$, $\Gamma=0$.

В) Теорема 4.3 без труда распространяется на случай постоянно действующих возмущений. А именно, если к условиям п. 2 добавить требование ограниченности производных Ψ_{x_i} , то невозмущенное движение будет устойчиво к при постоянно действующих возмущениях.

92-93

Г) Другой пока не совсем ясный, но, как правило, успешный прием применения метода максимина к исследованию устойчивости состоит в следующем. Берется любая функция $\Psi(t,x,y)$ (не обязательно знакоопределенная) и в результате применения метода максимина находится $y=y(t,x)$. При подстановке этой зависимости в $\Psi(t,x,y)$ функция Ψ оказывается обычно функцией Ляпунова[ж/].

Пример 4.I. Пусть уравнения возмущенного движения таковы:

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= -3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_1(6x_1^2+5x_2^2+2x_3^2), \\ \dot x_2 &= -2x_1 - 5x_2 + x_3 + 5x_2(6x_1^2+5x_2^2+2x_3^2), \\ \dot x_3 &= 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_3(6x_1^2+5x_2^2+2x_3^2). \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Исследуем их на устойчивость. Возьмем Ψ в виде

$$\Psi = y(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Очевидно, что эта функция положительно-определенная, если $y>0$.

Составим выражение $B=-\Psi_{x_i} f_i - \Psi_t$:

$$B=2y(6x_1^2+5x_2^2+2x_3^2)(1-6x_1^2-5x_2^2-2x_3^2)$$

Очевидно, что в области R :

$$6x_1^2+5x_2^2+2x_3^2<1 \qquad (4.4)$$

$\sup\limits_{y}\inf\limits_{x} B=0$ и $\bar x=0$ – единственная минималь. Следовательно, согласно теореме 4.I невозмущенное движение (4.3) в области (4.4) устойчиво асимптотически.

Пример 4.2. Уравнения возмущенного движения объекта имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot x_1 &= p(t)x_1 + q(t)x_2 + m(t)x_1(x_1^2+x_2^2), \\ \dot x_2 &= q(t)x_1 - p(t)x_2 + m(t)x_2(x_1^2+x_2^2), \end{aligned}$$

где $p(t)$, $q(t)$ и $m(t)$ – непрерывные и ограниченные при $t\geq 0$ функции времени.

Возьмем $\Psi = yx_1x_2, y>0$. Тогда

$$B=-yq(t)(x_1^2+x_2^2)-ym(t)(x_1^2+x_2^2)x_1^2.$$

Пусть $q(t)\geq q_0>0$, $m(t)>0$. Тогда $\inf\limits_{y>0}\sup\limits_{x} B=0$ и $B<0$ при $x_i\neq 0$ и согласно теореме 4.3 невозмущенное движение системы неустойчиво.

Пример 4.3. Возьмем уравнение горизонтального полета самолета (ракеты) с двигателем постоянной тяги (ЖРД, ТРД):

$$\dot L=V, \quad \dot V=\frac{b\beta-aV^2}{m}, \quad \dot m=-\beta. \qquad (4.5)$$

Здесь L – дальность полета, V – скорость, β – расход топлива, m – масса летательного аппарата, $b>0, a>0$ – постоянные. Составим уравнение возмущенного движения для заданного режима работы

[ж/] См. пример 2.5 в гл. Ш и примеры в §2 гл. УШ.

двигателей:

$$\Delta\dot L=V-V_0, \quad \Delta\dot V=-\frac{a}{m}(V^2-V_0^2), \quad \Delta\dot m=0. \qquad (4.6)$$

Здесь V_0 – скорость невозмущенного движения, $a>0$.

Требуется установить, является ли летательный аппарат устойчивым по скорости.

Возьмем $\Psi=\frac{1}{2}y\Delta V^2$, где $y>0$, $\Delta V=V-V_0$. Составим функцию B:

$$B=-\dot\Psi=y\frac{a}{m}(V-V_0)(V^2-V_0^2)=y\frac{a}{m}(V-V_0)^2(V+V_0)>0 \text{ при } V\neq V_0,\ y>0,\ V>0.$$

Следовательно, невозмущенное движение самолета (ракеты) по скорости устойчиво.

Точно так же можно показать, что вертикальный подъем ракеты в атмосфере постоянной плотности с постоянной тягой по скорости является устойчивым. Уравнения типа (4.5), (4.6) и функции Ψ, B в данном случае таковы: $\dot H=V$, $\dot V=\frac{V_0\beta-aV^2}{m}-g$, $\dot m=-\beta$;

$$\Delta\dot H=\Delta V, \quad \Delta\dot V=-\frac{a}{m}(V^2-V_0^2), \quad \Delta\dot m=0,$$

$$\Psi=\frac{1}{2}y\Delta V^2, \quad y>0, \quad B=y\frac{a}{m}(V-V_0)^2(V+V_0)>0$$

Аналогично, если рассмотреть горизонтальный полет самолета с двигателем постоянной мощности (ПД, ТВД), то получим:

$$\dot L=V, \quad \dot V=\frac{bN/V-aV^2}{m}-g, \quad \dot m=-\beta,$$

$$\Delta\dot L=0, \quad \Delta\dot V=\frac{bN/V-aV^2}{m}-\frac{bN/V_0-aV_0^2}{m}, \quad \Delta\dot m=0,$$

$$\Psi=\frac{1}{2}y\Delta V^2, \quad y>0, \quad B=-\dot\Psi=\frac{y}{m}\left[\frac{(V-V_0)^2}{VV_0}b\beta+a(V-V_0)^2(V+V_0)\right]>0.$$

Отсюда следует, что по скорости движение устойчиво.

§5. Метод максимина для задач с распределенными параметрами и дискретных задач

А) В гл. II §3 п. В оформулирована постановка задачи с распределенными параметрами, для которой из (I.I) гл. II следовала теорема 3.4.

Возьмем в сформулированной там задаче компоненты, зависящие еще и от y : $\Psi^j=\Psi^j(t,x,y)$, где $y\in Y$. Обозначим: $Y(\tau)$ – значения y на S, Y^* – внутренняя часть множества Y. $Y^*=Y-Y(\tau)$. Тогда из теоремы I.I гл. III будет следовать

Теорема 5.I. Пусть существует непрерывная дифференцируемая функция $\Psi(t,x,y)$, удовлетворяющая условиям:

I) Для всякой пары $x,u\notin Q$ найдётся $y\in Y$ такое, что $J>m$.

Существует тройка $\bar x, \bar u, \bar y$ такая, что

2) $J(\bar x,\bar u,\bar y)=\sup\limits_{Y(\tau)}\inf\limits_{x(\tau)} A+\int \sup\limits_{Y^*}\inf\limits_{x^*,u} B\,dt$, $\qquad$ (5.I)

3) $\bar x(t)\in D$, $\bar u(t)\in V$,

4) $A(\bar x(\tau),y(\tau))\leq A(\bar x(\tau),\bar y(\tau))$ на $Y(\tau)$,

$B(t,\bar x(t),y(t))\leq B(t,\bar x(t),\bar y(t))$ на Y^*.

Г) Другой пока не совсем ясный, но, как правило, успешный прием применения метода максимина к исследованию устойчивости состоит в следующем. Берется любая функция $\Psi(t,x,y)$ (не обязательно знакоопределенная) и в результате применения метода максимина находится $y=y(t,x)$. При подстановке этой зависимости в $\Psi(t,x,y)$ функция Ψ оказывается обычно функцией Ляпунова[ж/].

Пример 4.I. Пусть уравнения возмущенного движения таковы:

$$
\begin{aligned}
\dot x_1 &= -3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_1(6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2),\\
\dot x_2 &= -2x_1 - 5x_2 + x_3 + 5x_2(6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2),\\
\dot x_3 &= 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_3(6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2).
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Исследуем их на устойчивость. Возьмем Ψ в виде

$$\Psi = y(2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Очевидно, что эта функция положительно-определенная, если $y>0$.

Составим выражение $B = -\Psi_{x_i} f_i - \Psi_t$:

$$B = 2y(6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2)(1 - 6x_1^2 - 5x_2^2 - 2x_3^2)$$

Очевидно, что в области R :

$$6x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 < 1 \tag{4.4}$$

$\sup\limits_{y} \inf\limits_{x} B = 0$ и $\dot x = 0$ – единственная минималь. Следовательно, согласно теореме 4.I невозмущенное движение (4.3) в области (4.4) устойчиво асимптотически.

Пример 4.2. Уравнения возмущенного движения объекта имеют вид:

$$
\begin{aligned}
\dot x_1 &= p(t)x_1 + q(t)x_2 + m(t)x_1(x_1^2 + x_2^2),\\
\dot x_2 &= q(t)x_1 - p(t)x_2 + m(t)x_2(x_1^2 + x_2^2),
\end{aligned}
$$

где $p(t)$, $q(t)$ и $m(t)$ – непрерывные и ограниченные при $t \geq 0$ функции времени.

Возьмем $\Psi = yx_1x_2, y>0$. Тогда

$$B = -yq(t)(x_1^2 + x_2^2) - ym(t)(x_1^2 + x_2^2)x_1^2.$$

Пусть $q(t) \geq q_0 > 0$, $m(t) > 0$. Тогда $\inf\limits_{y \geq 0} \sup\limits_{x} B = 0$ и $B < 0$ при $x_i \neq 0$ и согласно теореме 4.3 невозмущенное движение системы неустойчиво.

Пример 4.3. Возьмем уравнение горизонтального полета самолета (ракеты) с двигателем постоянной тяги (ЖРД, ТРД):

$$\dot L = V, \quad \dot V = \frac{b\beta - aV^2}{m}, \quad \dot m = -\beta. \tag{4.5}$$

Здесь L – дальность полета, V – скорость, β – расход топлива, m – масса летательного аппарата, $b>0, a>0$ – постоянные. Составим уравнение возмущенного движения для заданного режима работы

ж/ См. пример 2.5 в гл. Ш и примеры в §2 гл. УШ.

двигателей:

$$\Delta \dot L = V - V_0, \quad \Delta \dot V = -\frac{a}{m}(V^2 - V_0^2), \quad \Delta \dot m = 0. \tag{4.6}$$

Здесь V_0 – скорость невозмущенного движения, $a>0$.

Требуется установить, является ли летательный аппарат устойчивым по скорости.

Возьмем $\Psi = \frac{1}{2} y \Delta V^2$, где $y>0$, $\Delta V = V - V_0$. Составим функцию B:

$$B = -\dot\Psi = y\frac{a}{m}(V - V_0)(V^2 - V_0^2) = y\frac{a}{m}(V - V_0)^2(V + V_0) > 0 \text{ при } V \neq V_0,\ y>0,\ V>0.$$

Следовательно, невозмущенное движение самолета (ракеты) по скорости устойчиво.

Точно так же можно показать, что вертикальный подъем ракеты в атмосфере постоянной плоскости с постоянной тягой по скорости является устойчивым. Уравнения типа (4.5), (4.6) и функции Ψ, B в данном случае таковы: $\dot H = V$, $\dot V = \frac{b\beta - aV^2}{m} - g$, $\dot m = -\beta$;

$$\Delta \dot H = \Delta V, \quad \Delta \dot V = -\frac{a}{m}(V^2 - V_0^2), \quad \Delta \dot m = 0,$$

$$\Psi = \frac{1}{2} y \Delta V^2, \quad y>0, \quad B = y\frac{a}{m}(V - V_0)^2(V + V_0) > 0$$

Аналогично, если рассмотреть горизонтальный полет самолета с двигателем постоянной мощности (ПД, ТВД), то получим:

$$
\begin{aligned}
&\dot L = V, \quad \dot V = \frac{bN/V - aV^2}{m} - g, \quad \dot m = -\beta,\\
&\Delta \dot L = 0, \quad \Delta \dot V = \frac{bN/V - aV^2}{m} - \frac{bN/V_0 - aV_0^2}{m}, \quad \Delta \dot m = 0,\\
&\Psi = \frac{1}{2} y \Delta V^2, \quad y>0, \quad B = -\dot\Psi = \frac{y}{m}\left[\frac{(V - V_0)^2}{VV_0} b\beta + a(V - V_0)^2(V + V_0)\right] > 0.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что по скорости движение устойчиво.

§5. Метод максимина для задач с распределенными параметрами и дискретных задач

А) В гл. П §3 п. В сформулирована постановка задачи с распределенными параметрами, для которой из (I.I) гл. П следовала теорема 3.4.

Возьмем в сформулированной там задаче компоненты, зависящие еще и от y : $\Psi' = \Psi(t,x,y)$, где $y \in Y$. Обозначим: $Y(\tau)$ – значения y на S, Y^* – внутренняя часть множества Y. $Y^0 = Y - Y(\tau)$. Тогда из теоремы I.I гл. Ш будет следовать

Теорема 5.I. Пусть существует непрерывная дифференцируемая функция $\Psi(t,x,y)$, удовлетворяющая условиям:

I) Для всякой пары $x, u \notin Q$ найдется $y \in Y$ такое, что $J > m$.

Существует тройка $\bar x, \bar u, \bar y$ такая, что

$$
\begin{aligned}
&2)\ J(\bar x, \bar u, \bar y) = \sup_{Y(\tau)} \inf_{x(\tau)} A + \int \sup_{Y^*} \inf_{x, u} B\, dt,\\
&3)\ \bar x(t) \in D, \quad \bar u(t) \in V,\\
&4)\ A(\bar x(\tau), y(\tau)) \leq A(\bar x(\tau), \bar y(\tau)) \text{ на } Y(\tau),\\
&\quad\ B(t, \bar x(t), y(t)) \leq B(t, \bar x(t), \bar y(t)) \text{ на } Y^0.
\end{aligned}
\tag{5.I}
$$

94-95

Тогда пара $\bar{x}, \bar{u} \in Q$ является абсолютной минималью задачи I.

Б) В гл. II §3 п. Д рассматривалась оптимизация дискретной системы. Если взять функцию Ψ как известную функцию, зависящую еще от переменных y : $\Psi = \Psi(k, x, y)$, где $y \in Y$, то из теоремы I.I гл. III получим

теорему 5.2. Пусть существует функция $\Psi(k, y, x)$, определенная на $K \times X \times Y$ и такая, что

I. Для всякой пары $x, u \notin Q$ найдется $y \in Y$, при котором $J > m$

2. Существует тройка $\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}$, удовлетворяющая

$$J(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}) = \sup_{y(0) \times y(N)} \inf_{v(0) \times v(N)} A + \sum_{k=1}^{N-1} \sup_{y(k)} \inf_{v(k)} B_k \qquad (5.2)$$

3. $\bar{x}(k) \in X_k$, $\bar{u}(k) \in U_k$.

4. $A(\bar{x}, \bar{u}, y) \leq A(\bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$ на $Y(0) \times Y(N)$,

$B(k, \bar{x}, \bar{u}, y) \leq B(k, \bar{x}, \bar{u}, \bar{y})$ на Y , $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

Тогда пара $\bar{x}, \bar{u} \in Q$ является абсолютной минималью.

Если п. I,3,4 условий теорем 5.I и 5.2 опустить, то (5.1), (5.2) дает оценку снизу соответствующих функционалов наилучших среди семейства функций $\Psi(t, x, y)$.

Литература к главе III

I. А.А. Болонкин. Об одном подходе к решению оптимальных задач. В сб. "Вычислительная и прикладная математика", изд. Киевского университета, вып. I2, 1970.

2. Г.Н. Дубошин. Основы теории устойчивости движения. Изд. МГУ, 1952.

Глава IУ

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ α -ФУНКЦИОНАЛА И МАКСИМИНА. ДРУГИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

§I. Численная реализация метода максимина для задач оптимизации, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями

А) Даны функционал и связи:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x, u)\, dt\ , \quad \dot{x}_i = f_i(t, x, u)\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n\ , \quad t_1 \leq t \leq t_2 \ , \qquad (I.I)$$

где $x(t)$ n -мерная непрерывная кусочно-дифференцируемая функция, $x \in G$, G открыто; $u(t)$ - r -мерная кусочно-непрерывная функция, которая может иметь конечное число разрывов I-го рода, $u \in U$, U может быть замкнутым и ограниченным; $t_1, t_2, x(t_1), x(t_2)$ заданы. Функции $f_i(t, x, u)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ непрерывны и дифференцируемы.

Согласно главе III составим обобщенный функционал, полагая

$$\Psi = y_i x_i\ , \qquad J(x, u, y) = x_i y_i \Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} (f_0 - y_i f_i - \dot{y}_i x_i)\, dt = A + \int_{t_1}^{t_2} B\, dt. \qquad (I.2)$$

Здесь $A = x_i y_i \Big|_1^2$, $B = f_0 - y_i f_i - \dot{y}_i x_i$

Исключим u из выражения B в (I.2) при помощи условия

$$\hat{B} = \inf B(t, x, u, y, \dot{y})\ , \quad u \in V \qquad (I.3)$$

получим $\bar{u} = \bar{u}(t, x, y)$ и

$$\hat{J}(x, y) = A + \int_{t_1}^{t_2} \hat{B}(t, x, y, \dot{y})\, dt \qquad (I.4)$$

Пусть $\hat{J}(x, y)$ - непрерывная и дифференцируемая функция x , y , имеющая седловую точку (удовлетворяющая условиям теоремы 2.I гл. III). Зададимся некоторой траекторией $\bar{x}(t)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям с $x \in G$ и непрерывной кусочно-дифференцируемой функцией $\bar{y}(t)$, подставим их в (I.4) и вычислим вариацию функционала (I.4) относительно $\bar{x}(t)$, $\bar{u}(t)$:

$$\delta \hat{J} = \delta A + \int_{t_1}^{t_2} \left(B_{x_i} \delta x_i + B_{u_j} \bar{u}^j_{x_i} \delta x_i + B_{y_i} \delta y_i + B_{u_j} \bar{u}^j_{y_i} \delta y_i + B_{\dot{y}_i} \delta \dot{y}_i \right) dt. \qquad (I.5)$$

Слагаемые

$$B_{u_j} \bar{u}^j_{x_i} = B_{u_j} \bar{u}^j_{y_i} = 0, \qquad (I.6)$$

ибо в открытой области $B_{u_j} = 0$, а на границе $\bar{u}^j_{x_i} = \bar{u}^j_{y_i} = 0$, так как граница $U(t)$ не зависит ни от x , ни от y .

$$\delta A = y_i \delta x_i \Big|_1^2 + x_i \delta y_i \Big|_1^2 . \qquad (I.7)$$

Последнее слагаемое под интегралом в (I.5) проинтегрируем по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2} B_{\dot{y}_i} \delta \dot{y}_i\, dt = -x_i \delta y_i \Big|_1^2 - \int_{t_1}^{t_2} \dot{B}_{\dot{y}_i} \delta y_i\, dt. \qquad (I.8)$$

С учетом (I,5)-(I.7) выражение (I.4) запишем в виде

$$\delta \hat{J} = y_i \delta x_i \Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} \left[B_{x_i} \delta x_i + (B_{y_i} - \dot{B}_{\dot{y}_i}) \delta y_i \right] dt, \qquad (I.9)$$

где

$$B_{x_i} \equiv -\dot{y}_i - H_{x_i}, \quad B_{y_i} - \dot{B}_{y_i} \equiv \dot{x}_i - f_i, \qquad (I.10)$$

$\delta x_i|_1 = \delta x_i|_2 = 0$, так как концы $x(t)$ фиксированы, а $H = y_i f_i - f_0$.

Полагаем (по i – не сумма)

$$\delta x_i = -\tau_{i1} B_{x_i} = \tau_{i1}(\dot{y}_i + H_{x_i}), \quad \delta y_i = \tau_{i2}(\dot{x}_i - f_i), \qquad (I.11)$$

где

$$\tau_{i1} = \begin{cases} \tau = const > 0 \text{ на } (t_1, t_2), \\ 0, \text{ когда } t = t_1, t = t_2 \end{cases}, \quad \tau_{i2}(t) = \tau = const > 0 \text{ на } [t_1, t_2] \qquad (I.12)$$

Новая траектория будет такой:

$$x_{i,p+1} = x_{i,p} + \delta x_{i,p}, \quad y_{i,p+1} = y_{i,p} + \delta y_{i,p} \qquad (I.13)$$

Здесь $p = 1, 2, \ldots$ – номер итерации. Она может быть взята снова в качестве новой опорной траектории и т.д.

Таким образом, процедура расчета состоит в задании исходного приближения $\bar{x}(t), \bar{y}(t)$ и в определении поправок к нему по (I.11), (I.13). Известно, что если шаг τ выбрать достаточно малым, то процесс расчета по формулам (I.11) и (I.13) приводит в седловую точку функционала (I.4). Отсюда следует*/, что

$$\mathcal{I}(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{y} \min_{x} \mathcal{I}(x, y), \qquad (I.14)$$

т.е. точка $\bar{x}, \bar{u} \in Q$ является сильной относительной минималью функционала (I.1) (см. замечание 2 к теореме 2.1, гл. III).

По мере убывания $|\dot{y}_i + H_{x_i}|, |\dot{x}_i - f_i|$ шаг τ следует брать меньше. Счет заканчивается, когда

$$\sum_{i=1}^{n} \left(|\dot{y}_i + H_{x_i}| + |\dot{x}_i - f_i|\right) \leq c_1, \qquad (I.15)$$

где c_1 – заданное число. В результате получим приближенное решение. Степень близости его к допустимому можно оценивать по (I.15).

Если конец какой-нибудь координаты $x(t)$ свободен, то согласно (I.8) соответствующий конец кривой $y_i(t)$ принимает значение, равное нулю. В этом случае при выборе начального приближения берем $y_i(t)$, удовлетворяющее этому граничному условию. Кроме того, соответствующее конечное значение τ_{i1} полагаем равным τ, а соответствующее конечное значение τ_2 – равным 0. Последнее требование обеспечивает неподвижность нужного конца $y_i(t)$ и подвижность нужного конца $x_i(t)$.

Б) Предложенный метод последовательных приближений по сравнению с методами спуска в пространстве управлений (методами Шатровского Л.И. [1], Брайсона, Келли [2] и принципом максимума Понтрягина Л.С.) обладает следующими преимуществами: 1. Полностью

*/ См. Дж. Мак Кинси. Введение в теорию игр. Физматгиз, 1960, стр.25

исчезает краевая задача, ибо краевые условия всегда выполнены*/.
2. В результате всегда получаем сильный относительный минимум**/.
3. Особые режимы (а следовательно, после соответствующего преобразования и скользящие режимы) не являются помехой методу максимина (см. пример 1.1).

В) Рекомендуется следующая схема вычислений на ЭВМ при помощи стандартной подпрограммы: 1. Отрезок $[t_0, t_m]$ делим на m равных частей Δt и задаемся таблицей $x_k(t_\gamma), y_k(t_\gamma)$, $\gamma = 0, 1, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n$, $2[n(m+1)]$ ячеек. $x_k(t_0), x_k(t_m)$ совпадают с краевыми условиями.

2. Находим в каждой точке t_γ значение $\bar{u}_\alpha(t_\gamma)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$ из условия $\sup_{u \in U} H$, где $H = y_i f_i(t, x, u) - f_0(t, x, u)$. Значения $\bar{u}_\alpha(t_\gamma)$ запоминаем ($\alpha = 1, 2, \ldots, r$; $\gamma = 0, 1, \ldots, m$).

3. Находим новую траекторию по (I.11)–(I.13). Частные производные H_{x_i} находим численно, а $\dot{x}_i = \Delta x_i / \Delta t$, $\dot{y}_i = \Delta y_i / \Delta t$ по таблице $\Delta x_i = x_i(t_{\gamma+1}) - x_i(t_\gamma)$, $\Delta y_i = y_i(t_{\gamma+1}) - y_i(t_\gamma)$. В последней точке берем $\Delta x_i(t_m) = \Delta x_i(t_{m-1})$, $\Delta y_i(t_m) = \Delta y_i(t_{m-1})$. Вычисляем одновременно $I = \sum_\gamma \Delta f_0(t_\gamma, x_\gamma, u_\gamma)$.

4. Находим (в процессе счета) величину

$$K(\tau) = \frac{1}{t} \sum_\gamma \sum_i |\delta x_i(t_\gamma)| + |\delta y_i(t_\gamma)|,$$

которая характеризует "невязку" (расстояние до седловой точки). Первые три просчета (итерации) можно сделать с постоянным τ (заданным в исходных данных). Величины τ и соответствующие им значения K запоминаются. Для каждой следующей итерации действует такая логика:

а) если $K_{p-2} \geq K_{p-1} \geq K_p$ (т.е. $K(\tau)$ убывает) или $K_{p-2} \leq K_{p-1} \geq K_p$ ($K(\tau)$ имеет максимум), то полагаем $\tau_{p+1} = 1{,}2\tau_p$ (запоминаем его) и идем на следующую итерацию;

б) если $K_{p-2} \geq K_{p-1} \leq K_p$ ($K(\tau)$ имеет минимум) или $K_{p-2} \leq K_{p-1} \leq K_p$ ($K(\tau)$ растет), то полагаем $\tau_{p+1} = 0{,}4\tau_p$ и идем на следующую итерацию.

5. Счет заканчивается, когда $\tau_p \leq c_1$, где c_1 – заданное число ($\tau_0 > c_1$). На печать выдаются: K, τ_p, N ***/, I, $x_i(t_\gamma), u_j(t_\gamma)$ ****/.

*/ В методах [1], [2] выполнение краевых условий достигается за счет "штрафа" в функционале, т.е. краевая задача остается.

**/ Спуск по управлению, т.е. по $H(u)$ (H – гамильтониан), может привести в локальный минимум функции $H(u)$, т.е. к слабому минимуму.

***/ N – число итераций.

****/ Две последние величины рекомендуется выдавать с заданным шагом, назначая для печати только число точек, достаточное для построения графика.

Кроме того, чтобы следить за процессом приближений, полезно после каждой итерации выдавать на печать K, τ_p, N.

Программа должна по желанию оператора выдавать достигнутое приближение на печать.

Замечание. Предлагаемый метод без труда обобщается на случай ограничений на фазовые координаты вида

$$\Gamma_{1i} \le x_i \le \Gamma_{2i}, \quad i=1,2,\dots,n \tag{I.16}$$

(G ограничено и замкнутое). В этом случае, когда $x_{i,p}(t_k)$ находят за границу, следует полагать их равными граничным значениям.

Пример I.I. Найти минимум функционала

$$I=\int_0^3 \frac{1}{2}x^2 dt, \quad \dot{x}=u, \quad |u|\le 1, \; x(0)=x(3)=1. \tag{I.17}$$

Составим выражение $B=\frac{1}{2}x^2-yu-\dot{y}u$. Из условия $\inf\limits_u B$ вытекает $u=\operatorname{sign} y$, где

$$\operatorname{sign} y=\begin{cases} 1, \text{ если } y>0, \\ 0, \text{ если } y=0, \\ -1, \text{ если } y<1. \end{cases}$$

Выписываем (I.II)

$$\delta x=\tau(\dot{y}-x), \quad \delta y=\tau(\dot{x}-\operatorname{sign} y), \quad \tau>0, \; |\dot{x}|\le 1. \tag{I.18}$$

Возьмем в качестве первого приближения кривые $x_1 \equiv 1$, $y_1=0{,}467t-0{,}7$ (рис. 4.I а,б). Подставляя x_1, y_1 в (I.I8), видим, что $\delta x<0$ на (0,3), $\delta y>0$ на [0; I,5) и $\delta y<0$ на (I,5; 3]. Если же на некотором участке $x_1<0$, то на этом участке согласно (I.I8) $\delta x>0$. Если же на участке [0; I,5) $y>0$, то на этом участке согласно (I.I8) $\delta y<0$. Аналогично для участка (I,5; 3]. Расчеты показывают, что получаемая последовательность сходится к кривым, изображенным на рис.4.2. Полученная минималь содержит участок особого режима: $x\equiv 0$.

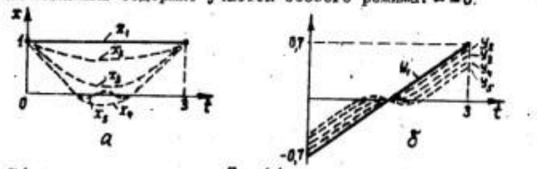

Рис.4.1

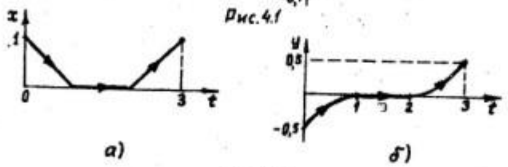

Рис. 4.2

§2. Метод градиентного спуска в пространстве состояний для задач оптимизации, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями

А) Пусть поведение объекта описывается уравнениями:

$$\dot{x}_i=f_i(t,x,u), \quad i=1,2,\dots,n, \quad t\in T=[t_1,t_2], \tag{2.I}$$

где $x(t)$ – n-мерная непрерывная кусочно-дважды-дифференцируемая функция, $x\in G(t)$, $G(t)$ – ограниченная замкнутая односвязная область в E_n, $\Gamma(t)$ – ее граница типа $\Gamma_{1i}\le x_i\le \Gamma_{2i}$; $u(t)$ – z-мерная функция – непрерывная на T, кроме конечного числа точек, в которых она может терпеть разрывы I-го рода, и $u\in U(t)$. Множество $U(t)$ может быть замкнутым и ограниченным. Граничные значения $t_1, t_2, x(t_1), x(t_2)$ заданы.

Ищем минимум функционала

$$I(x,u)=\int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt. \tag{2.2}$$

Функции $f_i(t,x,u)$, $i=0,1,\dots,n$ определены, непрерывны и дифференцируемы на $T\times A\times U$.

Ставится задача: найти пару $x(t), u(t)$, доставляющую минимум функционалу (2.2).

Из теоремы I.6 гл. II имеем следующее:
если $\bar{u}(t)\in V$, то

$$\inf_{x(t)\in D,\, u\in V}\int_{t_1}^{t_2} B(t,x,u)\,dt=\inf_{x(t)\in D}\int_{t_1}^{t_2}\inf_{u\in V} B(t,x,u)\,dt. \tag{2.3}$$

С учетом этого задачу минимизации (2.2) по $x(t)$, $u(t)$ можно заменить задачей минимизации только по $x(t)$:

$$J=\int_{t_1}^{t_2}\inf_V\left[f_0+\frac{a_i}{2}(\dot{x}_i-f_i)^2\right]dt=\int_{t_1}^{t_2}B(t,x,\dot{x})\,dt, \tag{2.4}$$

где

$$B=\inf_V\left[f_0+\frac{a_i}{2}(\dot{x}_i-f_i)^2\right]. \tag{2.5}$$

Возьмем некоторую траекторию $\tilde{x}(t)$, удовлетворяющую заданным краевым условиям с $x\in G(t)$. Подставим ее в выражение (2.4) и вычислим вариацию J относительно $\tilde{x}(t)$:

$$\delta J=\int_{t_1}^{t_2}(B_{x_i}\delta x_i+B_{\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i)\,dt. \tag{2.6}$$

Интегрируя член $B_{\dot{x}_i}\delta\dot{x}_i$ по частям и учитывая, что концы $x(t)$ фиксированы, т.е. $\delta x_i(t_1)=\delta x_i(t_2)=0$, найдем

$$\delta J=\int_{t_1}^{t_2}(B_{x_i}-\dot{B}_{\dot{x}_i})\delta x_i\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial f_0}{\partial x_i}+a_k(\dot{x}_k-f_k)\frac{\partial f_k}{\partial x_i}-a_i(\ddot{x}_i-\dot{f}_i)\right]\delta x_i\,dt, \tag{2.7}$$

$$i,k=1,2,\dots,n.$$

Полагаем

$$\delta x_i=-\tau_i(t)\left[\frac{\partial f_0}{\partial x_i}+a_k(\dot{x}_k-f_k)\frac{\partial f_k}{\partial x_i}-a_i(\ddot{x}_i-\dot{f}_i)\right]=-\tau_i A_i, \tag{2.8}$$

причем $\tau_i(t)>0$ на (t_1,t_2) и $\tau_i(t_1)=\tau_i(t_2)=0$.

100-101

В качестве $\tau_i(t)$ можно взять, например, $\tau_i = b_i > 0$ или $\tau_i = b_i(t-t_2)(t-t_1)$ с $b_i = const > 0$. Тогда вариация примет вид

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \tau_i(t) A_i^2 \, dt. \tag{2.9}$$

Отсюда видно, что при выборе $\tau_i(t)$ с достаточно малым $\max \tau_i(t)$ на T величина функционала уменьшается, если $\bar{x}(t)$ не является минималью. Новая траектория равна

$$x_{i,p+1} = x_{i,p} + \delta x_{i,p}, \quad (i = 1,2,\dots,n), \tag{2.10}$$

где $p = 1,2,\dots$ – номер итерации.

Если $x_{i,p}$ выходит за границу, то принимаем его равным граничному значению. Эта траектория может быть принята в качестве опорной для следующей итерации и т.д. Таким образом, процесс расчета состоит в задании исходного приближения $\bar{x}(t)$ (не удовлетворяющего (2.I)) и в последовательном нахождении поправок по формулам (2.8). При этом шаг τ в направлении к минимуму выбирается таким, чтобы функционал (2.4) убывал.

Спуск в пространстве состояний по сравнению с методом спуска в пространстве управлений Л.Й. Шатровского [I], А.Е. Брайсона, Г.Д. Келли [2] и принципом максимума Л.С. Понтрягина обладает теми же преимуществами, что и метод максимина (см. §I).

Недостатком предлагаемого метода по сравнению с методами [I],[2] является больший потребный объем памяти ЭВМ, так как в большинстве практических задач размерность вектора $x(t)$ превышает размерность вектора $u(t)$.

Рекомендуется следующая вычислительная схема реализации метода на ЭВМ с помощью стандартной подпрограммы. Отрезок $[t_1, t_2]$ делим на m равных частей Δt. Задаемся таблицей значений $x_i(t_\gamma) \in G,\ (\gamma = 0,1,\dots,m)$. Значения $x_i(t_0), x_i(t_m)$ должны совпадать с заданными конечными значениями $x(t)$. Задаемся $\tau(t)$ (например, $\tau_i = \tau$) и не очень большими a_i, например $a_i = a$. Находим в соответствующих точках $\bar{u}(t_\gamma)$ по (2.5) и $f_i(\bar{u})$. Определяем по формулам численного дифференцирования частные производные $\partial f/\partial x$, например $\partial f/\partial x \approx \Delta f/\Delta x$. Аналогично находим производные $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{f}$, например по трем точкам:

$$\dot{x}_{i,0} = (-3x_{i,0} + 4x_{i,1} - x_{i,2})/2\Delta t, \quad \dot{x}_{i,k} = (x_{i,k+1} - x_{i,k-1})/2\Delta t,$$

$$\dot{x}_{i,m} = (x_{i,m-2} - 4x_{i,m-1} + 3x_{i,m})/2\Delta t, \quad (k = 1,2,\dots,m-1).$$

Здесь второй индекс обозначает номер точки, т.е. $x_{i,k} = x_i(t_k)$. Точно так же можно находить производные $\dot{f}_i$. Вторые производные равны

$$\ddot{x}_{i,0} = (x_{i,0} - 2x_{i,1} + x_{i,2})/\Delta t^2, \quad \ddot{x}_{i,k} = (x_{i,k-1} - 2x_{i,k} + x_{i,k+1})/\Delta t^2,$$

$$\ddot{x}_{i,m} = (x_{i,m-2} - 2x_{i,m-1} + x_{i,m})/\Delta t^2 \quad (k = 1,2,\dots,m-1)$$

Подставляя все эти величины в (2.8), находим поправки δx_i и новую траекторию по (2.10). Одновременно вычисляем величину J по формуле (2.4). Если это не первая итерация, сравниваем полученное J_{p+1} с J_p и при $J_{p+1} < J_p$ повторяем расчет, слегка увеличивая τ $(\tau_2 = 1{,}1\tau_1)$. В случае $J_{p+1} \geq J_p$ повторяем расчет, полагая $\tau_2 = 0{,}5\tau_1$. Постоянную τ_2 можно также находить как минималь параболы, построенной по трем последним точкам. Достигнув $|\Delta J| \leq C$, увеличиваем постепенно значение a $(a_2 = 2a_1)$, до $a_2 \geq C_2$. Счет заканчивается и x, σ, J, I, a, τ выдаются на печать тогда, когда $|\Delta J| \leq C_3 < C_1$. Здесь C_1, C_2, C_3 – заданные числа. Программа должна предусматривать печать достигнутых результатов по требованию с пульта.

Если некоторое конечное значение $x_i(t)$ свободно, то для этого значения полагаем $\tau = 0$. Если же концы связаны уравнениями $\varphi_i[x(t_2)] = 0, (i = 1,2,\dots,k < n)$, то $(n-k)$ компонент $x_i(t_2)$ считаем свободными, а остальные находим из этих уравнений.

Если получить инфинум по u в выражении (2.5) затруднительно, то спуск можно осуществлять одновременно как в пространстве состояний, так и в пространстве управлений. Для этого задаемся кривой $u(t_\gamma)$ и находим к ней поправки по формуле

$$\delta u_j = -\tau_j(t)\left[\frac{\partial f_0}{\partial u_j} + a_k(\dot{x}_k - f_k)\frac{\partial f_k}{\partial u_j}\right], \quad \tau_j(t) > 0, \ (j = 1,2,\dots,z)$$

Значения $u(t_\gamma)$, выходящие за границу, полагаем равными граничным значениям.

Б) Исследуем процесс сходимости к локальному минимуму. Поскольку происходит градиентный спуск, то при каждом фиксированном a он приводит в минимум функционала (2.4). Предположим, что постоянные a_i в (2.4) одинаковы. Рассмотрим, как ведут себя получаемая минималь и величина минимума при $a \to \infty$. Обозначим D совокупность пар $x(t), u(t)$, а N – совокупность пар $x(t), u(t)$, удовлетворяющих ранее перечисленным условиям, кроме уравнений (2.I). Ясно, что $D \subset N$.

Пусть N – компакт, D замкнуто и не содержит изолированных точек, $I(x,u)$ непрерывно на N, а минимум задачи (2.I)–(2.2) на D существует. Обозначим через $x_a, u_a \in N$ функции, на которых $J(x,u,a)$ достигает минимума при данном a. В силу компактности N существует сходящаяся подпоследовательность функций $\{x_a, u_a\}$, такая, что $\lim\limits_{a\to\infty}(x_a, u_a) = (x_\infty, u_\infty)$.

<u>Теорема 2.I</u>. Пара $x_\infty, u_\infty \in D$ и справедливо равенство

$$I(x_\infty, u_\infty) = \lim_{a\to\infty} \min_N J(x,u,a) = \min_D I(x,u). \tag{2.II}$$

Доказательство. Поскольку на множестве D $I(x,u)=\hat{I}(x,u,a)$ и $D\subset N$, то при любом $a\geq 0$ из теоремы I.3 гл. II имеем

$$\min_N \hat{I}(x,u,a)\leq \min_D I(x,u). \qquad (2.12)$$

Докажем теперь утверждения теоремы 2.I. Предположим противное, что $x_\infty, u_\infty \notin D$. Тогда в силу замкнутости D, начиная с некоторого a_0, все пары последовательности $\{x_a, u_a\}$ будут внешними по отношению к D. Следовательно, для всех $a > a_0$ получим $\lim_{a\to\infty}\min_N \hat{I}(x,u,a)\to\infty$, что противоречит (2.I2). 2. Докажем теперь, что $I(x_\infty, u_\infty)=\min_D I$. Поскольку $x_\infty, u_\infty \in D$, то

$$I(x_\infty,u_\infty)\geq \min_D I(x,u). \qquad (2.13)$$

Однако неравенство (2.I2) существует при любом a, поэтому $I(x_\infty, u_\infty)\leq \min_D I(x,u)$. Сравнивая эти два неравенства, видим, что $I(x_\infty, u_\infty)=\min_D I$. 3. Обозначим $\Phi=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{n}(\dot{x}_i-f_i)^2dt$ и рассмотрим предел

$$\lim_{a\to\infty}\min_N \hat{I}(x,u,a)=\lim_{a\to\infty}[I(x_a,u_a)+a\Phi(x_a,u_a)].$$

Так как $\Phi\geq 0, a\geq 0$, то $\lim_{a\to\infty}\min_N \hat{I}(x,u,a)\geq \lim I(x_a,u_a)$ и в силу непрерывности $I(x,u)$, а следовательно, и $\hat{I}(x,u,a)$, имеем $\lim_{a\to\infty} I(x_a,u_a)=I(x_\infty,u_\infty)$. Таким образом,

$$\lim_{a\to\infty}\min_N \hat{I}(x,u,a)\geq I(x_\infty,u_\infty). \qquad (2.14)$$

С другой стороны, из неравенств (2.I3), (2.I4) находим

$$\lim_{a\to\infty}\min_N \hat{I}(x,u,a)\leq I(x_\infty,u_\infty). \qquad (2.15)$$

Сравнение неравенств (2.I4) и (2.I5) показывает, что справедливо равенство (2.II). Теорема доказана.

Пример 2.I. Найдем минимум функционала

$$I=\int_0^3 \frac{1}{2}x^2dt,\ \dot{x}=u,\ |u|\leq 1,\ x(0)=x(3)=1. \qquad (2.16)$$

Для этого перейдем к задаче

$$J=\int_0^3\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{a}{2}(\dot{x}-u)^2\right]dt,\ |u|\leq 1,\ x(0)=x(3)=1$$

Составляем выражение (2.5): $B=\inf_U\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{a}{2}(\dot{x}-u)^2\right]=\frac{1}{2}x^2$. Найдем поправки по (2.8): $\delta x=-\tau(B_x-\dot{B}_{\dot{x}})=-\tau x,\ \tau>0$.

Таким образом, при $x>0$ на каждом шаге надо стремиться уменьшать x, насколько позволяет ограничение $|u|\leq 1$, и увеличивать его, если $x<0$. В результате придем к кривой, показанной на рис. 4.2а. Эта кривая содержит участок особого режима $x\equiv 0$.

§3. О задаче синтеза

А) Пусть $I(x,a)$ зависит от величины a, $a\in A$. Назовем задачей оптимального синтеза задачу отыскания $x^*(a)$. Любую зависимость, при которой $x(a)\in X^*(a)$, назовем синтезом. Пусть $\alpha(x,a)$ есть α-функционал при $\forall a\in A$ и дано множество синтезов $\{x_i(a)\}=\Omega$

и множество $\{\alpha_i(a)\}=\Lambda$. Поставим задачу найти оценки для синтеза. Очевидно, что для любых фиксированных $\alpha\in\Lambda$ и $x(a)\in\Omega$ имеем оценку $\Delta=\sup_A[I(x(a),a)-\inf_x J(x,a)]$, где $J=I+\alpha$. В самом деле, при $\forall a\in A$ имеем $I(x(a),a)\geq I(x^*)$, а $\inf_x J\leq I(x^*)$ (см. теорему I.3). Вычитая эти два неравенства друг из друга и максимизируя найденную разность на A, получим оценку Δ.

Стремясь минимизировать эту оценку на $\Lambda\times\Omega$, будем иметь:

$$\Delta=\inf_{\Lambda\times\Omega}\sup_A\left[I(x(a),a)-\inf_x J(x,a)\right],\ \Delta\geq 0. \qquad (3.1)$$

Если $\Delta=0$, то найденный синтез оптимален.

Б) Применим оценку (3.I) к задаче, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями в §3. Пусть мы задались некоторым семейством синтезов $u=u(t,x,b)$ (где b – параметр), приводящих систему (3.3) гл. II в заданные граничные условия на правом конце: $x(t)\in G(t)$, $x(t_1)\in G(t_1)=G_1$, $x(t_2)\in G(t_2)=G_2$.
Зададимся функциями $\psi_1(t,x,y)$, $\psi_2(t,x,y)$ и построим, как обычно, функции $\tilde{B}(t,x,y,\dot{y},u(t,x,b))$ и $B(t,x,y,\dot{y},u)$ соответственно, а также $\tilde{A}=F+\psi_1\Big|_{t_1}^{t_2}$, $A=F+\psi_2\Big|_{t_1}^{t_2}$. Из (3.I) следует: для задачи (3.3), (3.4) гл. II справедлива оценка синтеза

$$\Delta=\inf_{\psi_1,\psi_2}\sup_{G_1}(\sup_{G_2}\tilde{A}-\inf_{G_2}A)+\inf_{w\in W}\int_{t_1}^{t_2}(\inf_b\sup_G\tilde{B}-\inf_{d\in U}B)dt. \qquad (3.2)$$

Доказательство. Пусть роль величины a играет совокупность допустимых начальных условий $x(t_1)\in G_1$. Тогда значение функционала на синтезе $u(t,x)$ таково:

$$I(x(t_1),v)=\tilde{A}+\int_{t_1}^{t_2}\tilde{B}dt\leq \sup_{G_2}\tilde{A}+\int_{t_1}^{t_2}\inf_b\sup_G\tilde{B}dt. \qquad (3.3)$$

С другой стороны (теорема I.3 гл. II), имеем оценку снизу для I:

$$J(x(t_1),v)=\inf_{b\in V}J\geq \inf_{G_2}A+\int_{t_1}^{t_2}\inf_{d\in U}B\,dt \qquad (3.4)$$

Подставляя (3.3), (3.4) в (3.I), снижая точность оценки для упрощения вычислений (за счет неравенств (3.3), (3.4)) и минимизируя ее по $y(t)\in W$ и b, получим (3.2). Утверждение доказано. Еще больше снижая точность оценки (3.2), найдем

$$\Delta_1=\inf_{\psi_1,\psi_2}\sup_{G_1}(\sup_{G_2}\tilde{A}-\inf_{G_2}A)+\int_{t_1}^{t_2}\inf_{b,W}(\inf_{b\in V}\sup_G\tilde{B}-\inf_{d\in U}B)dt. \qquad (3.5)$$

Оценка верна, если $\hat{y}(t)\in W$. Пусть $\psi(t,x)$ не зависит от y, $u(t,x)$ и от b, правый конец $x(t)$ свободен, $\psi_1=\psi_2$. Тогда (3.5) примет вид:

$$\Delta_1=\sup_{G_1}A-\inf_{G_1}A+\int_{t_1}^{t_2}(\sup_G\tilde{B}-\inf_{d\in U}B)dt. \qquad (3.6)$$

Выбор в (3.5) разных ψ_1, ψ_2 может способствовать получению более простой и лучшей оценки.

Пример 3.I. Подобрать синтез и вычислить оценку в задаче

$$I=\int_0^\infty\left(\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2}u^2\right)dt,\ \dot{x}=bx+mu,\ x(0)=x_0,\ x(\infty)=0,\ a>0 \qquad (3.7)$$

Будем искать синтез в виде $u=cx$, где c – варьируемый параметр. Возьмем $\Psi=\frac{1}{2}c_1x^2$, где c_1 – произвольная постоянная. Найдем отдельные слагаемые в (3.2):

$$B=\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{2}u^2-c_1x(bx+mu),\ \bar{u}=c_1mx,\ \inf_u B=\frac{1}{2}(a-c_1^2m^2-2c_1b)x^2.$$

Пусть c_1 можно подобрать так, что

$$a-c_1^2m^2-2c_1b\geq 0. \tag{3.8}$$

Тогда $\inf_{x,u}B=0$. Далее, подставляя $u=cx$ и $\Psi=\frac{1}{2}c_1x$ в B, найдем

$$\tilde{B}=\frac{1}{2}(a+c^2-2c_1b-2c_1mc)x^2$$

Пусть существует c, удовлетворяющее неравенству

$$a+c^2-2c_1b-2c_1mc\leq 0. \tag{3.9}$$

Тогда $\inf_c\sup_x\tilde{B}=0$. Значения $x_0, x(\infty)=0$ у нас заданы, $A=\Psi(x(\infty))-\Psi(x(0))$, поэтому $\inf_c\sup_{x_0}(\sup_{x_\infty}\tilde{A}-\inf_{x_\infty}A)=\inf_c\sup_{x_0}(\frac{1}{2}cx_0^2-\frac{1}{2}cx_0^2)=0.$

Подставляя найденные слагаемые в (3.2), получаем $\Delta=0$. Таким образом, если найдутся c, c_1, удовлетворяющие неравенствам (3.8), (3.9), то предлагаемый синтез $u=cx$ будет строго оптимален. Покажем, что такие c, c_1 существуют. Из сравнения $u=cx$ и $\bar{u}=c_1mx$ находим, что $c=mc_1$. Подставляя $c_1=\frac{c}{m}$ в (3.8), (3.9), видим, что оба неравенства будут удовлетворены, если c корень уравнения:

$$c^2+2\frac{b}{m}c-a=0.$$

Отсюда

$$c=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+am^2}}{m},\quad u=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+am^2}}{m}x. \tag{3.10}$$

Подставим u из (3.10) в уравнение (3.7), получим $\dot{x}=\pm\sqrt{b^2+am^2}\,x$. Чтобы при $t\to\infty$ функция $x(t)\to 0$, в (3.10) необходимо взять знак минус. Итак, оптимальный синтез следующий:

$$u=\frac{-b-\sqrt{b^2+am^2}}{m}x.$$

Наши рассуждения останутся в силе, если $b=b(t),\ m=m(t),\ a=a(t)>0$. Интересно, что, используя оценку (3.2), удалось построить оптимальный синтез, вообще не интегрируя систему (3.7).

В) В отдельных случаях синтез удается построить простыми средствами. Пусть $n=1$, система уравнений имеет вид:

$$I=\int f_0(x,u)dt,\ \dot{x}=f(x,u),\ u\in U, \tag{3.11}$$

где t_2 не задано, правый конец $x(t)$ свободен. Возьмем $\Psi=\Psi(x)$, найдем $\bar{u}=\bar{u}(x,\Psi_x)$ из $\inf_V B=\inf_V[f_0(x,u)+\Psi_xf(x,u)]=\bar{B}(x,\Psi_x)$. Приравнивая*/ $\bar{B}(x,\Psi_x)$ нулю, находим из этого уравнения $\Psi_x=\Psi_x(x)$ (если это возможно) и, подставляя найденные Ψ_x в $\bar{u}(x,\Psi_x)$, получаем оптимальный синтез*/ $\bar{u}(x)$.

Пример 3.2. Пусть система (3.11) такая

$$I=\int_0^\infty\left[\frac{1}{2}f_0(x)+\frac{1}{2}c_j(x)u_j^2\right]dt,\ \dot{x}=\varphi(x)+m_j(x)u_j,\ j=1,2,\dots,r. \tag{3.12}$$

Уравнения (3.12) описывают многие системы автоматического регулирования, цель которых – гасить возмущения в системе. В таких системах необходимо, чтобы $x(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Поэтому мы будем полагать, что функция $f_0(x)$ выпукла, $f_0(0)=C$, $C_j(x)>0$.

Составим выражение $B=\frac{1}{2}f_0(x)+\frac{1}{2}c_j(x)u_j^2-\Psi_x\varphi(x)-\Psi_xm_j(x)u_j$ и найдем его минимум по u_j. Получим

$$\bar{u}_j=\Psi_x\frac{m_j}{c_j}, \tag{3.13}$$

$$\bar{B}=\frac{1}{2}f_0(x)-\frac{1}{2}\Psi_x^2\frac{m_j^2}{c_j}-\Psi_x\varphi(x)=0. \tag{3.14}$$

Найдем Ψ_x из (3.14) и подставим в (3.13). Тогда

$$\bar{u}_j=\left(-\varphi\pm\sqrt{\varphi^2+f_0\sum_{i=1}^{r}m_i^2/c_i}\right)\frac{m_j/c_j}{\sum_{i=1}^{r}m_i^2/c_i},\quad j=1,2,\dots,r. \tag{3.15}$$

Подставляя (3.15) в (3.12), найдем $\dot{x}=\pm\sqrt{\varphi^2+f_0\sum_{i=1}^{r}m_i^2/c_i}$, откуда видно, что для убывания $x(t)$ необходимо в оптимальном синтезе (3.15) взять знак минус. Итак, мы получили синтез, не интегрируя (3.12).

§4. Построение приближенного синтеза оптимального управления

Рассмотрим приближенное построение синтеза оптимального управления непрерывной задачи, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями.

А) Постановка задачи. Пусть задан функционал I, система дифференциальных связей (в векторной форме), начальные и конечные условия:

$$I=\int_{t_1}^{t_2}f_0(t,x,u)dt,\ \dot{x}=f(t,x,u),\ x(t_1)\in X_1,\ x(t_2)\in X_2. \tag{4.1}$$

Причем

$$u\in U(t,x,u),\ x\in X(t,x). \tag{4.2}$$

Требуется найти такое управление $u(t)$, которое переводит вектор $x(t)$ из положения $x(t_1)$ в положение $x(t_2)$ и интеграл I при этом принимает минимальное значение.

---

*/ Условия в данном параграфе являются достаточными, поэтому мы можем (до их проверки) накладывать любые требования на функцию Ψ (в частности, чтобы она удовлетворяла некоторому уравнению).

*/ В случае многозначности надо выбрать синтез, на котором решения уравнения $\dot{x}=f(x,\bar{u}(x))$ удовлетворяют второму условию теоремы 3.1, а именно $\inf_{x(t_1)}A=\inf_{x(t_2)}\Psi(x(t_2))$.

Б) Основные допущения. Метод решения. Разобьем все фазовое пространство X или интересующую нас часть этого пространства сеткой с постоянным шагом (по отдельным координатам) на ячейки. Назовем грань ячейки, соответствующую фиксированному значению узла x, главной гранью, а точку, равноудаленную от узлов главной грани, – центром главной грани. Заметим, что у каждой ячейки только две главных грани – правая и левая.

Примем следующие гипотезы:

I. Гипотеза разрыва. Попадание траектории, изображающей точки, в главную грань ячейки равносильно попаданию траектории в центр главной грани этой ячейки.

2. Гипотеза постоянства управлений и производных фазовых координат. Между главными гранями соседних ячеек управления и производные фазовых координат остаются неизменными.

Первая гипотеза позволяет разрывать траекторию по фазовым координатам и считать, что в пределах каждой ячейки она исходит из центра главной грани ячейки. Вторая гипотеза в пределах ячейки заменяет криволинейный участок траектории прямолинейным отрезком. Гипотезы позволяют аппроксимировать траекторию кусочно-непрерывными отрезками прямых. Очевидно, чем меньше размеры ячеек, тем точнее наши отрезки заменяют траекторию.

Сформулированные гипотезы являются фундаментом предлагаемых алгоритмов. Они резко упрощают все вычисления и операции расчета.

В) Вычислительные алгоритмы.

а) Общий синтез. Разобьем ось каждой фазовой координаты x_i на равные части*/ Δx_i, и пусть α_i – число таких частей $(p=1,\dots,\alpha_i)$. Аналогично разобьем ось t на равные Δt, и пусть τ – число отрезков $\Delta t\,(\omega=1,\dots,\tau)$. Далее разобьем ось каждого управления u_β в пределах I-го ограничения (4.2) на γ_β частей, желательно равных или почти равных $(\varphi=1,\dots,\gamma_\beta)$.

Рассмотрим вначале случай, когда левый конец траектории задан. Предположим, что траектория находится в некоторой текущей ячейке $\kappa(\omega,p)$ слоя ω (ω – фиксировано). В соответствии с I-й гипотезой траектория исходит из центра левой главной грани. Будем перебирать $u_\beta(\varphi)$ в узлах сетки. Согласно 2-й гипотезе при

*/ Разумеется, делать это имеет смысл только в пределах, допускаемых вторым ограничением в (4.2).

переходе траектории в пределах I-го слоя от левой главной грани к правой величина функционала и изменение фазовых координат для $u_\beta(\varphi)$ равны

$$I=\sum_{\kappa=0}^{\kappa}\Delta f_0(\kappa)+f_0\Delta t\,,\quad \Delta x_i=f_i[t(\omega),x(p),u(\varphi)]\Delta t\,. \qquad (4.3)$$

Поскольку координаты главных граней ячеек нам известны, нетрудно установить, в главную грань какой ячейки следующего слоя (по t) попала траектория. Запоминаем значение функционала I и управление u, если в эту ячейку до этого не попадала ни одна траектория. Если же траектория не первая, то сравниваем значение функционалов, замещаем на меньший (больший) функционал и запоминаем "лучшее" управление. Заметим, что номер ячейки запоминать не надо, ибо положение I, u в памяти машины может указывать на положение ячейки в фазовом пространстве. Перебрав все ячейки данного слоя, выводим полученные $u_{опт}$ на печать, повторяем процедуру со следующим слоем $(\omega+1)$ и т.д. Держать в памяти все $u_{опт}$ данного слоя необязательно. Для подавляющего большинства реальных процессов переход возможен только в близких ячейках и значение $u_{опт}$ удаленных ячеек можно выводить на печать в процессе просчета данного слоя. Поэтому в дальнейшем при подсчете потребного объема оперативной памяти учитывается только I.

В результате мы получим приближенный синтез оптимального управления*/. Задаваясь граничными условиями в пределах синтезированной области и двигаясь в обратном направлении (управление у нас известно), находим абсолютную минималь, соединяющую заданную точку с началом.

Если система автономная**/, то аналогичное построение можно сделать из правого (фиксированного) конца траекторий.

Разобранные задачи можно назвать задачами попадания "из точки в область" или "из области в точку". Задачу попадания из любой точки некоторой области начальных значений в любую заданную точку некоторой области конечных значений можно назвать задачей попадания "из области в область". Она аналогична предыдущей задаче и требует только большей памяти и машинного времени. Уравнения (4.3) принимают вид:

$$I=\sum_{\kappa=0}^{\kappa}\Delta f_0[\kappa,x(t_\omega)]+f_0\Delta t\,,\quad \Delta x_i=f_i[t(\omega),x(p),u(\varphi),x(t_0)]\Delta t\,. \qquad (4.4)$$

*/ Достаточные условия минимума будут выполнены в силу нашего построения.

**/ Этого всегда можно добиться, если ввести дополнительную переменную $\tau=t$ и к системе (4.I) добавить уравнение $dt/d\tau=1$

Перебор производится не только по u, но и по $x(t_1)$. Запоминаются не только I, но и значения $x(t_1)$, которому они соответствуют.

Точно так же находятся константы, если их надо оптимизировать,

$$I=\sum_{k=0}^{\omega}\Delta f_0(\kappa,c)+f_0\Delta t\,,\quad \Delta x_i=f_i[t(\omega),x(\rho),u(\varphi),c(\gamma)] \tag{4.5}$$

Количество значений функционала для запоминания в n-мерной задаче попадания из точки в область или из области в точку равно $N=\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n$. Задача попадания из области в область может быть получена последовательным решением $(\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n)$-раз I-й задачи (назовем ее основной) с перебором возможных значений $x(t_1)$. Поэтому в дальнейшем мы будем заниматься главным образом основной задачей.

Будем считать элементарной операцией один просчет по уравнениям (4.3). Тогда количество элементарных операций основной задачи в случае τ управлений меньше или равно $K=\delta_1\cdot\delta_2\cdot\ldots\cdot\delta_\tau\cdot N\cdot\tau$.

Нетрудно подсчитать, что потребный объем памяти машины и число операций растут очень быстро. В трехмерной задаче с одним управлением при $\alpha=10$, $\delta=5$, $\tau=10$ величины $N=10^3$, $K=5.10^4$. Для заданного метода, чем больше ограничений, тем лучше. Основную трудность может создать рост потребного объема памяти. Можно увеличить шаг (уменьшить α), найти минималь грубо, а затем ограничить область вокруг минимали и, уменьшая шаг, найти ее более точно. Можно запоминать I не в каждой ячейке, а через одну или несколько ячеек и в процессе счета интерполировать. Можно, наконец, аппроксимировать зависимость $I=I(x(\omega))$ полиномами и запоминать только коэффициенты полиномов[x/].

Если отказаться от построения глобального синтеза и ограничиться получением относительных минималей, как показано ниже, можно практически снять ограничение, накладываемое размерностью вариационных задач.

б) Метод локального синтеза. Пусть требуется найти оптимальную траекторию, соединяющую точки $x(t_1)$ и $x(t_2)$. Соединим эти точки какой-нибудь неоптимальной допустимой траекторией $\bar{x}(t)$. Зададим вокруг этой траектории "трубку". Вследствие того, что синтезируемая область стала малой, можно ограничиться малым α.

x/ В результате расчета мы получим зависимость $I=I[\omega,\bar{x}(\omega)]$, $(\omega=0,1,\ldots,\tau)$ Эта зависимость и может быть принята за функцию $\Psi(\kappa,\bar{x})$. В силу нашего построения она удовлетворяет требованиям (8.6) гл. П.

При минимальном $\alpha=3$ и $n=6{+}7$ потребный объем оперативной памяти равен 729–2187 единиц. Находим лучшую траекторию в пределах заданной "трубки", берем ее за опорную и строим вокруг нее новую "трубку". Процесс прекращается, когда лучшая траектория окажется целиком внутри "трубки" и нигде не будет выходить на ее границу. Очевидно, что в данном методе часть вычислений (выводящих траекторию за пределы "трубки") пропадает для нас бесполезно. Размер "трубки" задает величину шага в направлении к минимуму.

в) Метод покоординатного уточнения. Может оказаться, что размерность задачи так велика, что и при методе локального синтеза оперативной памяти не хватает. Тогда можно задавать "трубку" не по всем координатам, а только по некоторым или даже по одной. Сместившись по одной координате (или группе) в направлении к минимуму, фиксируем эти координаты и задаем "трубку" по другим координатам. Такой процесс поочередного приближения к минимуму по одной или группе координат производится до тех пор, пока задание "трубки" по любой координате не будет вызывать смещение траектории.

Данный метод не ставит пределов размерности задачи из-за ограниченности оперативной памяти. Однако число "пропадающих" вычислений здесь выше, чем в методе локального синтеза.

Заметим, что метод покоординатного уточнения стал возможен только благодаря гипотезе разрыва. В самом деле, если число уравнений меньше числа управлений, то непрерывная траектория, соединяющая произвольные фиксированные точки в пределах ячейки, может и не существовать.

г) Сравнение данных методов с существующими методами. Р. Беллманом ([6], стр. 270, см. литературу к гл. П) и Н.Н.Моисеевым[3] изложены методы решения подобных задач (методы динамического программирования), суть которых такова: пространство состояний ([6] гл. П) либо пространство управлений [3] разбивается сеткой на отдельные узлы. Эти узлы соединяются между собой прямыми. В результате в общем случае получаем систему трансцендентных уравнений [3], решая которую находим управление, обеспечивающее переход в заданный узел. Из всех возможных управлений выбираем такое, которое дает минимум функционалу. Согласно [3] как фазовое координаты, так и управления при этом непрерывны.

В данных методах благодаря гипотезе разрыва расчет сведен к простому вычислению правых частей (4.3) и нет жестких пределов для размерности задачи.

Д) Оценка погрешности.

а) Оценка погрешности от введения гипотезы разрыва. Существенным моментом в предлагаемом алгоритме по сравнению с существующими является введение гипотезы разрыва, т.е. переход от дискретно-непрерывной задачи, когда квантуется только время, к чисто дискретной задаче, когда квантуются время, фазовые координаты и управления. Введение этой гипотезы позволяет не заботиться о попадании траектории точно в заданный узел, что резко упрощает вычислительную процедуру. Однако очевидно, что принятие такой гипотезы вносит дополнительную погрешность в расчет, а потому необходимы оценки этой погрешности.

Обозначим через $X(\kappa)$ узлы π сетки фазового пространства, принадлежащие множеству достижимости[*] при данном $t(\kappa)$, а через $\tilde{U}(\kappa)$ – множеству узлов μ сетки, покрывающей область допустимых значений управления.

Максимальное приращение фазовых координат на множестве $\tilde{X}(\kappa) \times U(\kappa)\,(\kappa = const)$ при переборе сетки u равно

$$\delta x_i(\kappa) = \max_{\gamma,\pi,\mu}\left[f_i(\kappa, x(\pi), u(\gamma+1)) - f_i(\kappa, x(\pi), u(\gamma))\right]\Delta t(\kappa), \quad (4.6)$$

где $\gamma \in \tilde{U}(\kappa)$, $\pi \in \tilde{Y}(\kappa)$.

Определим целое число

$$\xi = 1 + E\left(\max_{i,\kappa}\left|\frac{\delta x_i(\kappa)}{\Delta x_i(\kappa)}\right|\right), \quad (4.7)$$

где E обозначает, что берется целая часть от функции, стоящей в круглых скобках; $\Delta x_i(\kappa)$ – введенное ранее дробление оси x_i.

Если $|\delta x_i| < |\Delta x_i|$ при всех γ, π, i, κ, т.е. сетка узлов в допустимой области управления достаточно "густа", то при переборе допустимых управлений пропусков ячеек из-за "грубости" управления не будет и в этом случае $\xi = 1$.

Теорема 4.I. Пусть функции $f_i\,(i = 0, 1, \dots, n)$ определены и непрерывны по всем своим аргументам из области достижимых или допустимых значений.

Тогда для любой оптимальной траектории существует следующая оценка погрешности в величине функционала от введения гипотезы разрыва:

$$|I - \tilde{I}| \leq \sum_{\kappa=1}^{N} \max_{\pi,\gamma}\left[\max f_0^{(\kappa)} - \min f_0^{(\kappa)}\right]\Delta x(\kappa). \quad (4.8)$$

[*] Множество достижимости – это совокупность x, которых можно достигнуть при всевозможных последовательностях $u \in U\,(\kappa = 0, \dots, N-1)$ и любых $x(0)$, удовлетворяющих (2.2).

Здесь $\pi \in \tilde{X}(\kappa)$, $\gamma \in \tilde{U}(\kappa)$, $\max$ и $\min$ в квадратных скобках берутся по y, u, изменяющимся соответственно в пределах

$$x_i(\kappa/\pi) \leq x_i \leq x_i(\kappa/\pi+\xi), \quad u_j(\kappa/\gamma) \leq u_j \leq u_j(\kappa/\gamma+1). \quad (4.9)$$

Запись типа $x(\kappa/\pi)$, $u(\kappa/\gamma)$ и т. д. $(i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, r;\ d = 1, \dots, \ell)$ означает, что перебор x, u происходит при фиксировании $t(\kappa = const)$.

$\tilde{I}$ – минимальная величина функционала в случае дискретно-непрерывной задачи.

Доказательство. Погрешность в пределах ξ ячеек удовлетворяет неравенству

$$|\delta(\Delta I)| \leq \left(\max f_0^{(\kappa)} - \min f_0^{(\kappa)}\right)\Delta t(\kappa), \quad (4.10)$$

где $\min$ и $\max$ берется по (4.9).

Погрешность на множестве $\tilde{X}(\kappa) \times \tilde{U}(\kappa)$:

$$|\delta(\Delta I)| \leq \max_{\pi,\gamma}\left[\max f_0^{(\kappa)} - \min f_0^{(\kappa)}\right]\Delta t(\kappa);\ \pi \in \tilde{Y}(\kappa),\ \gamma \in \tilde{U}(\kappa). \quad (4.11)$$

Суммируя по всей траектории, получаем (4.8), что и требовалось доказать.

Рассмотрим еще одну оценку. Введем вектор ΔW, компонентами которого являются $\Delta \underline{x}$, $\Delta \underline{u}$, где $\Delta \underline{x} = \{\Delta \underline{x}_1, \dots, \Delta \underline{x}_n\}$, $\Delta \underline{x}_i = \max\{\Delta x_i, \delta x_i\}$, Δu – вектор управления, входящий только в f_0.

Теорема 4.2. Пусть f_i определены для всех $\pi \in \tilde{X}(\kappa)$, $\gamma \in \tilde{U}(\kappa)$, а f_0 по x, u – для всех x, u из области достижимости или допустимых значений удовлетворяет условию Липшица с общей постоянной c.

Тогда для любой оптимальной траектории справедлива следующая оценка погрешности в величине функционала от введения гипотезы разрыва:

$$|I - \tilde{I}| \leq c \sum_{\kappa=1}^{N} \Delta t_\kappa |\Delta W(\kappa)|, \quad (4.12)$$

где $|\Delta W(\kappa)|$ – модуль вектора $W(\kappa)$.

Доказательство. В силу определения c, имеем

$$|\delta(\Delta f_0)| \leq c\,|\Delta W(\kappa)|. \quad (4.13)$$

Умножая обе части неравенства (4.13) на $\Delta t(\kappa) > 0$ и суммируя по κ от I до N, получаем (4.12), что и требовалось доказать.

Если $|\Delta W(\kappa)| = const$, то оценку (4.12) можно записать в более простом виде: $|I - \tilde{I}| \leq c(t_2 - t_1)\cdot|\Delta W|$.

Будем называть минимум строгим, если $I > \tilde{I}$ при любых $y, u \neq \tilde{y}, \tilde{u}$.

* Волна сверху обозначает величины на абсолютной минимали в дискретно-непрерывной задаче.

Теорема 4.3. В условиях теоремы 4.1 (или 4.2) в случае строгого минимума[*] из $\Delta x, \Delta u \to 0$ следует:

1) $I \to \tilde{I}$; 2) $y, u \to \tilde{y}, \tilde{u}$.

[*] Для доказательства $I \to \tilde{I}$ при $\Delta x, \Delta u \to 0$ требование существования строгого минимума необязательно.

Доказательство. I. При $\Delta x, \Delta u \to 0$ из (4.9) или (4.I2) получаем, что область возможных значений x, u стремится к нулю, а следовательно, $\max f_0 \to \min f_0$ или $|\Delta W(k)| \to 0$. В силу (4.8) или (4.I2) получаем, что $I \to \bar{I}$.

2. Так как минимум строгий, то $\bar{I}$ может достигаться только на $\bar{x}, \bar{u}$. Но $I \to \bar{I}$, следовательно, $x, u \to \bar{x}, \bar{u}$. Теорема доказана.

Пример 4.I. Оценить возможное отклонение величины минимума от введения гипотезы разрыва в задаче

$$I = \int_0^1 |x| dt, \quad \dot{x} = u, \quad |u| \le 1, \quad I(1) = \min. \tag{4.I4}$$

Пусть $\Delta x = 0{,}1; \Delta u_1 = 0{,}1; \Delta u \le 0{,}1$. Согласно оценке теоремы 4.I абсолютное отклонение $|I - \bar{I}| \le \sum_{k=1} 0{,}1 \cdot \Delta t(k) = 0{,}1$

Если заданы граничные условия $x(0) = x(1) = 1{,}25$, то нетрудно найти оптимальное решение, так как кривая $x(t)$ должна согласно (4.I4) ограничивать фигуру минимальной площади. Оптимальное $u = -1$ при $0 \le x \le 0{,}5$ и $u = 1$ при $0{,}5 \le t \le 1$, а $\inf I = 1$. Поэтому относительная погрешность $\le$ 0,I.

Если взять более частую сетку, например $\Delta t = 0{,}1$, $\Delta x = 0{,}01$, $\Delta u \le 0{,}01$, то нетрудно найти, что относительная погрешность в величине минимума функционала будет $\le$ 0,0I или I%.

Оценка теоремы 4.2 дает тот же результат.

б) Оценка общей погрешности метода. Найдем общую погрешность от замены непрерывной задачи дискретной и от введения гипотез 1 и 2. Заметим прежде всего, что согласно оценкам теорем 4.I и 4.2 при удвоении сетки узлов t, x, u (при условии, что ζ не возрастает) погрешность от введения гипотезы разрыва уменьшается по крайней мере вдвое. Вычислим теперь погрешность от введения гипотезы постоянства производных и управлений. Раскладывая в ряд Тейлора функцию $x(t)$ в пределах ячейки, получим

$$x(k+1) = x(k) + \dot{x}(k) \cdot \Delta t + O(k) \cdot \Delta t^2,$$

где $O(k) \cdot \Delta t^2$ – остаточный член разложения.

При достаточно малом шаге погрешность на каждом шаге пропорциональна Δt^2. Предположим, что мы провели расчет с интервалом Δt и сделали N шагов. Предполагая, что погрешность на каждом шаге одна и та же, приближенно получаем

$$\tilde{X}^* - \bar{x} = A \cdot N \cdot \Delta t^2, \tag{4.I5}$$

где A – неизвестный числовой множитель.

Проделаем второй расчет с шагом, вдвое меньшим $\Delta x_2 = \frac{1}{2} \Delta x_1$ (общее число шагов равно $2N$). Тогда будет допущена погрешность

$$\tilde{X}^* - \bar{X} \approx A 2N (\tfrac{1}{2} \Delta t_1)^2. \tag{4.I6}$$

Из формул (4.I5), (4.I6) исключаем точное решение $\bar{X}$ и находим неизвестное A:

$$A = -\frac{2}{N \cdot \Delta t_1^2} (\tilde{X}^* - X^*). \tag{4.I7}$$

Подставляя (4.I7) в (4.I6), находим погрешность в определении

$$\tilde{X}^* - \bar{X} = X^* - \tilde{X}^*$$

Это, в частности, относится и к I. Таким образом, мы доказали

теорему 4.4. Пусть при последовательном удвоении сетки $\Delta x^{(\gamma)}, \Delta y^{(\gamma)}, \Delta u^{(\gamma)}, (\gamma = 1, 2, 3, \ldots), \zeta$ не возрастает. Тогда решение дискретной задачи при введении гипотезы I, 2 и $\gamma \to \infty$ будет стремиться к решению непрерывной задачи и при достаточно малых $\Delta x^{(\gamma)}, \Delta y^{(\gamma)}, \Delta u^{(\gamma)}$ погрешность метода в определении величины функционала будет приближенно равна

$$I - \bar{I} \approx I_{\gamma+1} - I_\gamma, \tag{4.I8}$$

а погрешность в отклонении траектории от оптимальной

$$x_i - \bar{x}_i \approx x_i^{(\gamma+1)} - x_i^{(\gamma)}. \tag{4.I9}$$

Если пренебречь текущей погрешностью, в частности погрешностью округления, то формулами (4.I8), (4.I9) можно пользоваться для оценки общей погрешности решения.

В случае применения метода локального синтеза или покоординатного уточнения данные оценки остаются справедливыми. Однако, поскольку нас интересует только точность данного относительного минимума, целесообразно просматривать не все множество допустимых узлов $X_{(k)}$, а только подмножество, входящее в исследуемую "трубку", или окрестность координат, по которым осуществляется приближение.

§5. Метод покусочной оптимизации

А) Постановка задачи. Основная идея. Рассмотрим обычную задачу оптимизации, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$I = \int_{t_0}^{t_{2m}} f_0(t, x, u) dt, \quad \dot{x}_i = f_i(t, x, u), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad u \in U. \tag{5.1}$$

Значения $t_0, t_{2m}, x(t_0), x(t_{2m})$ заданы. Разобьем отрезок $[t_0, t_{2m}]$ на $2m$ частей и пронумеруем узлы: t_γ, $\gamma = 0, 1, \ldots, 2m$. Зададимся некоторой допустимой траекторией $\tilde{x}(t)$, удовлетворяющей заданным граничным значениям (рис. 4.3)*/. Возьмем кусок траектории на

*/ Траектория может быть и недопустимой, однако она обязательно должна лежать в области достижимости.

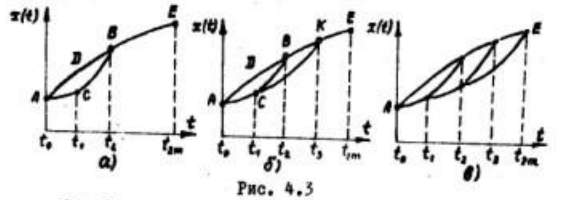

Рис. 4.3

отрезке $[t_0, t_2]$. Оптимизируемего, например, по принципу максимума, т.е. решим краевую задачу для системы:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x, \bar{u}), \quad \dot{p}_i = -H_{x_i}(t, x, \bar{u}, p), \qquad (5.2)$$

где $\bar{u} = \arg\sup_u H$, $H = p_i f_i - f_0$.

Граничные значения: $x(t_0) = x_0$, $x(t_2) = \bar{x}_2$. Начальные значения $p_i(t_0)$ переменных присоединенной системы подбираются так, чтобы $x(t_2) = \bar{x}_2$. Заметим, что если отрезок $[t_0, t_2]$ достаточно мал, то эта "микрокраевая" задача не есть эквивалент той "большой" краевой задачи, которую приходится решать в принципе максимума Л.С.Понтрягина. "Микрозадача" в большинстве случаев решается просто.

Это следует из того, что при $\Delta t \to 0$ в достаточно хороших точках все зависимости приближаются к линейным и удается получить высокую точность удовлетворения граничных значений за одну-три итерации.

Итак, пусть задача микрооптимизации на отрезке $[t_0, t_2]$ решена и мы получили некоторую оптимальную траекторию $ACBE$ (вместо $ADBE$) (рис. 4.3а). Эта траектория дает меньшее значение функционалу I (5.I), ибо участок (кусок) ACB заведомо лучше участка ADB.

Возьмем теперь в качестве следующих граничных точек C, K (рис. 4.3б) и решим задачу микрооптимизации на отрезке $[t_1, t_3]$ и т.д. В результате, перебирая все точки t_γ, $\gamma = 1, \dots, 2m$, мы получим новую траекторию $AC_1C_2 \dots C_{2m-1}E$ (рис. 4.3в), которая является допустимой и заведомо лучше старой. Повторяя эти действия, придем к оптимальному решению.

Б) Рекомендации по организации вычислительной процедуры

а) Для решения микрозадачи можно использовать метод Ньютона. Невязки конечных значений $\varphi_i = x_i(t_{\gamma+1}) - \bar{x}_i(t_\gamma)$ есть неизвестные функции $p_i(t_\gamma)$. Зададимся некоторым значением вектора $p(t_\gamma)$. Проинтегрируем систему (5.2) на отрезке $[t_\gamma, t_{\gamma+1}]$ и найдем φ_i. Затем дадим каждой компоненте $p_i(t_\gamma)$ приращения $\Delta p_i(t_\gamma)$ и найдем приращения $\Delta\varphi_i$. Тогда поправки δp_i к $p_i(t_\gamma)$ находятся как решение

следующей системы линейных алгебраических уравнений: $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial p_i} \delta p_i = -\varphi_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, где $\partial\varphi_j/\partial p_i \approx \Delta\varphi_j/\Delta p_i$. Повторяем процесс с $p_{i,\beta+1} = p_{i,\beta} + \delta p_{i,\beta}$. Здесь $\beta = 1, 2, \dots$ – номер итерации. Счет заканчивается, когда $\sum_i |\varphi_i| \leq c$, где c – заданная точность удовлетворения граничных условий в микрозадаче. Коэффициенты $\partial\varphi_j/\partial p_i$ можно в течение двух-четырех итераций заново не вычислять. При этом расчетов меньше, но скорость сходимости падает. Для следующей точки $t_{\gamma+1}$ в качестве первого приближения можно брать значения $p_i^-(t_{\gamma+1})$ от предыдущей микрозадачи. Этот метод при малых невязках обеспечивает высокую скорость сходимости (квадратичная сходимость).

б) Для решения микрозадачи можно применить также метод итераций. Задаемся $p(t_\gamma)$, интегрируя (5.2), находим невязки φ_i и новые значения $p_{i,\beta+1}(t_\gamma)$ определяем по формуле $p_{i,\beta+1}(t_\gamma) = p_{i,\beta}(t_\gamma) + \varphi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Замечания. I. Когда некоторое значение $x_i(t_{2m})$ свободно, то в предыдущей микрозадаче подбираем $p_i(t_{2m-1})$ так, чтобы $p_i(t_{2m}) = 0$. Для левого свободного конца нужно брать соответствующее $p_i(t_0) = 0$, а краевую задачу решать за счет подбора $x_i(t_0)$.

2. Если значение $p_i(t_\gamma)$ запоминать, то в окончательной стадии итераций можно получить точное решение. Для этого следует уменьшить число точек деления оси t, пока не получим отрезок $[t_0, t_{2m}]$. Каждая из этих укрупненных краевых задач будет решаться просто, так как в качестве начальных значений можно использовать $p_i(t_\gamma)$ из микрозадач. В отличие от принципа максимума, решение, полученное таким способом, если оно почти одинаково с итерационным, дает больше оснований надеяться на выполнение достаточных условий, ибо мы пришли к нему, спускаясь к минимуму.

3. Для решения микрозадач можно применить любую другую процедуру, улучшающую локальное значение функционала.

4. В качестве невязок можно взять $\varphi_i = [x_i(t_{\gamma+1}) - \bar{x}_i(t_{\gamma+1})]^2$. Скорость и условия сходимости в этом случае будут иные.

§6. Некоторые методы решения краевых задач в теории оптимального управления

А) Скольжение по направляющей. Метод покусочной оптимизации, изложенный в §I, приводит к мысли применить следующий способ решения краевых задач, возникающих в теории оптимального управления.

Задаемся неоптимальной траекторией $x(t)$, удовлетворяющей заданным краевым условиям и заведомо лежащей в области достижимости.

116=117

Задаемся некоторым достаточно малым $t_1 > t_0$ и решаем микрокраевую задачу с заданной точностью C_1 $(\Sigma \varphi_i \le C_1)$ или $\sqrt{\Sigma \varphi_i^2} \le C_1$, взяв в качестве $x(t_1) = \tilde{x}(t_1)$. По выполнении условия $\Sigma \varphi_i \le C_1$ продолжаем интегрирование (устремляем t_1 к t_2), пока не получим $\Sigma \varphi_i > C_2$, где C_2 – заданное рассогласование краевых условий ($C_2 > C_1$). После этого применяем какой-либо из методов уменьшения невязки, используя предыдущие $p_i(t_0)$ как первое приближение. По выполнении условия $\Sigma \varphi_i \le C_1$ снова $t_1 \to t_2$ и т.д., пока не получим $t_1 = t_2$. После этого доводим невязки до требуемой точности.

Данный метод в отличие от обычного метода решения краевой задачи избавляет от мучительной процедуры подбора начальных значений $p_i(t_0)$ и благодаря малым невязкам обеспечивает хорошую скорость сходимости процесса.

Б) Метод разложения. Принцип максимума после исключения $\bar{u} = \arg\sup_u H(t, x, u, p)$ приводит к краевой задаче для следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x, p), \quad \dot{p}_i = -H_{x_i}(t, x, p), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad t_1 \le t \le t_2 \qquad (6.1)$$

Мы будем рассматривать только случай, когда концы $x_i(t)$ либо фиксированы, либо свободны, t_1, t_2 заданы. В случае задачи с фиксированными концами значения $x_i(t_1) = x_{i1}$ на левом конце заданы и надо подобрать такие начальные $p_i(t_1)$, чтобы получить заданные значения $x_i(t_2) = x_{i2}$ на правом конце. Если некоторая компонента на левом конце $x_i(t_1) = x_{i1}$ свободна, то из условия трансверсальности немедленно следует, что соответствующее $p_i(t_1) = 0$ и надо подбирать значение x_{i1}. Если свободна компонента $x_i(t_2)$ на правом конце, то соответствующее $p_i(t_2)$ равно нулю. В любом из этих вариантов мы имеем двухточечную краевую задачу, половина (n) граничных условий которой задана на левом конце и половина – на правом конце.

Зададимся некоторой траекторией $\tilde{x}(t), \tilde{p}(t)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям. Предположим, что эта траектория лежит достаточно близко к точному решению, т.е. $\bar{x}_i = \tilde{x}_i + \delta x_i$, $\bar{p}_i = \tilde{p}_i + \delta p_i$. Подставляя эти выражения в (6.1), раскладывая (6.1) по степени вариаций $\delta x_i, \delta p_i$, пренебрегая членами начиная со 2-го порядка малости и учитывая, что на точном решении $\dot{x}_i - f_i = 0$, $\dot{p}_i + H_{x_i} = 0$, получим следующую систему неоднородных линейных уравнений относительно поправок $\delta x_i, \delta p_i$:

$$\delta\dot{x}_i - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\delta x_j - \frac{\partial f_i}{\partial p_j}\delta p_j = \dot{x}_i - f_i, \quad \delta\dot{p}_i + H_{x_i x_j}\delta x_j + H_{x_i p_j}\delta p_j = \dot{p}_i + H_{x_i}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (6.2)$$

Краевые условия для нее следующие: для известных значений

$x_{i\alpha}, p_{i\alpha}, \alpha = 1, 2$, соответствующие $\delta x_{i\alpha}, \delta p_{i\alpha} = 0$. Итак, мы свели задачу (6.1) к краевой задаче для системы $2n$ линейных дифференциальных уравнений (6.2) с граничными значениями, заданными на левом конце и n значениями на правом. Эта задача решается просто. Обозначим единым n-мерным вектором δy вектор с теми компонентами $\delta x_i(t_1), \delta p_i(t_1)$, которые неизвестны. Задаваясь начальными значениями $\delta y_i(t_1) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\delta y_j(t_1) = 1$, интегрируем однородную систему, вытекающую из (6.2), n раз получим так называемую нормированную фундаментальную систему решений $\delta y_{ik}(t)$. Интегрируя еще раз при произвольных начальных условиях систему (6.2) как неоднородную, найдем $\delta x_i^*(t), \delta p_i^*(t)$. Тогда общее решение системы (6.2) согласно теории линейных уравнений можно записать в виде (в старых переменных):

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{k=1}^{n} \delta x_k(t_1)\,\delta x_{ki} + \sum_{k=1}^{n} \delta p_k(t_1)\,\delta p_{ki} + \delta x_i^*, \\ \delta p_i &= \sum_{k=1}^{n} \delta x_k(t_1)\,\delta x_{ki} + \sum_{k=1}^{n} \delta p_k(t_1)\,\delta p_{ki} + \delta p_{n+i}^* \end{aligned} \qquad (6.3)$$

Подставляя в нее $t = t_2$ и известные $\delta x_i(t_2), \delta p_i(t_2) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, получим систему n линейных неоднородных алгебраических уравнений с n неизвестными начальными значениями $\delta y_i(t_1)$, из которой мы их можем найти. Эти значения обеспечивают выполнение граничных условий на правом конце. Интегрируя с ними еще раз систему (6.2), получим искомые поправки δx_i, δp_i и находим новую опорную траекторию как

$$\tilde{x}_{i,\beta+1} = \tilde{x}_{i,\beta} + \tau_\beta \delta x_i, \quad \tilde{p}_{i,\beta+1} = \tilde{p}_{i,\beta} + \tau_\beta \delta p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (6.4)$$

Здесь $\beta = 1, 2, \ldots$ – номер итерации. Шаг $0 < \tau \le 1$ выбирается так, чтобы невязка

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} |\dot{x}_i - f_i| + |\dot{p}_i + H_{x_i}| \qquad (6.5)$$

убывала. Обычно берут $\tau_1 = 1$. Если φ убывает, то $\tau_{\beta+1} = 1{,}2\tau_\beta$, а если φ возросло, то $\tau_{\beta+1} = 0{,}4\tau_\beta$. При достаточно малых невязках целесообразно брать $\tau_\beta \equiv 1$. Можно показать, что в этом случае сходимость близка к квадратичной.

В) Метод спуска по фазовым траекториям. Задаемся $\tilde{x}(t), \tilde{p}(t)$. Составляем невязку

$$\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{a_i}{2}(\dot{x}_i - f_i)^2 + \frac{a_i}{2}(\dot{p}_i + H_{x_i})^2\right] dt. \qquad (6.6)$$

Варьируя ее и интегрируя по частям в слагаемых, содержащих $\delta\dot{x}$, $\delta\dot{p}$, получим

$$\begin{aligned} \delta\Phi = {} & a_i(\dot{x}_i - f_i)\delta x_i \Big|_1^2 + a_i(\dot{p}_i + H_{x_i})\delta p_i \Big|_1^2 + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \Big[a_i(\dot{x}_i - f_i)\Big(-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big) + a_j(\ddot{x}_j - \dot{f}_j) + a_i(\dot{p}_i + H_{x_i}) H_{x_i x_j} \Big]_1 \delta x_j + \\ & + \Big[a_i(\dot{x}_i - f_i)\Big(-\frac{\partial f_i}{\partial p_j}\Big) + a_i(\dot{p}_i + H_{x_i}) H_{x_i p_j} + a_j(\ddot{p}_j + \dot{H}_{x_j}) \Big]_2 \delta p_j \Big\} dt. \end{aligned}$$

Здесь для известных конечных значений x_i, p_i соответствующие конечные значения $\delta x_i = \delta p_i = 0$. Полагая

$$\delta x_j = -\tau_{j1}(t)[\,\ldots\,]_1 \,, \quad \delta p_j = -\tau_{j2}(t)[\,\ldots\,]_2 \,,$$

где $\tau_j(t) > 0$, получим при достаточно малом шаге уменьшение невязки (6.5), если $\tau(t)$ таково, что соответствующие (свободные) конечные значения

$$a_i(\dot x_i - f_i)\,\delta x_i\Big|_1^2 \le 0 \,, \quad a_i(\dot p_i + H_{x_i})\,\delta p_i\Big|_1^2 \le 0.$$

В частности, для фиксированных концов $x(t)$ можно брать $\tau_\beta(t) = c_\beta(t_1 - t)(t_2 - t)$, где $c_\beta > 0$ и $c_{\beta+1} = 1{,}2\,c_\beta$, когда (6.6) убывает, и $c_{\beta+1} = 0{,}4\,c_\beta$, когда (6.6) растет.

Этот метод быстро уменьшает крупные невязки, но плохо сходится при малых Φ. Он может привести в местную "яму".

Г) Метод итерации. Задаемся $\bar x(t), \bar p(t)$ и находим поправки по формулам:

$$\delta x_i = \tau(\dot x_i - f_i) \,, \quad \delta p_i = \tau(\dot p_i + H_{x_i}) \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Шаг τ выбирается так, чтобы невязка (6.5) убывала.

Д) Метод градиентного спуска в пространстве управлений. Пусть $\Psi = y_i \Delta x_i$. Зададимся неоптимальным управлением $\bar u(t)$, значениями $y(t_1)$, подставим их в уравнения

$$\dot x_i = f_i \,, \quad \dot y_i = -H_{x_i} \qquad (6.7)$$

и интегрируя найдем $\bar x(t), \bar y(t)$, а также их конечные значения. Подставим найденную траекторию в функционал

$$J = A + \int_{t_1}^{t_2} B\,dt$$

и вычислим вариацию его относительно указанных величин. Получим

$$\delta J = \delta A + \int_{t_1}^{t_2} (B_{x_i}\delta x_i + B_{u_j}\delta u_j + B_{y_i}\delta y_i + B_{\dot y_i}\delta \dot y_i)\,dt.$$

Интегрируя по частям член $B_{\dot y_i}\delta \dot y_i$, найдем

$$\delta J = \delta A + y_i\delta x_i\Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2}\left[B_{x_i}\delta x_i + B_{u_j}\delta u_j + (B_{y_i} - \dot B_{\dot y_i})\delta y_i\right]dt \qquad (6.8)$$

Если каждый раз находить $\bar x(t), \bar y(t)$ по (6.7), то

$$B_{x_i} \equiv -\dot y_i - H_{x_i} = 0 \,, \quad B_y - \dot B_{\dot y_i} \equiv \dot x_i - f_i = 0 \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\delta u_j = \tau_j(t) B_{u_j} = -\tau_j(t) H_{u_j} \,, \quad \tau_j(t) > 0 \text{ (по } j \text{ — не сумма)} \qquad (6.9)$$

и (6.8) примет вид

$$\delta J = \delta A + y_i\delta x_i\Big|_1^2 - \int_{t_1}^{t_2} \tau_j(t) B_{u_j}^2\,dt. \qquad (6.10)$$

Отсюда видно, что если поправки к управлениям $\bar u_j$ каждый раз выбирать по (6.9), а поправки к $x_i(t_1), x_i(t_2)$ и $y_i(t_1)$ так, чтобы $\delta A + y_i\delta x_i\big|_1^2 < 0$, то (6.10) при достаточно малом шаге будет убывать и траектория будет стремиться к оптимальной. Этот метод предложен Л.И. Шатровским [1].

§7. Метод спуска по допустимому множеству в задачах поиска экстремума функций конечного числа переменных

Рассмотрим поиск экстремума в задаче

$$I = f_0(x) \,, \quad f_i(x) = 0 \,, \quad i = 1, 2, \ldots, m < n. \qquad (7.1)$$

Пусть $f_i(x), i = 0, 1, \ldots, m$ непрерывны и дифференцируемы. Возьмем α-функционал в виде $\alpha = \lambda_i f_i(x), i = 1, \ldots, n$, где λ_i пока не определены. Составим обобщенный функционал $J = f_0(x) + \lambda_i f_i(x)$. Зададимся некоторыми значениями $x_i = \tilde x_i$ и вычислим вариацию относительно этих значений:

$$\delta J = J'_{x_i}\,\delta x_i \qquad (7.2)$$

Положим m производных*/

$$J'_{x_i}(\tilde x, \lambda) = 0 \,, \quad i = 1, 2, \ldots, m \qquad (7.3)$$

и из этих уравнений найдем λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ **/. Полагая оставшиеся в (7.2) δx_i равными

$$\delta x_i = -\tau J_{x_i} \,, \quad i = m+1, \ldots, n, \quad \tau > 0, \qquad (7.4)$$

получим

$$\delta J = -\tau \sum_{i=m+1}^{n} (J'_{x_i})^2. \qquad (7.5)$$

Отсюда видно, что если приращения $(n - m)$ компонент δx_i выбирать по (7.4), то при достаточно малом шаге $\tau > 0$ величина функционала будет убывать.

Поэтому выбираем новые значения $(n - m)$ компонент x_i по формулам

$$x_{k,\beta+1} = x_{k,\beta} + \delta x_{k,\beta} \,, \quad k = m+1, \ldots, n \qquad (7.6)$$

(где β — номер итерации), а остальные m компонент находим по уравнениям (7.1): $f_i(x) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

В данном методе мы каждый раз получаем допустимые x. Поэтому он назван спуском по допустимому множеству.

§8. Замечание о приближенных методах построения $\Psi(t, x, y)$

А) Для приближенного построения функции $\Psi(t, x, y)$, фигурирующей в методе максимина (§2 гл. II), можно применить метод Ритца.

---

*/ Для определенности будем считать, что это m первых производных. Данное предположение не ограничивает общности рассуждений.

**/ Это возможно, если функциональная матрица $\|J''_{x_i x_j}\|$ имеет в точке $\tilde x$ ранг m.

Пусть Ψ не зависит от y. Выберем последовательность координатных функций $\nu_1(t,x), \nu_2(t,x), \dots, \nu_k(t,x), \dots$, удовлетворяющую таким требованиям:

I) при любом k функции $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ линейно независимы;

2) последовательность функций полная, т.е. линейная комбинация этих функций образует множество, всюду плотное в пространстве функций $\Psi(t,x)$.

Приближенное решение можно искать в виде

$$\Psi_k(t,x) = \sum_{\ell=1}^{k} c_\ell \nu_\ell(t,x), \tag{8.I}$$

где c_ℓ – постоянные. Эти постоянные находим из условия (2.I6) гл. Ш

$$\sup_c \Big(\inf_{t_1, x_i \in R} A + \int_{t_1}^{t_2} \inf_{x \in X, u \in U} B\,dt\Big). \tag{8.2}$$

Увеличивая k, найдем последовательность оценок снизу

$$\bar{J}_k = \bar{A}_k + \int_{t_1}^{t_2} \bar{B}_k\,dt \tag{8.3}$$

Указанная последовательность является невозрастающей, так как среди линейных комбинаций $k+1$ функции ν_ℓ содержатся все линейные комбинации первых k функций. Поскольку эта последовательность ограничена сверху, то она сходится. Степень близости найденного решения к нижней грани функционала можно оценить следующим образом. Найдем ближайшее к $\bar{\bar{x}}$ допустимое x и вычислим на нем значение функционала. Сравнив его с нижней оценкой $\bar{J}_k$, определим близость к оптимальному решению.

Литература к главе IУ

I. Л.И. Шатровский. Об одном численном методе решения задач оптимального управления. Журнал вычислительной математики и математической физики, т. 2, № 3, 1962.

2. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Под ред. Дж. Лейтмана, "Наука", 1965.

3. Н.Н. Моисеев. Методы динамического программирования в теории оптимальных управлений. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1964, №3; 1965, № I.

4. А.А. Голонкин. Методы решения краевых задач теории оптимального управления. "Прикладная механика", т. 4, вып. 6, 1971.

Глава У
ИМПУЛЬСНЫЕ РЕЖИМЫ

Расширение круга рассматриваемых проблем оптимизации привело к появлению задач, в которых управление обладает такой мощностью, что временем его действия можно пренебречь и считать, что его кратковременное действие на полную мощность эквивалентно приложению некоторого импульса к системе. Но в этом случае в момент приложения такого импульса система может скачком переходить из одного состояния в другое, что с математической точки зрения соответствует разрыву фазовых координат. Примером таких задач являются задачи переходов с орбиты на орбиту или межпланетных перелетов космических кораблей с ракетными двигателями, где временем работы двигательной установки по сравнению с общим временем полета можно пренебречь и тем самым понизить порядок системы уравнений.

В данной главе рассматриваются оптимальные задачи, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений I-го порядка. В отличие от известных методов анализ ведется на классе функций фазовых координат, которые в определенных случаях могут иметь разрывы I-го рода. Доказана теорема, устанавливающая достаточные условия абсолютного минимума в таких задачах. На базе этой теоремы выводится ряд алгоритмов отыскания минимали.

§I. Постановка задачи. Основные определения. Методы отыскания минимали

А) Требуется найти абсолютный минимум функционала

$$I = g_0[x(t_1), x(t_2)] + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt. \tag{I.1}$$

Входящие в него функции удовлетворяют почти всюду уравнениям

$$\dot{x}_i = f_i(t,x,u), \quad i=1,2,\dots,n, \quad t \in [t_1,t_2] = T \tag{I.2}$$

Величины t_1, t_2 заданы, $x(t_1), x(t_2) \in R$. Здесь $x(t)$ n-мерная ограниченная и почти всюду непрерывная функция фазовых координат, $x \in E_n$; $u(t)$ – r-мерная измеримая функция управления, $u \in V$, V задано. Функции $f(t,x,u)$ измеримы и суммируемы по t при всех фиксированных x, u непрерывны и ограничены всюду по x и непрерывны почти всюду на V. Функция g_0 непрерывна и ограничена снизу на R. Множество функций $x(t), u(t)$, удовлетворяющих всем перечисленным условиям, назовем допустимым и обозначим Q. Предполагается,

122-123

что функционал I полунепрерывен и ограничен снизу на Q. Поставленная задача отличается тем, что на допустимых управлениях $u \in U$ фазовые координаты могут иметь разрывы I-го рода (импульсные режимы).

Б) Введем в изучение множество $U^* = \{u^* : |f_i(t,x,u)| = \infty, i = 0,1,\dots,n\}$, т.е. множество значений $u \in U$, на которых правые части (I.2) и f_0 обращаются в бесконечность. Очевидно, что $U^* \subset U$. По условию $U^* \neq U$. Импульс (разрыв $x(t)$) допустим, если $u \in U^*$. Из определения следует, что $U^* = U^*(t,x)$. Здесь может быть несколько случаев.

I. U^* не зависит ни от t, ни от x. Допустимый импульс может быть в любой точке пространства $T \times E_n$. Пример: $f_0 = x_1^2, f_1 = u, U^* = \{u = \pm\infty\}$.

2. $U^* = U^*(t)$. Обозначим T^* множество t, на которых U^* не пусто. Возможны варианты: а) U^* не пусто только в отдельных точках $t \in T$, число которых конечно и положение известно (фиксированные импульсы); пример: $f_0 = x_1^2$, $f_1 = \frac{u}{\sin^2 \pi t + u^2}$, $U^* = \{u^* = 0 : t = n\}$; если же положение их неизвестно, назовем их "плавающими" импульсами; б) U^* не пусто на множестве, которое всюду плотно в T; в) U^* не пусто всюду на T (распределенные импульсы).

3. $U^* = U^*(x)$. Обозначим X^* совокупность x, при которых U^* не пусто. В этом случае на многообразии разрыва на систему (I.I), (I.2) накладывается дополнительная связь $x \in X^*$. Эта связь должна быть совместна с (I.I), (I.2). Пример:

$$f_0 = x_1^2,\ f_1 = u_1/(x_2^2 + u_1^2),\ f_2 = \sin u_1,\ X^* = \{x_2 = 0\}.$$

4. $U^* = U^*(t,x)$ – самый общий случай. Импульсы возможны на множестве $T^* \times X^*$.

В) Выделим из f_0, f_i функции f_j, обладающие на U^* наивысшим порядком бесконечности, т.е. функции, для которых $\lim_{u \to u^*} |f_i/f_j| < \infty$, $i = 0,1,\dots,j-1,j+1,\dots,n$. Предположим, что одна из функций f_j такова, что в интересующей нас области $f_j \neq 0$ (пусть это будет f_1). Тогда $x_1 = \tau$ можно взять в качестве независимого переменного. Траектории на многообразии разрыва будут описываться системой уравнений, полученной из (I.I), (I.2):

$$x_i' = \varphi_i(\tau, x, u^*),\ i = 0,1,\dots,n,\ u^* \in U^* \quad (I.3)$$

где $x_i' = dx_i/d\tau$, $\varphi_i = f_i/f_1$. В дальнейшем будем полагать, что $\varphi_0 = 0$.

Г) Введем в рассмотрение непрерывную, ограниченную снизу функцию $\Psi(t,x)$, обладающую почти всюду непрерывными частными производными, и по аналогии с гл. II назовем ее характеристической. Построим функции

$$B = f_0 - \Psi_{x_i} f_i - \Psi_t,\quad A = g_0 + \Psi[t_2, x(t_2)] - \Psi[t_1, x(t_1)]. \quad (I.4)$$

Обозначим множество кривых $x(t)$, удовлетворяющих всем перечис-

ленным условиям, кроме уравнений (I.3), и таких, что

$$\dot{x} \in \dot{X} = \{f(t,x,u) : u \in U\}.$$

Теорема I.I. Пусть имеется последовательность $x^s(t) \in D, u^s(t)$ $(u \in U), x^s(t_1), x^s(t_2) \in E_n$. Для того чтобы эта последовательность минимизировала функционал (I.I) на допустимых множествах Q, R, достаточно существование такой характеристической функции $\Psi(t,x)$, что

I) $\int_{t_1}^{t_2} B(t, x^s, u^s)\,dt \to \inf_{x(t) \in D} \int_{t_1}^{t_2} \inf_{u \in V} B\,dt,\ \bar{x}(t), \bar{u}(t) \in Q,$ (I.5)

2) $A(x_1^s, x_2^s) \to \inf_{x_1, x_2 \in R} A,\ \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in R.$

Здесь чертой сверху отмечены оптимальные значения, соответствующие инфинумам в правых частях выражений (I.5). В самом деле, сложим соответственно правые и левые части выражений (I.5). Учитывая (I.4) и $\dot{\Psi} = \Psi_{x_i} f_i + \Psi_t$, получим

$$A(x_1^s, x_2^s) = \int_{t_1}^{t_2} B(t, x^s, u^s)\,dt \to \inf_{x(t), u(t) \in Q} \left(g_0 + \int_{t_1}^{t_2} f_0\,dt\right),$$

после чего утверждение теоремы становится очевидным.

Д) Случай фиксированных импульсов. Предположим, что $x(t_1), x(t_2)$ заданы. Пусть: I) $Y_1(a)$ – область (многообразие) в пространстве E_n, из каждой точки которой на траекториях системы (I.3) можно достигнуть точки $a \in E_n$ (область управляемости относительно точки а); 2) $Y_2(a)$ – область (многообразие) в пространстве E_n, через каждую точку которой проходит траектория системы (I.3), исходящая из точки $a \in E_n$ (область достижимости). Назовем область $Y_3 \in E_n$ областью полной управляемости, если существуют траектории системы (I.3), соединяющие любые точки из этой области.

Теорема I.2. Пусть многообразия разрывов являются областями полной управляемости, любая непрерывная траектория $x(t)$ системы (I.2) пересекает эти области, $f_0(t,x,u)$ ограничено снизу на $E_n \times U$ и $\varphi_0 = 0$. Тогда: I) участки минимали между точками разрыва не зависят от граничных условий; 2) абсолютная минималь находится среди минималей множества Q (минималей с импульсами).

Доказательство. I. Так как перемещения по многообразию разрыва не меняют величины функционала ($\varphi_0 \equiv 0$), а многообразия разрыва являются областями полной управляемости, то концы участка минимали между точками разрыва можно выбирать из условия минимума функционала. Следовательно, они будут определяться условиями трансверсальности, а не граничными значениями. 2. Любая непрерывная кривая $x(t)$, удовлетворяющая (I.2), пересекает многообразия разрыва, которые являются областями полной управляемости. Следовательно, множество непрерывных кривых, удовлетворяющих заданным граничным условиям, входит в множество Q кривых с импульсами. Поэтому согласно принципу расширения величина абсолют-

124-125

ного минимума на множестве Q не больше, чем на множестве непрерывных кривых. Теорема доказана.

Следствие. Если концевые точки t_1, t_2 – точки разрыва и $x(t_1)\in Y_1(t_1), x(t_2)\in Y_2(t_2)$, то величина функционала не зависит от граничных значений $x(t_1), x(t_2)$.

Е) Случай "распределенных" импульсов.

Теорема I.3. Пусть: I) f_0 имеет вид $f_0(x)$ и ограничено снизу, x^0 – точка $\inf_x f_0(x)$; 2) $f_i = f_i(x,u)$; 3) $x(t_1)\in Y_1(x^0)$; 4) $x(t_2)\in Y_2(x_0)$.

Тогда: I) $x = x^0$ есть предельная абсолютная минималь (с импульсами в концах); 2) если существует такое $u\in U$, что x^0 удовлетворяет системе (I.2), то x^0 – гладкая минималь; если такого u нет, то существует минимизирующая последовательность x^s, при которой $|x^s - x^0|\to 0$ при $s\to\infty$ (абсолютная минималь с распределенными импульсами).

Доказательство. I. Из п. I следует $\varphi_0 = f_0/f_x = 0$. Из п. 3, 4 получаем, что граничные условия могут быть выполнены, причем ввиду $\varphi_0 = 0$ без потерь в величине функционала. Поэтому x^0, соответствующее $\inf_x f_0$, является абсолютной минималью. 2. Первое утверждение этого пункта очевидно. Докажем второе утверждение. В силу существования областей $Y_i(x^0)$ (см. п. 3 теоремы) имеется такая окрестность минимали x^0, в которой любое отклонение $x(t)$ от x^0 (вызванное подстановкой в уравнения (I.2) x^0 и $\forall u\in(U-U^*)$) может быть ликвидировано за счет импульса. Если $s\to\infty$ таким образом, что $\max|x^s - x^0|\to 0$, то $x^s\to x^0$ равномерно на (t_1,t_2) и $\lim_{s\to\infty}\int_{t_1}^{t_2} y(x^s)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} y(x^0)\,dt$. Теорема доказана. Заметим, что при условиях теоремы 3 величина минимума не зависит от граничных условий.

Теорема I.4. Пусть: 1) функции $f_i(x,u), \varphi_i(x,u^*)$ непрерывны в точке и некоторой ее окрестности вместе со своими частными производными первого порядка на $\forall u\in(U-U^*)$ и $\forall u^*\in U^*$; 2) $\varphi_0 = 0$; 3) множества $U-U^*$, U^* не пусты. Тогда для существования в окрестности x^0 допустимой минимизирующей последовательности $x_n\to x^0$ необходимо и достаточно существование таких $u\in(U-U^*)$; $u^*\in U^*$, чтобы соблюдались равенства

$$f_i(x^0,u) = f_k(x^0,u)\,\varphi_i(x^0,u^*), \quad i=1,\dots,n,\ i\neq k. \qquad (1.6)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть дана допустимая минимизирующая последовательность $x^s\to x^0$ в виде

$$x_i^s = x_i^0 + \Delta x_i^s, \quad t_j\le t\le t_{j+1}, \quad \Delta x_i^s(t_j) = 0, \qquad (1.7)$$

где t_j – точки деления отрезка $[t_1, t_2]$, $j\to\infty$. Ввиду ограниченности, непрерывности и дифференцируемости $f_i(x,u)$, $\varphi_i(x,u^*)$

в точке x^0 на $\forall u\in(U-U^*)$, $\forall u^*\in U^*$, приращения x_i в пространстве E_{n+1} и на многообразии разрыва можно записать

$$\Delta x_i = f_i(x^0,u)\,\Delta t + O_1(\Delta t)\,\Delta t,$$
$$\Delta x_i^* = \varphi_i(x^0,u^*)\,\Delta x_k + O_2(\Delta x_k)\,\Delta x_k, \quad i\neq k, \qquad (I.8)$$

где $O_1(\Delta t), O_2(\Delta x_k)$ – величины более высокого порядка малости. Приравняв первое и второе выражение в (I.8) и разделив обе части полученного равенства на Δt, получим

$$f_i(x^0,u) + O_1(\Delta t) = \varphi_i(x^0,u^*)\frac{\Delta x_k}{\Delta t} + O_2(\Delta x_k)\frac{\Delta x_k}{\Delta t}, \quad i\neq k \qquad (I.9)$$

Пусть $\Delta t\to 0, (s\to\infty)$, тогда $\Delta x_k/\Delta t\to f_k(x^0,u)$; $O_1, O_2\to 0$. В пределе получим систему (I.6).

Достаточность. Пусть существуют такие $u\in(U-U^*)$, $u^*\in U$, что соблюдаются равенства (I.6). В силу непрерывности f_i, φ_i в окрестности минимали можно написать равенства (I.9). Умножая обе части (I.9) на Δt, получим (I.8) $(\Delta x_i = \Delta x_i^*)$. Подставим приращения Δx_i в (I.7). Задаваясь $\Delta t\to 0$, получим последовательность, в которой возвращение на минималь происходит с погрешностью $\sum_{\Delta t}(O_1 + O_2\varphi_k)\Delta t$. Но при $\Delta t\to 0$, $[t_1,t_2]<\infty$ члены $O_1, O_2\to 0$, а φ_k ограничено. Значит, построенная последовательность сходится к x^0 и является минимизирующей. Теорема доказана.

Ж) "Плавающие" импульсы возникают при некоторых комбинациях x, ψ_x. Наиболее простым является случай, когда системы (I.I), (I.2) имеют вид

$$\dot{I} = f_0(x),\ \dot{x}_i = f_i(x),\ i=1,2,\dots,l,\ \dot{x}_\alpha = f_\alpha(x) + u_\alpha,\ \alpha = l+1,\dots,n. \qquad (I.10)$$

Здесь u_α – особые управления. Последние уравнения в (I.10) могут быть удовлетворены на любых кусочно-дифференцируемых $x_\alpha(t)$, а потому эти уравнения можно отбросить. В оставшейся системе x_α будет играть роль управлений. Моменты разрыва $x_\alpha(t)$ определяются из условий оптимальности "усеченной" системы.

§2. Задача о наивыгоднейшей форме воздушного тормоза

В качестве модели обтекания примем неупругую модель Ньютона, согласно которой тангенциальная составляющая скорости молекул, налетающих на тело, остается неизменной, тогда как нормальная составляющая скорости обращается в нуль. Эта модель аппроксимирует случай гиперзвукового невязкого течения. Пусть тормоз имеет форму тела вращения. Уравнения, описывающие явления, следующие (см. [2] стр. 146-147*/ к гл. IУ):

$$dX/dx = 4\pi q y u^3/1+u^2,\quad dy/dx = u,\quad 0 \le x \le x_1,\ x_1 - \text{своб},\ y(x_1) \le y_1,\quad X(0)=0,\ X(x) = max. \tag{2.1}$$

Здесь X - сопротивление, q - скоростной напор (постоянный), x - абсцисса точки (независимое переменное, "время"), y - ордината (фазовая координата), u - наклон касательной в данной точке тела (управление).

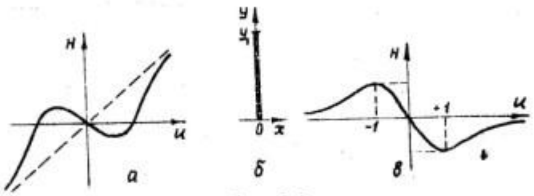

Рис. 5.I

Составляя функцию $H = p(t)u - 4\pi q y u^3/1+u^2$, видим, что если $\dot p \ne 4\pi q y$, то $\inf H = \infty$ (рис. 5.Iа). Поэтому при $p \ne 4\pi q y$ оптимальный режим - импульс. Найдем предел

$$\lim_{u\to\infty} 4\pi q y u^3/((1+u^2)u) = 4\pi q y$$

Следовательно, правую часть 2-го уравнения в (2.I) можно взять за f_1. Итак, в импульсе

$$X = 4\pi q \int_0^{y_1} v\,dv = 2\pi q y_1^2 \tag{2.2}$$

Экстремаль состоит только из разрыва от 0 до y_1 (рис. 5.Iб). Физический смысл полученного решения: при наших предположениях наибольшее сопротивление даст пластинка, стоящая перпендикулярно потоку.

У нас остался нерассмотренным случай $p(t) = 4\pi q y$, когда зависимость $H = H(u)$ имеет вид, изображенный на рис. 5.Iв, и минимум может быть найден по принципу максимума Л.С.Понтрягина ([I] гл. П).

*/ В [2] к гл. IУ отыскивается форма тела, обладающего наименьшим сопротивлением. Однако в технике необходимо знать и форму тел, обладающих наибольшим сопротивлением (воздушные тормоза, парашюты и т.п.).

Соответствующее $\inf_u H$ управление $u = 1$. Экстремаль $y = x$. Функционал на этой экстремали

$$X = 4\pi q \int_0^{x} \frac{u^3 y}{1+u^2}\,dx = 4\pi q \int_0^{x_1} \frac{x}{2}\,dx = \pi q y_1^2 \tag{2.3}$$

достигает только половины величины от разрывного решения (2.2).

Литература к главе У

I. А.А. Болонкин. Импульсные решения в задачах оптимального управления. "Известия Сибирского отделения АН СССР, серия технических наук", № 13, вып. 3, 1968.

Глава УI

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМАЛИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

§I. Предварительные замечания

Данная глава посвящена малоизученной области вариационного вычисления - особым и скользящим режимам, которые являются специальными экстремалями. Необходимость изучения специальных экстремалей диктуется следующими обстоятельствами: I.Такие экстремали часто встречаются в прикладных задачах.При некоторых граничных значениях они почти неизбежны в задачах,когда уравнения нелинейные, а управление входит линейно или гамильтониан не обладает свойством выпуклости по управлению. Это бывает почти всегда, а потому специальные экстремали так же часты, как и обычные. 2. Специальные экстремали во многих случаях не усложняют (как считают до сих пор), а упрощают решение, так как приводят к вырождению вариационных задач и понижению порядка интегрируемой системы*/. 3. Абсолютного минимума можно достигнуть на минималях, содержащих специальные участки. 4. Пренебрежение специальными экстремалями может привести к неразрешимости краевых задач.

*/ Решение может усложниться, если учесть, что включение участков специальных экстремалей требует решения дополнительных краевых задач.

5. Специальные экстремали могут служить средством для получения приближенных решений.

Первые исследования по скользящим режимам, по-видимому, были сделаны Янгом [I], затем появились и другие работы. Материалы данной главы содержат все необходимые алгоритмы расчета специальных экстремалей.

Напомним постановку задачи оптимального управления. В гл. II была рассмотрена задача, которая в частном случае формулируется следующим образом: найти абсолютный минимум функционала

$$I=\int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dx, \qquad (\text{I.I})$$

если на входящие в него функции наложены независимые дифференциальные связи

$$\dot{x}_i=f_i(t,x,u)\ ,\ i=1,\dots,n\ ,\ t_1\le t\le t_2 \qquad (\text{I.2})$$

и конечные значения $x(t_1), x(t_2)$ принадлежат заданному множеству R.

Здесь $x(t)$ n-мерная, непрерывная вектор-функция фазовых координат; $u(t)$ – r-мерная, кусочно-непрерывная, ограниченная вектор-функция управления, $u\in U(t)$ (область $U(t)$ типа $u_{i\,min}(t)\le u_i(t)\le u_{i\,max}(t)$); t – независимое переменное; t_1, t_2 заданы. Предполагается, что f_0, f_i определены и непрерывны по t, x, u. Функции $u(t), x(t)\in Q$ и конечные значения $x(t_1), x(t_2)\in R$ называются допустимыми, если они удовлетворяют перечисленным условиям.

Были построены функции ((3.II) в гл. II)

$$A=\Psi(t_2,x(t_2))-\Psi(t_1,x(t_1))\ ,\ B=f_0-\Psi_t-\Psi_{x_i}f_i\ , \qquad (\text{I.3})$$

где $\Psi(t,x)$ – характеристическая функция, и в [4] к гл. II доказана следующая теорема:

Теорема I.I. Для того чтобы пара $\bar u, \bar x\in Q$ давала функционалу I абсолютный минимум, достаточно существование непрерывной, ограниченной снизу, кусочно-дифференцируемой характеристической функции $\Psi(t,x)$ такой, что на допустимых кривых

1) $\bar\xi(t,x)=\inf\limits_{u\in U(t)} B$ 2) $\int_{t_1}^{t_2}\bar B\,dt=\inf\limits_{x(t)}\int_{t_1}^{t_2}\xi\,dt$, 3) $\bar A=\inf\limits_{x(t_1),x(t_2)\in R} A>-\infty$.

Здесь черта сверху обозначает величины на абсолютной минимали.

Напомним, что необходимое условие стационарности п. 2 теоремы I.I приводит к уравнениям Эйлера-Лагранжа, справедливым вдоль экстремали,

$$-B_{x_i}=\dot p_i+H_{x_i}=0\ ,\ i=1,\dots,n \qquad (\text{I.4})$$

где $p_i=\bar\Psi_{x_i}$, $H=p_i f_i-f_0$ – гамильтониан, а управление $\bar u$ находится из п. I теоремы I.I: $\xi=\inf\limits_{u\in U} B$ или $\xi_1=\sup\limits_{u} H$.

Напомним еще, что в угловых точках должны выполниться условия

$$[\Psi_t+B]^-=[\Psi_t+B]^+,\quad \Psi_{x_i}^-=\Psi_{x_i}^+ \ \text{или}\ H^-=H^+;\ p_i^-=p_i^+. \qquad (\text{I.5})$$

Здесь приведен минимум сведений из [4] (к гл. II), необходимых для дальнейшего понимания. Некоторые первые результаты по специальным экстремалям, полученные автором в 1960-62 гг. и доложенные на ряде семинаров, представлены в [2].*/

§2. Особые экстремали

А) Условие I теоремы I.I в случае непрерывной и дифференцируемой поверхности $B=B(u)$ дает

$$B_{u_\beta}(t,x,p,u)=0\ ,\ \beta=1,\dots,m\le r, \qquad (2.1)$$

где в перечень β включены только те компоненты управления, оптимальные значения которых лежат в открытой области сечений $B=B(u_\beta)$ при данном $t\in[t_1,t_2]$. Без ограничения общности в качестве таковых мы будем считать m первых компонент**/.

Рассмотрим функциональную матрицу $F=\|B_{u_\beta u_\gamma}\|$ или, что одно и то же, $F_1=\|H_{u_\beta u_\gamma}\|$, $\beta,\gamma=1,\dots,m\le r$.

Определение 2.I. Назовем экстремаль на интервале $t_3 t_4\subseteq[t_1,t_2]$ особой, если на этом интервале в некоторой открытой области $U_1\subset U$ и окружающей экстремаль ($\bar u\in U_1$) ранг σ матрицы F (или F_1) меньше m.

Дефект ранга возможен на всей минимали или на отдельных ее участках. Как известно, вариационное исчисление и большинство существующих методов построены в предположении, что экстремали***/

---

*/ Материалы этой главы докладывались на семинарах под руководством А.И.Кухтенко (институт кибернетики, г. Киев, июль 1962 г.; январь, июль 1963 г.), на семинарах Л.Э.Эльсгольца (МГУ, сентябрь 1964 г.), в Московском авиационном институте (октябрь 1964 г.), на семинаре Б.Н.Петрова (институт автоматики и телемеханики, апрель-май 1965 г.), на конференции мехмата университета им. П.Лумумбы (май 1965 г.), на конференции в МАТИ (январь 1967 г.), на Всесоюзном совещании по математике и кибернетике (Горький, май 1967 г.) и др.

**/ Вместо системы (2.1) можно взять систему $H_{u_\beta}=0$. Мы будем пользоваться этим в дальнейшем. В (2.I) и далее используются обозначения типа $\frac{\partial B}{\partial u_\beta}=B_{u_\beta}$; $\frac{\partial^2 B}{\partial u_\beta\partial u_\gamma}=B_{u_\beta u_\gamma}$; $\frac{\partial H}{\partial u_\beta}=H_{u_\beta}$; $\frac{\partial f^i}{\partial u_\beta}=f^i_{u_\beta}$ и т.д.

***/ Здесь и далее под экстремалью понимается допустимая кривая, удовлетворяющая уравнениям (I.2), (I.4) и условию $\xi=\inf B$, а под минималью – кривая, удовлетворяющая достаточным условиям минимума.

130-131

не являются особыми (см., например, теоремы 75.I, 80.I в [7] к гл. II). Однако случаи, когда $\sigma < m$, встречаются довольно часто, например, если уравнения (I.2) нелинейные, но управление входит линейно. Еще более часто встречаются так называемые скользящие режимы, которые являются частным случаем особых режимов [2]. При $\sigma < m$ из системы уравнений (2.I) невозможно определить все u_ρ.

Определение 2.2. Назовем порядком особенности экстремали число $\mu = m - \sigma$ (дефект ранга матрицы F или F_1).

Определение 2.3. Если $\mu > 1$, то будем называть особый режим многократным (двух-трехкратным и т.д.).

Функциональная матрица $F_1 = \| H_{u_\rho u_r} \|$ имеет, в частности, дефект в ранге, если некоторые из управлений входят линейно. Например, система (I.I)–(I.2) имеет вид

$$\dot{x}_i = \gamma_i(t,x,u) + \alpha_j \varphi_{ij}(t,x,u),\ i=0,1,\dots,n;\ j=1,2,\dots,\lambda \le n+1, \qquad (2.2)$$
$$I = x_0,\ |\alpha| \le 1.$$

В дальнейшем мы будем изучать только систему (2.2). Причем будем считать, что особенность в ранге матрицы F называется только $\varkappa$ – первыми управлениями α_j, которые назовем особыми ($|\alpha| < 1$, $\varkappa \le \lambda$). Предполагаем также, что правые части уравнений (2.2) дифференцируемы соответствующее число раз.

Пусть после s-го дифференцирования выражений $\partial H / \partial \alpha_j = 0$, $j = 1,\dots,\varkappa$ полным образом по t и замены $\dot{x}_i$, $\dot{p}_i$ при помощи (2.2), (1.4) в $d^s/dt^s(H_{\alpha_j}) = 0$ впервые появилось α_j, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left[\frac{d^s}{dt^s}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right] \ne 0.$$

Далее (см. теорему 2.2) доказано, что для оптимальности особой экстремали необходимо, чтобы s было четным: $s = 2k\ (k = 1,2,\dots)$

Определение 2.4. Целое число $K(j) = \frac{1}{2}s(j)$ назовем частным порядком сложности особой экстремали от особого управления α_j.

Определение 2.5. Число $K = \sum_{j=1}^{\varkappa} K(j)$ будем назывть общим порядком сложности особой экстремали с $\varkappa$-кратной особенностью.

Определение 2.6. Если $K(j) = 1$, $(j = 1,\dots,\varkappa)$, то особую экстремаль назовем экстремалью с простой особенностью.

Определение 2.7. Если общий порядок сложности выше порядка особенности ($K > \varkappa$), то такую особую экстремаль будем называть экстремалью со сложной особенностью.

Б) Рассмотрим необходимые условия оптимальности особых экстремалей типа неравенства. Для простоты ограничимся в п. Б выводом этих условий для системы (2.2) вида

$$\dot{x}_i = \gamma_i(t,x) + \alpha_j \varphi_{ij}(x,t),\ i=0,1,\dots,n;\ j=1,\dots,\lambda \le n+1, \qquad (2.2')$$
$$I = x_0.$$

Теорема 2.I. Пусть $K(i) = const$. Для оптимальности многократной особой экстремали со сложной особенностью необходимо, чтобы в каждой точке особого участка за исключением, может быть, конечного числа угловых точек $x(t)$ была положительна квадратичная форма

$$-(-1)^k \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right]\delta\xi_j\,\delta\xi_\nu,\ (\nu, j = 1,\dots,\varkappa). \qquad (2.3)$$

Доказательство. Запишем 2-ю вариацию функционала на участке $\tau_1, \tau_2 \in [t_1, t_2]$ при условии $x(\tau_1) = x(\tau_2) = 0$. Согласно п. I, 2 теоремы I.I получим ($\Delta J = dJ + \frac{1}{2}d^2J + \dots$, $dJ = 0$):

$$2\Delta J = -\int_{\tau_1}^{\tau_2}(2H_{\alpha_j x_i}\delta\alpha_j\,\delta x_i + H_{x_i x_k}\delta x_i\,\delta x_k)\,dt. \qquad (2.4)$$

Уравнения в вариациях от (I.2), (I.4), т.е. от $\dot{x}_i = H_{p_i}$, $\dot{p}_i = -H_{x_i}$ будут

$$\delta\dot{x}_i = H_{p_i x_k}\delta x_k + H_{p_i\alpha_j}\delta\alpha_j,\ \delta\dot{p}_i = -H_{x_i x_k}\delta x_k - H_{x_i p_k}\delta p_k - H_{x_i\alpha_j}\delta\alpha_j. \qquad (2.5)$$

Продифференцируем выражение $(\delta p_i, \delta x_i)$ по t и подставим в него (2.5):

$$\frac{d}{dt}(\delta p_i\,\delta x_i) = -H_{x_i x_k}\delta x_i\,\delta x_k - H_{x_i\alpha_j}\delta x_i\,\delta\alpha_j + H_{p_i\alpha_j}\delta p_i\,\delta\alpha_j. \qquad (2.6)$$

Исключим $H_{x_i x_k}\delta x_i\,\delta x_k$ из (2.4) при помощи (2.6)

$$2\Delta J = -\int_{\tau_1}^{\tau_2}(H_{\alpha_j x_i}\delta x_i + H_{\alpha_j p_i}\delta p_i)\,\delta\alpha_j\,dt - \delta p_i\,\delta x_i\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}. \qquad (2.7)$$

Будем обозначать H_{α_j} на проварьированной траектории $\tilde{H}_{\alpha_j}$. Так как на экстремали $H_{\alpha_j} = 0$, то

$$H_{\alpha_j x_i}\delta x_i + H_{\alpha_j p_i}\delta p_i = \delta H_{\alpha_j} = \tilde{H}_{\alpha_j} - H_{\alpha_j} = \tilde{H}_{\alpha_j}. \qquad (2.8)$$

Подставим (2.8) в (2.7) и учтем, что $\delta x_i(\tau_1) = \delta x_i(\tau_2) = 0$:

$$2\Delta J = -\int_{\tau_1}^{\tau_2}\tilde{H}_{\alpha_j}\,\delta\alpha_j\,dt \qquad (2.9)$$

Полагаем $\delta\alpha_j = \delta^k\xi_j$, $\delta^i\xi_j(\tau_1) = \delta^i\xi_j(\tau_2) = 0$, $i = 0,1,\dots,k-1$, где $\delta\xi_j$ – новые вариации. Подставляя их в (2.9) и интегрируя по частям k раз, получим

$$2\Delta J = -\int_{\tau_1}^{\tau_2}(-1)^k\left(\frac{d^k}{dt^k}\tilde{H}_{\alpha_j}\right)\delta\xi_j\,dt \qquad (2.10)$$

Согласно нашему предположению особое управление впервые появилось в $M^j_{2k} = \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)$. Найдем величину этого выражения на проварьированной траектории через величины на экстремали. Раскладываем M^j_{2k} в ряд Тейлора

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\tilde{H}_{\alpha_j} = \frac{d^{2k}}{dt^{2k}}H_{\alpha_j} + \frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left(\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}H_{\alpha_j}\right)\delta\xi_\nu + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}H_{\alpha_j}\right)\delta x_i + \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}H_{\alpha_j}\right)\delta p_i + \dots \qquad (2.11)$$

Если $\tau_1\tau_2 = \varepsilon$ стремится к нулю, то δx_i, δp_i, как видно из (2.5), при $\delta x(\tau_1) = \delta p(\tau_1) = 0$ будут более высокого порядка малости относительно ε, чем $\delta^{\kappa}\xi_j$. Поэтому с учетом того, что на экстремали $\frac{d^{2\kappa}}{dt^{2\kappa}}H_{\alpha j}=0$, при достаточно малом $\varepsilon=\tau_1\tau_2$ главным членом в (2.11) будет

$$\frac{d^{2\kappa}}{dt^{2\kappa}}\tilde{H}_{\alpha j}=\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left(\frac{d^{2\kappa}}{dt^{2\kappa}}H_{\alpha j}\right)\delta^{\kappa}\xi_\nu, \qquad (2.12)$$

где справа берутся значения на экстремали.

Раскладываем коэффициенты при $\delta^{\kappa}\xi_j$ в (2.12) в ряд Тейлора по степеням $\varepsilon=\tau_1\tau_2$, берем только главный член и интегрируем правую и левую часть (2.12) κ раз. Получим

$$\frac{d^{\kappa}}{dt^{\kappa}}\tilde{H}_{\alpha j}=\int_{\tau_1}^{t}\cdots\int_{\tau_1}^{\mu}\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^{2\kappa}}{dt^{2\kappa}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\delta^{\kappa}\xi_\nu\,d\mu=\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^{2\kappa}}{dt^{2\kappa}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]_{\tau}\delta\xi_\nu,\ \tau\in[\tau_1,\tau_2]. \qquad (2.13)$$

Подставим (2.13) в (2.10):

$$2\Delta J=-\int_{\tau_1}^{\tau_2}(-1)^{\kappa}\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^{2\kappa}}{dt^{2\kappa}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\delta\xi_j\cdot\delta\xi_\nu\,dt=-\int_{\tau_1}^{\tau_2}(-1)^{\kappa}a_{j\nu}\,\delta\xi_\nu\,\delta\xi_j\,dt,\ j,\nu=1,\ldots,\chi. \qquad (2.14)$$

Так как на оптимальной траектории должно быть $2\Delta J\geq 0$, то при $\varepsilon=\tau_1\tau_2\to 0$ из (2.14) следует, что в каждой точке особого участка необходимо, чтобы квадратичная форма (2.8) была положительна. Теорема доказана.

<u>Теорема 2.2</u>. <u>Необходимое условие оптимальности особой экстремали</u>. Пусть

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\Big|_{\Sigma}\neq 0,\quad \nu=1,\ldots,\chi.$$

Тогда для оптимальности особой экстремали необходимо, чтобы α в $\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)=0$ входило при четном m.

<u>Доказательство</u>. Пусть $s=2z-1$ – нечетное. В этом случае интегрируем (2.13) по частям $z-1$ раз и выражение под интегралом в (2.14) примет вид:

$$(-1)^{z}\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^{2z-1}}{dt^{2z-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\delta\xi_j\cdot\delta\xi_\nu=(-1)^{z}a_{j\nu}\,\delta\xi\,\delta\xi_\nu\quad,\ j,\nu=1,\ldots,\chi,$$

где $\delta\xi_\nu=\delta\dot{\xi}_\nu$, $a_{ii}=0$. Пусть все $\delta\xi=0$, кроме $\delta\xi_1,\delta\xi_2$. Тогда выписанное выражение будет таким:

$$(-1)^{z}(a_{12}\,\delta\xi_1\,\delta\xi_2+a_{21}\,\delta\xi_2\,\delta\xi_1).$$

Полагая $\delta\xi_2=\delta\dot{\xi}_2=0$, т.е. $\delta\xi_2=\kappa_2$ constантой, будем иметь $(-1)^{z}a_{21}\delta\xi_1\kappa_2$. По условию $a_{21}\neq 0$. Выбирая $\delta\xi_1\kappa_2$ так, чтобы $-(-1)^{z}a_{21}\,\delta\xi_1\kappa_2<0$, получим согласно (2.14) $\Delta J<0$. А это противоречит оптимальности особой экстремали аналогичные рассуждения применимы к любому коэффициенту $a_{j\nu}$. Теорема доказана*/.

<u>Замечание I.</u> Заключение теоремы будет выполнено, если a_{ij} есть функция x и на особой экстремали можно наложить дополнительную связь $a_{\nu j}(t,x)=0$. Тогда α, появившееся в $d^m/dt^m,(H_{\alpha j})=0$, при нечетном m из этого выражения исчезнет.

<u>Пример 2.I</u>. Найти особые экстремали задачи

$$I=\int_0^{3\pi}\cos x\,dt,\ \dot{x}=\alpha,\ |\alpha|\leq 1.$$

Имеем: $H=p\alpha-\cos x$, $\dot{p}=-\sin x$, $H_\alpha=p=0$, $\dot{H}_\alpha=-\sin x=0$, $x=\kappa\pi$, $(\kappa=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, $\ddot{H}_\alpha=-\alpha\cos x=0$, $\alpha=0$.

Неравенство $\partial\ddot{H}_\alpha/\partial\alpha=-\cos x>0$ возможно только при $x=m\pi$, $m=\pm1,\pm3,\pm5,\ldots$ Таким образом, особые экстремали $x=m\pi$, $(m=\pm1,\pm3,\ldots)$ оптимальны, а особые экстремали $x=n\pi$, $(n=0,\pm2,\pm4,\ldots)$ – неоптимальны.

<u>Пример 2.2</u>. $I=\int_0^T(\alpha_1x_2+\alpha_2x_1)\,dt$, $\dot{x}_1=\alpha_1$, $\dot{x}_2=2\alpha_2$, $x(0)=x(T)=0$,

$$H=p_1\alpha_1+2p_2\alpha_2-\alpha_1x_2-\alpha_2x_1,\quad \dot{p}_1=\alpha_2,\ \dot{p}_2=\alpha_1,$$

$$H_{\alpha_1}=p_1-x_2=0\ ,\ \dot{H}_{\alpha_1}=-\alpha_2=0,$$

$$H_{\alpha_2}=2p_2-x_1=0\ ,\ \dot{H}_{\alpha_2}=\alpha_1=0.$$

Особая экстремаль $x=p=\alpha=0$ неоптимальна, ибо $\alpha\ (\nu\neq j)$ появилось при нечетном дифференцировании, $a_{12}=-1$, $a_{21}=1$ и не могут быть равны нулю.

<u>Замечание 2</u>. Можно показать, что для более общей системы (2.2) справедлива:

<u>теорема 2.1'</u>. <u>Необходимое условие оптимальности особой экстремали с общим порядком сложности K и порядком особенности χ</u>.

Пусть $K(i)=const$. Для оптимальности многократной особой экстремали со сложной особенностью необходимо, чтобы в каждой точке особого участка за исключением, может быть, конечного числа угловых точек $\alpha(t)$ была положительная квадратичная форма

---

*/ В работе [3] путем громоздких рассуждений доказывается, что в простейшем случае ($j=1$, одно особое управление) α впервые появится в $\frac{d^s}{dt^s}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)$ при четном s. Однако в общем случае при $j\geq 2$ это не так, что видно из примера 2.2.

$$-(-1)^{\kappa}\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^{2\kappa}}{dt^{2\kappa}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\delta\xi_j\,\delta\xi_\nu-2(-1)^{\kappa}\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left[\frac{d^{\kappa}}{dt^{\kappa}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\delta u_\beta\,\delta\xi_j-\frac{\partial^2 H}{\partial u_\beta\partial u_\gamma}\delta u_\beta\,\delta u_\gamma\,, \quad (2.15)$$

$$\nu, j=1,\dots,\varkappa\,;\ \beta,\delta=1,\dots,m.$$

Из теоремы 2.2, как частный случай, следует необходимое условие оптимальности (если положить $\delta u=0$), полученное в [8] для однократного ($j,\nu=1$) особого режима, а именно*/:

$$a_{11}=-(-1)^{\kappa}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{d^{2\kappa}}{dt^{2\kappa}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_1}\right)\right]\geqslant 0.$$

На простом примере 2.3 покажем, что на особых экстремалях более сильными являются условие теоремы 2.I' (по сравнению с условием, полученным в [3]) и принцип максимума. В самом деле,

$x_0=\frac{1}{2}\int_0^1(x_1^2+4x_1u+u^2)dt$, $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=\alpha$, $x_i(t_j)=0$, $i,j=1,2$, $x_0(1)=min.$

$H=p_1x_2+p_2\alpha-\frac{1}{2}(x_1^2+4x_1u+u^2)$, $\dot{p}_1=x_1+4u$, $\dot{p}_2=-p_1$,

$H_u=-2x_1-u=0$, $H_{uu}=-1\leqslant 0$, $H_\alpha=p_2=0$, $H_\alpha^{(1)}=p_1=0$,

$H_\alpha^{(2)}=-x_1-4u=0$, $H_\alpha^{(3)}=-x_2-4\dot{u}=0$, $H_\alpha^{(4)}=-\alpha-4\ddot{u}=0$.

Отсюда следует, что особая экстремаль есть $x_1=x_2=u=\alpha=0$ Условие $a_{11}=1\geqslant 0$ [8] и принцип максимума $H_{uu}=-1\leqslant 0$ выполнены. Однако квадратичная форма (2.13) $\delta\xi^2+2\cdot 4\delta\xi\delta u+\delta u^2$ не положительна. Легко показать, что найденная особая экстремаль не сообщает минимум. Возьмем $x_1=-u$. Тогда $x_0=-\int_0^1 x_1^2dt$. Следовательно, в сколь угодно малой окрестности $x=0$ есть "лучшая" кривая и найденная особая экстремаль не дает даже слабого минимума.

В) Рассмотрим еще некоторые необходимые условия оптимальности особых экстремалей типа неравенств и равенств.

Замечание 3. Если в некоторой квадратичной форме $a_{ij}\eta_i\eta_j$ ($i,j=1,\dots,n$) коэффициент $a_{ii}=0$, то для положительности формы необходимо, чтобы соответствующие коэффициенты $a_{ij}=0$,($j=1,\dots,n$).

В самом деле полагаем все η_j , для которых $j\neq i$, $j\neq\kappa$, равными нулю. Получим форму $2a_{i\kappa}\eta_i\eta_\kappa+a_{\kappa\kappa}\eta_\kappa^2$ (по i,κ – не сумма). Но эта форма может быть положительной только в том случае, если $a_{i\kappa}=0$. Замечание 3 доказано.

---

*/ Знак нашего неравенства противоположен знаку в [8], так как мы максимизируем гамильтониан [illegible].

Согласно теореме I.I п. А имеем:

$$\delta\xi(t,x)=-H_{\alpha_j u_\beta}\delta\alpha_j\delta u_\beta-H_{u_\beta u_\gamma}\delta u_\beta\delta u_\gamma.$$

Из $\delta\xi\geqslant 0$ и замечания 3 следует, что для оптимальности особой экстремали необходимо, чтобы $H_{\alpha_j u_\beta}=0$, а квадратичная форма $H_{u_\beta u_\gamma}\delta u_\beta\delta u_\gamma$ была не отрицательна.

Запишем теперь 2-ю вариацию функционала на особой экстремали с учетом п. I, 2 теоремы I.I и уравнений (2.2) в вариациях:

$$2\Delta J=-\int_{t_1}^{t_2}(H_{x_ix_\kappa}\delta x_i\delta x_\kappa+2H_{x_iu_\beta}\delta x_i\delta u_\beta+2H_{x_i\alpha_j}\delta x_i\delta\alpha_j+ \quad (2.16)$$
$$+2H_{\alpha_ju_\beta}\delta\alpha_j\delta u_\beta+H_{u_\beta u_\gamma}\delta u_\beta\delta u_\gamma)dt,$$

$$\delta\dot{x}_i=f^i_{x_\kappa}\delta x_\kappa+f^i_{u_\beta}\delta u_\beta+f^i_{\alpha_j}\delta\alpha_j\,,\ i,\kappa=1,\dots,n; \quad (2.17)$$
$$\beta,\delta=1,\dots,m\,;\ j=1,\dots,\varkappa$$

Возьмем в окрестности некоторого момента $\tau\in(\tau_1,\tau_2)$ (где τ_1,τ_2 – участок особой экстремали) вариацию $\delta\alpha_j(t)$, изображенную на рис. 6.Iа, и вариацию $\delta u_\beta(t)$, изображенную на рис. 6.Iб. Пусть длина участка ε достаточно мала (рис. 6.I).

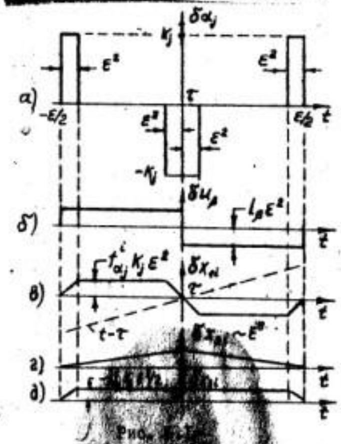

Рис.

Найдем изменение вариаций $\delta x_i(t)$ на участке ε , пренебрегая членами более высокого порядка малости относительно ε . Полагаем $\delta x_i(\tau-\varepsilon/2)=0$ Раскладывая коэффициенты в правой части (2.I7) в ряд по $(t-\tau)$, перепишем (2.I7) в виде $\delta\dot{x}_i=f^i_{x_\kappa}\delta x_\kappa+f^i_{u_\beta}\delta u_\beta+f^i_{\alpha_j}\delta\alpha_j+\dot{f}^i_{x_\kappa}(t-\tau)\delta x_\kappa+\dot{f}^i_{u_\beta}(t-\tau)\delta u_\beta+\dot{f}^i_{\alpha_j}(t-\tau)\delta\alpha_j$.

Найдем максимальное отклонение $\delta x_i(t)$ с учетом $\delta x_i(\tau-\varepsilon/2)=0$:

I) от $\delta\alpha_j$ $\delta x_{1i}=\int_{\tau-\frac{\varepsilon}{2}}^{\tau-\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon^2}f^i_{\alpha_j}K_jdt=f^i_{\alpha_j}K_j\varepsilon^2$ (рис. 6.Iв);

2) от δu_β [illegible] точке τ $\delta x_{2i}=\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau}(f^i_{x_\kappa}\delta x_\kappa+f^i_{u_\beta}\delta u_\beta)dt=$ [illegible] $=f^i_{x_\kappa}f^\kappa_{\alpha_j}K_j\varepsilon^3/2+f^i_{u_\beta}L_\beta\varepsilon^3/2.$ (рис.6.Iг);

3)От $\delta\alpha_j$, но более высокого порядка малости

$$\delta x_{3i} = \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau} \dot f^{i}_{\alpha_j}\cdot(t-\tau)\delta\alpha_j\,dt = \dot f^{i}_{\alpha_j}\cdot\tfrac{1}{2}(t-\tau)^2\Big|_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau-\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon^2}\cdot K_j = -\dot f^{i}_{\alpha_j}\frac{\varepsilon^5}{2}K_j \qquad \text{(фиг.6.1д)}$$

Полное изменение вариации δx_i с точностью до ε^5 будет
$\delta x_i = \delta x_{1i} + \delta x_{2i} + \delta x_{3i} = \delta x_{1i}(\varepsilon^3) + \Delta x_i(\varepsilon^5)$, где $\Delta x_i = \delta x_{2i}(\varepsilon^5) + \delta x_{3i}(\varepsilon^5)$.

Оценим отдельные члены (2.16). Прежде всего для положительности квадратичной формы под интегралом в (2.16) необходимо, чтобы $H_{\alpha_j u_\beta} = 0$, так как отсутствует член с $\delta\alpha_j^2$. Пусть это условие выполнено. Оценим остальные члены в (2.16) на $(\tau-\varepsilon/2,\ \tau+\varepsilon/2)$.

$$\left.\begin{aligned}
&\text{а)}\ \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} H_{x_i x_\kappa}\delta x_i\,\delta x_\kappa\,dt = H_{x_i x_\kappa} f^{i}_{\alpha_j} f^{\kappa}_{\alpha_\nu}\big|_\tau K_j K_\nu \varepsilon^5,\\
&\text{б)}\ \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2H_{x_i u_\beta}\delta x_i\,\delta u_\beta\,dt = 2H_{x_i u_\beta} f^{i}_{\alpha_j}\big|_\tau K_j L_\beta \varepsilon^5,\\
&\text{в)}\ \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} H_{u_\beta u_\gamma}\delta u_\beta\,\delta u_\gamma\,dt = H_{u_\beta u_\gamma}\big|_\tau L_\beta L_\gamma \varepsilon^5.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

Вычислим следующий наиболее сложный интеграл:

$$\text{г)}\ \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2H_{x_i\alpha_j}\underset{\text{подст.}\,\delta x_i}{\delta x_i}\,\delta\alpha_j\,dt = \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2\underset{\text{раск. в ряд по}\,(t-\tau)}{H_{x_i\alpha_j}}\,\delta x_{1i}\,\delta\alpha_j\,dt + \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2H_{x_i\alpha_j}\Delta x_i\,\delta\alpha_j\,dt =$$

$$= \underbrace{\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2H_{x_i\alpha_j}\delta x_{1i}\,\delta\alpha_j\,dt}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2\dot H_{x_i\alpha_j}(t-\tau)\delta x_{1i}\,\delta\alpha_j\,dt}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2H_{x_i\alpha_j}\Delta x_i\,\delta\alpha_j\,dt}_{\mathrm{III}}.$$

Вычислим каждый из полученных интегралов. $\mathrm{I}=0$ как интеграл от произведения четной $\delta\alpha_j(t)$ и нечетной функции $\delta x_{1i}(t)$ по симметричному промежутку

$$\mathrm{II} = \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2\dot H_{x_i\alpha_j}\big|_\tau\cdot(t-\tau)\delta x_{1i}\,\delta\alpha_j\,dt = 2\dot H_{x_i\alpha_j}\big|_\tau\Big(2\int_{\tau}^{\tau+\varepsilon/2}(t-\tau)\delta x_{1i}\,\delta\alpha_j\,dt\Big) =$$

$$= 2\dot H_{x_i\alpha_j}\big|_\tau\cdot 2\Big[\int_\tau^{\tau+\varepsilon^2}(t-\tau)\underbrace{\big(-\tfrac{1}{2}f^{i}_{\alpha_j}K_j\varepsilon^2\big)}_{\delta x_{2i}}\underbrace{(-K_j)}_{\delta\alpha_j}dt + \int_{\tau+\varepsilon/2-\varepsilon^2}^{\tau+\varepsilon/2}(t-\tau)\big(-\tfrac{1}{2}f^{i}_{\alpha_\kappa}K_\kappa\varepsilon^2\big)(K_j)\,dt\Big] =$$

$$= 2\dot H_{x_i\alpha_j}\big|_\tau\cdot 2\big(-\tfrac{1}{4}f^{i}_{\alpha_\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5\big) = -\dot H_{x_i\alpha_j} f^{i}_{\alpha_\kappa}\big|_\tau K_\kappa K_j\varepsilon^5.$$

$$\mathrm{III} = \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2H_{x_i\alpha_j}\Delta x_i\,\delta\alpha_j\,dt = 2H_{x_i\alpha_j}\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2}(\delta x_{2i}+\delta x_{3i})\,\delta\alpha_j\,dt =$$

$$= 2H_{x_i\alpha_j}\Big(\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2}\underbrace{\delta x_{2i}\,\delta\alpha_j}_{\text{чётная}}dt + \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2}\delta x_{3i}\,\delta\alpha_j\,dt\Big) =$$

$$= 4H_{x_i\alpha_j}\int_\tau^{\tau+\varepsilon^2}\delta x_{2i}\,\delta\alpha_j\,dt + 2H_{x_i\alpha_j}\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2}\delta x_{3i}\,\delta\alpha_j\,dt$$

Вычислим каждый из этих интегралов

$$\int_\tau^{\tau+\varepsilon^2}\delta x_{2i}\,\delta\alpha_j\,dt = \int_\tau^{\tau+\varepsilon^2}\Big(f^{i}_{x_p}f^{p}_{\alpha_\kappa}K_\kappa\frac{\varepsilon^3}{2} + f^{i}_{u_\beta}L_\beta\frac{\varepsilon^3}{2}\Big)(-K_j)\,dt = -f^{i}_{x_p}f^{p}_{\alpha_\kappa}\big|_\tau K_\kappa K_j\frac{\varepsilon^5}{2} - f^{i}_{u_\beta}\big|_\tau L_\beta K_j\frac{\varepsilon^5}{2}.$$

$$\int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2}\delta x_{3i}\,\delta\alpha_j\,dt = \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau-\varepsilon/2+\varepsilon^2}\big(-\dot f^{i}_{\alpha_\kappa}\tfrac{\varepsilon^3}{2}K_\kappa\big)K_j\,dt + \int_{\tau-\varepsilon^2}^{\tau+\varepsilon^2}\big(-\dot f^{i}_{\alpha_\kappa}\tfrac{\varepsilon^3}{2}K_\kappa\big)(-K_j)\,2\,dt +$$

$$+\int_{\tau+\varepsilon/2-\varepsilon^2}^{\tau+\varepsilon/2}\big(-\dot f^{i}_{\alpha_\kappa}\tfrac{\varepsilon^3}{2}K_\kappa\big)K_j\,dt = -\tfrac{1}{4}\dot f^{i}_{\alpha_\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5 + \dot f^{i}_{\alpha_\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5 - \tfrac{1}{4}\dot f^{i}_{\alpha_\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5 = \tfrac{1}{2}\dot f^{i}_{\alpha_\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5.$$

Подставляя их в III, получим

$$\mathrm{III} = \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2H_{x_i\alpha_j}\Delta x_i\,\delta\alpha_j\,dt = -2H_{x_i\alpha_j}f^{i}_{x_p}f^{p}_{\alpha_\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5 - 2H_{x_i\alpha_j}f^{i}_{u_\beta}L_\beta K_j\varepsilon^5 + H_{x_i\alpha_j}\dot f^{i}_{\alpha_\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5$$

Итак, интеграл г) равен

$$\text{г)}\ \int_{\tau-\varepsilon/2}^{\tau+\varepsilon/2} 2H_{x_i\alpha_j}\delta x_i\,\delta\alpha_j\,dt = -\dot H_{x_i\alpha_j}f^{i}_{\alpha_\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5 - 2H_{x_i\alpha_j}f^{i}_{x_p}f^{p}_{\alpha_\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5 -$$

$$-2H_{x_i\alpha_j}f^{i}_{u_\beta}L_\beta K_j\varepsilon^5 + H_{x_i\alpha_j}\dot f^{i}_{\alpha_\kappa}K_\kappa K_j\varepsilon^5.$$

Подставляя найденные интегралы а), б), в), г) в (2.16), получим квадратичную форму

$$\begin{aligned}
&d^2J = (a_{j\nu}K_\nu K_j + 2b_{i\beta}K_i L_\beta - H_{u_\beta u_\gamma}L_\beta L_\gamma)\varepsilon^5\\
&\qquad \nu, j = 1,\dots,\varkappa;\quad \beta,\gamma = 1,\dots,m,\\
&a_{j\nu}K_\nu K_j + 2b_{i\beta}K_i L_\beta - H_{u_\beta u_\gamma}L_\beta L_\gamma,
\end{aligned} \qquad (2.19)$$

где

$$a_{ij} = -H_{x_i x_p}f^{i}_{\alpha_j}f^{p}_{\alpha_\nu} + 2H_{x_i x_j}f^{i}_{x_p}f^{p}_{\alpha_\nu} + \dot H_{x_i\alpha_j}f^{i}_{\alpha_\nu} - H_{x_i\alpha_j}\dot f^{i}_{\alpha_\nu},$$

$$b_{j\beta} = H_{x_i\alpha_j}f^{i}_{u_\beta} - H_{x_i u_\beta}f^{i}_{\alpha_j}, \quad i, p = 1, 2, \dots, n.$$

Отсюда в силу $d^2J \geq 0$ и произвольности K, L следует

<u>теорема 2.3</u>. Пусть $K(i) = const$. Для оптимальности особой экстремали необходимо, чтобы почти всюду была положительна квадратичная форма (2.19).

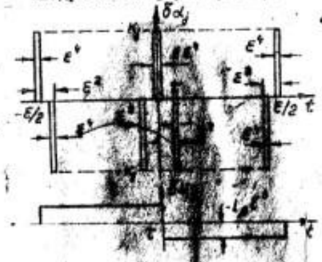

Рис. 6.2

Если $a_{jj} = 0$, то по замечанию 3 все $a_{j\nu} = b_{j\beta} = 0$. В этом случае можно применить вариации более сложной структуры (рис. 6.2) и т.д. Пусть все $H_{x_i\alpha_j} \equiv 0$. Это будет, если, например, система (2.2) имеет вид

$$\dot x_i = \gamma_i(t,x,u) + \alpha_j\varphi_{ij}(t,u), \quad i = 0,1,\dots,n;\ j = 1,\dots,\lambda \leq n. \qquad (2.20)$$

138-139

Тогда, повторяя все рассуждения, нетрудно показать, что в общем случае особой экстремали κ-го порядка сложности ($\kappa = const$) коэффициенты $a_{j\nu}$, $b_{j\beta}$ в (2.I9) имеют вид:

$$a_{j\nu} = -H_{x_i x_p} \underbrace{f^i_{x_\tau} f^\tau_{x_a} \ldots f^b_{x_m} f^m_{x_c} f^c_{x_d}}_{\kappa} \ldots f^e_{x_e} f^e_{\alpha_\nu}; \quad b_{j\beta} = -H_{x_i u_\beta} f^i_{x_b} f^\tau_{x_a} \ldots f^b_{x_m} f^m_{\alpha_j},$$

по $i, p, \tau, a, b, m, c, d, e\ b = 1, \ldots, n$ – сумма $j, \nu = 1, \ldots, \chi$, $\beta = 1, \ldots, m$.

Если K нам известно, то последовательно вычисляем $a_{j\nu}$ при $\kappa = 0, 1, 2 \ldots$, пока не получим $a_{jj} \neq 0$.

Квадратичная форма (2.I9) более удобна для пользования, чем (2.I5), ибо она сразу дает выражение коэффициентов формы через параметры системы.

г) Теорема 2.4. Необходимые условия оптимальности особой экстремали типа равенств. Пусть $K(i) = const$. Для оптимальности особой экстремали необходимо выполнение равенств*/:

$$\frac{\partial}{\partial u_\beta}\left[\frac{d^\gamma}{dt^\gamma}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right] = 0; \quad \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left[\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right] = 0; \quad \frac{d^\tau}{dt^\tau}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left[\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right]\right\} = 0, \quad (2.21)$$

$$\gamma = 0, 1, \ldots, \kappa-1; \; m = 0, 1, \ldots, 2\kappa-1; \; \nu, j = 1, \ldots, \chi; \; \beta = 1, \ldots, m; \; \tau = 1, \ldots, \theta(\nu, j) - 1.$$

Здесь последние выражения дифференцируются до появления в них α. Считается, что это произойдет при $\theta(\nu, j)$ – дифференцировании.

Доказательство. Так как по предположению все $\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left[\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right] = 0$, когда $m < 2\kappa$, то из замечания 3, теоремы 2.3 и (2.I5) следует I-я группа равенств (2.21). Вторая группа очевидна, если вспомнить, что на особой экстремали $H_{\alpha_j} = 0$.

Докажем теперь 3-ю группу равенств. Варьируя функционал, как мы это делали при доказательстве теоремы 2.2, получим (2.9). Рассмотрим два случая:

а) Число m – четное, $m = 2\tau < 2\kappa$. Тогда можно записать (2.I4), в котором $\kappa = \tau$. Но ввиду отсутствия в этой форме членов с $\delta \xi_j^2$ получается, что для $\Delta J \geq 0$ необходимо, чтобы

$$a_{j\nu} = \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left[\frac{d^{2\tau}}{dt^{2\tau}}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right] = 0.$$

---

*/ Принято, что $\frac{d^0}{dt^0}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial H}{\partial \alpha}$.

б) Число m – нечетное, $m = 2\tau - 1 < 2\kappa$. В этом случае интегрируем (2.I3) по частям $\tau - 1$ раз и выражение под интегралом в (2.I4) примет вид:

$$(-1)^\tau \frac{\partial}{\partial \alpha_\nu}\left[\frac{d^{2\tau-1}}{dt^{2\tau-1}}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right)\right] \delta\xi_j \delta\dot\xi_\nu = (-1)^\tau a_{j\nu} \delta\xi_j \delta\dot\xi_\nu, \quad j, \nu = 1, \ldots, \chi, \quad (2.22)$$

где $\delta\xi_\nu = \delta\dot\xi_\nu$, $a_{ii} = 0$. Пусть все $\delta\xi_j = 0$, кроме $\delta\xi_1, \delta\xi_2$. Тогда (2.22) запишется: $a_{12}\,\delta\xi_1\delta\dot\xi_2 + a_{21}\,\delta\xi_2\delta\dot\xi_1$. Полагая $\delta\dot\xi_2 = \delta\dot\xi_2 = 0$, т.е. $\delta\xi_2 = K_2$ – постоянной, будем иметь $a_{21}\,\delta\dot\xi_1 K_2$ и для $\Delta J \geq 0$ необходимо, чтобы $a_{21} = 0$. Аналогично можно показать, что все остальные $a_{j\nu} = 0$. Четвертая группа равенств очевидна, ибо это есть 3-я группа, дифференцируемая на особой экстремали по t до появления в ней α. Теорема доказана.

Заметим, что все выражения (2.2I) не содержат α. Для первых двух групп это следует из третьей группы, ибо третья группа представляет собой коэффициенты при α в выражениях первых двух групп, а четвертая группа – в силу своего построения. Покажем, что равенства I-й и 4-й групп (2.2I) существенны.

Пример 2.4. Найти минимум в задаче

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}u^2 + u\alpha\right)dt, \quad \dot x = \alpha, \quad |\alpha| \leq N, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Решение:

$$H = p\alpha - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}u^2 - u\alpha, \quad \dot p = x, \quad H_u = -u - \alpha = 0, \quad H_{uu} = -1 < 0,$$

$$H_\alpha = p - u = 0, \quad \dot H_\alpha = x - \dot u = 0, \quad \ddot H_\alpha = \alpha - \ddot u = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha}\ddot H_\alpha = 1 > 0$$

Этим уравнениям удовлетворяет экстремаль $x = u = \alpha = p = 0$, на которой все необходимые условия выполнены и $I = 0$. Однако $H_{\alpha u} = -1$ и необходимое условие (2.2I): $H_{\alpha u} = 0$ не выполнено. И, действительно, если интервал интегрирования разделить на $2n$ частей и полагать

$$\alpha = \begin{cases} N, & \text{когда участок четный,} \\ -N, & \text{когда участок нечетный,} \end{cases}$$

а $u = -\alpha$, то

$$\lim I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}N^2 - N^2\right)dt = -\frac{1}{2}N^2$$

и с ростом N $\inf I \to -\infty$.

Обозначим независимые относительно x и p равенства (2.2I) через

$$M_\delta = 0 \quad (\delta = 1, 2, \ldots, \tau \leq 2n). \quad (2.23)$$

Теорема 2.5. О порядке вырождения особой экстремали. Если матрица $\|\partial M_\delta / \partial z_\gamma\|$, $z = \{x, p\}$ имеет ранг $\tau \leq 2n$, то на особой экстремали справедливы τ равенств (2.23) и порядок вариационной задачи понижается не менее, чем на τ единиц.

Доказательство. Так как якобиан системы $M_\delta = 0$ относительно переменных x, p имеет ранг τ, то τ функций $x(t), p(t)$ могут быть найдены без интеграций, а τ соответствующих дифференциальных уравнений вариационной задачи могут быть на особой экстремали отброшены. Теорема доказана.

Если же $\tau > 2n$, то система переопределена и данная особая экстремаль невозможна.

Пример 2.5:

$$I = \int_0^T \tfrac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 + \alpha_1(x_1 + x_2 + 1)^2\right] dt, \quad \dot{x}_1 = \alpha_1, \ \dot{x}_2 = \alpha_2, \ |\alpha_1| \leq 1, \ |\alpha_2| \leq 1,$$

$$x_1(0) = x_2(0) = x_1(T) = x_2(T) = 0; \quad T > 0.$$

Решение

$$H = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 - \tfrac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 + \alpha_1(x_1 + x_2 + 1)^2\right],$$

$$\dot{p}_1 = x_1 + \alpha_1(x_1 + x_2 + 1), \quad \dot{p}_2 = x_2 + \alpha_1(x_1 + x_2 + 1),$$

$$H_{\alpha_2} = p_2 = 0, \quad \dot{H}_{\alpha_2} = x_2 + \alpha_1(x_1 + x_2 + 1) = 0,$$

$$H_{\alpha_1} = p_1 - \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2 + 1)^2 = 0, \ \dot{H}_{\alpha_1} = x_1 - \alpha_2(x_1 + x_2 + 1) = 0$$

Согласно (2.21) имеем систему $x_1 + x_2 + 1 = 0, \ x_2 = 0, \ x_1 = 0$. Эта система несовместна. Поэтому двухкратная особая экстремаль здесь невозможна.

Д) Рассмотрим условия входа на особую экстремаль. Пусть система имеет вид (2.2'), $j = 1$ и t_4 – момент входа. Установим знак H_α в момент $t_3 < t_4$. Предположим, что разность $t_4 - t_3 = -\varepsilon$ мала. Разложим $M = H_\alpha$ в ряд Тейлора по ($t_3 - t_4$):

$$M(t_3) = \bar{M}(t_3) + \frac{dM}{dt}\bigg|_{t_3}(t_3 - t_4) + \frac{d^2M}{dt^2}\bigg|_{t_3}\frac{(t_3 - t_4)^2}{2!} + \ldots + \frac{d^nM}{dt^n}\bigg|_{t_3}\frac{(t_3 - t_4)^n}{n!} \tag{2.24}$$

Пусть впервые α появилось в (2.24) при $n = 2k$. Меняя местами t_3, t_4, получим

$$M(t_3) \approx (-1)^{2k}\frac{d^{2k}M}{dt^{2k}}\bigg|_{t_3}\frac{(t_4 - t_3)^{2k}}{2k!} \quad (k \geq 1), \tag{2.25}$$

где

$$\frac{d^{2k}M}{dt^{2k}}\bigg|_{t_3} = \frac{d^{2k}H_{\alpha_j}}{dt^{2k}}\bigg|_{t_3} = \left[a(t, x, p) + \alpha\, b(t, x, p)\right]\Big|_{t_3} \tag{2.26}$$

Из п. 2 теоремы 1.1 (или $\sup H$) вытекает: для входа необходимо, чтобы $\alpha = \alpha_{max}$ при $H_\alpha > 0$ и $\alpha = \alpha_{min}$ при $H_\alpha < 0$. Так как $\alpha_{min} < \alpha < \alpha_{max}$, то

$$[a + \alpha_{max} \cdot b]_{t_3} > 0, \quad [a + \alpha_{min} b]_{t_3} < 0,$$

откуда

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right]_{t_4} > 0, \quad k \geq 1 \tag{2.27}$$

Сравнивая с необходимым условием оптимальности (2.3), которое для $j = 1$ принимает вид

$$-(-1)^k \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right] \geq 0, \tag{2.28}$$

замечаем, что эти два условия могут быть совместны только когда k – нечетные. Если же k – четные, то (2.27), (2.28) противоречат друг другу и вход (и сход) с непрерывным $p(t)$ или с определенным $\bar{u}(t)$ невозможен.

Определение 2.8. Вход (и сход), когда значения $u(t)$ слева при входе (и справа при сходе) определены и непрерывны, назовем регулярным входом (сходом) с особой экстремали.

Мы рассмотрели систему (2.2') и случай одного особого управления. Однако очевидно, что для более общего случая системы (2.2), если только вход не происходит одновременно по нескольким особым управлениям, приведенное ранее утверждение будет справедливо. В самом деле, фиксируя все $u(t)$, $\alpha(t)$, кроме $\alpha_j(t)$, мы выполним условия п. Д и, следовательно, будут справедливы (2.27), а также вывод, что регулярный вход с непрерывным $p(t)$ возможен только при нечетном k.

Теорема 2.6. Условие регулярного входа на особую экстремаль. Пусть $k(t)$ нечетное. Регулярный вход в особый режим оптимален только в том случае, если в момент входа ($t_3 - 0$) выполнены равенства (2.21). При этом все $p_i(t)$ остаются непрерывными.

Доказательство. Так как по условию задачи $x(t)$ непрерывны то из угловых условий (1.5) следует, что для оптимальности особой экстремали в районе угловой точки необходимо, чтобы $p^- = p^+$, $H^- = H^+$. Поскольку на оптимальной особой экстремали справедливы тождества (2.21), то в силу непрерывности $t, x(t), p(t)$ получаем, что выражения (2.21) равны нулю и при $t_3 - 0$. Теорема доказана.

Сход с особого режима произойдет, если найдется такое сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, что при $t = t_4 + \varepsilon$ (t_4 – момент схода) будут выполнены неравенства: $H_\alpha > 0$, когда $\alpha = \alpha_{особ}$, и $H_\alpha < 0$, когда $\alpha < \alpha_{особ}$. В этом случае по условию $\sup H$ траектория не будет снова отброшена на особый режим. Случай, когда в окрестности особой экстремали действительно строгое неравенство $H_\alpha \leq 0$, будем называть гарантированным сходом.

Теорема 2.7. Условие регулярного схода. Пусть $j = 1$, k – нечетное, а особая экстремаль в точке схода $t_v \in (t_1, t_2)$ непрерывна и дифференцируема $2k$ раз. Для гарантированного схода с особой экстремали при $t = t_v$ необходимо и достаточно, чтобы в точ-

142-143

на t_1
$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right]\Bigg|_{t_1}>0 \qquad (2.28')$$

Доказательство. Необходимость. Пусть сход возможен. Тогда существует такое сколь угодно малое $\varepsilon>0$, что в момент $t_1+\varepsilon$ при $\alpha>\alpha_{особ}$ $H_\alpha>0$ и при $\alpha<\alpha_{особ}$ $H_\alpha<0$. При $t=t_1$ подставим в H_α величины x, u, p как функции t и исследуем приращение H_α в момент $t=t_1+\varepsilon$ при отклонении α от $\alpha_{особ}$. Разложим H_α в ряд Тейлора (2.24). Так как по условию α содержит только члены ряда начиная с $n=2k$, то приращение $H_\alpha=M$ при отклонении α от $\alpha_{особ}$ зависит целиком от члена $\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)$ в (2.24). Но α в силу (2.2) в этот член может войти только линейно. Поскольку $H_\alpha>0$ при $\alpha>\alpha_{особ}$ и $H_\alpha<0$ при $\alpha<\alpha_{особ}$ и экстремаль дифференцируема $2k$ раз, то должно быть (2.28').

Достаточность. Пусть (2.28') действительно. Так как α входит в $G=\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)$ линейно и $G(\alpha_{особ})=0$, то при $\alpha>\alpha_{особ}$ $G>0$, а при $\alpha<\alpha_{особ}$ $G<0$. Следовательно, можно найти такое достаточно малое ε, при котором $H_\alpha=\int_{t_1}^{t}\dots\int_0^t G\,dt^{2k}$ будет больше 0 при $\alpha>\alpha_{особ}$ и меньше 0 при $\alpha<\alpha_{особ}$, ибо $G>0$ в первом случае и $G<0$ – во втором. Таким образом, возможность схода обеспечена. Теорема доказана.

Е) Рассмотрим условия входа на особую экстремаль с порядком особенности два, когда система (2.2') имеет вид
$$I=\int_{t_1}^{t_2}[f_0(x)+C_0u]\,dt,\ \dot{x}_1=f_1(x)+C_1u,\ \dot{x}_2=f_2(x)+C_2u,\ |u|\le 1. \qquad (2.29)$$

Определение 2.9. Назовем вход на особую экстремаль осциллирующим входом, если при приближении к особой экстремали число переключений неограниченно возрастает*/.

Пример: вход на экстремаль $x=0$ с управлением $u=\operatorname{sign}\sin\frac{1}{x}$ при $x\to 0$ будет осциллирующим.

Теорема 2.8. Пусть система с одним управлением ($r=1$) описывается уравнениями (2.29) и содержит оптимальную особую экстремаль с порядком сложности два.

Тогда в достаточно малой окрестности особой экстремали оптимальный вход на эту экстремаль будет осциллирующим (рис. 6.8) и линией переключения станет кривая вида
$$x_1+K_1x_2+K_2x_2|x_2|=0, \qquad (2.30)$$
K_1, K_2 – постоянные

Рис. 6.8

Доказательство. Примем момент входа t за нуль отсчета. В достаточно малой окрестности особой экстремали можно в первом приближении записать:
$$\delta I=\frac{1}{2}\int_0^t(\bar{a}_{ij}\,\delta x_i\,\delta x_j+C_0u)\,dt,\ \delta x_1(0)=\delta x_2(0)=0,\ |u|\le 1,$$
$$\delta\dot{x}_1=\bar{b}_{11}\delta x_1+\bar{b}_{12}\delta x_2+C_1u,$$
$$\delta\dot{x}_2=\bar{b}_{21}\delta x_1+\bar{b}_{22}\delta x_2+C_2u, \qquad (2.31)$$
где $\bar{a}, \bar{b}$ – функции t, δx_i – отклонение x_i от особой экстремали. Разложим коэффициенты $\bar{a}, \bar{b}$ в ряд Тейлора, по степеням $\varepsilon(t,0)$ и ограничимся только первым членом этого ряда. Тогда $\bar{a}, \bar{b}$ в достаточно малой окрестности момента входа с точностью до величин более высокого порядка малости можно считать постоянными.

Введем в (2.31) новые переменные путем неособого преобразования:
$$\delta y_0=\delta I-(C_0/C_1)\,\delta x_1,\quad \delta y_1=\delta x_1-(C_1/C_2)\,\delta x_2. \qquad (2.32)$$
Тогда управление будет входить только в последнее уравнение (2.31):
$$\delta y_0=\frac{1}{2}\int_0^t(\bar{a}_{11}\,\delta y_1^2+2a_{12}\,\delta y_1\,\delta x_2+a_{22}\,\delta x_2^2)\,dt,$$
$$\delta\dot{y}_1=b_{11}\,\delta y_1+b_{12}\,\delta x_2,\quad \delta\dot{x}_2=b_{21}\,\delta y_1+b_{22}\,\delta x_2+C_2u \qquad (2.33)$$

У особой экстремали с порядком сложности два $a_{22}=0$. Вводя в (2.33) новую переменную
$$\delta z_0=\delta y_0+(2a_{12}/b_{12})\,\delta y_1^2, \qquad (2.34)$$
придем к системе:
$$\delta z_0=\frac{1}{2}\int_0^t a_{11}\,\delta y_1^2\,dt,\quad \delta\dot{y}_1=b_{11}\,\delta y_1+b_{12}\,\delta x_2,$$
$$\delta\dot{x}_2=b_{21}\,\delta y_1+b_{22}\,\delta x_2+C_2u. \qquad (2.35)$$
Причем из (2.32), (2.34) следует, что минимум в новой системе будет соответствовать минимуму в старой системе и вследствие оптимальности особой экстремали $a_{11}>0$.

Так как $\delta I(0)=\delta x_1(0)=\delta x_2(0)=0$, то $\delta z_0(0)=\delta y_1(0)=\delta x_2(0)=0$ и на достаточно малом участке $\theta(t,0)$ величина δy_1, как видно

---
*/ В результате значение $u^-(t)$ слева при входе становится неопределенным.

144-145

из (2.85), будет более высокого порядка малости относительно ε, чем δx_2. Аналогично δx_2 – величина более высокого порядка малости по сравнению с u. Поэтому, пренебрегая членом $b_{11}\delta y_1$ во 2-м уравнении и членами $b_{21}\delta y_1 + b_{22}\delta x_2$ в 3-м уравнении (2.85), будем иметь

$$\delta z_0 = \frac{1}{2}a_{11}\int_{t_1}^{t_2}\delta y_1^2\,dt\,,\quad \delta\dot{y}_1 = b_{12}\,\delta x_2\,,\quad \delta\dot{x}_2 = c_2 u. \tag{2.86}$$

Обозначая $\delta y_2 = b_{12}\,\delta x_2,\ a = b_{12}/c_2$, получим окончательно:

$$\delta z_0 = \frac{1}{2}a_{11}\int_{t_1}^{t_2}\delta y_1^2\,dt\,,\quad \delta\dot{y}_1 = \delta y_2\,,\quad \delta\dot{y}_2 = \frac{1}{a}u\,,\quad a_{11}>0,\ |u|\leq 1. \tag{2.87}$$

Система (2.87) рассматривалась в [4] (безотносительно к особым экстремалям и входу на них). Там показано, что при движении из любого начального положения к граничным условиям $\delta y_1(0) = \delta y_2(0) = 0$ оптимальное управление является осциллирующим и линия переключения имеет вид: $\delta y_1 + ha\,\delta y_2|\delta y_2| = 0$, где $h \approx 0{,}4446$. Возвращаясь к старым переменным, получим (2.80). Теорема доказана.

Аналогичная теорема действительна при сходе. Заметим, что в регулярном случае момент схода подбирается так, чтобы удовлетворить заданным граничным условиям на правом конце.

I) Для вычисления особого управления α мы имеем уравнения, содержащие α,

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial \alpha_j}\right) = 0\,,\quad C_{j\nu 0} = \frac{d^0}{dt^0}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\right\} = 0 \tag{2.88}$$
$$j,\nu = 1,\dots,\varkappa\ ;\ m = 0,1,\dots,2k-1.$$

Число этих уравнений равно $\varkappa(\varkappa+1)2k$. Число независимых из них может оказаться больше $\varkappa$. Тогда данная особая экстремаль невозможна.

<u>Теорема 2.9</u>. <u>О вычислении особого управления</u>. Пусть $k(j) = const$, определитель первой группы уравнений (2.38

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\right| \neq 0 \quad (j,\nu = 1,\dots,\varkappa)\ \text{на}\ \tau_1\tau_2 \neq 0, \tag{2.89}$$

$C_{j\nu 0} = 0$ есть либо тождество, либо следствие уравнений

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right) = 0 \quad (j = 1,\dots,\varkappa). \tag{2.40}$$

Тогда из системы (2.40) можно найти особое управление, и если $\alpha_{min} < \alpha < \alpha_{max}$, то данная особая экстремаль при некоторых граничных условиях существует.

<u>Доказательство</u>. Поскольку определитель (2.39) системы (2.40) относительно переменных α_j не равен нулю, то эти переменные могут быть найдены из (2.40). Если они удовлетворяют ограничениям и длина отрезка $\tau_1\tau_2 \neq 0$, то утверждение теоремы очевидно. Теорема доказана.

Отметим, что для системы уравнений (2.20), как нетрудно убедиться непосредственной проверкой,

$$C_{j\nu 0} = \frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right] \equiv 0,$$

а потому у многократной экстремали с простой особенностью в этом случае нет "лишних" уравнений.

Отметим также, что, как показано в §6, скользящие режимы являются частным случаем особых экстремалей, а потому все результаты по особым экстремалям автоматически распространяются и на скользящий режим.

<u>Пример 2.6</u>. (На двукратный особый режим). Найти минимум в задаче

$$I = \int_0^T \frac{2}{3}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)\,dt\,,\ \dot{x}_1 = u_1 + 2u_2,\ \dot{x}_2 = u_1 - u_2,\ |u_1|\leq 1, |u_2|\leq 1, \tag{2.41}$$

$$x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20},\ x_1(T) = x_{1k},\ x_2(T) = x_{2k}. \tag{2.42}$$

Предполагается, что $x_{10}, x_{20}, x_{1k}, x_{2k}$ достаточно близки к 0, а T достаточно велико.

В соответствии с данным параграфом имеем:

$$H = -\frac{2}{3}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + p_1(u_1 + 2u_2) + p_2(u_1 - u_2), \tag{2.43}$$

$$\dot{p}_1 = \frac{2}{3}(2x_1 + x_2)\,,\quad \dot{p}_2 = \frac{2}{3}(x_1 + 2x_2), \tag{2.44}$$

$$H_{u_1} = p_1 + p_2 = 0\,,\quad H_{u_2} = 2p_1 - p_2 = 0, \tag{2.45}$$

$$\dot{H}_{u_1} = x_1 + x_2 = 0,\quad \dot{H}_{u_2} = 3x_1 - x_2 = 0, \tag{2.46}$$

$$\ddot{H}_{u_1} = 2u_1 + u_2 = 0,\quad \ddot{H}_{u_2} = 2u_1 + 7u_2 = 0. \tag{2.47}$$

Отсюда следует, что возможны две особы. экстремали с простой особенностью: $x_2 = -x_1$ и $x_2 = 3x_1$ и одна с двукратной: $x_1 = x_2 = 0$. В последнем случае $u_1 = u_2 = 0$. Нетрудно проверить, что необходимое условие оптимальности (2.3) выполнено. В самом деле, проверяя квадратичную форму (2.3) при помощи критерия Сильвестра из (2.47) на двукратной особой экстремали, получаем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 12 > 0\ ,\ 2 > 0\ ,\ 7 > 0$$

А это говорит о положительности квадратичной формы.

<u>Теорема 2.4</u>. также выполнена. Входящие в нее выражения (2.46), (2.47) равны нулю, а остальные обратились в тождества. Легко проверить, что выполняются и все остальные условия, изло-

ичные в §2. В частности, равенства (2.46) представляют собой условия входа в особую экстремаль.

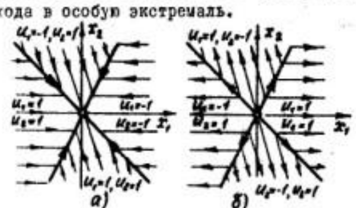

Рис. 6.4

Синтез при входе показан на рис. 6.4а, а при сходе – на рис. 6.4б. Движение в общем случае идет вначале по границе обоих управлений, затем по особой экстремали с порядком особенности единица (одно управление граничное), а затем (в начале координат) по экстремали с порядком особенности два. Оптимальное значение обоих управлений при этом лежит внутри области изменения. При сходе – картина обратная (рис. 6.4б).

§3. Метод преобразований в особых экстремалях

В этом параграфе излагается второй метод анализа особых экстремалей в задачах оптимального управления – метод преобразований, или метод замены переменных. Применение этого метода ограничено из-за необходимости находить первые интегралы системы уравнений в частных производных. Однако в тех случаях, когда он применим, он часто позволяет получить более полную информацию о специальных экстремалях.

В данном параграфе методом преобразований доказывается, что при сравнении (при прочих равных условиях) минималей с одинаковыми порядками особенности абсолютная минималь находится среди минималей, имеющих наивысший порядок особенности (теорема 3.2), а в случае $r=1$ и одинакового порядка особенности – среди минималей, имеющих наивысший порядок сложности (теорема 3.3). Кроме того, рассмотрены условия входа, движения и схода особой экстремали в преобразованной задаче.

А) Постановка задачи. Метод решения. Пусть на отрезке $[t_1,t_2]$ задана система уравнений (2.2). Выражения φ_{ij} можно рассматривать как проекции вектора $\vec{\varphi}_j$ на координатные оси x_i. Идея метода состоит в таком преобразовании системы координат,

чтобы s векторов $\vec{\varphi}_j$ были параллельны s новым базисным векторам (предполагается, что вектора $\vec{\varphi}_j$ линейнонезависимы и $s \leq n$). Тогда, очевидно, $\vec{\varphi}_j$ спроектируются только на эти s базисных векторов и система (2.2) примет вид:

$$\dot{z}_i = f_i(t,z,u)\ ,\ i=0,1,\dots,\nu\ ;\ \nu = n-s, \tag{3.I}$$

$$\dot{z}_{\nu+j} = f_{\nu+j}(t,z,u) + q_j(t,z,u)\alpha_j;\ j=1,\dots,s \text{ по } j \text{ – не сумма.}$$

Если теперь поставить вариационную задачу для системы (3.2), то, составляя гамильтониан H, получим

$$H = H^0 + \sum_{j=1}^{s} H^j_{\alpha_j},\ \text{где } H^0 = p_i f_i,\ H^j = p_{\nu+j} q_j \quad (\text{по } j \text{ – не сумма}) \tag{3.2}$$

Исследуем зависимость $\sup H$. Когда $p_{\nu+j} \neq 0,\ q_j \neq 0$, управление α_j равно одному из своих граничных значений. Если же оптимальное α_j лежит в открытой области, то частная производная по α_j на особой экстремали $H_{\alpha_j} = p_{\nu+j} q_j = 0$ (по j – не сумма). Отсюда следует, что либо $p_{\nu+j} \equiv 0$, либо $q_j = 0$. Когда $q_j \equiv 0$, между t, z, u имеется некоторая дополнительная зависимость и система инвариантна относительно α_j. Этот случай мы рассматривать не будем.

Случай, когда $p_{\nu+j} \equiv 0$, $q_j \equiv 0$, равносилен условию, что соответствующее уравнение с номером $\nu+j$ в (2.2) отсутствует, а вместе с ним исчезнет и особое управление α_j. В оставшейся системе $z_{\nu+j}$ становится управлением.

Пусть $\varkappa$ – число особых управлений, оптимальные значения которых лежат в открытой области. Если матрица

$$\left\| \frac{\partial^2 H}{\partial z_{\nu+j}\, \partial z_{\nu+\gamma}} \right\| \quad (j,\gamma = 1,\dots,\varkappa) \tag{3.3}$$

имеет ранг $\varkappa$, то как нетрудно проверить, особая экстремаль имеет простую особенность.

Особые экстремали, у которых определитель $\left\| \frac{\partial^2 H}{\partial z_{\nu+j}\, \partial z_{\nu+\gamma}} \right\| = 0,\ j,\gamma = 1,\dots,\varkappa$, соответствуют экстремалям со сложной особенностью.

Систему первых ν уравнений (3.I), если она содержит линейные управления, можно подвергнуть аналогичному преобразованию. Повторяя это действие, мы убедимся, что либо система вообще не имеет особых решений[ж/], либо придем к системе типа (3.I),

ж/ Последнее оставшееся уравнение содержит особое управление. Это будет, например, если уравнения (2.2) линейны.

в которой на участке особого режима соответствующие уравнения с α_j отбрасываются и оставшаяся система не имеет особых управлений[x/].

В дальнейшем предполагается, что исходная задача (2.2) преобразована к задаче с уравнениями типа (8.I). Пусть мы отбросили ξ уравнений (8.I).

<u>Теорема 8.I</u>. Если указанное преобразование возможно, то вырождение вариационной задачи с уравнениями (2.2) на участке особого режима равно 2ξ.

В самом деле, поскольку на участке особого режима отбрасывается ξ уравнений, то общий порядок системы дифференциальных уравнений вариационной задачи понижается на 2ξ единиц за счет ξ уравнений (8.I) и ξ уравнений $\dot{p}_i = -H_{x_i}$. В частности, в случае простой особенности $\xi = \mu$ – порядку особенности экстремали.

В специальном случае, когда ψ_i, γ_i не содержат u, т.е. (2.2) имеет вид $\dot{x}_i = \gamma_i(t,x) + \alpha_j \psi_{ij}(t,x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, s$, один из конкретных методов получения системы (8.I) из (2.2) заключается в следующем. Предположим, что $z_i = z_i(t,x)$, где $z_i(t,x)$ – непрерывные дифференцируемые функции. Тогда

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{\partial z_i}{\partial x_k}\gamma_k + \frac{\partial z_i}{\partial x_k}\psi_{kj}\alpha_j + \frac{\partial z_i}{\partial t} \qquad (k=1,\ldots,n;\ \text{по } i \text{ – не сумма}) \quad (8.4)$$

Выберем $n - s = \nu$ функции z так, чтобы ν уравнений (8.I) не зависели от α_j, а s оставшимися функциями z зададимся, так, чтобы s оставшихся уравнений зависели каждое от одного особого управления α_j. Приравнивая соответствующие коэффициенты при α_j в (8.4) нулю, получим, что ν функций z должны удовлетворять системы уравнений в частных производных[xx/]:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k}\psi_{kj}(t,x) = 0,\ i = 1,\ldots,\nu;\ j = 1,\ldots,s \quad (\text{по } i, j \text{ – не сумма}) \quad (8.5)$$

Величина t является в (8.5) параметром.

Так как систем в (8.5) совпадают между собой, достаточно найти решение одной из них, индекс i можно опустить.

---

x/ Однако на участке $p_{\nu+j} = 0$ в редуцированной задаче мы сохраним термин "особая экстремаль".

xx/ Нетрудно доказать, что выполнение (8.5), (8.6) является необходимым и достаточным условием указанного преобразования.

Пусть система (8.5) находится в инволюции. Тогда ν ее независимых первых интегралов $C_i = z_i = \zeta_i(t,x)$, $i = 1,\ldots,\nu$ дадут нам ν первых функций z_i в (8.2). Для определения оставшихся s функций $z_{\nu+j}$ $(j = 1,\ldots,s)$ достаточно найти по одному первому интегралу каждой из s систем уравнений

$$\frac{\partial z_{\nu+j}}{\partial x_k}\psi_{kj}(t,x) = 0 \quad (j = 1,\ldots,\beta-1,\beta+1,\ldots,s;\ \beta = 1,\ldots,s) \quad (8.6)$$

Предположим, что такие интегралы существуют. Обозначим их $C_{\nu+j} = z_{\nu+j} = \zeta_j(t,x)$. Пусть функциональный определитель $\left|\partial z_i/\partial x_\alpha\right| \neq 0$ $(i, \alpha = 1, 2, \ldots, n)$. Переходя от x к новым переменным z, преобразуем систему (2.2) в (8.I). При этом старые переменные исключаем при помощи уравнений $z_i = \zeta_i$, $z_{\nu+j} = \zeta_j$. Из этой же системы для заданных $x(t_1), x(t_2)$ находим новые граничные условия $z(t_1), z(t_2)$ и новый функционал $\alpha_s(t_2) = G[z(t_2)]$

Б) <u>Условия входа, движение и схода с особого режима (простая особенность)</u>

а) <u>Условия входа</u>. Пусть при $t = t_3$ множитель $p_{\nu+j}$ обратился в нуль. Тогда в момент $t_3 + 0$ возможно либо переключение с одного граничного значения α_j на другое, либо особый режим. Однако ввиду непрерывности z_j значение z_j слева от t_3 должно совпадать с z_j – справа, определяемым как управление из уравнения $\partial H/\partial z_j = 0$. Для того чтобы удовлетворить этому дополнительному условию, необходимо на вход "израсходовать" одно $p_i(t_3)$.

б) <u>Условием движения по особому режиму</u> является выполнение $\sup_\rho H$, где в перечень управлений включено и z_j, т.е. $\rho = \{u, \alpha, z_j\}$, в частности, выполнение неравенства $\partial^2 H/\partial z_j \partial z_j \leq 0$

Другое требование: особое управление α_j должно лежать в пределах своих границ, т.е. $\alpha_{j\,min}(t) \leq \alpha_j(t) \leq \alpha_{j\,max}(t)$. Его можно определить, если $q_\nu \neq 0$ и в уравнение $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial z_j}\right) = 0$ подставить (8.I). И, наконец, последнее требование – непрерывность координаты z_j на участке особого режима. Если эта непрерывность нарушается, то сход с особого режима обязателен.[x/]

---

x/ Заметим, что на участке особого режима легко можно учесть ограничения на z_j типа $z_{j\,min}(t) \leq z_j(t) \leq z_{j\,max}(t)$, ибо на этом участке z_j является управлением.

в) Сход с особого режима удобнее производить по заданному значению t. Момент схода и направление его подбирается так, чтобы удовлетворить заданным граничным условиям на правом конце или входу на другой участок особого режима.

Таким образом, в случае простой особенности взамен $p_i(t_i)$ "израсходованного" на вход в особый режим, имеем произвольный момент выхода и направление схода[*/], подбирая которые можно, вообще говоря, удовлетворить всем граничным условиям на правом конце.

В) Теоремы о целесообразности особых экстремалей. Пусть вариационная задача для (3.2) дает группу из N минималей, содержащую все решения, удовлетворяющие достаточным условиям сильного относительного минимума и заданным фиксированным граничным условиям. Пусть в N входят особые минимали ($t_1 \le t \le t_2$) только с простой особенностью. Разделим эту группу на подгруппы в зависимости от порядка особенности каждой минимали.

Теорема 3.2. При прочих равных условиях абсолютная минималь вариационной задачи находится в подгруппе минималей, имеющих наивысший порядок особенности.

Доказательство. Поскольку множество допустимых непрерывных кривых, в которых отбрасывалось максимальное число связей (3.I), - самое широкое из допустимых множеств, то результат, сформулированный в теореме, следует из принципа расширения [5] гл. II. Теорема доказана.

Заметим, что теорема действительна только для минималей (а не для экстремалей). Они должны, в частности, иметь одни и те же концы и особая минималь должна быть особой на всем отрезке $[t_1, t_2]$.

Аналогично можно показать, что справедлива теорема 3.3. Если сравниваются, при прочих равных условиях, минимали с одинаковыми порядками особенности, но с разными порядками сложности (по одному управлению), то абсолютная минималь находится в подгруппе минималей, имеющих наивысший порядок сложности.

[*/] Особые экстремали расположены на поверхности измерения от I до n в ($n+1$)-мерном пространстве t, x. В случае $m=1$ и простой особенности таковой является гиперповерхность переключения управления u. Сход с особой экстремали возможен в любую сторону от этой гиперповерхности.

Пример 3.I. Найти минимум $x_1(t_2)$, если:

$$\dot{x}_1 = x_2^4 - x_2^2 + atx_2 - x_2 - tu, \quad \dot{x}_2 = x_2 \sin^2 t + x_2^4 + u,$$
$$a > 0, \ |x_2| \le 1, \ 0 < x_2(t_1) < 1, \ 0 > x_2(t_2) > -1,$$
$$t_2 > 0, \ t_1 < 0, \ x_1(t_1) = 0.$$

Система, записанная в первой строке, - сложная. При любой заданной функции $u(t)$ вряд ли можно найти ее общее решение в конечном виде. Применяя алгоритм принципа максимума, получаем $u = \mathrm{sign}(p - t)$, а поскольку u не ограничено, правые части уравнений обращаются в бесконечность. Как вариационная задача с точки зрения обычных методов она усложнена и тем, что имеет ограничение на фазовую координату x_2. Однако методом, изложенным в данном параграфе, эта задача решается просто. В самом деле составляем уравнение (3.5): $\frac{\partial z}{\partial x_1} t - \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$, находим функцию $z = x_1 + tx_2$, которая ему удовлетворяет, и переходим к новой системе координат z, x_2 (заменяем $x_1(t)$ на $z(t)$). Получим

$$\dot{z} = x_2^4 - x_2^2 + atx_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 \sin^2 t + x_2^4 + u.$$

Так как $z(t_2) = x_1(t_2) + t_2 x_2(t_2)$, где $t_2, x_2(t_2)$ - заданные числа, то минимум в новой системе соответствует минимуму в старой системе.

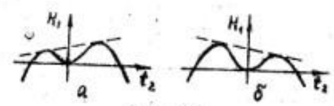

Рис. 6.5

Исследуем особые экстремали. На особых экстремалях $p = 0$ и в системе (3.8) остается только I-е уравнение, в котором x_2 играет роль управления. Гамильтониан $H = x_2^4 - x_2^2 + atx_2$ как функция x_2 изображен на рис. 6.5б при $t < 0$, $t > 0$. Он имеет два максимума, дающие две особые экстремали. Из рис. 6.5 видно, что $\sup_{x_2} H$ при $t < 0$ достигается на максимуме с $x_2 > 0$, а при $t > 0$ - на максимуме $x_2 < 0$.

Таким образом, в момент $t = 0$ необходимо совершить переход с одной особой экстремали на другую. Такие же импульсные переходы должны быть в конечных точках, если точки не лежат на особой экстремали и требуется выйти на эту экстремаль. Если при этом встречается ограничение $y_2 = \pm 1$, то траектория идет по ограничению в сторону особой экстремали. Типичный вид минималей для данного примера показан на рис. 6.6.

Рис. 6.6

Пример 3.2. Задача о наивыгоднейшем старте самолета вертикального взлета. Пусть самолету, у которого тяга больше веса, требуется, стартуя с земли, выйти на заданную высоту и скорость с минимумом расхода топлива. Если перепад высот и скоростей не велик, изменением плотности с высотой можно пренебречь, а сопротивление считать пропорциональным квадрату скорости V. В целях простоты мы будем пренебрегать и индуктивным сопротивлением, ограничивая, однако, допустимый угол атаки. При этих предположениях уравнение на нормаль к траектории можно опустить, считая, что производная тангажа θ' ограничена и $\le \theta'_{max}(m,V)$.

Уравнения движения:

$$\dot H = V\sin\theta,\quad \dot V = \frac{1}{m}(V_e\beta - aV^2) - g\sin\theta,\quad \dot m = -\beta. \tag{3.7}$$

Здесь H – высота, V_e – скорость истечения продуктов сгорания, $\beta > 0$ – расход топлива (задан), m – масса самолета, g – земное ускорение, θ – угол наклона траектории к горизонту, $a = const > 0$. Точка обозначает дифференцирование по времени t.

Переходим к новой независимой переменной m. Обозначим $1/\beta = b$, $\sin\theta = \alpha$. Тогда $H' = -Vb\alpha$, $V' = -\frac{V_e}{m} + b\left(\frac{aV^2}{m} + g\alpha\right)$, $|\alpha| \le \alpha_{max}(m,V)$, $m_0 \le m \le m_1$, $H' = \frac{dH}{dm}$, $V' = \frac{dV}{dm}$.

Граничные условия: $H(m_0) = 0$, $H(m_1) = H_1$, $V(m_0) = 0$, $V(m_1) = V_1$, $m_1 = max$. Особое управление α. Применяем метод преобразований. Уравнение (3.5) есть $\frac{\partial z}{\partial H}V - \frac{\partial z}{\partial V}g = 0$. Его первый интеграл $z = H + \frac{V^2}{2g}$ – энергетическая высота. Из интеграла видно, что максимум H (или V) соответствует максимуму z. При помощи этого же выражения находим граничные условия для z. Переходим к системе (3.2):

$$z' = \frac{V}{mg}(-V_e + baV),\quad V' = -\frac{V_e}{m} + b\left(\frac{aV^2}{m} + g\alpha\right),\quad |\alpha| \le \alpha_{max}(m,V). \tag{3.8}$$

На участке особого режима 2-е уравнение может быть отброшено.

После этого в I-м уравнении V становится управлением. При этом можно учесть и границы, если считать, что $|V'| \le V'_{max}(m,V)$. Отыскивая минимум[*/] по V в первом уравнении, получим, что оптимальная скорость на особом участке постоянна и равна $V = \left(\frac{V_e}{3ba}\right)^{1/2}$.

Условие оптимальности особой экстремали $(z')_{VV} = \frac{6baV}{mg} > 0$ выполнено, если $b = 1/\beta > 0$, т.е. топливо расходуется ($\beta > 0$), а не возрастает ($\beta < 0$). Минималь с учетом ограничения на производную V' имеет вид, показанный на рис. 6.7 (отмечена цифрой I). Она состоит из участка выхода на особую минималь по ограничению V'_{max}, вертикального подъема с постоянной скоростью и выхода по ограничению в заданную точку B. Минимали с учетом поверхности земли и оптимизации со скорости $V(m_0) \ne 0$, $\theta_0 = \pi/2$ отмечены цифрами 2 и 3 соответственно.

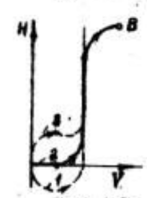

Рис. 6.7

Пример 3.3. Задача об оптимальном программировании расхода топлива ракетой при вертикальном подъеме. Будем считать, что плотность воздуха по высоте постоянна, а сопротивление пропорционально квадрату скорости. Аналогично предыдущим примерам уравнения движения можно записать

$$H' = -V\alpha,\quad V' = -\frac{V_e}{m} + \frac{aV^2\alpha}{m} + g\alpha,\quad 0 \le \alpha \le \frac{1}{\beta_{max}},\quad m_1 \le m \le m_0. \tag{3.9}$$

Здесь $\alpha = \frac{1}{\beta}$ – особое управление, β – расход топлива ($0 \le \beta \le \beta_{max}$), штрих обозначает дифференцирование по m. Граничные условия $H(m_0)$, $H(m_1)$, $V(m_0)$, $V(m_1)$, m_0 заданы. Согласно описанной в данном параграфе процедуре преобразуем координаты. Составляем иначе уравнение (3.5): $\frac{\partial z}{\partial H} - \frac{\partial z}{\partial V}\left(\frac{aV}{m} + \frac{g}{V}\right) = 0$.

Его первый интеграл $z = H + \frac{m}{2a}\ln\left|\frac{aV^2}{m} - g\right|$. Новая система

$$z' = -\frac{V(V_e + \frac{a}{m}V)}{aV^2 + mg} + \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a}{m}V^2 + g\right|,\quad V' = -\frac{V_e}{m} + \left(\frac{a}{m}V^2 + g\right)\alpha. \tag{3.10}$$

Так как α теперь входит только во 2-е уравнение, то оно может быть отброшено, а V в I-м уравнении становится управлением с ограничением на производную V' (ибо α ограничено).

---

*/ Интегрирование в сторону убывания m от m_0 до $m_1 < m_0$. Если поменять пределы интегрирования (поменять знак у правых частей (3.8)), то надо брать минимум, ибо мы ищем максимум m_1.

154-155

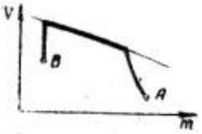

Рис. 6.8

Отыскивая минимум I-го уравнения в (3.I0) по V, находим зависимость $V_{опт.} = V(m)$. Оптимальная программа расхода топлива будет состоять из участков выхода с V'_{max} на особую минималь, полета по особой кривой и выхода с V'_{max} в заданную точку.

§4. Скользящие режимы как частный случай особых экстремалей

По условию I теоремы I.I при каждом $t \in [t_1, t_2]$ и фиксированных значениях x, Ψ_x необходимо взять $\inf\limits_{u \in V} B$. Величина как функция только u представляет участок гиперповерхности $B = B(u)$ (мы будем говорить – просто поверхности) в ($z+1$)-мерном пространстве переменных $B, u_1, \ldots, u_z$ с границей $\Gamma(t)$ области $U(t)$. Эта поверхность в общем случае может иметь несколько относительных минимумов как внутри допустимой области $U(t)$, так и на границе $\Gamma(t)$.

Построим на нижней стороне поверхности выпуклую оболочку, т.е. наименьшее выпуклое множество, заключающее тело, ограниченное данной поверхностью. Грубо говоря, как бы натянем на нижнюю поверхность тонкую эластичную пленку. Получим тело, ограниченное с "боков" цилиндром Γ, а снизу – выпуклой оболочкой. Нижняя поверхность этого тела будет состоять из выпуклых участков и " плоскостей" (измерения*/ от I до z), проходящих через крайние**/ точки поверхности $B = B(u)$. Пусть $u_0, u_1, \ldots, u_k$ – управления, соответствующие крайним точкам плоских участков. Тогда на плоских участках, согласно определению выпуклой оболочки, любое B может быть представлено в виде***/:

$$B = \sum_{j=0}^{\ell} \alpha_j B(u^j), \quad \ell+1 \leq z, \quad \sum_{j=0}^{\ell} \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \tag{4.I}$$

где $B(u^j)$ – значения B в крайних точках u^j, через которые проходит данная плоскость, а α_j определяются точкой плоскости.

---

*/ Т.е. "плоскость" может быть и просто прямой.

**/ Точка A называется крайней точкой выпуклого тела, если A не является внутренней точкой любого отрезка, принадлежащего этому телу.

***/ В.П. Данилов и др. Математический анализ, Справочно-математическая библиотека, I96I, стр. 9I.

Исключим α из I-го равенства в (4.I) при помощи 2-го уравнения. Получим

$$B = B(u^0) + \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j \left[B(u^j) - B(u^0) \right], \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1. \tag{4.2}$$

Каждому значению вектора u соответствуют точка плоскости и значение α_j. Поэтому α_j в (4.2) играет роль управления и может рассматриваться как управление вместо u на плоских участках.

Когда все плоскости выпуклой оболочки не параллельны координатной плоскости управления u (содержащей U), то точная нижняя грань $\inf\limits_{u} B$ принадлежит либо точке на выпуклом участке, либо границе области. Выпуклая оболочка в этом случае не оказывает влияния на ход экстремали. Однако, когда одна из плоскостей того или иного (не нулевого) измерения становится параллельной координатной плоскости управления u, т.е. когда более двух точек u^j становятся точками инфинума, положение коренным образом меняется. Появляются новые управления α_j.

Заметив, что функция B в (4.2) фактически составлена для уравнений типа

$$\dot{x}_i = f_i(t, x, u^0) + \alpha_j \left[f_i(t, x, u^j) - f_i(t, x, u^0) \right], \; i = 0, \ldots, n \tag{4.3}$$

видим, что эти уравнения являются частным случаем связей (2.2). Следовательно, все результаты по особым экстремалям применимы для этого случая. В итоге мы найдем решение в классе кусочно-гладких кривых $x(t)$ для некоторого фиктивного управления.

Естественно поставить вопрос: имеет ли смысл найденное решение и может ли оно быть реализовано системой исходных уравнений (4.I)? Покажем, что это решение является замыканием, предельным элементом класса допустимых непрерывных кусочно-дифференцируемых кривых $x(t)$, когда число переключений управления (число угловых точек на $x(t)$) стремится к бесконечности. В самом деле, перемещение в фазовом пространстве tx, соответствующее любому управлению с плоскости выпуклой оболочки при достаточно малом изменении t, может быть аппроксимировано смещением по направлениям, соответствующим крайним точкам плоских участков. При этом чем чаще переключения, тем меньше отклонение от найденной специальной экстремали, ближе величина функционала к найденной предельной величине.

Обсуждение. Методом построения выпуклой оболочки решение системы (4.I) для управления $u(t)$ находят в классе непрерывных кривых $y(x)$, не имеющих в каждой точке производной. Этот класс является более широким, чем класс непрерывных и кусочно-дифференцируемых кривых, с которыми имеют дело в известных методах. Поэтому согласно принципу расширения [5] гл. II абсолютную минималь находят среди специальных минималей (заданных на $[t_1, t_2]$), если они удовлетворяют достаточным условиям, заданным граничным значениям, и если минимум существует.

Примеры непрерывных кривых, не имеющих в каждой точке производной, впервые были указаны Вейерштрассом. В вариационном исчислении минимум на таких кривых, по-видимому, впервые стал искать Юнг [I], затем появились работы [2] гл. III, в которых тип движения точки фазового пространства с возможно более частыми переключениями управления в соответствии с терминологией теории автоматического управления был назван "скользящим режимом"ж/.

Замечания. I. Так как $\inf_u B(u) = -\sup_u H(u) + \Psi_x$, то вместо $\inf_u B(u)$ можно рассматривать везде $\sup_u H(u)$.

2. По особой экстремали можно идти и в скользящем режиме.

Пример 4.I:

$$I=\int_{-2}^{2}(x^2-2t^3x-e^4u^2+t^2u^4)\,dt;\quad \dot x=u,\ x(-2)=-1,\ x(2)=1,\qquad (4.4)$$
$$|u|\le 1;\quad H=pu-x^2+2t^3x+e^4u^2+t^2u^4.$$

Зависимость $H=H(u)$ представлена на рис. 6.9. Максимумов два, следовательно, возможен скользящий режим. Строим выпуклую оболочку (рис. 6.I0) и систему (4.4) записываем в виде:

$$I=\int_{-2}^{2}[x^2-2t^3x-e^4u_0^2-t^2u_0^4+\alpha_1(-e^4u_1^2-t^2u_1^4+e^4u_0^2+t^2u_0^4)]\,dt,\qquad (4.5)$$
$$\dot x=u_0+\alpha_1(u_1-u_0),\quad 0\le\alpha_1<1,$$

где u_0, u_1 – значения u, соответствующие I-му и 2-му максимумам. Как видно из рис. 6.I0, $u_1=-u_0=1$.

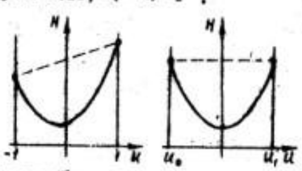

Рис. 6.I0

ж/ В работе [2] гл. III (стр. 590) приводится система уравнений типа (4.3) §4 гл. II (результат I-го дифференцирования) для расчета α_i. Однако, как показано в данной главе (§2), такое решение не оптимально. Неверно в [2] указан и порядок вырождения вариационной задачи.

Составляя выражение H для системы (4.4), вычисляя $H_{\alpha_1}=0$, видим, что α – особое управление. Ищем особую экстремаль

$$H_{\alpha_1}=p(u_1-u_0)+e^4u_1^2+t^2u_1^4-e^4u_0^2-t^2u_0^4=0.$$

Подставляя $u_1=-u_0=1$, получаем, что на скользящем режиме $p=0$. При этом $H(u_0)=H(u_1)$ (хотя бы в силу четности $H(u)$ при $p=0$). Далее $\dot H_{\alpha}=\dot p=-2x+2t^3=0$. Отсюда находим особую экстремаль или, как ее иногда называют, "линию нулевой близости" скользящего режима: $x=t^3$. Далее $\ddot H_{\alpha_1}=-2[-1+2\alpha_1]+6t^2=0$,

$$\alpha_1=\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{2},\quad \frac{\partial}{\partial\alpha_1}\ddot H_{\alpha_1}=-4<0.\qquad (4.6)$$

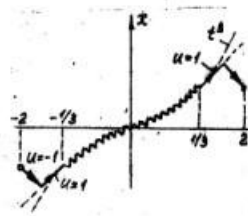

Рис. 6.II

Необходимое условие оптимальности скользящего режима, как видно из последнего выражения в (4.6), выполнено во всей плоскости. Следовательно, минимум – сильный. Из условия $0<\alpha_1<1$ находим участок скольжения $-\sqrt{\frac{1}{3}}<t<\sqrt{\frac{1}{3}}$. Экстремаль показана на рис. 6.II.

Пример 4.2. Задачи входа космического корабля в атмосферу планетыж/. Если считать, что полет происходит в плоскости большого круга, летательный аппарат – материальная точка, планета не вращается, то уравнения, описывающие движение на участке входа, имеют вид:

$$\dot H=V\sin\theta,\quad \dot V=-\frac{X}{m}-g\sin\theta,\quad \dot\theta=\frac{Y}{mV}-\frac{g\cos\theta}{V}+\frac{V\cos\theta}{R}.\qquad (4.7)$$

Здесь H – высота, V – скорость полета, θ – угол наклона траектории к местной линии горизонта, $X=X(\alpha,V,H)$ – сопротивление (α – угол атаки), g – ускорение притяжения планеты, $Y=Y(\alpha,V,H)$ – подъемная сила, R – расстояние до центра планеты. Точка обозначает дифференцирование по времени t.

Считаем, что $g=const$, зависимость $Y=Y(\alpha)$ – линейная, $X=X(\alpha)$ – симметричная парабола, $\alpha_{min}\le\alpha\le\alpha_{max}$ и $\alpha_{min}=-\alpha_{max}$. Следовательно,

$$X(\alpha_{min})=X(\alpha_{max}),\quad Y(\alpha_{min})=-Y(\alpha_{max}).\qquad (4.9)$$

Граничные условия:

$$t_0=0,\ H=H_0,\ V=V_0,\ \theta=\theta_0,\ t=t_1,\ H=H_1<H_0,\ \theta=\theta_1,\ V_1=min.$$

ж/ Подобная задача решалась также В.Ф.Кротовым и В.И.Гурманом.

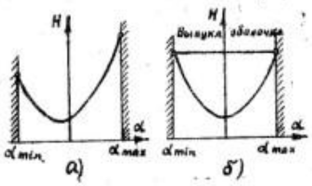

Рис. 6.I2

Если в данной задаче построить функцию $H=H(\alpha)$, где $H=p_i f_i$, то при $p_2<0$ эта функция будет иметь два максимума. Один, когда $\alpha=\alpha_{max}$ и второй, когда $\alpha=\alpha_{min}$ (рис. 6.I2а). Построим выпуклую оболочку (рис. 6.I2б). Получим линейное управление.

Когда $H(\alpha_{min})=H(\alpha_{max})$, существует участок особой экстремали, который необходимо аппроксимировать скользящим режимом.

Уравнения (4.3) в данной задаче ($U_0=\alpha_{min}, U_1=\alpha_{max}$) с учетом (4.5), таковы:

$$\dot H=V\sin\theta,\ \dot V=-\frac{X_{max}}{m}-g\sin\theta,\ \dot\theta=(2\xi_1-1)\frac{Y_{max}}{mV}-\frac{g\cos\theta}{V}+\frac{V\cos\theta}{R} \quad (4.9)$$

Здесь особое управление обозначено через $\xi_1\ (0\le\xi_1\le 1)$. Поскольку оно входит только в уравнение для $\dot\theta$, то на участке скользящего режима это уравнение может быть отброшено, а в оставшейся системе $\sin\theta$ становится управлением.

Рассматривая два оставшихся уравнения, видим, что если ввести обозначения $\sin\theta=U$, то снова будем иметь линейное, т.е. особое, управление $|U|\le 1$.

Запишем новую функцию $H=p_i f_i$ и найдем максимум по θ. Если $p_1V-p_2g>0$, то $\theta=\pi/2$; если $p_1V-p_2g<0$, то $\theta=-\pi/2$, если $p_1V-p_2g=0$, то получаем особый режим. Дифференцируя последнее равенство по t, получим $-p_1X-p_2(VX'_H-gX'_V)=0$. Это уравнение не содержит θ и вместе с предыдущим является условием входа в скользящий режим. Чтобы два эти уравнения имели решение при $p_1,p_2\ne 0$, определитель этой системы должен быть равен нулю. Раскрывая этот определитель, получим

$$-X+V(VX'_H-gX'_V)=0 \quad (4.10)$$

Это сравнение дает связь между H и V. Решение этого уравнения в плоскости H-V определяет кривые $H=H(V)$. Для реальной поляры таких кривых может быть несколько. Скользящему режиму соответствует кривая с наибольшим сопротивлением. Дифференцируя (4.10) по t, получим формулу для расчета θ, а вычисляя $\frac{\partial}{\partial U}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)\right]>0$, – условие оптимальности скользящего режима.

Типичная кривая входа показана на рис. 6.I3. Она состоит из участка выхода на особую экстремаль, скользящего режима по

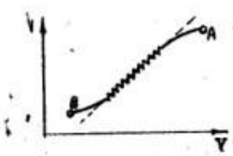

Рис.6.I3

углу атаки вдоль особой экстремали и участка схода в особой экстремали в заданные граничные условия на правом конце.

Таким образом, вместо решения сложной системы дифференциальных уравнений 3-го порядка на участке скользящего режима мы смогли получить решение в замкнутом виде.

С физической стороны оно говорит о том, что при торможении аппарат должен создавать максимальное сопротивление. Скользящий режим можно реализовать, аппроксимируя особую экстремаль допустимой частотой переключения управления и, оценив проигрыш в величине функционала.

<u>Пример 4.3</u>. (на скользящую экстремаль с двукратной особенностью). Найти экстремали в задаче

$$I=\frac{1}{2}\int_0^T(x_1^2+x_2^2-u_1^2-u_2^2)\,dt,\ \dot x_1=u_1,\ \dot x_2=u_2,\ |u_1|\le 1,\ |u_2|\le 1, \quad (4.11)$$

$$x_1(0)=x_{10},\ x_2(0)=x_{20},\ x_1(T)=x_{1k},\ x_2(T)=x_{2k}. \quad (4.12)$$

Предполагается, что $x_{10},x_{20},x_{1k},x_{2k}$ достаточно близки к 0, а T – достаточно велико.

Согласно (4.3) на участке скольжения будем иметь

$$\dot I=\frac{1}{2}[x_1^2+x_2^2-(u_1^0)^2-(u_2^0)^2],\ \dot x_1=u_1^0+\alpha_1(u_1^1-u_1^0),\ \dot x_2=u_2^0+\alpha_2(u_2^1-u_2^0),\ |\alpha_1|\le 1,\ |\alpha_2|\le 1 \quad (4.13)$$

где $u_1^0=u_2^0=-1,\ u_1^1=u_2^1=1$. Подставляя эти значения, получим

$$\dot I=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2-2),\ \dot x_1=-1+2\alpha_1,\ \dot x_2=-1+2\alpha_2,\ |\alpha_1|\le 1,\ |\alpha_2|\le 1. \quad (4.14)$$

На участке скольжения мы получили задачу с особыми управлениями α_1, α_2. Решаем эту задачу по теории §2:

$$H=p_1(2\alpha_1-1)+p_2(2\alpha_2-1)-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2-2), \quad (4.15)$$

$$\dot p_1=x_1,\ \dot p_2=x_2, \quad (4.16)$$

$$H_{\alpha_1}=2p_1=0,\ H_{\alpha_2}=2p_2=0,\ \dot H_{\alpha_1}=2x_1=0,\ \dot H_{\alpha_2}=2x_2=0, \quad (4.17)$$

$$\ddot H_{\alpha_1}=2(2\alpha_1-1)=0,\ \ \ddot H_{\alpha_2}=2(2\alpha_2-1)=0. \quad (4.18)$$

Из этих выражений следует, что возможны два типа особых экстремалей с простой особенностью: первые расположены в фазовом пространстве на гиперплоскости $x_1\equiv 0\ (\alpha_1=1/2)$, вторые – на гиперплоскости $x_2\equiv 0$, $(\alpha_2=1/2)$. Кроме того, имеется скользящая экстремаль с двукратной особенностью, расположенная на пересечении обеих гиперплоскостей. Ее уравнения: $x_1\equiv 0$, $x_2\equiv 0$ а соответствующее ей управление: $\alpha_1=\alpha_2=1/2$. Необходимое условие оптимальности (2.3) на ней выполнено. В самом деле согласно критерию Сильвестра $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,\ 2 > 0,\ 2 > 0,$

что свидетельствует о положительности квадратичной формы (2.3). Условием входа является выполнение (4.17).

Синтез при входе на особые экстремали показан на рис.6.14, а при сходе – на рис. 6.15. Движение в общем случае идет вначале по границе обоих управлений, затем по скользящей экстремали с порядком особенности один (скольжение в одной плоскости), а затем по скользящей экстремали с порядком особенности два (скольжение в двух плоскостях одновременно). При сходе – картина обратная.

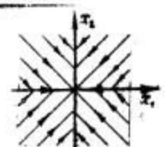

Рис. 6.14

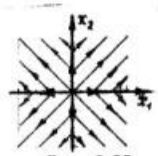

Рис. 6.15

Приведем пример, в котором совместное использование импульсных и скользящих экстремалей позволяет получить решение на элементах, которые вообще не являются даже функциями.

Пример 4.4. Найти минимум функционала

$$I = \int_0^1 (x_2^4 - x_2^2 + x_1^2)\,dt\,,\quad \dot{x}_1 = x_2\,,\quad \dot{x}_2 = u\,;\quad x_1(0) = x_1(1) = 0,\quad x_2(0),\ x_2(1) - \text{заданы}. \qquad (4.19)$$

Так как u не ограничено, то согласно гл. III и 3-му уравнению в (4.19) можно реализовать с любой точностью разрыв $x_2(t)$ в каждой точке. При этом потеря в величине функционала I при достаточной величине u может быть уменьшена беспредельно (ибо $\varphi_0 = 0$, см. гл. V). Имея это в виду, можно рассматривать $x_2(t)$ как неограниченную функцию, способную терпеть разрывы на множестве меры нуль. Но в этом случае граничные значения для $x_2(t)$ перестают играть какую-либо роль, ибо они всегда могут быть выполнены за счет разрывов в конечных точках.

Найдем абсолютный минимум подынтегрального выражения в (4.19), получим: $x_2 = \pm 1/\sqrt{2}\,,\ x_1 \equiv 0$. Рассмотрим, может ли быть реализована кривая $x_1(t)$ на допустимых элементах. Разделим отрезок интегрирования [0,1] на интервалы $\Delta t = 1/n$. Пронумеруем их: $\Delta t_i,\ i = 1,2,\ldots,n$. Зададим $x_2(t)$ следующим образом:

$$x_{2n}(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{2} \ \text{на } \Delta t_i\,, & \text{если } i \text{ – нечетное},\ i = 1,2,\ldots,n, \\ -1/\sqrt{2} \ \text{на } \Delta t_i\,, & \text{если } i \text{ – четное},\ \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = 1 \end{cases} \qquad (4.20)$$

Тогда согласно 2-му уравнению в (4.19) и граничному условию $x_1(0) = 0$, получим кривую $x_{1n}(t)$, которая при $n \to \infty$ будет равномерно стремиться к предельной кривой $x_1(t) \equiv 0$, а функционал I в (4.19) – к своей нижней грани. Но любой член последовательности $\{x_{2n}(t)\},\ n = 1,2,\ldots$ может быть как угодно точно реализован при достаточной величине u , значит, на допустимых элементах мы можем очень близко подойти к $\inf I$ на X^*. Однако предельные элементы, на которых достигается $\inf I$, не являются даже функциями (за исключением $\bar{x}_1(t)$), ибо $\bar{x}_2(t),\ \bar{u}(t)$ не определено ни в одной точке t $(\bar{x}_2(t) = \pm 1/\sqrt{2},\ \bar{u}(t) = \pm\infty)$. Интересно, что, несмотря на это, функционал на $\bar{x}_2(t), \bar{u}(t)$ определен.

Приложения к главе VI

I. Случай простой особенности

Из рассмотренного общего случая особых экстремалей со сложными особенностями целесообразно выделить случай простой особенности и отдельно случай с порядком особенности единица, ибо они наиболее часто встречаются на практике.

А) Случай простой особенности с порядком особенности единица. Полагая в выражениях (2.15), (2.21), (2.39) и т.п. $k = 1$ $j = 1$, получим, что:

1) для оптимальности особой экстремали необходима положительная определенность квадратичной формы

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\right]\delta u^2 + 2\frac{\partial}{\partial u_p}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\right]\delta u_p\,\delta u - \frac{\partial^2 H}{\partial u_p\,\partial u_r}\,\delta u_p\,\delta u_r \geq 0, \qquad (1)$$
$$p, r = 1,\ldots,m.$$

2) для оптимальности особой экстремали необходимо выполнение равенств:

$$\frac{\partial}{\partial u_p}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = 0,\ \frac{\partial H}{\partial u} = 0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right) = 0,\ \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\right] = 0,\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\right] = 0, \qquad (2)$$
$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\right]\right\} = 0,\quad p = 1,2,\ldots,m;$$

3) выполнение равенств (2) необходимо для регулярного входа на особую экстремаль с непрерывным $u(t)$;

4) для регулярного схода с особой экстремали необходимо

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)\right] > 0;$$

5) для вычисления особого управления в каждой точке особого участка необходимо, чтобы

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right] \neq 0. \tag{3}$$

Б) Случай простой особенности. Полагая в выражениях (2.I5), (2.2I), (2.39) и др. κ = I, получим, что:

I) для оптимальности особой экстремали необходима положительная определенность квадратичной формы

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\delta\xi_j\,\delta\xi_i + 2\frac{\partial}{\partial u_p}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\delta u_p\,\delta\xi_j - \frac{\partial^2 H}{\partial u_p \partial u_\gamma}\,\delta u_p\,\delta u_\gamma; \tag{4}$$

2) для оптимальности особой экстремали необходимо выполнение равенств:

$$\frac{\partial}{\partial u_p}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)=0,\ \frac{\partial H}{\partial\alpha}=0,\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)=0,\ \frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]=0,\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\right\}=0\ ,\quad p=1,\dots,m;\ \nu,j=1,\dots,\varkappa; \tag{5}$$

3) выполнение равенств (5) необходимо для регулярного входа на особую экстремаль с непрерывными $p(t)$;

4) для вычисления особого управления в каждой точке особого участка необходимо, чтобы определитель

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha_j}\right)\right]\right| \neq 0\ ,\quad j,\nu=1,\dots,\varkappa.$$

2. Особые поверхности в системах 2-го и 3-го порядка

А) В системе 2-го порядка (2.2') с одним управлением нетрудно получить особые поверхности в явном виде. В самом деле, мы имеем два конечных соотношения:

$$H_u = p_i\varphi^i(t,x)=0,\quad \dot H_u = -p_i\left[\varphi^i_{x_\alpha}\gamma^\alpha - \gamma^i_{x_\alpha}\varphi^\alpha\right)+\varphi^i_t\right]=0\ ,\ i=0,1,\ p_0=-1, \tag{2.I}$$

где для удобства индексы у φ и γ перенесены наверх. Исключая из них p_1, получим особую поверхность

$$\varphi^0(\gamma^1\varphi^1_{x_1}-\varphi^1\gamma^1_{x_1})-\varphi^1_t(\gamma^1\varphi^0_{x_1}-\varphi^1\gamma^0_{x_1})=0. \tag{2.2}$$

С одной стороны, у этой поверхности $\alpha=\alpha_{max}$, с другой, $\alpha=\alpha_{min}$.

Б) Если система 3-го порядка (2.2') – автономная и время процесса свободно, то существует первый интеграл $H=0$. На особой поверхности он имеет вид

$$H = p_i\gamma_i(x)=0. \tag{2.3}$$

Присоединяя его к системе (2.I) (в которой i = 0,I,2) и

исключая из полученной неоднородной системы трехлинейных уравнений p_1, p_2, получим особую поверхность

$$(\varphi^0\gamma^2-\varphi^2\gamma^0)(\gamma^1\varphi^1_{x_1}+\gamma^2\varphi^1_{x_2}-\varphi^1\gamma^1_{x_1}-\varphi^2\gamma^1_{x_2})+$$
$$+(\varphi^1\gamma_0-\varphi^0\gamma^1)(\gamma^1\varphi^2_{x_1}+\gamma^2\varphi^2_{x_2}-\varphi^1\gamma^2_{x_1}-\varphi\gamma^2_{x_2})+$$
$$+(\varphi^2\gamma^1-\varphi^1\gamma^2)(\gamma^1\varphi^0_{x_1}+\gamma^2\varphi^0_{x_2}-\varphi^1\gamma^0_{x_1}-\varphi^2\gamma^0_{x_2})=0 \tag{2.4}$$

В) В случае, когда число особых управлений $\varkappa=n+1$, аналогично пункту А можно получить выражение для особой экстремали в пространстве $T\times X$ в явном виде. Это будет многообразие I-го измерения. Если система (2.2') автономная и конечное время свободно, то особую экстремаль можно получить и для $\varkappa=n+2$.

3. Синтез трех систем 2-го и 3-го порядка

Теорию особых и импульсных режимов можно использовать для синтеза систем 2-го и 3-го порядков довольно общего вида.

А) Пусть система 2-го порядка (n = 2) имеет вид:

$$I=\int_0^T f_0(x)dt\ ,\quad \dot x_1 = f_1(x,u)\ ,\ u\in U. \tag{I}$$

Легко заметить, что может быть особая экстремаль, так как $\partial H/\partial u = p\,\partial f/\partial u = 0$, откуда, в частности, $p=0$. Но тогда $\partial H/\partial u^2 = p\,\partial^2 H/\partial u^2 = 0$ и метрица $F_1=\|H_{uu}\|$ (см. §2 п. А) име ранг 0.

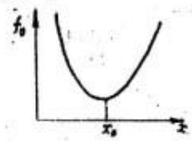

Рис. 6.I6

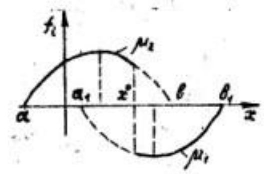

Рис. 6.I7

Пусть $f_0(x)$ – вогнутая, ограниченная снизу функция (рис. 6.I6), x^* – точка минимума этой функции, уравнение $\dot x_1^0 = f_1(x^*,u)$ разрешимо относительно u, причем $u\in U$. Обозначим $\mu_1(x,\bar u)=\inf\limits_{u\in U} f_1(x,u)$, $\mu_2(x,\bar{\bar u})=\sup\limits_{u\in U} f_1(x,u)$, $\bar u=\bar u(x)$, $\bar{\bar u}=\bar{\bar u}(x)$ и пусть $\mu_1(x^*)<0$, $\mu_2(x^*)>0$. Например, $\mu_1(x)$. $\mu_2(x)$ имеют вид, показанный на рис. 6.I7.

164-165

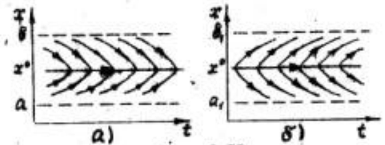

Рис. 6.18

Тогда синтез оптимальных траекторий при входе на особую минималь будет выглядеть, как показано на рис. 6.18а, а при сходе – как показано, на рис. 6.18б. Оптимальная траектория (при достаточно большом T) состоит из быстрейшего движения ($c\tilde{u}$ или $\tilde{u}$) к особой экстремали, движения по особой экстремали x^0 и участка схода ($c\tilde{u}$ или $\tilde{u}$). Момент схода подбирается так, чтобы удовлетворить заданным условиям на правом конце. Синтез очевиден, так как на особой минимали x^0 достигается абсолютный минимум, а $\tilde{u}$ или $\tilde{u}$ соответствуют максимальной скорости убывания (возрастания) функционала (в силу вогнутости $f_0(x)$).

<u>Замечания</u>. I. Можно снять ограничение, что $f_0(x)$ – вогнутая функция, но тогда особых экстремалей может быть несколько и вопрос выбора абсолютной минимали нуждается в дополнительном исследовании.

2. Если особое управление одно (r = I), то ограничение, что u входит только во 2-е уравнение (I), несущественно. Как показано в §3 гл. VI, введением новых переменных систему (2.2') можно преобразовать к виду (I).

Б) В более общем случае система (2.I) может иметь вид

$$I=\int_0^T f_0(t,x)\,dt\,,\quad \dot{x}=f(t,x,u)\,,\quad u\in V.$$

Пусть $f(t,x)$ – вогнутая, ограниченная снизу функция при любом $t\in[0,T]$, уравнение $\dot{x}^0=f(t,x^0,u)$ разрешимо относительно u при любом $t\in[0,T]$ и полученное $\bar{u}\in V$ является внутренней точкой в V :

$$\mu_1(t,x)=\inf_{u\in V} f(t,x,u)\,,\quad \mu_2(t,x)=\sup_{u\in V} f(t,x,u).$$

И пусть $\mu_1(t,x^0)<\dot{x}^0(t),\ \mu_2(t,x^0)>\dot{x}^0(t)$. Предполагается, что μ_1 и μ_2 непрерывны.

Синтез оптимальных траекторий строится аналогично предыдущему и показан на рис. 6.19, 6.20. В данном случае действительны те же замечания, что и в п. А.

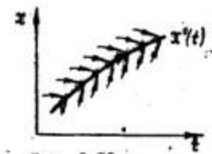

Рис. 6.19

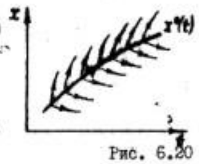

Рис. 6.20

В) Пусть система 3-го порядка имеет вид

$$I=\int_0^T f_0(x_1)\,dt\,,\ \dot{x}_1=f_1(x_1,x_2)\,,\ \dot{x}_2=f_2(x_1,x_2)+u\,,\ x_0(T)=min\,, \qquad (2)$$

где $f_0(x_1)$ – вогнутая, ограниченная снизу функция, $f_1(x_1,x_2)$– непрерывная, ограниченная по x_2 при любом x_1 функция, $f_2(x_1,x_2)$ – определена и ограничена, u – не ограничено.

Обозначим через x_1^0 точку, соответствующую $\inf_{x_1} f_0(x_1)$. Пусть уравнение $f_1(x_1^0,x_2)=0$ разрешимо относительно x_2 единственным образом. Обозначим корень этого уравнения x_2^0.

Найдем $\mu_1(x_1)=\inf_{x_2} f_1(x_1,x_2)\,,\ \mu_2(x_1)=\sup_{x_2} f_1(x_1,x_2)$

и соответствующие значения $\bar{x}_{2\,inf}$, $\bar{x}_{2\,sup}$.

Пусть $\mu_1(x_1^0)<0$, а $\mu_2(x_1^0)>0$. Например, $\mu_1(x_1)\,,\ \mu_2(x_1)$ могут иметь вид, показанный на рис. 6.21.

Изменение x_0 , x_1 в импульсе можно найти, поделив два первых уравнения (2) на 3-е уравнение в (2) ($u=\pm\infty$). Получим $dx_0/dx_2=0$, $dx_1/dx_2=0$, т.е. в импульсе I и x_1 – постоянны.

Синтез оптимальных траекторий при входе на особую минималь показан на рис. 6.22. Оптимальная траектория состоит из импульса до кривой $\bar{x}_{2\,inf}=\varphi_1(x_1)$, $\bar{x}_{2\,sup}=\varphi_2(x_1)$ соответственно, движения по этим кривым в сторону x_1^0 и импульса до точки x_2^0 . Синтез при сходе показан на рис. 6.22б. Синтез очевиден, так как x_1^0, x_2^0 – абсолютная минималь, а остальные участки являются участками максимально быстрого убывания (возрастания) функционала (в силу вогнутости $f_0(x_1)$).

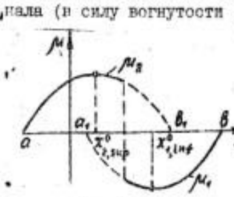

Рис. 6.21

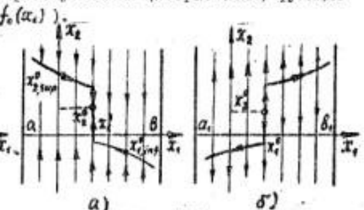

Рис. 6.22

166-167

4. Системы n -го порядка специального вида. Условия инвариантности

Пусть система (2.2') имеет вид:

$$I=\int_{t_1}^{t_2}\Big[f_0(t,x)+\sum_{i=1}^{n} f_i(t,x)\alpha_i\Big]dt\,,\ \dot{x}_i=\alpha_i\,;\ x(t_1)=a,\ x(t_2)=b. \qquad (I)$$

Функции $f_i(t,x)$ непрерывны и дифференцируемы. Применяя обычную процедуру, находим:

$$H=(p_i-f_i)\alpha_i-f_0\,,\quad \dot{p}_j=-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\alpha_i+\frac{\partial f_0}{\partial x_j}\,,\quad H_{\alpha_i}=p_i-f_i=0,$$

$$\dot{H}_{\alpha_i}=\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)\alpha_j-\frac{\partial f_i}{\partial t}+\frac{\partial f_0}{\partial x_i}=0.$$

Для оптимальности необходимо выполнение равенств:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=0\,,\qquad \frac{\partial f_0}{\partial x_i}-\frac{\partial f_i}{\partial t}=0. \qquad (2)$$

Всего таких равенств $K=\frac{n(n+1)}{2}$. Если соотношения (2) справедливы во всем фазовом пространстве $X\times T$, то, как известно, этого необходимо и достаточно, чтобы интеграл (I), который можно записать еще в виде

$$I=\int_{t_1,x(t_1)}^{t_2,x(t_2)} f_0(t,x)\,dt+\sum_{i=1}^{n} f_i(t,x)\,dx_i\,,$$

не зависел от пути интегрирования. Таким образом, выполнение (2) во всем фазовом пространстве является необходимым и достаточным условием полной инвариантности системы (I).

Если же (2) справедливо только на некотором многообразии в пространстве $X\times T$, то система (I) будет инвариантна только на этом многообразии.

Литература к главе УI

1. Young L.G., Generalised curves and the existence of an attained absolute minimum in the callinlus of variations. Comptes Rendus de la Société des sciences et lettres Varsovie Cl. III. vol.30, pp. 212–234. (1937).
2. А.А.Болонкин. Специальные экстремали в задачах оптимального управления. "Техническая кибернетика", 1969, № 2.
3. Копп и Мойер. Необходимые условия оптимальности особых экстремалей. "Астронавтика и ракетная техника", 1965, № 8.
4. Фуллер. Исследование оптимальных нелинейных систем регулирования. Экспресс-информации. "Приборы и элементы автоматики", 1963, № 37.

5. В.И.Гурман. Метод кратных максимумов и условия относительной оптимальности вырожденных режимов. "Автоматика и телемеханика", 1967, № 12.

Глава УП

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМАЛИ И РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Попытки применения классического вариационного исчисления и принципа максимума Л.С. Понтрягина к техническим задачам оптимального управления в большинстве случаев разбиваются о невозможность решить краевую задачу.

В этой главе обсуждается разрешимость краевых задач, возникающих в теории оптимального управления. На простых примерах показано, что эти трудности возникают не потому, что "плохи" методы решения краевых задач, а потому, что, оставаясь в рамках классического вариационного исчисления и принципа максимума, многие краевые задачи решить невозможно. Включение в состав экстремалей специальных режимов (особых, скользящих и импульсных) позволяет избежать многих трудностей.

Рассматриваются методы преодоления местных "ям", ликвидации разрывов функции "невязки" и удаления сопряженных точек.

§I. Краевые задачи в теории оптимального управления

Напоминаем, что типичная задача оптимального управления заключается в следующем. Требуется найти минимум функционала

$$I=\int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u)\,dt, \qquad (1.1)$$

на который наложены независимые дифференциальные связи

$$\dot{x}_i=f_i(t,x,u)\ ,\quad i=1,2,\dots,n. \qquad (1.2)$$

Здесь $x(t)=\{x_1(t),\dots,x_n(t)\}$ n -мерная, непрерывная вектор-функция фазовых координат; $u(t)=\{u_1(t),\dots,u_r(t)\}$ – r -мерная, кусочно-непрерывная вектор-функция управления, принадлежащая ограниченной области U типа $u_{j\,min}\le u_j\le u_{j\,max}$.

Граничные значения x для простоты будем считать фиксированными: $x_i(t_1)=x_{i1}\,,\ x_i(t_2)=x_{i2},\ t_1=a\,,\ t_2=b.$

Как известно, уравнение Эйлера и условие Вейерштрасса в вариационном исчислении либо принцип максимума Понтрягина [1] гл. II приводят к уравнениям и условию

$$\dot{\lambda}_i = -H_{x_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \tilde{H} = \sup_{u \in V} H, \tag{1.3}$$

где $H = \lambda_i f_i(t, x, u)$, λ_i – неопределенные множители Лагранжа. Таким образом, задача оптимального управления сводится к двухточечной краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (I.I)-(I.3), т.е. к подбору таких начальных $\lambda_i(t_1)$, чтобы получить заданные x_{i2}.

Для решения краевой задачи применяют либо метод наискорейшего спуска, либо метод Ньютона [2].

Метод наискорейшего спуска заключается в минимизации невязки

$$M = \tau_i [x_i(t_2) - x_{i2}]^2, \tag{1.4}$$

где $\tau_i > 0$ – некоторые весовые коэффициенты, а метод Ньютона – в определении поправок $\Delta\lambda_i(t_1)$ из системы линейных уравнений

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \lambda_i} \Delta\lambda_i = \varphi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.5}$$

где $\varphi_k = x_k(t_2) - x_{k2}$. Оба эти метода дают способы для определения такой последовательности начальных векторов $\lambda(t_1)$, чтобы M и φ_k убывали.

Как принцип максимума, так и классическое вариационное исчисление производят на специалистов-техников большое впечатление простотой алгоритма для расчета оптимальных траекторий. Однако при применении этих методов к большинству достаточно сложных практических задач, как правило, не удается решить краевую задачу, несмотря на значительные расходы машинного времени. Типичные трудности, которые при этом возникают: отсутствие сходимости, большая чувствительность траектории к незначительным изменениям начальных значений неопределенных множителей $\lambda(t_1)$, попадание в местные "ямы" и т.п.

Разные усовершенствования и применение других методов решения краевых задач обычно не помогают. Вместе с тем, как ясно из физики, оптимальное решение для заданных краевых условий возможно, ибо существуют неоптимальные траектории, соединяющие заданные точки.

§2. Существование специальных режимов – главная причина невозможности решить многие краевые задачи в рамках прежних методов

В гл. V, VI мы разбирали три вида специальных экстремалей: особые, скользящие и импульсные.

Покажем на простейших примерах, к каким последствиям в решении краевой задачи приводит наличие таких режимов.

Пример 2.I. Найти минимум функционала

$$I = \int_0^3 x^2 dt, \quad \dot{x} = u, \quad |u| \le 1, \quad x(0) = 1, \quad x(3) = a. \tag{2.1}$$

Пользуясь процедурой принципа максимума, получим

$$H = \lambda u - x^2, \quad \dot{\lambda} = 2x, \quad u = \operatorname{sign} \lambda, \quad x = \pm t + c_1, \quad \lambda = \pm t^2 + 2c_1 t + c_2. \tag{2.2}$$

Отсюда видно, что в верхней полуплоскости xt, λ возрастает ($x > 0$, $\dot{\lambda} > 0$), в нижней – убывает ($x < 0$, $\dot{\lambda} < 0$). Если $\lambda(0) > 0$, то u = I и траектория будет иметь вид, отмеченный на рис. 7.I цифрой I. Если $-1 < \lambda(0) < 0$, то до линии x = 0 произойдет переключение и траектория примет вид 2.3. Если $\lambda(0) < -1$, то траектория – единственная и отмечена цифрой 5. И, наконец, если $\lambda(0) = -1$, то траектория неопределенная и может быть либо вида 4, либо 5.

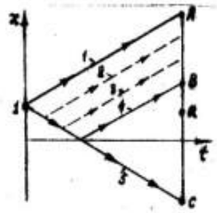

Рис. 7.I

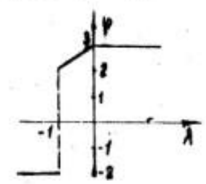

Рис. 7.2

Таким образом, выбирая любое $\lambda(0)$, можно попасть в любую точку отрезка AB и в отдельно стоящую точку C. Найти оптимальную траекторию, соединяющую $x(0) = 1$ и точку a (см. рис. 7.I), в рамках принципа максимума (2.2) просто невозможно. Здесь функция невязки M (I.4) и функция φ_k (I.5) разрывны (рис. 7.2), а потому говорить о сходимости как метода наискорейшего спуска, так и метода Ньютона бессмысленно.

Вместе с тем существование оптимальной кривой, соединяющей $x(0) = 1$ и $x(3) = a$, очевидно с точки зрения физики, ибо функционал (2.I) можно трактовать как задачу о минимальном объеме тела вращения, когда на наклон кривой наложено ограничение $|u| \leq 1$. Это также ясно и математически, так как кривых, соединяющих эти точки, бесконечное множество, функционал ограничен снизу, а потому среди этих кривых должна быть кривая, доставляющая минимум I.

Заметим, что на этом примере наглядно можно наблюдать неустойчивость траектории и чувствительность конечных значений фазовых координат при изменении начальных значений $\lambda(0)$. В самом деле, пусть в результате процесса итерации мы подошли к точке B. При сколь угодно малых отклонениях от значения $\lambda(0)=-1$ конечное значение $x(3)$ будет скачком переходить из B в C и обратно.

Этот элементарный пример для граничного значения $|x(3)|<1$ решается весьма просто, если в состав экстремали включить участок особого режима $x \equiv 0$. Однако на нем легко убедиться, что игнорирование существования таких участков может быть причиной неразрешимости краевой задачи и чувствительности конечных значений к варьированию начальных λ, так как область фазового пространства будет иметь "пустоты".

Пример 2.2. Найти минималь функционала

$$I=\int_0^3 (x^2-u^2)dt, \ \dot{x}=u, \ x(0)=1, \ x(3)=a, \ |u|\leq 1. \qquad (2.3)$$

По принципу максимума имеем

$$H=\lambda u-x^2+u^2, \ \dot{\lambda}=2x, \ u=\operatorname{sign}\lambda, \ x=\pm t+c_1, \ \lambda=\pm t^2+2c_1t+c_2. \qquad (2.4)$$

Несмотря на внешнее отличие эта задача имеет много общего с предыдущей. Из последних четырех выражений в (2.4) видно, что экстремали ее совпадают с экстремалями примера 2.I. Поэтому область достижимых конечных значений та же и, если оставаться в рамках принципа максимума, то никаким подбором $\lambda(0)$ удовлетворить граничному условию $x(3)=a$ невозможно (см. рис. 7.I).

Здесь причина кроется в существовании в составе экстремали участка со скользящим режимом.

Пример 2.3. Найти минимум функционала

$$I=\int_{-1}^{1} t^2u^2dt, \ \dot{x}=u, \ x(-1)=-1, \ x(1)=1. \qquad (2.5)$$

Согласно процедуре принципа максимума

$$H=\lambda u-t^2u^2, \ \dot{\lambda}=0, \ H_u=\lambda-2t^2u=0, \ x=\frac{c_1}{t}+c_2. \qquad (2.6)$$

Используя краевые условия $x(-1)=-1$, находим $c_2=-c_1-1$ или $x=\frac{c_1}{t}-c_1-1$. Задаваясь разными начальными $\lambda(-1)=-2c_1$, получим семейство траектории (рис. 7.3) и функцию "невязки", показанную на рис. 7.4. Отсюда следует, что мы можем попасть в любую точку

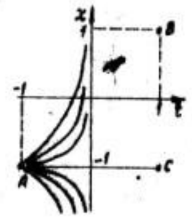

Рис. 7.3

Рис. 7.4

$x(t_1)$ при $t_1<0$ и только в точку C $(x=-1)$ при $t_1=1$. Однако наивыгоднейшая траектория, соединяющая точки A и B, существует, ибо существуют неоптимальные траектории, проходящие через эти точки, и функционал ограничен снизу (см. (2.5)). Здесь мы также сталкиваемся с невозможностью решить краевую задачу в рамках прежних методов. Причем "виноваты", как и ранее, не методы решения краевых задач, а присутствие в составе экстремали импульсного участка.

При ознакомлении с этими примерами невольно возникают вопросы: так ли уж часты эти специальные режимы? Ведь обходились же без специальных режимов до сих пор.

Прежде всего покажем, что эти примеры – не единичные. Аналогично строятся области достижимости в примерах $(x_0(t_2)=min)$:

I) $\dot{x}_0=x^2+2x-tu, \ \dot{x}=u, \ |u|\leq a, \ t_2>t_1, \ a>0;$

2) $\dot{x}_0=x^2-2x\sin t-u^4+\sin^2 t-u^2, \ \dot{x}=u, \ |u|\leq a, \ a>0$

или в более сложных пространственных случаях:

3) $\dot{x}_0=x_1^2+x_2^2, \ \dot{x}_1=u_1, \ \dot{x}_2=u_2, \ |u_1|\leq 1, \ |u_2|\leq 1;$

4) $\dot{x}_0=x_1^2+x_2^2-u_1^2-u_2^2, \ \dot{x}_1=u_1, \ \dot{x}_2=u_2, \ |u_1|\leq 1, \ |u_2|\leq 1.$

Относительно распространенности специальных режимов можно ответить следующее. Эти режимы отсутствуют, если система уравнений (I.I), (I.2) – линейная как по управлению, так и по фазовым координатам, либо функция $H=H(u,x,\lambda)$ – выпуклая по u при любых x и λ.

Что же касается общего случая, то скользящие режимы, вообще говоря, при некоторых граничных значениях почти неизбежны, если функция $H=H(x,\lambda,u)$ при каких-то комбинациях x, λ имеет два или более максимума, т.е. они возникают, если оптимальное управление может иметь переключения, что бывае в большинстве

172-173

случаев. Импульсный режим возможен, если существуют такие комбинации x, λ, что $\sup H = \infty$. И особый режим возможен, когда в нелинейной задаче одно или несколько управлений входят линейно.

Если обратиться к задачам техники, например из области динамики полета, то можно убедиться, что специальные режимы существуют в большинстве задач. Так, если зависимость тяги двигателя от расхода топлива линейная, то при оптимизации работы двигателей возникает особый режим. Если характеристика нелинейная, то - скользящий. Если величина тяги не ограничена (что принимается во многих задачах ради упрощения решения), то возникает импульсный режим. Таким образом, во всех основных оптимальных задачах динамики, таких, как наивыгоднейшая траектория полета ракеты, вход космического корабля в атмосферу, переход спутника с орбиты на орбиту, задача максимальной дальности горизонтального полета самолета и др., содержатся специальные режимы. Существование последних и является главной причиной тех трудностей в решении задач динамики полета, с которыми исследователи сталкиваются в настоящее время.

Градиентные методы решения оптимальных задач не в состоянии помочь в таких случаях, так как они позволяют отыскивать только слабый минимум и не могут служить средством борьбы со специальными режимами, которые являются порождением требований сильного минимума.

§3. Сопряженные точки - источник местных "ям" и ложных решений

Другой источник трудностей в решении краевых задач - возможность наличия сопряженных точек на исходном приближении, с которого мы начинаем процесс итераций. Однако трудности, которые при этом возникают, совсем иного порядка, чем трудности от специальных режимов. Они приводят не к появлению "пустот" или "мертвых зон" в пространстве $t x$, а к местным "ямам" в зависимости "невязки" конечных значений как функции начальных λ и к ложным решениям. Под последними понимаются экстремали, которые удовлетворяют заданным граничным условиям, но тем не менее функционал на них не достигает минимума.

Продемонстрируем это явление на примере известной задачи о брахистохроне.

Пример 3.I. (Задача о брахистохроне) Найти кривую, соединяющую заданные точки A и B, двигаясь по которой из точки A под

действием силы тяжести (трением и сопротивлением среды пренебрегаем), материальная точка достигнет точки B в минимальное время [3].

Возьмем точку A за начало координат, направим ось x горизонтально, ось y - вертикально вниз. Задача описывается уравнениями:

$$T = \frac{1}{2g}\int_0^{x_1} \frac{1}{\sqrt{y}}\sqrt{1+u^2}\,dx, \quad \dot{y} = u, \quad y(0)=0, \quad y(x_1)=y_1, \quad g = const \tag{3.I}$$

Как известно, ([3] стр. 35), решением задачи является циклоида, уравнение которой с учетом граничного значения $y(0)=0$ принимает вид

$$x = c(\tau - \sin\tau), \quad y = c(1-\cos\tau), \tag{3.2}$$

где τ - параметр. Постоянная c - радиус катящегося круга - находится из условия прохождения через заданную точку $y(x_1)$.

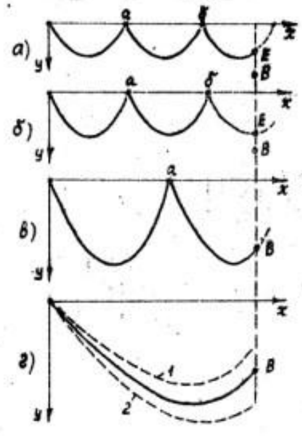

Рис. 7.5

Пусть мы задались некоторым значением c и в результате расчета получили траекторию, изображенную на рис. 7.5а. Эта траектория содержит сопряженные точки a, $б$ и имеет "невязку" граничных условий $M=(EB)^2$. Пусть в процессе решения краевой задачи c изменяется так, что невязка EB уменьшается. В результате наступит момент, когда вершина циклоиды станет на одну линию с B и смещение как в ту, так и в другую сторону будет увеличивать невязку (рис.7.5б). Между тем краевая задача еще не решена, точка E не совместилась с точкой B. В зависимости $M=M(c)$ получилась местная "яма".

Если эту яму преодолеть, то можно решить граничную задачу, но это решение будет ложным, так как экстремаль будет содержать сопряженную точку a (рис. 7.5в) и не будет минимумом интеграла (3.1).

174-175

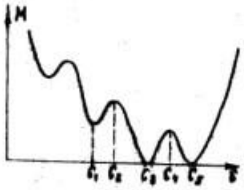

Рис. 7.6

Зависимость невязки M от C представлена на рис. 7.6. Значение C_1 соотвествует местной "яме". В подобные "ямы" приведет метод наискорейшего спуска, если процесс итерации начался со значения $c < c_1$ (см. рис. 7.6). Для всех значений $c_2 < c < c_4$ итерации приведет к ложному минимуму и лишь для значений $c > c_4$ – к решению краевой задачи, доставляющей минимум интегралу (3.I). Эти значения характеризуются тем, что процесс приближений начинается с траектории, не содержащей сопряженных точек (рис. 7.5г, траектории I,2).

Укажем еще два примера, в которых процесс уменьшения невязки, начатый с ложной минимали, приводит к ложному минимуму:

I) $f = \frac{x}{u^2}$, $\dot{x} = u$, $x(0) = 1$, $x(a) = b$, $a > 0$, $0 < b < 1$;

2) $f = \sqrt{x+k}/\sqrt{1+u^2}$, $\dot{x} = u$, $x(0) = 0$, $x(a) = x_1 > -h$, $h > 0$.

Основываясь на геометрических соображениях, автор берет на себя смелость высказать в качестве гипотезы следующее предложение.

Предложение 3.I. Пусть область фазового пространства tx, занятая экстремалями, односвязна и не содержит внутренних пустот. Пусть экстремали этого пространства содержат только сопряженные точки типа касательной и огибающей или точек возврата*/, а конечные значения t, x фиксированы.

Тогда методы наискорейшего спуска или метод Ньютона, осуществляемые с достаточно малым шагом и начатые с ложной экстремали, приведут либо к местной "яме", либо к ложному минимуму.

Сопряженные точки – не единственная причина местных "ям". Специальные режимы также приводят к местным "ямам" и, возможно, даже чаще, чем сопряженные точки.

Пример 3.2. Найти минимум функционала

$$\dot{x}_0 = e^{-x^2},\ \dot{x} = u,\ |u| \le 1,\ t_1 = 0,\ t_2 = 3,\ x(0) = 0,\ x(3) = 1. \quad (3.3)$$

По принципу максимума

$$H = \lambda u - e^{-x^2},\ \dot{\lambda} = -2x e^{-x^2},\ u = \operatorname{sign}\lambda,\ x = \pm t + C. \quad (3.4)$$

*/ Таким образом, сопряженные точки типа фокуса исключаются из рассмотрения.

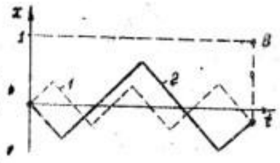

Рис. 7.7

Экстремали представлены на рис. 7.7. Легко видеть, что процесс итераций по умньшению "невязки", начатый с экстремалями I или 2, приведет к местной "яме".

То же самое относится и к примерам:

1) $\dot{x}_0 = -ch\,x$, $\dot{x} = u$, $|u| \le 1$.

2) $\dot{x}_0 = \frac{u^3}{a^2 + x^3}$, $\dot{x} = u$, $|u| \le 1$, $a > 0$

Что делать? Такой вопрос неизбежно возникает у учителя. Важно не только установить диагноз болезни, но и указать средства для ее лечения. В качестве такого средства автор и предлагает методы решения оптимальных задач (гл. II), которые, в частности, дают алгоритмы для решения задач со специальными режимами (гл. III–V).

§4. Некоторые рекомендации

Бороться с сопряженными точками и порождаемыми ими местными "ямами" можно, например, следующим путем. При отыскании I-го приближения рассчитывается $(n+1)$ экстремалей, исходящих из одной точки $x(t_1)$ для близких $p(t_1)$, но таких, чтобы определитель $|\delta p_{ij}(t_1)|$, $i,j = 1,2,\dots,n$, где $\delta p_{ij} = p_{ij} - p_{i0}$, не был равен нулю. Интегрируя на интересующем нас интервале (t_1, t_2), вычисляем определитель $|\delta x_{ij}(t)|$, $i,j = 1,2,\dots,n$, где $\delta x_{ij} = x_{ij} - x_{i0}$. Если этот определитель не обращается в нуль (имеет при любом $t \in (t_1, t_2]$ тот же порядок, что и на всем интервале (t_1, t_2)), то сопряженная точка отсутствует. Если же при некотором $t_3 \in (t_1, t_2)$ это условие нарушается, то вначале решается задача на максимум отрезка $t_1 t_3$, пока не станет $t_3 > t_2$. Полученное решение и принимается за I-е приближение*/.

Так, если вернуться к примеру 3.I, то видим, что в точке a (см. рис. 7.5а) определитель $|\delta x_{ij}(t)| = 0$, ибо $\delta x_{11} = x_{11} - x_{10} = 0 - 0 = 0$ и $\delta x_{12} = x_{12} - x_{10} = 0 - 0 = 0$, следовательно, a – сопряженная точка. Решая задачу на максимум отрезка $x_1 a$ (максимум невязки $M = (a - x_1)^2$ или минимум невязки $M = -(a - x_1)^2$), удаляем.

*/ Этот метод впервые применил В.А. Рулев.

176=177

сопряженную точку a из интервала интегрирования (x_1, x_2) (см. рис. 7.5г).

Теперь, имея в качестве I-го приближения экстремаль I (см. рис. 7.5г), не содержащую сопряженной точки, можно приступить к решению краевой задачи.

Продемонстрируем некоторые результаты, изложенные в гл. УП, на

примере 4.I. Найти минимум функционала

$$\dot{x}_0 = \cos y, \quad \dot{x} = u, \quad |u| \le 1, \quad x(0) = 0, \; x(3\pi) = 0. \tag{4.I}$$

Если воспользоваться принципом максимума, то получим

$$H = \lambda u - \cos y, \quad \dot{\lambda} = -\sin x, \quad u = \operatorname{sign}\lambda, \quad x = \pm t - c.$$

Экстремали имеют вид ломаных, колеблющихся около линии $x = 0$. Область достижимости при любых $\lambda(t_1)$ изображена на рис. 7.8. Она состоит из заштрихованной площади и любой точки на линии $0a$, $0б$. Множество экстремалей, проходящих через заданные граничные условия, бесконечно.

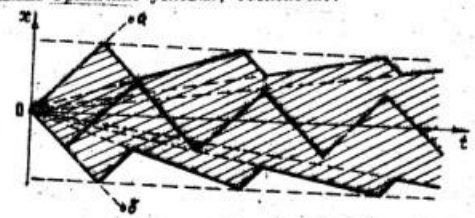

Рис. 7.8

Исследуем этот пример при помощи метода, изложенного в гл. УI–УП. Прежде всего замечаем, что система (4.I) относится к виду (2.2') гл. УI, в которой $u = \alpha$, $\varphi_1 f_1 = 0$, а потому возможен особый режим.

Согласно теореме 2.4 гл. УI на участке особого режима справедливы конечные соотношения $H_\alpha = p = 0$ ($\lambda = p$), $M = -\sin x = 0$, откуда без всяких интеграций находим, что на особом режиме $p = 0$, $x = k\pi$, ($k = 0, \pm 1, \ldots$).

По теореме 2.I гл. УI получаем $\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\alpha}\right)\right] = -\cos y > 0$, что действительно только при $x = m\pi$ ($m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$). Таким образом, из всех особых режимов $x = k\pi$ только режимы, когда k – нечетные, удовлетворяют необходимому условию и доставляют минимум $x_0(t_2)$.

При помощи теоремы 2.9 гл. УI находим управление на участке особого режима $u = \alpha \equiv 0$.

Условие входа в особый режим – выполнение в момент входа, помимо равенства $p = 0$, также равенства $x = \pm m\pi$ (для наших граничных условий $x = \pm\pi$). Начальное $p(t_1)$ подбирается исходя из этого условия. Зато момент выхода из особого режима и направление входа произвольны и подбираются так, чтобы удовлетворить заданным граничным условиям на правом конце.

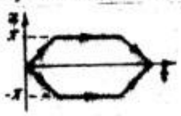

Рис. 7.9

Минимали с особыми режимами имеют вид, показанный на рис. 7.9. Их две и обе абсолютные.

В заключение заметим, что скользящие режимы, которые иногда получаются на машине ввиду невозможности схода с особого режима (при попытке схода из условия $\sup H$ траектория снова отбрасывается на особый, скользящий, режим), соответствуют как раз неоптимальным особым режимам, не удовлетворяющим условиям теоремы 2.I гл. УI. Теорема 2.I гл. У в некотором смысле говорит о "неустойчивости" движения по оптимальному особому режиму, в то время как машина воспроизводит "устойчивый" неоптимальный режим. Однако машину нетрудно заставить воспроизводить именно оптимальный специальный режим, если после входа в такой режим при проверке $\sup H$ менять знак H_α. Это позволит автоматически браковать неоптимальные специальные режимы (ввиду неустойчивости траектория будет сразу же о них сходить) и задерживаться на оптимальных специальных режимах. Сход же с оптимальных режимов можно задавать, восстанавливая знак у H_α, а направление схода прибавляя к H_α (или вычитая из него) малое число $\varepsilon > 0$.

Литература к главе УП

1. А.А. Болонкин. О разрешимости краевых задач оптимального управления. Труды академии им. Н.Е. Жуковского, вып. II8I, 1966, стр. I03–I28.
2. В.Л. Закускин. Справочник по численным методам решения алгебраических и трансцендентных уравнений, Физматгиз, 1960.
3. Л.Э. Эльсгольц. Вариационное исчисление, Гостехиздат, 1952.

Часть вторая

ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДОВ α – И β –ФУНКЦИОНАЛОВ И МАКСИМИНА К ТЕХНИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ

Глава VIII

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ АВТОМАТИКИ

§I. Задача минимизации энергии сигнала

Пусть поведение объекта описывается системой линейных уравнений:

$$\dot{x}_i = a_{ij} x_j + b_i u, \quad 0 \le t \le \infty. \tag{I.1}$$

Требуется минимизировать функционал

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{2} u^2 dt \tag{I.2}$$

при краевых условиях

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad x_i(\infty) = 0. \tag{I.3}$$

В работе [1] (стр. 186) показано, что этот функционал часто связан с энергией сигнала $u(t)$, например в электрических цепях, в регулировании положения ротора двигателя постоянного тока с управлением по току возбуждения и т.д. Поэтому данная задача и получила название задачи о минимуме энергии сигнала. С математической точки зрения функционал (I.3) дает оценку величины "стоимости" управления.

Решим эту задачу методом максимина*/. Возьмем $\Psi = y_i x_i$ и

*/ Мы рассматривали метод максимина для случая конечного t_1. Увеличивая неограниченно t_1, можно перейти к случаю $t_1 = \infty$. При этом требуется дополнительное предположение, что $\int_0^\infty B\,dt$ сходится.

составим выражение B:

$$B = \frac{1}{2} u^2 - y_i (a_{ij} x_j + b_i u) - \dot{y}_i x_i. \tag{I.4}$$

Из условия $\inf_x B > -\infty$ найдем

$$B_{x_i} = -\dot{y}_i - a_{ik} y_k = 0, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{I.5}$$

Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ – простые корни характеристического уравнения $\Delta(\mu) = 0$ системы (I.5). Общее решение будет

$$y_i = C_s \Delta_i(\mu_s) e^{\mu_s t}, \quad s, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{I.6}$$

где C_s – произвольные постоянные, Δ_i – миноры $\Delta(\mu)$, являющиеся дополнением элемента с номером i первой строки. Пусть $\mu_s < 0$. Тогда из (I.6):

$$y_i(\infty) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{I.7}$$

Полагая $t = 0$, из (I.6) найдем $C_s = m_{sj} y_{j0}$ и

$$y_i = m_{sj} y_{j0} \Delta_{si} e^{\mu_s t}, \quad i, j, s = 1, 2, \ldots, n, \tag{I.8}$$

где m_{sj} – известные постоянные.

Из условия $\inf_u B$ следует

$$B_u = u - y_i b_i = 0, \quad u = b_i y_i. \tag{I.9}$$

Подставим выражение (I.9) и (I.5) в (I.4), найдем

$$B^{(1)} = -\frac{1}{2} (y_i b_i)^2. \tag{I.10}$$

Интегрируем $B^{(1)}$ и учитываем (I.6), (I.7). Тогда

$$\int_0^\infty B^{(1)} dt = -\frac{1}{2} \int_0^\infty (b_i m_{sj} y_{j0} \Delta_{si} e^{\mu_s t})^2 dt = A_{ij} y_{i0} y_{j0}. \tag{I.11}$$

Здесь A_{ij} – известные постоянные. Пусть квадратичная форма (I.11) – положительно определенная. Из условия

$$\sup_{y(t)} \left(A + \int_0^\infty B^{(1)} dt\right) = \sup_{y_0} \left[-x_{i0} y_{i0} + A_{ij} y_{i0} y_{j0}\right] \tag{I.12}$$

находим

$$y_{i0} = l_{ik} x_{k0}, \tag{I.13}$$

где l_{ik} – известные постоянные.

Так как каждый текущий момент времени можно принять за начальный, то подставляя (I.13) в (I.9), получаем синтез оптимального управления

$$u = l_i x_i, \quad l_i = const. \tag{I.14}$$

Обратим внимание на то, что: 1) при решении методом максимина не пришлось решать краевую задачу, т.е. подбирать значения неопределенных множителей, чтобы удовлетворить (I.3). Условия (I.3) автоматически вошли в (I.12); 2) при обычном методе решения (например, по принципу максимума или классическим вариационным исчислением) интегрируется система (I.1) и (I.5) порядка $2n$, замкнутая (I.9). При использовании метода максимина в данной задаче для получения синтеза управления интегрировалась только система (I.5) порядка n.

Попутно решается и вопрос устойчивости системы. Подставим (I.13) в $\psi = \psi_i x_i$, получим квадратичную форму $\psi = \ell_{ik} x_i x_k$. Если эта форма – отрицательно определенная, то система устойчива асимптотически. В самом деле, подставляя (I.13) в (I.10), мы видим, что $\sup_x B = 0$ и точка $x = 0$ – единственная. Поэтому $\dot\psi < 0$. Более того, используя выпуклость ψ и $B^{(1)}$ по x, можно показать, что система при указанных условиях будет устойчива асимптотически в целом.

Соответствующий пример был рассмотрен ранее (гл. III, §2, пример 2.5).

§2. Задача линейная относительно фазовых координат и нелинейная относительно управлений

Пусть движение объекта описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot x_i = a_{ij}(t)x_j + \varphi_i(t,u), \quad i = 1,2,\dots,n, \quad t_1 \le t \le t_2, \quad u \in U \tag{2.1}$$

с критерием качества вида

$$I = \int [a_{0j}(t)x_j + \varphi_0(t,u)]\,dt. \tag{2.2}$$

Здесь управления входят нелинейно и коэффициенты a являются функциями t. Граничные условия заданы:

$$x_i(t_1) = x_{i1}, \quad x_i(t_2) = x_{i2}. \tag{2.3}$$

Применим метод максимина. Возьмем $V = \psi_i x_i$. Тогда

$$B = a_{0j}(t)x_j + \varphi_0(t,u) + \psi_i[a_{ij}(t)x_j + \varphi_i(t,u)] - \dot\psi_i x_i. \tag{2.4}$$

Из условия $\inf_x B > -\infty$ получаем

$$B_{x_i} = -\dot\psi_i - a_{ki}(t)\psi_k + a_{0i}(t) = 0, \quad k, i = 1,2,\dots,n. \tag{2.5}$$

Из условия $\inf_u B$ находим

$$u = u(t,\psi). \tag{2.6}$$

Запишем решение системы линейных уравнений (2.5) в виде

$$\psi_k = \psi_{i0}\psi_{ik}(t) + \psi_k^{(1)}(t), \quad k, i = 1,2,\dots,n, \tag{2.7}$$

где ψ_{i0} – начальные значения ψ_i, $\psi_{ik}(t)$ – нормированная фундаментальная система решений однородной системы, $\psi_k^{(1)}(t)$ – частное решение неоднородной системы. Подставим (2.5)–(2.7) в (2.4), проинтегрируем и составим выражение $A^{(1)} + \int_{t_1}^{t_2} B^{(1)}dt$. Величина этого выражения будет определяться только начальными значениями $\psi_{i1} = \psi_i(t_1)$. Поэтому

$$\sup_{\psi(t)}\Big(A^{(1)} + \int_{t_1}^{t_2} B^{(1)}dt\Big) = \sup_{\psi_{i1}}\Big[A^{(1)}(x_{i1}, x_{i2}, \psi_{i1}, t_1, t_2) + \int_{t_1}^{t_2} B^{(1)}(t, \psi_{i1})\,dt\Big]. \tag{2.8}$$

Отыскиваем $\psi_{i1} = \psi_{i1}(x_{i1}, x_{i2}, t_1, t_2)$ из (2.8) и подставляем их в (2.6). Принимаем x_{i1}, t_1 как значения текущего момента. В результате получаем синтез управления вида

$$u = u(t, x, t_2, x_{i2}). \tag{2.9}$$

Этот синтез является полным, ибо дает управление для любых значений фазовых координат на правом конце. Его можно использовать при наведении ракеты или самолета по подвижным целям без прогноза будущего положения цели.

Интересно, что здесь для получения синтеза, точнее для более общей задачи – полного синтеза также пришлось интегрировать только систему (2.5) порядка n, а не систему (2.5) совместно с (2.1), (2.6) порядка $2n$, как это пришлось бы делать во всех других методах. При построении же полного синтеза известными методами в случае, когда невозможно найти решение в общем виде, систему порядка $2n$ пришлось бы интегрировать бесконечное число (континуум) раз.

Таким образом, проинтегрировав систему вдвое более низкого порядка, чем в других методах, мы получили решение не обычной задачи синтеза – попадание в заданную точку из любого начального положения, а значительно более общей задачи; точнее – все множество обычных синтезов, которое состоит из оптимальных траекторий, соединяющих любые начальные и конечные точки.

По-видимому, метод максимина наиболее полно использует любые упрощения в уравнениях задачи.

Пример 2.1. Решить задачу

$$I = \int_{t_1}^{t_2}\Big(ax + \frac12 u^2\Big)dt, \quad \dot x = x + u, \quad x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2. \tag{2.10}$$

Имеем:

$$B = ax + \frac12 u^2 - \psi(x+u) - \dot\psi x, \quad B_u = u - \psi = 0, \quad u = \psi, \tag{2.11}$$

$$B_x = a - \psi - \dot\psi = 0, \quad \psi = \psi_0 e^{-t} + a, \tag{2.12}$$

$$J^{(1)} = A^{(1)} + \int_{t_1}^{t_2} B^{(1)}dt = x\psi\Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} -\frac12\psi^2 dt = x_2(\psi_0 e^{-t_2} + a) - x_1(\psi_0 e^{-t_1} + a) +$$

$$+ \frac14\psi_0^2(e^{-2t_2} - e^{-2t_1}) + \psi_0 a(e^{-t_2} - e^{-t_1}) + a^2(t_1 - t_2).$$

$\sup_{\psi_0} J^{(1)}$:

$$J^{(1)\prime}_{\psi_0} = x_2 e^{-t_2} - x_1 e^{-t_1} + \frac12\psi_0(e^{-2t_2} - e^{-2t_1}) + a(e^{-t_2} - e^{-t_1}) = 0,$$

$$J^{(1)\prime\prime}_{\psi_0\psi_0} = \frac12(e^{-2t_2} - e^{-2t_1}) < 0, \quad \text{т.к. } t_2 > t_1.$$

$$\psi_0 = 2\,\frac{a(e^{-t_1} - e^{-t_2}) + x_1 e^{-t_1} - x_2 e^{-t_2}}{e^{-2t_2} - e^{-2t_1}}. \tag{2.13}$$

подставляя (2.I3) в (2.I2), а (2.I2) в (2.II) и принимая t_1, x_1 за текущие значения, получаем полный синтез

$$u = 2e^{-t}\,\frac{a(e^{-t}-e^{-t_2}) + xe^{-t} - x_2e^{-t_2}}{e^{-2t_2} - e^{-2t}} + a. \tag{2.I4}$$

В частности, если $a=0$, $t_2 \to \infty$, то имеем задачу о минимуме энергии сигнала (§I) и (2.I4) принимает вид

$$u = -2x. \tag{2.I5}$$

Мы здесь интегрировали только одно уравнение I-го порядка – (2.I2). При решении же этой задачи принципом максимума необходимо было бы интегрировать систему двух уравнений:

$$\dot p = -p + a, \quad \dot x = x + p. \tag{2.I6}$$

При любом изменении в функциях $\varphi_i(t,u)$ и решении по методу максимина дополнительных интегрирований не требуется. Так, если в (2.I0) функционал имеет вид

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left(ax + \frac{1}{4}u^4\right) dt, \tag{2.I7}$$

то из $B_u = u^3 - y = 0$ получаем

$$u = \sqrt[3]{y}, \tag{2.I8}$$

и, подставляя (2.I3) в (2.I2), а (2.I2) в (2.I7), находим полный синтез для функционала (2.I7):

$$u = \sqrt[3]{2e^{-t}\,\frac{a(e^{-t}-e^{-t_2}) + xe^{-t} - x_2e^{-t_2}}{e^{-2t_2} - e^{-2t}} + a}\,. \tag{2.I9}$$

При решении же по принципу максимума система (2.I6) стала бы нелинейной:

$$\dot p = -p + a, \quad \dot x = x + \sqrt[3]{p} \tag{2.20}$$

и не только пришлось бы проделать работу заново, но и процесс интегрирования значительно усложнился бы и мог привести к интегралам, не выражающимся через элементарные функции.

Кроме того, метод максимина в ряде случаев позволяет попутно решить вопрос и об устойчивости системы. Так, пусть $a=0$, $t \to \infty$. Подставляя все это в (2.I9) и приравнивая (2.I9) к (2.I8) получим $y=-2x$. Подставим в свою очередь это в $\Psi = yx$, тогда $\Psi = -2x^2$. Примем Ψ за функцию Ляпунова V и найдем $\dot V = \dot\Psi = -4x(x+u) = -4x(x-\sqrt[3]{2x}) = 4x^{4/3}(\sqrt[3]{2}-x^{2/3})$. Мы видим, что $\dot V<0$, $\dot V>0$ в области $|x|<\sqrt{2}$, $\dot V<0$ в области $|x|>\sqrt{2}$ при $x \neq 0$ и, следовательно, наш синтез для функционала (2.I7) асимптотически устойчив при $|x|<\sqrt{2}$, устойчив при $|x_0| \le \sqrt{2}$ и неустойчив при $|x_0|>\sqrt{2}$.

При использовании же принципа максимума вопрос устойчивости свелся бы к подбору функции Ляпунова для нелинейной системы (2.20).

§3. Задачи о точном регулировании. Задачи о минимуме расхода топлива

Покажем, каким образом можно применить методы β-функционала в задачах с неаналитическими функционалами, не решаемых или с трудом решаемых существующими методами.

А) Пусть поведение системы описывается уравнениями (I.I) при краевых условиях (I.3), а функционал (I.2) имеет вид

$$I = \int_0^\infty |x_1|\,dt. \tag{3.1}$$

Эту задачу можно трактовать как задачу о точном регулировании, ибо в отличие от квадратичного функционала малым отклонениям придается такой же "вес", как и большим. К задаче не применимы обычные методы, так как функционал не аналитичен (не дифференцируем по линии $x_1 = 0$).

Заменим функционал (3.I) функционалом (I.3). Получим задачу о минимуме энергии сигнала, которая решается до конца (§I). Тогда согласно гл. I лучшие решения задачи (3.I) будут внутри области (теорема 4.1 гл. I):

$$\frac{1}{2}u^2 + |x_1| \le \frac{1}{2}\bar u^2 + |\bar x_1|, \tag{3.2}$$

где $\bar u, \bar x_1$ – минималь задачи (1.3). Эта область показана на рис. 8.I. Она не пуста, так как при использовании синтеза (I.14) $x_1 = \bar x_1$ и, как следует из (3.2), существуют решения у неравенства (3.2) по u. Если можно выбрать u так, что в каждый момент оно будет удовлетворять строгому неравенству (3.2), то значение функционала (3.1) будет заведомо лучше, чем наше решение.

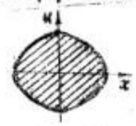

Рис. 8.1

Аналогично можно найти области лучших решений в задачах с неаналитическими функционалами:

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} |x_1|^q\,dt, \quad 0<q, \tag{3.3}$$

$$I_2 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt[p]{|x_1|^q}\,dt, \quad q>0, \ p>0, \tag{3.4}$$

$$I_3 = \int_{t_1}^{t_2} |u|^q\,dt, \quad q=0 \tag{3.5}$$

или даже, когда подынтегральное выражение $f_0(t,x,u)$ является разрывной функцией, например

$$I_4 = \int_{t_1}^{t_2} f_0(x_1)\,dt, \qquad f_0 = \begin{cases} 1, & x_1 \neq 0, \\ 0, & x_1 = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

В качестве функционала (I.3) можно брать любой функционал, для которого можно найти решение. Это же замечание относится и

184-185

к связям (I.I), которые не обязательно должны быть линейны. Естественно, что вид области "лучших" решений будет зависеть от выбранного функционала.

Заметим, что задача (3.3) при достаточно больших q является приближенной аппроксимацией задачи о минимуме максимального отклонения координаты $x_1(t)$ на $[t_1, t_2]$, а задача (3.5) при $q=1$ трактуется обычно как задача о минимуме расхода топлива независимо от вида связей (I.I).

Литература к главе УШ

I. М. Атанс и П. Фалб. Оптимальное управление. "Машиностроение", 1968.

Глава IX

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПОЛЕТА

§I. Задача о минимуме интегрального тепла при входе летательного аппарата в атмосферу

А) Угол входа летательного аппарата в атмосферу планеты выбирается достаточно малым. Поэтому, полагая $\cos\theta \approx 1$ (θ – угол наклона траектории к местной линии горизонта), получаем следующие уравнения входа летательного аппарата как материальной точки (без учета дальности полета):

$$\dot{H} = V \sin\theta, \tag{I.I}$$

$$\dot{V} = -\frac{X(\alpha, V, H)}{m} - g\sin\theta, \tag{I.2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{Y(\alpha, V, H)}{mV} - \frac{g}{V} + \frac{V}{R}. \tag{I.3}$$

Здесь H – высота полета, V – скорость, X – сопротивление, α – угол атаки, g – гравитационное ускорение планеты, Y – подъемная сила, m – масса летательного аппарата, R – расстояние до центра планеты, $R = R_0 + H$, где R_0 – радиус планеты.

Сопротивление и подъемная сила летательного аппарата определяются формулами:

$$X = (c_{x_0} + B\alpha^2)\frac{\rho V^2}{2} S, \quad Y = A\alpha \frac{\rho V^2}{2} S, \tag{I.4}$$

где c_{x_0} – коэффициент сопротивления при $\alpha = 0$, $\rho(H)$ – плотность атмосферы, S – характерная площадь, A, B – положительные постоянные.

Заданы начальные условия входа H_0, V_0, θ_0, моменты t_1, t_2 и конечная высота $H_к$. Значения $V_к, \theta_к$ свободны.

Управление осуществляется углом атаки α. Требуется указать множество траекторий при движении, по которым к летательному аппарату будет подведено тепла меньше некоторой величины (задача B). Количество тепла, подведенного к аппарату, дается интегралом

$$I = \int_{t_1}^{t_2} K_q \rho^{0.5} V^{3.15} dt. \tag{I.5}$$

Б) Для решений этой задачи воспользуемся методами β-функционала (гл. I) в сочетании с методом обратной подстановки. Возьмем Ψ в виде

$$\Psi = C_1\left(Hg + \frac{1}{2}V^2\right) + C_2\theta,$$

где C_1, C_2 – постоянные. Этой функции соответствует функционал (гл. I, §4)

$$\beta = -\inf_\alpha\left[-\Psi_{x_i} f_i - \Psi_t\right] = -\inf_\alpha\Big[+C_1 V \frac{(c_{x_0} + B\alpha^2)\frac{\rho V^2}{2}S}{m} - C_2 \frac{A\alpha}{mV}\frac{\rho V^2}{2}S + \tag{I.6}$$
$$+ C_2\frac{g}{V} - C_2\frac{V}{R}\Big] = -\frac{C_1 c_{x_0}\rho S}{2m}V^3 + \left(\frac{A^2 C_2^2 \rho S}{8mBC_1} - C_2 g\right)\frac{1}{V} + \frac{C_2}{R}V$$

с оптимальным управлением

$$\alpha = \frac{A}{2B}\cdot\frac{C_2}{C_1 V^2}, \quad C_1 > 0. \tag{I.7}$$

Он определен на тех же самых допустимых кривых (I.I)-(I.3). Значения C_1, C_2 подбираются так, чтобы удовлетворить заданному $H_к$ на правом конце.

Закон (I.7) дает синтез оптимального (в смысле абсолютного минимума) управления на допустимых кривых функционала (I.6).

Лучшие решения нашего исходного функционала (I.5) будут находиться внутри области (теорема 4.I гл. I): $f_0 + \beta \leq \bar{f}_0 + \bar{\beta}$ или

$$K_q \rho^{0.5} V^{3.15} - \frac{C_1 c_{x_0}\rho S}{2m}V^3 + \left(\frac{A^2 C_2^2 \rho S}{8mBC_1} - C_2 g\right)\frac{1}{V} + \frac{C_2}{R}V \leq \tag{I.8}$$
$$\leq K_q \bar{\rho}^{0.5}\bar{V}^{3.15} - \frac{C_1 c_{x_0}\bar{\rho} S}{2m}\bar{V}^3 + \left(\frac{A^2 C_2^2 \bar{\rho} S}{8mBC_1} - C_2 g\right)\frac{1}{\bar{V}} + \frac{C_2}{R}\bar{V},$$

где чертой сверху обозначены значения переменных на абсолютной минимали функционала (I.6), т.е. решения системы (I.I)-(I.3) с управлением (I.7).

Найдем зависимость левой части (I.8) от V. Объединяя постоянные величины в левой части неравенства (I.8), получим на

186-187

каждой фиксированной высоте это неравенство в виде:

$$a_1 V^{3,15} - a_2 V^2 + a_3 \frac{1}{V} + a_4 V \leq a_5 \;, \quad a_i = const. \qquad (I.9)$$

Здесь с точки зрения физики задачи a_1, a_2, a_4 положительны. Зависимость левой части (I.9) от V изображена на рис. 9.I. Множество значений V, отсекаемых неравенством (I.8), не пусто, так как справа стоит допустимая траектория. Таким образом, для каждой высоты мы получаем диапазон скоростей (V_1, V_2), внутри которого выделяется тепла не больше, чем при движении с управлением (I.7). Нанося эти значения на график HV (рис. 9.2), получим "коридор входа", при движении внутри которого летательный аппарат будет нагреваться меньше, чем с управлением (I.7).

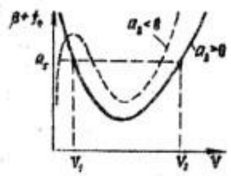

Рис. 9.I

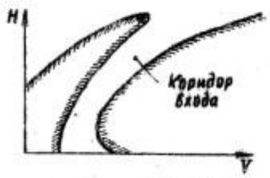

Рис. 9.2

Интересно, что здесь для получения качественной картины движения не пришлось интегрировать уравнения движения (I.I)-(I.3).

§2. Задача о полете на максимальную дальность ракеты или самолета с регулируемым двигателем постоянной тяги*/

Уравнения, описывающие движение летательного аппарата на постоянной высоте, следующие:

$$\dot{L} = V \;, \qquad (2.I)$$

$$\dot{V} = \frac{V_e \beta - X(V)}{m} \;, \qquad (2.2)$$

$$\dot{m} = -\beta \;. \qquad (2.3)$$

Здесь L - дальность полета, V - скорость, β - расход топлива (управление), V_e - скорость истечения продуктов сгорания,

*/ ЖРД и ТРД можно в известном смысле называть двигателями постоянной тяги (при заданном расходе топлива), ибо их тяга сравнительно мало зависит от скорости полета.

$V_e > 0$, m - масса летательного аппарата, X - сопротивление, $X = aV^2$, $a > 0$ - постоянная, $a = C_x \frac{\rho S}{2}$, C_x - коэффициент сопротивления, ρ - плотность воздуха, S - площадь крыла. Заданы время полета $[t_1, t_2]$ и расход массы $m_1 - m_2$. Начальная и конечная скорость равны друг другу: $V_1 = V_2$. Обычно задача ставится следующим образом: найти закон расхода массы $\beta(t)$, обеспечивающий максимум дальности. Эта задача для случая нефиксированного времени решалась Миеле [2] гл. IУ. Он получил качественную картину движения. Для получения численных результатов по его методу необходимо интегрировать систему (2.I)-(2.3).

На примере этой и последующей (§3) задач покажем, каким образом методом максимина можно получать простые оценки снизу в задачах динамики полета, которые очень близки к абсолютному минимуму.

Зададимся функцией $\Psi = \psi_1 V + \psi_2 m$, где ψ_1, ψ_2 - постоянные. Составим функцию B:

$$B = -V - \psi_1 \left(\frac{V_e \beta - aV^2}{m} \right) + \psi_2 \beta . \,^{*/} \qquad (2.4)$$

Из условия $\inf_{\beta V} B > -\infty$ находим

$$B_\beta = -\psi_1 \frac{V_e}{m} + \psi_2 = 0 \;, \quad m = \frac{\psi_1 V_e}{\psi_2} \;, \qquad (2.5)$$

$$B_V = -1 + \psi_1 \frac{2a}{m} V = 0 \;, \; V = \frac{m}{2a\psi_1} = \frac{V_e}{2a\psi_2} \;, \; B''_{VV} = \psi_1 \frac{2a}{m} = \frac{2a}{V_e} \psi_2 > 0, \; \psi_2 > 0. \qquad (2.6)$$

Исключая m и V из (2.4) при помощи (2.5), (2.6), получим $\bar{B} = -\frac{V_e}{4a\psi_2}$. Интегрируя это выражение (оно постоянно), составляя обобщенный функционал $J = A + \int_{t_1}^{t_2} \bar{B}\, dt$ и учитывая, что $V_1 = V_2$, найдем

$$J = \psi_2 (m_2 - m_1) - \frac{V_e^2}{4a\psi_2} (t_2 - t_1) . \qquad (2.7)$$

Из условия $\sup_{\psi_2} J$ следует:

$$\psi_2 = \sqrt{\frac{V_e (t_2 - t_1)}{4a (m_1 - m_2)}} \;. \qquad (2.8)$$

Подставляя (2.8) в (2.7) и учитывая сноску к (2.4), окончательно получаем следующую оценку снизу:

$$\bar{J} = \sqrt{\frac{V_e (t_2 - t_1)(m_1 - m_2)}{a}} \;, \qquad (2.9)$$

где

$$L_{max} \leq \bar{J} .$$

*/ Мы ищем $\max L$, поэтому берем $f_0 = -V$. В силу равенства $\inf(-I) = -\sup I$ для получения правильного результата в окончательном ответе надо изменить знак.

Пример 2.1. Самолет с ЖРД и данными: $S = 20$ км^2, $V_e = 2500$ м/сек, $C_x = 0,05$ (при $C_y = 0,5$), $G = 3840$ кг, совершает полет на высоте $H = 18$ км ($\rho = 0,0123$). Запас топлива (в единицах массы): $\Delta m = 77,5 \frac{\text{кг сек}^2}{\text{м}}$. Требуется найти оценку максимальной дальности полета.

Вначале для сравнения найдем, какова дальность полета при постоянном режиме работы двигателя. Для полета на данной высоте и при данном весе необходима скорость

$$V = \sqrt{\frac{2G}{C_y \rho S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3840}{0,5 \cdot 0,0123 \cdot 20}} = 250 \text{ м/сек},$$

тяга $P = \frac{G}{K} = \frac{G C_x}{C_y} = 384$ кг и, следовательно, расход топлива $\beta = \frac{P}{V_e} = \frac{384}{2500} = 0,155 \frac{\text{кг сек}}{\text{м}}$. Время работы двигателя при этом будет $\Delta t = \frac{\Delta m}{\beta} = \frac{77,5}{0,155} = 500$ сек и, следовательно, дальность составит $L = V \cdot \Delta t = 250 \cdot 500 = 125$ км.

Найдем оценку по формуле (2.9), полагая $t_2 - t_1 = 500$ сек. Вычислим величину $a = C_x \frac{\rho S}{2} = 0,05 \frac{0,0123 \cdot 20}{2} = 0,00614$.

Подставив наши данные в (2.9), получим

$$L_{max} \leq \sqrt{\frac{2500 \cdot 500 \cdot 77,5}{0,00614}} = 127 \text{ км}.$$

Отсюда видно, что предлагаемая оценка близка к нижней грани функционала и, в частности, режим постоянного расхода массы очень мало отличается от оптимального.

Пример 2.2. Самолет с ТРД и данными: $S = 20$ м^2, $C_x = 0,05$ (при $C_y = 0,25$), $G = 11,1$ т совершает горизонтальный полет на $H = 18$ км ($\rho = 0,0123$). Запас топлива (массы) $\Delta m = 340 \frac{\text{кг сек}^2}{\text{м}}$, удельный расход ТВД $C_e = 1,5 \frac{\text{кг час}}{\text{кг тяги}}$.

Вычислим вначале дальность полета этого самолета при постоянном режиме работы двигателя. Необходимая горизонтальная скорость самолета

$$V = \sqrt{\frac{2G}{C_y \rho S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 11100}{0,25 \cdot 0,0123 \cdot 20}} = 600 \text{ м/сек}$$

и тяга $P = \frac{G}{K} = \frac{G C_x}{C_y} = \frac{11100 \cdot 0,05}{0,25} = 2220$ кг. Время полета при данной тяге, запасе топлива и удельном расходе равно: $\Delta t = \frac{\Delta G}{C_e P} = \frac{\Delta m g}{C_e P} = \frac{340 \cdot 9,81}{1,5 \cdot 2220} = 3600$ сек. Следовательно, дальность полета при постоянном режиме работы двигателя составит

$$L = V \Delta t = 600 \cdot 3600 = 2160 \text{ км}.$$

Найдем оценку по формуле (2.9) при той же продолжительности полета $\Delta t = 3600$ сек

$$a = C_x \frac{\rho S}{2} = 0,05 \cdot \frac{0,0123 \cdot 20}{2} = 0,0614, \quad V_e = \frac{P}{\beta} = \frac{P \Delta t}{\Delta m} = \frac{2220 \cdot 3600}{340} = 23500 \text{ м/сек}$$

$$L_{max} \leq \sqrt{\frac{23500 \cdot 3600 \cdot 340}{0,00614}} = 2165 \text{ км}.$$

Как видим, оценка является эффективной для летательных аппаратов с разными типами двигателей.

§3. Задача о полете на максимальную дальность самолета (дирижабля) с регулируемым двигателем постоянной мощности

Для летательного аппарата с ТВД и поршневыми двигателями при заданном положении сектора газа мощность двигателя практически не зависит от скорости полета. В настоящее время используются винты переменного шага, у которых в широком диапазоне крейсерских скоростей к.п.д. практически постоянен. В этом случае принимая, что мощность двигателя линейно зависит от расхода топлива, можно представить зависимость тяги от скорости и расхода следующей формулой:

$$P = b \frac{\beta}{V}, \tag{3.1}$$

где b – постоянная, β – расход топлива.

Подставляя (3.1) в (2.1)–(2.3), получим уравнения горизонтального полета самолета:

$$\dot{L} = V, \tag{3.2}$$

$$\dot{V} = \frac{b \frac{\beta}{V} - aV^2}{m}, \tag{3.3}$$

$$\dot{m} = -\beta. \tag{3.4}$$

Пусть t_1, t_2, m_1, m_2 заданы, а $V_1 = V_2$, β – управление.

Применим метод максимина для получения оценки в этой задаче. Возьмем $\Psi = y_1 V + y_2 m$ и составим функцию

$$B = -V - y_1 \left(\frac{b \frac{\beta}{V} - aV^2}{m} \right) + y_2 \beta. \tag{3.5}$$

Из условия $\inf\limits_{\beta V} B$ следует:

$$B_\beta = -y_1 \frac{b}{mV} + y_2 = 0, \quad mV = \frac{b y_1}{y_2}, \quad B_V = 1 + \frac{a}{b} y_2 3V^2 = 0, \quad V = \sqrt{\frac{b}{3a y_2}},$$

$$B_{VV} = 6 \frac{a}{b} y_2 V > 0, \quad y_2 > 0.$$

Подставляя найденные m, V в (3.5), получим

$$\bar{B} = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{b}{3a y_2}}.$$

Составим обобщенный функционал, учитывая, что $V_1 = V_2$. Тогда

$$J = y_2(m_1 - m_2) - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{b}{3a\,y_2}}\,(t_2 - t_1). \qquad (3.6)$$

Из условия $\sup\limits_{y_2} J$ вытекает

$$y_2 = \sqrt[3]{\frac{b(t_2-t_1)^2}{27a(m_1-m_2)^3}}.$$

Или, подставляя это значение в (3.6) и учитывая сноску к (2.4), получим окончательную оценку

$$\bar J = \sqrt[3]{\frac{b(m_1-m_2)(t_2-t_1)^2}{a}}, \quad L_{max} \le \bar J. \qquad (3.7)$$

Пример 3.2. Самолет с поршневым двигателем и данными: S = 40 м^2, C_x = 0,05 (при C_y = 0.6), мощностью двигателя N = 1545 л.с., к.п.д. винта η = 0,8, G = 11130 кг, запасом топлива Δm = 78,7 кг.сек^2/м, удельным расходом топлива C_e = 0,25 кг/л.с.час, совершает полет на высоте H = 3 км (ρ = 0,0927). Требуется найти оценку максимальной дальности полета.

Найдем его дальность при постоянном положении сектора газа. Необходимая скорость полета

$$V = \sqrt{\frac{2G}{C_y \rho S}} = \sqrt{\frac{2\cdot 11130}{0.6\cdot 0.0927\cdot 40}} = 100 \text{ м/сек}.$$

Время полета

$$\Delta t = \frac{\Delta m\, g}{75 N C_e} = \frac{78.7\cdot 9.81}{1545\cdot 0.25} = 2 \text{ часа}$$

Мощность N = 1545 л.с. вполне достаточна для горизонтального полета: $P_{потр} = P_{расп}$ (потребная тяга равна располагаемой):

$$P_{потр} = \frac{G C_x}{C_y} = \frac{11130\cdot 0.05}{0.6} = 927 \text{ кг}, \quad P_{расп} = \frac{75N}{V}\eta = \frac{75\cdot 1545\cdot 0.8}{100} = 927 \text{ кг}.$$

Следовательно, дальность полета при заданной мощности

$$L = V\Delta t = 100\cdot 2\cdot 3600 = 720 \text{ км}.$$

Найдем оценку максимальной дальности для Δt = 2 часа. Вычислим коэффициент b в (3.3). Из равенства потребной и располагаемой мощности $75\eta N = PV$ найдем P и приравняем (3.1), откуда найдем

$$b = \frac{75N\eta}{\beta} = \frac{75N\eta\Delta t}{\Delta m} = \frac{75\cdot 1545\cdot 0.8\cdot 7200}{78.7} = 8.5\cdot 10^6$$

Далее

$$a = C_x\frac{\rho S}{2} = 0.05\,\frac{0.0927\cdot 40}{2} = 0.0927, \quad J = \sqrt[3]{\frac{8.5\cdot 10^6\cdot 78.7\cdot 7200^2}{0.0927}} = 725 \text{ км}, \quad L_{max} \le 725 \text{ км}.$$

Видим, что наша оценка мало отличается от режима полета с постоянным положением сектора газа, т.е. указанный режим близок к оптимальному.

Пример 3.2. Дирижабль с поршневыми двигателями и данными: $S_{мид}$ = 400 м^2, C_x = 0,1, N = 11300 л.с., η = 0,75, C_e = 0,25 кг/л.с.час, запас топлива Δm = 576, совершает полет на высоте H = 3 км (ρ = 0,0927). Найти оценку максимальной дальности.

Из условия $P = X$ найдем скорость полета

$$\frac{75N\eta}{V} = C_x\frac{\rho V^2}{2}S, \quad V = \sqrt[3]{\frac{150N\eta}{C_x\rho S}} = \sqrt[3]{\frac{150\cdot 11300\cdot 0.75}{0.1\cdot 0.0927\cdot 400}} = 70 \text{ м/сек},$$

время полета

$$\Delta t = \frac{\Delta m\, g}{N C_e} = \frac{576\cdot 9.81}{11300\cdot 0.25} = 2 \text{ часа}.$$

Т.е. дальность на выбранном режиме равна $L = V\Delta t = 70\cdot 2\cdot 3600 = 504$ км. Применим оценку (3.7), считая $t_2 - t_1 = \Delta t = 2$ часа,

$$a = C_x\frac{\rho S}{2} = 0.1\,\frac{0.0927\cdot 400}{2} = 1.84, \quad b = \frac{75N\eta\Delta t}{\Delta m} = \frac{75\cdot 11300\cdot 0.75\cdot 7200}{576} = 7.95\cdot 10^6;$$

$$J = \sqrt[3]{\frac{7.95\cdot 10^6\cdot 576\cdot 7200^2}{1.84}} = 512 \text{ км}, \quad L_{max} \le 512 \text{ км}.$$

Мы видим, что оценка дает хорошие результаты.

Глава X

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ α-ФУНКЦИОНАЛА К ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ КОМБИНАТОРНОГО ТИПА

§1. Общая постановка экстремальной задачи комбинаторного типа

А) Экстремальные задачи комбинаторного типа объединяют широкий круг очень важных задач прикладного характера. К ним, например, сводятся задачи теории расписаний, календарного планирования, целочисленного программирования, балансирования линий сборки, задача коммивояжера, размещения складов, заводов, задачи раскроя материалов и многие другие. Все они обладают общим свойством – это задачи поиска экстремума на некотором множестве комбинаций (сочетаний, перестановок, последовательностей и т.д.).

Эти задачи играют большую роль в авиационной технике и автоматике. Например, задача выбора наивыгоднейшей комбинации из имеющихся двигателей, известных аэродинамических форм и типов вооружения при конструировании самолета данного назначения; задачи оптимального проектирования автоматических устройств из набора элементов, деталей, узлов и агрегатов с известными характеристиками, задачи выбора технологического процесса изготовления или сборки из большого количества возможных операций и т.п. До сих пор этим задачам уделялось мало внимания, хотя число их очень велико. Последнее обстоятельство объясняется главным образом тем, что математический аппарат для решения подобных задач появился только в последние годы и развит крайне слабо.

Б) Рассмотрим конечное множество X некоторых комбинаций $\bar{x}_i$, $i=1,2,\dots,N$. Примерами таких комбинаций могут быть перестановки из n элементов (число возможных комбинаций $N=n!$), сочетания из n элементов по m $(N=C_n^m)$, последовательности длины n, каждый член которых принимает одно из m значений ($N=m^n$) и т.п. Множество допустимых комбинаций может быть задано и более сложным образом. Например, последовательность длины $n=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ (n-мерный вектор), такая, что x_i принимает одно из m возможных значений и $\varphi_j(x)\leq 0$, $j=1,2,\dots,s$.

Пусть определена функция $f_0(\bar{x}_i)$ на множестве X, т.е. существует алгоритм вычисления $f_0(\bar{x})$ для любой $\bar{x}_i\in X$. При помощи каких-то условий выделены допустимые комбинации, множество которых $X^*\subseteq X$. Требуется определить $\bar{x}\in X^*$, на котором $f_0(\bar{x})$ достигает минимума (максимума).

Решение этих задач чрезвычайно трудно [2]. Для ряда таких задач предложены алгоритмы (иногда эвристические) поиска лучшего решения по сравнению с исходным вариантом. Однако вопрос об оптимальности полученного решения часто остается открытым. Методы α - и β -функционалов позволяют просто получить достаточные условия абсолютного минимума в таких задачах, а иногда подсказывают алгоритмы, с помощью которых можно отыскать решения, удовлетворяющие этим условиям.

§2. Задача о назначениях (проблема выбора)

А) Имеется n механизмов (заводов, станков, людей и т.п.), каждый из которых может быть использован на одном из n видов работ (на выпуске определенного вида продукции, обработке деталей, должностях и т.п.). Производительность их на каждой работе известна (задана в виде квадратной матрицы порядка n). Требуется так распределить механизмы по одному на каждую из работ, чтобы суммарная производительность всех механизмов была максимальной.

В такой задаче $n!$ вариантов. Если $n=20$, то для быстродействующей ЭВМ, просчитывающей I вариант за I микросекунду, потребовалось бы четверть миллиона лет для нахождения оптимального решения.

Математическая задача описывается следующим образом. Найти минимум функции

$$I=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \tag{2.1}$$

при условиях: I) $\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1$, $j=1,2,\dots,n$, 2) $\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1$, $i=1,\dots,n$,
3)

$$x_{ij}=\begin{cases}1\\0\end{cases},\quad i,j=1,\dots,n. \tag{2.2}$$

Первые два условия отражают тот факт, что на одну работу должен быть назначен один механизм (сумма элементов в строке и столбце матрицы равна I), третье условие - что механизм по отношению к данной работе может находиться только в одном из двух состояний: "назначен", " не назначен".

Заметим, что в этой задаче не применим метод множителей Лагранжа, ибо переменные x_{ij} - дискретные и число связей (2.2), равное n^2+2n, больше числа переменных n^2.

Б) Применим метод α -функционала. Возьмем α -функционал в виде

$$\alpha=\sum_{j=1}^{n}\Big(\lambda_j+\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n}a_{j\alpha\kappa}x_{\alpha\kappa}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}x_{ij}-1\Big)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\Big(\nu_i+\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n}b_{i\kappa\alpha}x_{\kappa\alpha}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-1\Big)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}[x_{ij}(x_{ij}-1)], \tag{2.3}$$

где $\lambda_j,\nu_i,\mu_{ij},a_{j\alpha\kappa},b_{i\kappa\alpha}$ - постоянные.

Составим обобщенный функционал

$$J=I+\alpha=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{j=1}^{n}\Big(\lambda_j+\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n}a_{j\alpha\kappa}x_{\alpha\kappa}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}x_{ij}-1\Big)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\Big(\nu_i+\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\kappa=1}^{n}b_{i\kappa\alpha}x_{\kappa\alpha}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-1\Big)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_{ij}[x_{ij}(x_{ij}-1)]. \tag{2.4}$$

Он является непрерывной и дифференцируемой функцией n^2 непрерывных переменных x_{ij}. Необходимое условие экстремума дает

$$\frac{\partial J}{\partial x_{ij}}=c_{ij}+\Big(\lambda_j+\sum_{\alpha}\sum_{\kappa}a_{j\alpha\kappa}x_{\alpha\kappa}\Big)+\sum_{\alpha}a_{\alpha ij}\Big(\sum_{\kappa}x_{\kappa\alpha}-1\Big)+\Big(\nu_i+\sum_{\alpha}\sum_{\kappa}b_{i\kappa\alpha}x_{\kappa\alpha}\Big)+$$
$$+\sum_{\alpha}b_{\alpha ij}\Big(\sum_{\kappa}x_{\alpha\kappa}-1\Big)+\mu_{ij}(2x_{ij}-1)=0$$

или с учетом связей (I.2)

$$\frac{\partial J}{\partial x_{ij}}\Big|_{\bar{x}}=c_{ij}+\lambda_j+\sum_{\alpha}\sum_{\kappa}a_{j\alpha\kappa}x_{\alpha\kappa}\Big|_{\bar{x}}+\nu_i+\sum_{\alpha}\sum_{\kappa}b_{i\kappa\alpha}x_{\kappa\alpha}\Big|_{\bar{x}}+\mu_{ij}(2x_{ij}-1)\Big|_{\bar{x}}=0,\quad i,j=1,2,\dots,n. \tag{2.5}$$

Вычисляя смешанные производные, получим

$$N_{ijk\alpha}=\frac{\partial^2 J}{\partial x_{ij}\partial x_{k\alpha}}=a_{jk\alpha}+a_{\alpha ij}+b_{ik\alpha}+b_{kij}+K,$$

где

$$K=\begin{cases}0, \text{если } i\neq k \text{ или } j\neq\alpha,\\ 2\mu_{ij}, \text{если } i=k \text{ и } j=\alpha.\end{cases}$$

Выражение (2.4) состоит из суммы линейной и квадратичной форм. Для того чтобы точка $\bar{x}$ была единственной абсолютной минималью, такого выражения достаточно, чтобы в этой точке $dJ=0$, $d^2J>0$. Первое требование эквивалентно n^2 равенствам (I.5), второе – тому, что квадратичная форма

$$N_{ijk\alpha}\delta x_{ij}\delta x_{k\alpha}>0, \quad i,j,k,\alpha=1,2,\dots,n$$

должна быть положительно определенной. Напомним, что согласно критерию Сильвестра последнее условие равносильно следующему: миноры M_β, исходящие из левого верхнего угла определителя $|N_{ijk\alpha}|$, должны быть положительны, т.е.

$$M_\beta>0, \quad \beta=1,2,\dots,n^2. \tag{2.6}$$

В частности, необходимо, чтобы все $N_{ijij}>0$.

Выражения (I.5), (I.6) дают n^2 равенств и n^2 неравенств, связывающих числа λ,ν,a,b.

<u>Теорема 2.I</u>. Для того чтобы допустимая комбинация $\bar{x}_{ij}$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ была единственной абсолютной минималью функционала (2.I), достаточно существования таких вектор-констант λ,ν,a,b, при которых выполнялись бы равенства (2.5) и неравенства (2.6).

В самом деле, из (2.5), (2.6) следует: $dJ=0$, $d^2J>0$, т.е. точка $\bar{x}$ является точкой локального минимума. Но для функции вида (2.4) точка строгого локального минимума является точкой глобального минимума.

Предположим, что все числа $a_{i\alpha k}, b_{i\alpha k}$ равны нулю. Тогда элементы определителя $|N_{ij\alpha k}|$, не стоящие на главной диагонали, будут равны нулю. Неравенства (2.6) превратятся в неравенства $N_{ijij}>0$, т.е.

$$2\mu_{ij}>0, \quad i,j=1,2,\dots,n. \tag{2.7}$$

Подставляя сюда μ_{ij} из (I.5) и учитывая, что согласно теории неравенств $\varphi_1(x)/\varphi_2(x)>0$ и $\varphi_1(x)\varphi_2(x)>0$ эквиваленты, получим n^2 неравенств

$$(1-2x_{ij})(\lambda_j+\nu_i+c_{ij})>0, \quad i,j=1,2,\dots,n. \tag{2.8}$$

Здесь не требуется выполнения n^2 неравенств (2.5), ибо они всегда могут быть удовлетворены за счет n^2 величин μ_{ij}. Итак, получаем

<u>следствие I</u>. Для того чтобы допустимая комбинация $\bar{x}_{ij}$ $(i,j=1,\dots,n)$ была единственной абсолютной минималью функционала (2.I), достаточно существования решения у системы неравенств (2.8) относительно неизвестных λ_j,ν_i $(i,j=1,\dots,n)$ на этой комбинации $\bar{x}_{ij}$.

В этом случае проверка некоторой комбнации на абсолютный минимум сводится к решению n^2 неравенств (2.8) с $2n$ неизвестными λ_j,ν_i. Если знак $>$ в (2.6)-(2.8) заменить знаком $\geqslant$, то теорема 2.I по-прежнему будет давать достаточные условия абсолютного минимума, но утверждать единственность решения уже нельзя.

Метод обратной подстановки в данном случае состоит в следующем: задаемся λ_j,ν_i и из (2.8) находим комбинацию $\bar{x}_{ij}$. Если она допустимая (т.е. $\bar{\alpha}=0$), то это – абсолютная минималь функционала (2.I), если нет, $J(\bar{x})$ – есть оценка снизу функционала (2.I). В последнем случае множество, содержащее абсолютную минималь: $M=\{x:\alpha\geqslant\bar{J}\}$, а множество лучших решений: $N=\{x:2I+\alpha\leqslant 2\bar{I}+\bar{\alpha}\}$. Метод максимина будет состоять в таком выборе λ_j,ν_i, чтобы оценка $J(\bar{x})$ возрастала.

§3. <u>Задача целочисленного программирования</u>

А) <u>Постановка задачи</u> [2]. Требуется минимизировать форму

$$I=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \tag{3.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant b_i, \quad i=1,\dots,m, \quad x_j=\begin{cases}1\\0\end{cases}, \quad j=1,\dots,n. \tag{3.2}$$

Б) <u>Решение задачи</u>. Запишем I-е ограничения в (3.2) в виде

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+z_i^2-b_i=0, \quad i=1,\dots,n, \tag{3.3}$$

где z_i – дополнительные переменные.

Согласно гл. II будем искать α-функционал в виде

$$\alpha=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+z_i^2-b_i\Big)+\sum_{j=1}^{n}\mu_j[x_j(x_j-1)]. \tag{3.4}$$

Составляем обобщенный функционал

$$J=I+\alpha=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+z_i^2-b_i\Big)+\sum_{j=1}^{n}\mu_j[x_j(x_j-1)]. \tag{3.5}$$

Здесь λ_i,μ_j – некоторые постоянные. Переменные x_j в (3.5) уже непрерывны. Вычислим первые производные, получим

$$\partial J/\partial x_j=c_j+\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\lambda_i+\mu_j(2x_j-1)=0, \quad j=1,\dots,n, \tag{3.6}$$

$$\partial J/\partial z_i=2\lambda_iz_i=0, \quad i=1,\dots,m. \tag{3.7}$$

Таким образом, если на проверяемом допустимом решении соблюдается строгое неравенство (8.2), то $\bar{x}_i \neq 0$ и из (8.7) имеем $\lambda_i = 0$. Рассуждениями, аналогичными задаче §I, можно показать, что для $d^2J > 0$ достаточно, чтобы

$$\frac{\partial J}{\partial x_j} = (1-2x_j)(c_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i) \geq 0 \ , \quad j=1,\dots,n, \qquad (8.8)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda_i} = 2\lambda_i \geq 0 \ , \quad i=1,\dots,m. \qquad (8.9)$$

Выполнения же условий $dJ=0$, $d^2J>0$ на допустимой комбинации в линейной задаче достаточно, чтобы проверяемое решение было абсолютной минималью (возможно не единственной). Таким образом, доказана

<u>теорема 8.I</u>. Для того чтобы допустимая комбинация $\bar{x}_i$, $i=1,\dots,n$ была абсолютной минималью функционала (8.I) при ограничениях (8.2), достаточно существования таких постоянных λ_i, при которых на этой комбинации выполняются неравенства (8.8), (8.9), а λ_i, соответствующие $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j < b_i$, равны нулю.

Из условий теоремы вытекает, в частности, следующий <u>алгоритм</u> поиска оптимального решения: задаемся в (8.8) λ_i удовлетворяющими (8.9). Из (8.8) находим $\bar{x}_j = \{0,1\}$, удовлетворяющие неравенствам (8.8). Если найденные $\bar{x}_j$ удовлетворяют условиям (8.2), а λ_i, соответствующие $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j < b_i$, равны нулю, то найденное решение является оптимальным; если нет, то получаем оценку снизу величины функционала.

<u>Пример 8.I</u>. Найти минимум

$$I = x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad (8.10)$$

при условиях

$$x_1 + x_2 \leq 1 \ , \quad x_1 + 2x_3 \leq 0. \qquad (8.11)$$

Составляем систему (8.8)

$$\begin{aligned} &(1-2x_1)(1+\lambda_1+\lambda_2) \geq 0, \\ &(1-2x_2)(2+\lambda_1+0) \geq 0, \\ &(1-2x_3)(1+0+2\lambda_2) \geq 0. \end{aligned} \qquad (8.12)$$

Задаемся $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Подставив их в (8.12) видим, что для выполнения неравенств (8.12) необходимо, чтобы $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Эти значения удовлетворяют (8.11), следовательно, согласно теореме 8.I полученное решение оптимально.

<u>Замечание I</u>. Если некоторые выражения (8.2) имеют вид $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, то, повторяя рассуждения, нетрудно установить, что в этом случае соответствующие ограничения (8.9) снимаются.

<u>Литература к главе X</u>

1. А.А.Болонкин. О решении оптимальных задач. В сб.: "Математические вопросы управления производством". Изд. МГУ, вып. 3, 1971, стр. 46-54.
2. А.А.Корбут, Ю.Ю.Финкельштейн. Дискретное программирование. "Наука", 1969.

Глава XI

ЗАДАЧИ С ПРОТИВОДЕЙСТВИЕМ

§I. <u>Задачи с противодействием (конфликтные ситуации с имитацией одним из игроков действий другого игрока</u>)

А) Пусть на множестве $X \times Y$ определены функционалы $I_1(x,y)$ и $I_2(x,y)$. Игрок I, выбирая x из допустимого подмножества $X^* \subset X$, стремится минимизировать функционал $I_1(x,y)$, а игрок 2, выбирая y из допустимого подмножества $Y^* \subset Y$, стремится минимизировать функционал $I_2(x,y)$. Очевидно, что они мешают друг другу, так как $I_i = I_i(x,y)$, $i=1,2$. Пусть коалиция невозможна. Какие $x \in X^*$, $y \in Y^*$ им выбрать?

В соответствии с литературой назовем $X^* \times Y^*$ <u>плацдармом</u>, функционалы I_1, I_2 – <u>целью</u> I-го и 2-го игрока соответственно, законы выбора $x \in X^*$, $y \in Y^*$ – <u>стратегией</u> первого и второго игрока соответственно.

Рассмотрим случай полной взаимной информированности о плацдарме, цели и стратегии.

Пусть каждый из противников действует оптимальным способом.

Введем функционал $\alpha(x,y) = 0$ на $X^* \times Y^*$. По аналогии с гл.II назовем его α -<u>функционалом</u>. Составим обобщенный функционал для первого и второго игроков соотвественно: $J_1 = I_1 + \alpha_1$, $J_2 = I_2 + \alpha_2$, где α_1, α_2 – α-функционалы. Тогда

$$\hat{J}_1 = \inf_X \left[I_1(x,y) + \alpha_1(x,y)\right], \ \hat{x} = \hat{x}(y); \quad \hat{J}_2 = \inf_Y \left[I_2(x,y) + \alpha_2(x,y)\right], \hat{y} = \hat{y}(x) \qquad (1.1)$$

Здесь $\hat{x}(y), \hat{y}(x)$ – абсолютные минимали функционалов J_1 и J_2 соответственно.

Пусть инициатива (право первого выбора) у игрока I. Выполняя операцию (I.1) (имитируя действия второго игрока*/), мы найдем**/

$$y_1 = \arg\inf_{y}\left[I_2(x,y) + \alpha_2(x,y)\right]. \qquad (I.2)$$

Подставляя это $y_1(x)$ в (I.1), с учетом действий второго игрока, получаем

$$\bar{J}_1 = \inf_{x}\left[I_1(x, y_1(x)) + \alpha_1(x, y_1(x))\right]. \qquad (I.3)$$

Пусть $\alpha_1(x,y)$, $\alpha_2(x,y)$ таковы, что $\bar{x}$ из (I.3) принадлежит X^*. Тогда наименьшая величина функционала, которой может достичь второй игрок, будучи информирован о значении $\bar{x}$, равна

$$\bar{J}_2 = \inf_{y}\left[I_2(\bar{x},y) + \alpha_2(\bar{x},y)\right], \qquad (I.4)$$

где

$$\hat{x} = \arg\inf_{x} J(x, y_1(x)).$$

Здесь $\bar{x}$ – фиксированный элемент, $\alpha_2(\bar{x},y)$ – α-функционал. В частности, можно взять $\alpha_2 = \alpha_2$

Если $\bar{y}$ из (I.4) принадлежит Y^* (а $\bar{x} \in X^*$), то очевидно, что пара $\bar{x}, \bar{y}$ дает наименьшее значение функционалов I_1, I_2, которые может достичь каждый из разумных игроков при принятых предположениях. Любое отклонение от этих значений одним из игроков может быть использовано другим игроком для уменьшения своего функционала.

Если полученное из (I.3) $\bar{x} \notin X^*$, то $\bar{J}_1$ дает оценку снизу величины I_1, если $\bar{x} \in X^*$, а $\bar{y} \notin Y^*$, то $\bar{J}_2$ – оценка снизу I_2 для игрока 2.

Путем аналогичных рассуждений можно найти оптимальное решение и для случая, когда инициатива находится у игрока 2. Они без особых затруднений обобщаются на случай, когда действует n игроков, каждый из которых минимизирует свой функционал и игроки по степени (рангу) своей инициативы расположены в определенном порядке.

<u>Замечания.</u> I. Очевидно, что если игроки вступят между собой в коалицию и $I_1 + I_2 \neq 0$, то, минимизируя функционал $\bar{J} = \inf_{x,y}(I_1 + I_2 + \alpha)$, мы получим оптимальное решение в случае $\bar{x}, \bar{y} \in X^* Y^*$ и оценку снизу в противном случае.

2. Коалиция всегда выгодна (неубыточна), ибо в этом случае мы получаем максимум того, что можно извлечь согласованными

---

*/ Т.о. игрок I имеет ранг рефлексии (умственного развития) единицу, а игрок 2 – ранг рефлексии нуль.

**/ Знак $\arg$ означает аргумент.

действиями из "природы" (игра с ненулевой суммой).

Б) Рассмотрим задачу, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями. Пусть первый игрок минимизирует функционал I_1, а его допустимое множество выделено при помощи уравнений $\dot{x}_i = f_i$:

$$I_1 = F_1(x(t_1), x(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,y,u,v)\,dt, \quad \dot{x}_i = f_i(t,x,y,u,v), \quad i = 1,2,\dots,n. \qquad (I.5)$$

Для второго игрока соответственно имеем

$$I_2 = F_2(y(t_1), y(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} \varphi_0(t,x,y,u,v)\,dt, \quad \dot{y}_j = \varphi_j(t,x,y,u,v), \quad j = 1,2,\dots,m. \qquad (I.6)$$

Здесь t_1, t_2 заданы; $x^1, x^2 \in R_1$, $y^1, y^2 \in R_2$, $x^1 = x(t_1)$, $x^2 = x(t_2)$, $y^1 = y(t_1)$, $y^2 = y(t_2)$; $x(t)$ – n-мерная непрерывная кусочно-дифференцируемая функция с $x \in X(t)$; $y(t)$ – m-мерная непрерывная кусочно-дифференцируемая функция с $y \in Y(t)$; $u(t), v(t)$ – кусочно-непрерывные вектор-функции управления с $u \in U$, $v \in V$. Множество функций $x(t)$, $u(t)$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям (в том числе и уравнениям (I.5)), назовем <u>допустимыми</u> и обозначим Q_1, аналогично множество допустимых $y(t)$, $v(t)$ обозначим Q_2, а $Q_1 \times Q_2$ обозначим Q.

Первый игрок минимизирует I_1, выбирая $u(t)$, $u \in U$, и обязан выполнить граничные условия $x^1, x^2 \in R_1$. Второй игрок минимизирует I_2, выбирая $v(t)$, $v \in V$, и обязан выполнить граничные условия $y^1, y^2 \in R_2$.

Возьмем некоторые непрерывные дифференцируемые функции $\psi^{(1)}(t,x,y)$, $\psi^{(2)}(t,x,y)$ и построим α-функционалы в виде

$$\alpha_1 = \psi^{(1)}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\left(\psi^{(1)}_{x_i}\dot{x}_i + \psi^{(1)}_{y_j}\dot{y}_j + \psi^{(1)}_t\right)dt, \quad \alpha_2 = \psi^{(2)}\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\left(\psi^{(2)}_{x_i}\dot{x}_i + \psi^{(2)}_{y_j}\dot{y}_j + \psi^{(2)}_t\right)dt. \qquad (I.7)$$

Тогда обобщенные функционалы можно записать (по повторяющимся индексам производится суммирование):

$$J_1 = F_1 + \psi^{(1)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(f_0 - \psi^{(1)}_{x_i}f_i - \psi^{(1)}_{y_j}\varphi_j - \psi^{(1)}_t\right)dt = A^{(1)}(x^1, x^2) + \int_{t_1}^{t_2} B^{(1)}(t,x,y,u,v)\,dt, \qquad (I.8)$$

$$J_2 = F_2 + \psi^{(2)}\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\varphi_0 - \psi^{(2)}_{x_i}f_i - \psi^{(2)}_{y_j}\varphi_j - \psi^{(2)}_t\right)dt = A^{(2)}(y^1, y^2) + \int_{t_1}^{t_2} B^{(2)}(t,x,y,u,v)\,dt. \qquad (I.9)$$

Смысл введенных обозначений $A^{(1)}, A^{(2)}, B^{(1)}, B^{(2)}$ ясен из (I.8), (I.9). Пусть инициатива у первого игрока. Отыскивая минимум (I.8), (I.9) на расширенном множестве функций $x(t)$, $u(t)$ (не связанных уравнениями (I.5), (I.6)), получим

$$\bar{J}_1 = \inf_{R_1} A^{(1)} + \int_{t_1}^{t_2} \inf B^{(1)}\,dt, \quad \bar{x} = \bar{x}(t, \psi^{(2)}_x, \psi^{(2)}_y, \psi^{(1)}), \quad \bar{u} = \bar{u}(t, x, \psi^{(2)}_x, \psi^{(2)}_y, \psi^{(1)}), \ \bar{x}^1, \bar{x}^2 \qquad (I.10)$$

где в $B^{(1)}, A^{(1)}$ вставлены $(y_1, v_1) = \arg\inf_{y,v} B^{(2)}$, $(y^1, y^2) = \arg\inf_{R_2} A^{(2)}$,

$$\bar{J}_2 = \inf_{R_2} A^{(2)} + \int_{t_1}^{t_2} \inf_{y,v} B^{(2)}\,dt, \quad \bar{y} = \bar{y}(t, \psi^{(2)}_y, \psi^{(2)}), \quad \bar{v} = \bar{v}(t, y, \psi^{(2)}_y), \ \bar{y}^1, \bar{y}^2. \qquad (I.11)$$

200-201

Здесь в $A^{(1)}, B^{(1)}$ вставлены $(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$, $(\bar{x}, \bar{u})$ из (I.10).

Это можно записать в виде следующей совокупности условий:

$$1)\ \inf_{R_1} A_1^{(1)},\ \inf_{u \in U} B_1^{(1)} \quad \text{на } (t_1, t_2), \tag{I.10$'$}$$

$$2)\ \inf_{R_2} A^{(2)},\ \inf_{v \in V} B^{(2)} \quad \text{на } (t_1, t_2). \tag{I.11$'$}$$

Пусть игроки I и 2 полностью информированы друг о друге, т.е. им взаимно известны (I.5), (I.6), U, V, R_1, R_2. Кроме того, пусть инициатива (право первого выбора) находится у игрока I, причем выбранное им значение u становится мгновенно известным игроку 2. Тогда оптимальная стратегия каждого из игроков согласно п. А и (I.10), (I.11) может быть найдена следующим образом (при заданных $\Psi^{(1)}(t,x,v)$, $\Psi^{(2)}(t,x,v)$):

$$\bar{J}_1 = \inf_{R_1} A_1^{(1)} + \int_{t_1}^{t_2} \inf_{u \in U} B_1^{(1)}(t,x,u,v_1(t,x,u), v_2(t,x,u))\,dt,\ \bar{x} = \bar{x}(t),\ \bar{u} = \bar{u}(t), \bar{x}^1, \bar{x}^2, \tag{I.12}$$

$$\bar{J}_2 = \inf_{R_2} A^{(2)} + \int_{t_1}^{t_2} \inf_{v \in V} B^{(2)}(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),y,v)\,dt,\quad \bar{y} = \bar{y}(t),\ \bar{v} = \bar{v}(t), \bar{y}^1, \bar{y}^2. \tag{I.13}$$

Если окажется, что $\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}, \bar{v} \in Q$, то $\bar{x}, \bar{u}, \bar{y}, \bar{v}$ – оптимальное решение при данной информированности игроков. Если $\bar{x}, \bar{u} \notin Q_1$, то $\bar{J}_1$ дает оценку снизу I_1, а если $\bar{x}, \bar{u} \in Q_1$, $\bar{y}, \bar{v} \notin Q_2$, то $\bar{J}_2$ есть оценка снизу I_2.

Рассмотрим некоторые алгоритмы поиска решения.

а) <u>Алгоритм отыскания отдельных экстремалей</u>. Пусть $\Psi^{(1)} = p_i^{(1)}(t) x_i$, $\Psi^{(2)} = p_i^{(2)}(t) y_i$. Тогда необходимые условия минимума (I.10), (I.11) дают

$$B_{x_i}^{(1)} = -\dot{p}_i^{(1)} - H_{x_i}^{(1)} = 0,\ i = 1,2,\ldots,n;\quad B_{y_j}^{(2)} = -\dot{p}_j^{(2)} - H_{y_j}^{(2)} = 0,\ j = 1,2,\ldots,m, \tag{I.14}$$

где $H^{(1)} = p_i^{(1)} f_i - f_0$, $H^{(2)} = p_j^{(2)} \varphi_j - \varphi_0$. Оптимальное управление при этом находим из условий

$$\inf_{u} B^{(1)}(t,x,u,p^{(1)}, v_1(t,x,u,p^{(2)}), v_2(t,x,u,p^{(2)})),\quad \inf_{v} B^{(2)}(t,\bar{x},\bar{u},y,v,p^{(2)}), \tag{I.15}$$

где v_1, v_2 – минималь выражения $\inf_{v} B^{(2)}(t,x,u,y,v,p^{(2)})$.

Граничные условия определяются из

$$\inf_{R_1} A^{(1)}(x^1, x^2, \Psi^{(1)}\big|_{1}^{2}) > -\infty,\quad \inf_{R_2} A^{(2)}(y^1, y^2, \Psi^{(2)}\big|_{1}^{2}) > -\infty. \tag{I.16}$$

Решая краевую задачу для системы (I.5), (I.6), (I.14) при краевом условии (I.16) и отыскивая при этом управление по (I.15), мы найдем решение, удовлетворяющее только части требований (I.10), (I.11). По аналогии с вариационным исчислением назовем его экстремалью. Экстремаль может быть минималью, но может и не быть. Для установления ее оптимальности приходится привлекать дополнительные условия, на которых мы здесь останавливаться не будем.

б) Условия (I.10), (I.11) будут выполнены, если $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$ подобрать таким образом, что $B^{(1)}, B^{(2)}$ перестанут зависеть от x, y. Очевидно, что для этого достаточно решить следующую систему двух уравнений с частными производными с двумя неизвестными функциями $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}$:

$$\inf_{u}(f_0 - \Psi_{x_i}^{(1)} f_i - \Psi_{y_j}^{(1)} \varphi_j - \Psi_t^{(1)}) = 0,\quad \inf_{v}(\varphi_0 - \Psi_{x_i}^{(2)} f_i - \Psi_{y_j}^{(2)} \varphi_j - \Psi_t^{(2)}) = 0. \tag{I.17}$$

Здесь в первое уравнение (I.17) подставлено $v_1(t,x,u,\Psi_y^{(2)},\Psi_t^{(2)})$, $v_2(t,x,u,\Psi_y^{(2)})$ из второго уравнения (I.17) и найденное после этого $\bar{x}, \bar{u}$ из первого уравнения подставлено во второе.

Пусть конечные значения $x(t), y(t)$ при t_1, t_2 в (I.5), (I.6) таковы:

$$F_1 = F_{11}(x(t_1)),\quad F_2 = F_{22}(y(t_2)). \tag{I.18}$$

Тогда в качестве краевого условия для (I.17) можно взять (левый конец задан):

$$F_{12}(x(t_2)) + \Psi^{(1)}(t_2, x(t_2)) = 0,\quad F_{22}(y(t_2)) + \Psi^{(2)}(t_2, y(t_2)) = 0. \tag{I.19}$$

Т.е. при $t = t_2$ функционалы должны обращаться в нуль.

<u>Замечания: В.</u> Мы рассмотрели случай фиксированного интервала времени $[t_1, t_2]$. Если одно из значений t_1, t_2 (или оба) не фиксировано (пусть для определенности t_2), то (I.10$'$), (I.11$'$) принимают вид:

$$1)\ \inf_{t_2, R_1} A_1^{(1)},\ \inf_{u \in U} B_1^{(1)} = 0 \quad \text{на } (t_1, t_2).\qquad 2)\ \inf_{t_2, R_2} A^{(2)},\ \inf_{v \in V} B^{(2)} = 0 \quad \text{на } (t_1, t_2).$$

4. Можно показать, что, если существуют функции $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}$ и хотя бы одна допустимая совокупность $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}$, удовлетворяющие (I.10$'$), (I.11$'$), то любая другая совокупность $\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}$, удовлетворяющая (I.10$'$), (I.11$'$), есть оптималь нашей задачи и любая допустимая оптималь рассматриваемой задачи удовлетворяет (I.10$'$), (I.11$'$).

В отдельных случаях синтез удается построить простыми средствами. Пусть $n = m = 1$, система (I.5), (I.6) имеет вид:

$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} f_0(x,y,u,v)\,dt,\ \dot{x} = f(x,y,u,v),\ u \in U;\quad I_2 = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_0(x,y,u,v)\,dt,\ \dot{y} = \varphi(x,y,u,v),\ v \in V.$$

Значение t_2 не задано, правый конец $x(t)$ свободен. Возьмем $\Psi^{(1)} = \Psi^{(1)}(x)$, $\Psi^{(2)} = \Psi^{(2)}(x)$. Находим $\bar{u}(x,y,\Psi_x,\Psi_y)$, $\bar{v}(x,y,\Psi_x,\Psi_y)$ по (I.15). Подставляя их в $B^{(1)}, B^{(2)}$ и приравнивая $B^{(1)}(x,y,\Psi_x,\Psi_y) = 0$, $B^{(2)}(x,y,\Psi_x,\Psi_y) = 0$, находим из этих уравнений $\Psi_x(x), \Psi_y(x)$ (если это возможно) и, подставляя их в $\bar{u}, \bar{v}$, получаем оптимальный синтез.

в) Коснемся кратко случая, когда инициатива постоянно переходит от игрока к игроку. Пусть в каждую единицу времени t

202-203

она находится $\alpha_1(t)$ времени у игрока I и $\alpha_2(t)$ времени – у игрока 2. Непрерывные заданные функции $\alpha_1(t), \alpha_2(t)$ должны удовлетворять условию $\alpha_1(t)+\alpha_2(t)=1$. Конечные значения $x(t), y(t)$ заданы.

Тогда (I.5), (I.6) можно записать:

$$I_1 = F_1 + \int_{t_1}^{t_2} (\alpha_1 f_{01} + \alpha_2 f_{02})\, dt, \quad \dot{x}_i = \alpha_1 f_{i1} + \alpha_2 f_{i2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{I.20}$$

$$I_2 = F_2 + \int_{t_1}^{t_2} (\alpha_1 \varphi_{01} + \alpha_2 \varphi_{02})\, dt, \quad \dot{y}_j = \alpha_1 \varphi_{j1} + \alpha_2 \varphi_{j2}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \tag{I.21}$$

Здесь добавочный нижний индекс I, 2 у f, φ означает, что как эти функции, так и входящие в них управления вычислены при инициативе у игрока I и 2 соответственно. Выражения (I.10), (I.11) примут вид:

$$\mathcal{J}_1 = A_1^{(\omega)} + \int_{t_1}^{t_2} (\alpha_1 \inf_{x \in U} B_1^{(\omega)} + \alpha_2 \inf_{x \in U} B_1^{(\omega)})\, dt, \tag{I.22}$$

$$\mathcal{J}_2 = A^{(\omega)} + \int_{t_1}^{t_2} (\alpha_1 \inf_{y \in V} B_2^{(\omega)} + \alpha_2 \inf_{y \in V} B_2^{(\omega)})\, dt. \tag{I.23}$$

В результате, вообще говоря, мы получим скользящий режим. Скользящий режим неизбежно появится и в задаче (I.10), (I.11), если противники не информированы об управлении друг друга и применяют смешанные стратегии.

Г) Можно в качестве α-функционала брать функции $\alpha_1(x,y,z)$, $z \in Z$ и $\alpha_2(x,y,w)$, $w \in W$ – такие, что $\alpha_1 = 0$ на $X^* \times Y^* \times Z$, $\alpha_2 = 0$ на $X^* \times Y^* \times W$. Тогда аналогично гл. III выражения (I.3), (I.4) можно записать:

$$\bar{\mathcal{J}}_1(w) = \sup_{Z} \inf_{X} \left[I_1(x, y_1(x,w)) + \alpha_1(x, y_1(x,w), z) \right], \quad \bar{x} = \bar{x}(w), \tag{I.24}$$

где $y_1 = \arg\inf_{Y} \mathcal{J}_2(x, y, w)$,

$$\bar{\mathcal{J}}_2 = \sup_{W} \inf_{Y} \left[I_2(\bar{x}(w), y) + \alpha_2(\bar{x}(w), y, w) \right], \quad \bar{y}. \tag{I.25}$$

Здесь справедлива теорема, аналогичная теореме I.1 гл. III.

Теорема I.I. Пусть 1) $\alpha_1(x, y_1(x,w), z) = 0$, $\alpha_2(\bar{x}(w), y, w) = 0$ только на $X^* \times Y^*$ при $\forall (z,w) \in Z \times W$. 2) $\alpha(x, y_1(x,w), z)$ таково, что для $\forall (x,w) \in (X \times W - X^* \times W)$ найдется $z \in Z$ такое, при котором $\mathcal{J}_1(x,w,z) > I_1(\bar{x},\bar{y})$; $\alpha_2(\bar{x}(w), y, w)$ таково, что для $\forall (y, \bar{x}) \in (X \times Y - X^* \times Y^*)$ найдется $w \in W$ такое, при котором $\mathcal{J}_2(\bar{x}, y, w) > I_2(\bar{x}, \bar{y})$.

3) Существуют пары, удовлетворяющие условиям (I.24), (I.25).

4) $\mathcal{J}_1(\bar{x}, w, z) \le \mathcal{J}_1(\bar{x}, w, \bar{z})$ на Z; $\mathcal{J}_2(\bar{y}, w) \le \mathcal{J}_2(\bar{y}, \bar{w})$ на W.

Тогда: 1) элементы $\bar{x} \in X^*$, $\bar{y} \in Y^*$, 2) пара $(\bar{x}, \bar{y})$ является оптимальн игры.

Доказательство ее однотипно доказательству теоремы I.I, гл. III.

Замечание 5. Из (I.24), (I.25) и п. 4 теоремы следует, что $\mathcal{J}_1(\bar{x}, w, z) \le \mathcal{J}_1(\bar{x}, w, \bar{z})$ на W и $\mathcal{J}_2(\bar{y}, w) \le \mathcal{J}_2(\bar{y}, \bar{w}) \le \mathcal{J}_2(y, \bar{w})$, т.е. пары $(\bar{x}, \bar{z})$, $(\bar{y}, \bar{w})$ являются седловыми точками[*] функционалов $\mathcal{J}_1(x, w, z)$ при $\forall w \in W$ и $\mathcal{J}_2(y, w)$.

Д) Рассмотрим бегло применение данного подхода для игры с нулевой суммой. Пусть на $X \times Y$ определен функционал $I(x,y)$. Допустимое подмножество есть $X^* \times Y^*$, $X^* \subset X$, $Y^* \subset Y$. Игрок I выбирает $x \in X^*$ (первым), стремясь минимизировать $I(x,y)$ (и имитируя действия игрока 2), а игрок 2 выбирает $y \in Y^*$, зная выбор игрока I и стремясь максимизировать $I(x,y)$. Оба они информированы о $I(x,y)$, $X^* \times Y^*$, $X \times Y$.

Введем функционал $\alpha(x,y) = 0$ на $X^* \times Y^*$. Построим обобщенный функционал $\mathcal{J}(x,y) = I(x,y) + \alpha(x,y)$. Найдем вначале $\mathcal{J}_1 = \inf_{x} \mathcal{J}(x, y_1(x)), \bar{x}$, где $y_1(x) = \arg\sup_{y} \mathcal{J}(x,y)$, а затем $\bar{\mathcal{J}}_2 = \sup_{y} \mathcal{J}(\bar{x}, y), \bar{y}$. Если $\bar{x} \in X^*$, $\bar{y} \in Y^*$, то это – оптималь поставленной задачи. В силу $\alpha(x,y) = 0$ на $X^* \times Y^*$ всегда имеется неравенство $\mathcal{J}_1 \le I$ на Y, т.е. $\mathcal{J}_1$ является оценкой снизу для первого игрока в случае оптимального поведения второго. Если $\bar{x} \in X^*$, а $\bar{y} \notin Y^*$, то значение $\mathcal{J}_2 \ge I$, т.е. является оценкой сверху для второго игрока в случае оптимального поведения первого.

В частности, для задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (в векторном виде), имеем (в предложениях п. Б):

$$I = F(x^1, x^2, y^1, y^2) + \int_{t_1}^{t_2} f_0(t, x, y, u, v)\, dt, \quad \dot{x} = f(t, x, y, u, v), \quad \dot{y} = \varphi(t, x, y, u, v). \tag{I.26}$$

Возьмем дифференцируемую функцию $\Psi(t, x, y)$ и построим α-функционал в виде $\alpha = \Psi \Big|_1^2 - \int_{t_1}^{t_2} (\Psi_x f + \Psi_y \varphi + \Psi_t)\, dt$.

Обобщенный функционал будет иметь вид

$$\bar{\mathcal{J}} = F + \Psi \Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} (f_0 - \Psi_x f - \Psi_y \varphi - \Psi_t)\, dt = A + \int_{t_1}^{t_2} B\, dt. \tag{I.27}$$

Вычисляя его максимин по $x(t), y(t), u(t), v(t)$, не связанным уравнениями (I.23), получим (инициатива у первого игрока)

$$\bar{\mathcal{J}} = \sup_{R_2} \inf_{R_1} A + \int_{t_1}^{t_2} \sup_{y \in V} \inf_{x \in U} B\, dt. \tag{I.28}$$

Здесь оптимальное решение находится следующим образом

$$\left. \begin{aligned} &(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \arg\inf_{R_1} A[x^1, x^2, y_1^1(x^1, x^2), y_1^2(x^1, x^2)], \\ &(y_1^1, y_1^2) = \arg\sup_{R_2} A(x^1, x^2, y^1, y^2), \quad (\bar{y}^1, \bar{y}^2) = \arg\inf_{R_2} A(\bar{x}^1, \bar{x}^2, y^1, y^2), \end{aligned} \right\} \tag{I.29}$$

---

[*] Для этого аргументы в играх надо поменять местами.

204-205

$$(\bar{u},\bar{v}) = \arg \inf_{u} B_1[t,x,u,v_1(t,x,u),v_1(t,x,u)],$$
$$(v_1,\bar{v}_1) = \arg \sup_{v} B(t,x,u,v,v), \quad (\bar{v},\bar{v}) = \arg \sup_{v} B(t,\bar{x},\bar{u},v,v). \qquad (I.30)$$

Пусть
$$F = F_2(x(t_2)), \qquad (I.31)$$
и левый конец задан.

Если выбрать функцию $\Psi(t,x,y)$ так, чтобы она удовлетворяла уравнению в частных производных
$$\sup_{v} \inf_{u} (f_0 - \Psi_x f - \Psi_y \varphi - \Psi_t) = 0 \qquad (I.32)$$
при краевом условии $F_2 + \Psi_2 = 0$, то все условия (I.28) будут выполнены и мы получим поле оптимальных решений. Другой метод состоит в задании $\Psi = p_1(t)x + p_2(t)y$ и в решении краевой задачи для системы $\dot{p}_1 = -B_x, \dot{p}_2 = -B_y$, совместно с (I.26) при краевом условии $\sup_{v} \inf_{u} \lambda > -\infty$ и управлении, определяемом выражением $\sup_{v} \inf_{u} B$. Он даёт только решение, подозрительное на оптимум – экстремаль.

Выполнение граничных условий по $x(t)$ является заботой игрока I, а по $y(t)$ – заботой игрока 2. Задача типа (I.26) рассматривалась в [2].

В случае движения с переходом инициативы с заданными весовыми функциями $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ (I.26), (I.27) принимают вид
$$I = F + \int_{t_1}^{t_2} (\alpha_1 f_{01} + \alpha_2 f_{02})\,dt, \quad \dot{x} = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \quad \dot{y} = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \qquad (I.33)$$
$$J = \sup_{x_2} \inf_{x_1} A + \int_{t_1}^{t_2} \left(\sup_{v} \inf_{u} \alpha_1 B_1 + \inf_{u} \sup_{v} \alpha_2 B_2\right) dt. \qquad (I.34)$$

Движение может быть реализовано только в скользящем режиме. Скользящий режим также неизбежно возникает, когда игроки не получают информации об управлении противника, седловая точка у $B(u,v)$ отсутствует и применяются смешанные стратегии.

Пусть при $n = 1$ система (I.26) такова:
$$I = \int_{t_1} f_0(x,u,v)\,dt, \quad \dot{x} = f(x,u,v), \quad u \in U,$$
где t_2 не задано, правый конец $x(t)$ свободен. Возьмем $\Psi = \Psi(x)$, найдем по (I.30) $\bar{u}(x,\Psi_x)$, $\bar{v}(x,\Psi_x)$. Подставляя их в B и приравнивая $\bar{B}(x,\Psi_x) = 0$, находим (если это возможно) из этого уравнения Ψ_x и, подставляя его в $\bar{u}, \bar{v}$, получаем оптимальный синтез.

§2. Численные методы отыскания отдельных минималей задач с противодействием

А) Применим идеи первого численного алгоритма (гл. IУ §I) к задаче с противодействием. Предварительно для удобства x и y

в (I.5), (I.6) гл. П обозначим единым $(n+m)$-мерным вектором x. Пусть для простоты $F_1 = F_2 = 0$. Тогда (I.5), (I.6) примут вид:
$$I_1 = \int_{t_1}^{t_2} f_0(t,x,u,v)\,dt, \quad I_2 = \int_{t_1}^{t_2} \varphi_0(t,x,u,v)\,dt, \quad \dot{x}_i = f_i(t,x,u,v), \; i = 1,\dots,n+m \qquad (2.1)$$
Здесь $t_1, t_2, x^1 = x(t_1), x^2 = x(t_2)$ заданы, $x(t)$ – $(n+m)$-мерная непрерывная кусочно-дифференцируемая вектор-функция с $x \in X(t)$, $u(t), v(t)$ – r и ℓ-мерные соответственно кусочно-непрерывные вектор-функции управления $u \in U$, $v \in V$. Множество допустимых $x(t), u(t), v(t)$, удовлетворяющих всем перечисленным условиям, в том числе и уравнениям (2.I), обозначим Q.

Полагаем $\Psi^{(1)} = y_{1i} x_i$, $\Psi^{(2)} = y_{2i} x_i$ и составляем обобщенные функционалы:
$$J_1 = x_i y_{1i} \Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} (f_0 - y_{1i} f_i - \dot{y}_{1i} x_i)\,dt = A^{(1)} + \int_{t_1}^{t_2} B^{(1)} dt, \qquad (2.2)$$
$$J_2 = x_i y_{2i} \Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} (\varphi_0 - y_{2i} f_i - \dot{y}_{2i} x_i)\,dt = A^{(2)} + \int_{t_1}^{t_2} B^{(2)} dt. \qquad (2.3)$$
Смысл введенных обозначений A, B ясен из (2.2), (2.3). Исключим u и v из $B^{(1)}$ (2.2), $B^{(2)}$ (2.3) при помощи условий (инициатива у первого игрока):
$$\bar{u} = \arg \inf_{u} B^{(1)}(t,x,y,\dot{y},u,v_1(t,x,y,u)),$$
$$\bar{v} = \arg \inf_{v} B^{(2)}(t,x,y,\dot{y},v,\bar{u}), \quad v_1 = \arg \inf_{v} B^{(2)}(t,x,y,\dot{y},u,v). \qquad (2.4)$$

Получим:
$$\bar{J}^{(1)} = A^{(1)} + \int_{t_1}^{t_2} \bar{B}^{(1)}(t,x,y,\dot{y})\,dt, \quad \bar{J}^{(2)} = A^{(2)} + \int_{t_1}^{t_2} \bar{B}^{(2)}(t,x,y,\dot{y})\,dt, \qquad (2.5)$$
где $y = \{y_{1i}, y_{2i}\}$. Пусть $A^{(\kappa)}$ – непрерывные и дифференцируемые функции своих аргументов, $B^{(\kappa)}$ – непрерывные и дифференцируемые функции x, y, u, v, $\bar{u}, \bar{v}$ – непрерывные и дифференцируемые функции x, y. Зададимся некоторой траекторией $\bar{x}(t)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям с $x \in Q$ и непрерывной кусочно-дифференцируемой функцией $\bar{y}(t)$, подставим их в (2.5) и вычислим вариацию функционалов (2.5) относительно $\bar{x}(t), \bar{y}(t)$:
$$\delta \bar{J}^{(\kappa)} = \delta A^{(\kappa)} + \int_{t_1}^{t_2} \Big(B^{(\kappa)}_{x_i} \delta x_i + B^{(\kappa)}_{u_j} \bar{u}^j_{x_i} \delta x_i + B^{(\kappa)}_{v_s} \bar{v}^s_{x_i} \delta x_i + B^{(\kappa)}_{y_i} \delta y_i +$$
$$+ B^{(\kappa)}_{u_j} \bar{u}^j_{y_i} \delta y_i + B^{(\kappa)}_{v_s} \bar{v}^s_{y_i} \delta y_i + B^{(\kappa)}_{\dot{y}_i} \delta \dot{y}_i\Big)\,dt, \quad \begin{matrix} \kappa = 1, & i = 1,\dots,n; \\ \kappa = 2, & i = n+1,\dots,n+m. \end{matrix} \qquad (2.6)$$
Слагаемые $B^{(\kappa)}_{u_j} \bar{u}^j_{x_i} = B^{(\kappa)}_{u_j} \bar{u}^j_{y_i} = B^{(\kappa)}_{v_s} \bar{v}^s_{x_i} = B^{(\kappa)}_{v} \bar{v}_{y_i} \equiv 0$, ибо в открытой области $B^{(\kappa)}_{u_j} = B^{(\kappa)}_{v_s} = 0$, а на границе $\bar{u}^j_{x_i} = \bar{u}^j_{y_i} = \bar{v}^s_{x_i} = \bar{v}^s_{y_i} \equiv 0$, так как границы $U(t), V(t)$ не зависят ни от x, ни от y:
$$\delta A^{(\kappa)} = y_i \delta x_i \Big|_1^2 + x_i \delta y_i \Big|_1^2.$$

Последнее слагаемое под интегралами в (2.6) проинтегрируем по частям: $\int_{t_1}^{t_2} B_{\dot{y}_i}^{(\kappa)}\delta\dot{y}_i\,dt = -x_i\delta y_i\Big|_1^2 - \int_{t_1}^{t_2}\dot{B}_{\dot{y}_i}^{(\kappa)}\delta y_i\,dt.$

С учетом этих замечаний выражение (2.6) запишем:

$$\delta J^{(\kappa)} = y_i\delta x_i\Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2}\left[B_{x_i}^{(\kappa)}\delta x_i + \left(B_{y_i}^{(\kappa)} - \dot{B}_{\dot{y}_i}^{(\kappa)}\right)\delta y_i\right]dt, \qquad (2.7)$$

$$\kappa = 1,\ i = 1,2,\dots,n;\quad \kappa = 2,\ i = n+1,\dots,n+m.$$

Здесь $B_{x_i}^{(\kappa)} = -\dot{y}_i - H_{x_i}^{(\kappa)}$, $B_{y_i}^{(\kappa)} - \dot{B}_{\dot{y}_i}^{(\kappa)} = \dot{x}_i - f_i$, $\delta x_i\big|_1 = \delta x_i\big|_2 = 0$, так как концы $x(t)$ фиксированы, а $H^{(1)} = y_i f_i - f_0$, $H^{(2)} = y_i f_i - \varphi_0$. Пусть выполнение n уравнений (2.1) – забота игрока I, а выполнение оставшихся $(m-n)$ уравнений (2.1) – забота игрока 2. Полагаем

$$\delta x_i = -\tau_1 B_{x_i}^{(1)} = \tau_1(\dot{y}_i + H_{x_i}^{(1)}),\quad \delta y_i = \tau_2(\dot{x}_i - f_i),\ i = 1,2,\dots,n, \qquad (2.8)$$

$$\delta x_j = -\tau_1 B_{x_j}^{(2)} = \tau_1(\dot{y}_j + H_{x_j}^{(2)}),\quad \delta y_j = \tau_2(\dot{x}_j - f_j),\ j = n+1,\dots,n+m, \qquad (2.9)$$

где

$$\tau_1 = \begin{cases} \tau = const & \text{на } (t_1,t_2), \\ 0, & \text{когда } t = t_1,\ t = t_2, \end{cases}$$

либо $\tau_1 = \tau(t_1 - t)(t_2 - t)$, $\tau_2 = \tau = const$ на $[t_1, t_2]$.

Новая траектория:

$$x_{i,p+1} = x_{i,p} + \delta x_{i,p},\quad y_{i,p+1} = y_{i,p} + \delta y_{i,p}. \qquad (2.10)$$

Здесь $p = 1,2,\dots$ – номер итерации. Она может быть взята в качестве новой опорной траектории и т.д. Известно, что если шаг t выбрать достаточно малым, то процесс (2.8)-(2.10) приводит в седловые точки функционалов: $J^{(1)}(x,y)$, где x,y – вектора с компонентами x_i, y_i, $i = 1,2,\dots,n$; $J^{(2)}(x,y)$, где x,y – вектора с компонентами x_j, y_j, $j = n+1,\dots,n+m$. Отсюда, в силу замечания 4, следует, что тройка $\bar{x}, \bar{u}, \bar{v} \in Q$ является сильной относительной оптималью игры при принятых предположениях. Здесь $\bar{u}, \bar{v}$ находятся по (2.4).

Если конец $x_i(t_2)$ свободен, то полагаем соответствующее $y_i(t_2) = 0$, $\tau_1(t_2) = \tau$, а $\tau_2(t_2) = 0$. Аналогично для $x_i(t_1)$. Если имеются ограничения на фазовые координаты вида $\Gamma_{1i}(t) \le x_i \le \Gamma_{2i}(t)$, то значения $x_{ip}(t)$, выходящие за границу, следует полагать равными граничным значениям.

Для задачи (I.26) (игры с нулевой суммой) изменения коснутся (2.4) (инициатива у первого игрока):

$$\bar{u} = \arg\inf_u B(t,x,u,y,\dot{y},v_1(t,x,y,\dot{y},u)),\quad v_1 = \arg\sup_v B(t,x,y,\dot{y},u,v), \qquad (2.11)$$

$$\bar{v} = \arg\sup_v B(t,x,y,\dot{y},v,\bar{u}). \qquad (2.12)$$

Кроме того, в (2.8), (2.9) $H^{(1)} = H^{(2)} = f_0 - y_i f_i$, а в правых частях выражений (2.9) надо изменить знак.

Б) Метод улучшения фазовой траектории (см.гл.IУ) в данном случае будет состоять в следующем. Пусть выполнение n уравнений (2.I) – забота игрока I, а выполнение оставшихся m -уравнений (2.I) – забота игрока 2. Заменим задачи (2.I) задачей:

$$J^{(1)}(x,u,v,a) = \int_{t_1}^{t_2}\left[f_0 + \frac{a_i}{2}(\xi_i - f_i)^2\right]dt,\quad \dot{x}_i = \xi_i,\ i = 1,\dots,n, \qquad (2.13)$$

$$J^{(2)}(x,u,v,a) = \int_{t_1}^{t_2}\left[\varphi_0 + \frac{a_j}{2}(\xi_j - f_j)^2\right]dt,\quad \dot{x}_j = \xi_j,\ j = n+1,\dots,m+n, \qquad (2.14)$$

где $a_i > 0$, t_1, t_2, $x(t_1), x(t_2)$ заданы. Нетрудно видеть, что добавки в (2.13), (2.14) являются α -функционалами, ибо на допустимых кривых $\xi_i = f_i$ и $\alpha = 0$. Полагаем $\Psi^{(1)} = p_i(t)x_i$, $\Psi^{(2)} = p_j(t)x_j$. Тогда

$$J^{(1)} = p_i x_i\Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2}\left[f_0 + \frac{a_i}{2}(\xi_i - f_i)^2 - p_i\xi_i - \dot{p}_i x_i\right]dt = p_i x_i\Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} B^{(1)}dt,\quad i = 1,2,\dots,n, \qquad (2.15)$$

$$J^{(2)} = p_j x_j\Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2}\left[\varphi_0 + \frac{a_j}{2}(\xi_j - f_j)^2 - p_j\xi_j - \dot{p}_j x_j\right]dt = p_j x_j\Big|_1^2 + \int_{t_1}^{t_2} B^{(2)}dt,\quad j = n+1,\dots,n+m. \qquad (2.16)$$

Исключим u, v из $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ при помощи условий (2.4), где $y = p$ и в правые части войдет еще аргумент ξ. Получим выражение типа (2.5). Пусть $J^{(1)}, J^{(2)}$ – непрерывные и дифференцируемые функции x, u, v, ξ. Зададимся некоторой траекторией $\bar{x}(t)$, удовлетворяющей заданным краевым условиям $x \in G$, подставим ее в (2.15), (2.16) и вычислим вариации $\delta J^{(1)}$, $\delta J^{(2)}$ относительно $\bar{x}(t)$, учитывая, что концы $x(t)$ фиксированы. Получим

$$\delta J^{(\kappa)} = \int_{t_1}^{t_2}\left(B_{\xi_i}^{(\kappa)}\delta\xi_i + B_{u_j}^{(\kappa)}\bar{u}_{\xi_i}^j\delta\xi_i + B_{v_\kappa}^{(\kappa)}\bar{v}_{\xi_i}^\kappa\delta\xi_i + B_{x_i}^{(\kappa)}\delta x_i + B_{u_j}^{(\kappa)}\bar{u}_{x_i}^j\delta x_i + B_{v_\kappa}^{(\kappa)}\bar{v}_{x_i}^\kappa\delta x_i\right)dt \qquad (2.17)$$

$$\kappa = 1,\ i = 1,2,\dots,n;\quad \kappa = 2,\ i = n+1,\dots,n+m.$$

В силу тех же причин, что и в п. А,

$$B_{u_j}^{(\kappa)}\bar{u}_{\xi_i}^j = B_{v_\kappa}^{(\kappa)}\bar{v}_{\xi_i}^\kappa = B_{u_j}^{(\kappa)}\bar{u}_{x_i}^j = B_{v_\kappa}^{(\kappa)}\bar{v}_{x_i}^\kappa = 0. \qquad (2.18)$$

Выбирая $p_i(t)$ так, чтобы (по i – не сумма)

$$B_{\xi_i}^{(\kappa)} = a_i(\xi_i - f_i) - p_i = 0, \qquad (2.19)$$

вариацию (2.19) можно переписать

$$\delta J^{(\kappa)} = \int_{t_1}^{t_2} B_{x_i}^{(\kappa)}\delta x_i\,dt,\quad \kappa = 1,2, \qquad (2.20)$$

где

$$B_{x_i}^{(1)} = \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - p_j\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \dot{p}_j = \frac{\partial f_0}{\partial x_i} - a_j(\dot{x}_j - f_j)\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - a_j(\ddot{x}_j - \dot{f}_j),\quad i,j = 1,2,\dots,n,$$

$$B_{x_i}^{(2)} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i} - p_j\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \dot{p}_j = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i} - a_j(\dot{x}_j - f_j)\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - a_j(\ddot{x}_j - \dot{f}_j),\quad i,j = n+1,\dots,m+n. \qquad (2.21)$$

Полагаем в (2.21) $\delta x_i = -\tau_\kappa(t)B_{x_i}^{(\kappa)}$, где $\tau_\kappa(t) > 0$ на (t_1, t_2) и $\tau_\kappa(t_1) = \tau_\kappa(t_2) = 0$, $\kappa = 1,2$. Тогда (2.21) можно переписать:

$$\delta J^{(1)} = -\int_{t_1}^{t_2}\tau_1(t)\sum_{i=1}^{n} B_{x_i}^{(1)2}dt,\quad \delta J^{(2)} = -\int_{t_1}^{t_2}\tau_2(t)\sum_{j=n+1}^{n+m} B_{x_j}^{(2)2}dt. \qquad (2.22)$$

208-209

Отсюда видно, что, выбирая $\tau_*(t)$ с достаточно малым $\max_t \tau(t)$ мы уменьшим величину функционала. Новая траектория такова: $x_{i,\beta+1}=x_{i,\beta}+\delta x_{i,\beta}, \beta=1,\ldots$ где β – номер итераций. Управление при этом находим по (2.4). Если конец $x_i(t_2)$ свободен, то полагаем соответствующее $\tau_i(t_2)=const>0$. В случае ограничений вида $\Gamma_{1i}(t)<x_i<\Gamma_{2i}(t)$ значения $x_{\kappa,\beta}(t)$, выводящие за границу, следует брать равными граничным значениям.

Для игры с нулевой суммой $B^{(1)}=B^{(2)}$ и управление находят по (2.II), (2.I2) и $\tau_2(t)<0$.

Недостаток методов п. А, Б состоит в том, что найденные таким способом решения только локально оптимальны. В вариационном исчислении их аналогом являются сильные относительные минимали.

В) Рассмотрим метод спуска в пространстве управлений для задачи (2.I). Пусть выполнение краевых условий при t_1, t_2 для вектор-функции $x=\{x_1,\ldots,x_n\}$ является заботой игрока I, а выполнение краевых условий для вектор-функции $x=\{x_{n+1},\ldots x_{n+m}\}$ – заботой игрока 2. Возьмем $\Psi=p_i(t)x_i$ и составим обобщенные функционалы:

$$J_1=x_i p_i\Big|_1^2+\int_{t_1}^{t_2}(f_0-p_i f_i-\dot p_i x_i)dt=A^{(1)}+\int_{t_1}^{t_2}B^{(1)}dt,\ i=1,2,\ldots,n, \qquad (2.23)$$

$$J_2=x_i p_i\Big|_1^2+\int_{t_1}^{t_2}(\varphi_0-p_i f_i-\dot p_i x_i)dt=A^{(2)}+\int_{t_1}^{t_2}B^{(2)}dt,\ i=n+1,\ldots,n+m,\ \alpha=1,\ldots,\tau. \qquad (2.24)$$

Исключим V из (2.23) при помощи выражения

$$V_1=\arg\inf_V B^{(1)}. \qquad (2.25)$$

Зададимся допустимым управлением $\bar u(t)$. Подставим $\bar u(t)$ и V_1 из (2.25) в (2.I):

$$\dot x_i=f_i(t,x,\bar u(t),V_1(t,x,p,\bar u(t)), \qquad (2.26)$$

а также в (2.23), (2.24). Запишем вариацию функционалов $J_1 J_2$ относительно указанных функций:

$$\delta J_1=\delta A^{(1)}+\int_{t_1}^{t_2}(\bar B^{(1)}_{1x_i}\delta x_i+\bar B^{(1)}_{1u_j}\delta u_j)dt,\ i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,\tau, \qquad (2.27)$$

$$\delta J_2=\delta A^{(2)}+\int_{t_1}^{t_2}(B^{(2)}_{x_i}\delta x_i+\bar B^{(2)}_{1v_\alpha}v^*_{1x_i}\delta x_i)dt,\ i=n+1,\ldots,n+m,\ \alpha=1,\ldots,\tau. \qquad (2.28)$$

Здесь, как и ранее, $v_{1x_i}\delta x_i=0$. Будем выбирать $p_i(t)$ так, чтобы $B^{(\kappa)}_{x_i}=0$, т.е. чтобы они удовлетворяли следующей системе дифференциальных уравнений:

$$B^{(1)}_{x_i}\equiv-\dot p_i-\bar H^{(1)}_{1x_i}=0,\ i=1,2,\ldots,n;\ B^{(2)}_{x_i}\equiv-\dot p_i-\bar H^{(2)}_{x_i}=0,\ i=n+1,\ldots,n+m, \qquad (2.29)$$

где
$$\bar H^{(1)}_1(t,x,p,\bar u,v^1(t,x,p,\bar u))=p_i\bar f_{1i}-\bar f_{10},\ i=1,2,\ldots,n,$$
$$\bar H^{(2)}(t,x,p,v^1(t,x,p,\bar u))=p_i\bar f_{1i}-\varphi_{10},\ i=n+1,\ldots,n+m.$$

Приращения управления следует выбирать так:

$$\delta u_j=-\tau_j(t)\bar B^{(1)}_{1u_j},\ j=1,\ldots,\tau,\ \tau_j(t)>0.$$

А приращения $\delta p(t_1)$[*] вектора $p(t_1)$ для выполнения краевых условий $x(t_2)$ нужно выбирать так, чтобы $\delta A^{(\kappa)}\le 0$, $\kappa=1$, $i=1,\ldots,n$, $\kappa=2$, $i=n+1,\ldots,n+m$. Интегрируя (2.26), (2.23), замкнутые (2.25) и подбирая $\delta p_i(t_1)$ так, чтобы удовлетворить заданные граничные значения на правом конце, получим новое управление: $u_{\beta+1}=u_\beta+\delta u_\beta$, $\beta=1,2$. При достаточно малых $\tau(t)$ значения функционалов J_1, J_2 будут убывать и мы можем надеяться, что в результате подойдет достаточно близко к локально-оптимальному решению. В отличие от п.А, Б, это решение будет локально-оптимальным не только по фазовым координатам, но и по управлениям. Оно является аналогом слабой относительной минимали в вариационном исчислении. Для обычных неконфликтных задач этот метод предложен А.И. Шатровским.

§3. Методы синтеза задач с противодействием

А) Пусть в (I.5), (I.6), (I.26)

$$F_1=F_{12}(x(t_2)),\ F_2=F_{22}(y(t_2)),\ F=F(x(t_2)).$$

Методы синтеза задач (I.5)-(I.6), (I.26) ставят своей целью нахождение оптимального управления обоих игроков в любой точке фазового пространства t,x, т.е. получение зависимостей $\bar U=\bar U(t,x,y)$, $\bar V=\bar V(t,x,y)$.

В случае задачи (I.5)-(I.6) для этого достаточно решить систему уравнений в частных производных первого порядка (I.I7) с краевым условием (I.I9).

Аналогично для задачи (I.26) (игра с нулевой суммой) нужно решить уравнение Беллмана (I.32) с краевым условием $F_2+\Psi_2=0$.

Уравнения (I.I7) после исключения управлений приводятся к уравнениям вида (инициатива у первого игрока):

$$\Psi^{(1)}_t=-\mathcal{H}^{(1)}(t,x,y,\Psi^{(1)}_x,\Psi^{(2)}_y),\ \Psi^{(2)}_t=-\mathcal{H}^{(2)}(t,x,y,\Psi^{(1)}_x,\Psi^{(2)}_y), \qquad (3.I)$$

где $\mathcal{H}^{(1)}=\sup_u H^{(1)}(t,x,y,u,\Psi^{(1)}_x,v^{(1)}(t,x,y,u,\Psi^{(2)}_y))$, $H^{(1)}=\Psi^{(1)}_{x_i}f_i-f_0$, (3.2)

$$v^1=\arg\sup_v H^{(2)}(t,x,y,u,v,\Psi^{(2)}_y),\ H^{(2)}=\Psi^{(2)}_{y_j}\varphi_j-\varphi_0, \qquad (3.3)$$

---

[*] Если конец $x_i(t_1)$ свободен, то соответствующее $p_i(t_1)=0$, а подбирается $\delta x_i(t_1)$.

$$\mathcal{H}^{(2)} = \sup_{v} H^{(2)}(t, x, y, v, \bar{u}(t, x, y, \psi_x^{(1)}, \psi_y^{(2)}), \qquad (3.4)$$

$$\bar{u} = \arg\sup_{v} H^{(1)}(t, x, y, u, \psi_x^{(1)}, v^1(t, x, y, u, \psi_y^{(2)})), \qquad (3.5)$$

$$\bar{v} = \arg\sup_{v} H^{(2)}(t, x, y, \bar{u}(t, x, y, \psi_x^{(1)}, \psi_y^{(2)}) . \qquad (3.6)$$

Аналогично уравнение (I.32) приводится к уравнению (инициатива у первого игрока):

$$\psi_t^{(1)} = -\mathcal{H}(t, x, y, \psi_x, \psi_y), \qquad (3.7)$$

где

$$\mathcal{H} = H(t, x, y, \bar{u}, \bar{v}, \psi_x, \psi_y) \; , \; H = \psi_{x_i} f_i + \psi_{y_j} \varphi_j - f_0, \qquad (3.8$$

$$\begin{aligned} &\bar{u} = \arg\sup_{v} H(t, x, y, u, \psi_x, \psi_v, v^1(t, x, u, \psi_x, \psi_y)), \\ &v^1 = \arg\inf_{v} H(t, x, y, u, v, \psi_x, \psi_y), \\ &\bar{v} = \arg\inf_{v} H(t, x, y, \bar{u}, v, \psi_x, \psi_y) . \end{aligned} \qquad (3.9)$$

Уравнения (3.I), (3.7) - нелинейные дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной ψ_t и не зависящие от искомой функции ψ. В аналитическом виде они решаются в исключительных случаях. Поэтому важны численные методы. Ниже рассмотрены некоторые из таких методов.

Б) <u>Метод № I (прямых)</u> (для задачи (I.5)).
В фазовом пространстве переменных x, y задаемся сеткой*/.

Значения x_i, y_i в узлах этой сетки будем обозначать $\hat{x}_i^{\gamma}(t)$, $\hat{y}_i^{\beta}(t)$, где верхний индекс γ, β - означает номер узла ($\gamma = 1, 2, \ldots, \ell_i$; $\beta = 1, 2, \ldots, \ell_j$). Значения $\hat{x}_i^{\gamma}(t), \hat{y}_i^{\beta}(t)$ тем самым определяются. Выбираем какую-нибудь формулу вычисления производных $\psi_{x_i}^{(1)}, \psi_{y_j}^{(2)}$ в узлах γ, β через значения $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ в соседних узлах (по осям x_i, y_i):

$$\psi_{x_i}^{(1)\gamma} = \Phi^{(1)}(\psi_i^{(1)\alpha}(t)), \quad \psi_{y_i}^{(2)\beta} = \Phi^{(2)}(\psi_i^{(2)\alpha}(t)). \qquad (3.10)$$

Например, пусть сетка имеет постоянный шаг h и производные вычисляются по трем точкам. Для первой, любой внутренней и последней точек известны ([I], стр. 578), следующие формулы численного дифференцирования**/:

$$\psi_{x_i}^{1} = (-3\psi_i^1 + 4\psi_i^2 + \psi_i^3)/2h \; , \; \psi_{x_i}^{j} = (-\psi_i^{\gamma-1} + \psi_i^{\gamma+1})/2h \; , \; j = 2, 3, \ldots, \ell_i - 1, \qquad (3.11)$$
$$\psi_{x_i}^{\ell_i} = (\psi_i^{\ell_i - 2} - 4\psi_i^{\ell_i - 1} + 3\psi_i^{\ell_i})/2h \; , \; i = 1, 2, \ldots, n .$$

---

*/ В дальнейшем, не оговаривая это каждый раз, мы предполагаем, что сетка расположена в области определения функции H.

**/ В целях упрощения записи в (3.II), (3.I2) эти формулы даны только для $\psi_{x_i}^{(1)}$ и нижний индекс x у $\psi^{(1)}$ опущен.

Погрешность для первой и третьей формулы равна $z = h^2 \psi'''(\xi_j)/3$, а для средней формулы $z = -h^2 \psi'''(\xi_j)/6$.

Для пяти точек формулы таковы:

$$\begin{aligned} &\psi_{x_i}^{1} = (-25\psi_i^1 + 48\psi_i^2 - 36\psi_i^3 + 16\psi_i^4 - 3\psi_i^5)/12h, \\ &\psi_{x_i}^{2} = (-3\psi_i^1 - 10\psi_i^2 + 18\psi_i^3 - 6\psi_i^4 + \psi_i^5)/12h, \\ &\psi_{x_i}^{\gamma} = 2(\psi_i^{\gamma+1} - \psi_i^{\gamma-1})/3h + (\psi_i^{\gamma+2} - \psi_i^{\gamma-2})/12h \; , \; \gamma = 3, 4, \ldots, \ell_i - 2, \\ &\psi_{x_i}^{\ell_i - 1} = (\psi_i^{\ell_i - 5} + \psi_i^{\ell_i - 4} - 18\psi_i^{\ell_i - 3} + 10\psi_i^{\ell_i - 2} + 3\psi_i^{\ell_i - 1})/12h, \\ &\psi_{x_i}^{\ell_i} = (3\psi_i^{\ell_i - 5} - 16\psi_i^{\ell_i - 4} + 36\psi_i^{\ell_i - 3} - 48\psi_i^{\ell_i - 2} + 25\psi_i^{\ell_i - 1})/12h . \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Погрешности при этом имеют порядок $z = h^4 \psi^{(5)}(\xi)/q$, где q = 5; -20; 30; -20; 5 соотвественно.

На заданной сетке кривых $\hat{x}_i^{\gamma}(t), \hat{y}_i^{\beta}(t)$ величины $\psi_i^{(1)\gamma}, \psi_j^{(2)\beta}$ являются функциями только t . Подставляя (3.I0) (или одну из конкретных формул численного дифференцирования (3.II), (3.I), а затем последовательно значения векторов $\hat{x}^{\gamma}(\gamma = 1, 2, \ldots, \ell_i; \; i = 1, 2, \ldots, n)$, $\hat{y}_j^{\beta}(\beta = 1, 2, \ldots, \ell_j, \; j = 1, 2, \ldots, m)$ в узлах получим следующую систему $N = \ell_1^{(1)} \ell_2^{(1)} \ldots \ell_n^{(1)} + \ell_1^{(2)} \ldots \ell_m^{(2)}$ дифференциальных уравнений, разрешенную относительно производных (т.е. в нормальной форме Коши):

$$\begin{aligned} &\dot{\psi}_i^{(1)\gamma}(t) = -H^{(1)}[t, \hat{x}_i^{\gamma}(t), \hat{y}_j^{\beta}(t), \psi_x^{(1)i}(t)] \; , \; \gamma = 1, 2, \ldots, \ell_i \; , \; i = 1, 2, \ldots, n, \\ &\dot{\psi}_j^{(2)\beta}(t) = -H^{(2)}[t, \hat{x}_i^{j}(t), \hat{y}_j^{\beta}(t), \psi_i^{(2)j}(t)] \; , \; \beta = 1, 2, \ldots, \ell_j \; , \; j = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned} \qquad (3.13)$$

Граничные значения для $\psi_i^{(1)\gamma} \psi_j^{(2)\beta}$ получим, подставляя граничные значения векторов $\hat{x}^{\gamma}(t_2), \hat{y}^{\beta}(t_2)$ в узлах при $t = t_2$ в (I.I9):

$$\psi_i^{(1)\gamma} = -F_{1\gamma}(\hat{x}^{\gamma}(t_2)) \; , \; \psi_i^{(2)\beta} = -F_{2\beta}(\hat{y}^{\beta}(t_2)) \; , \qquad (3.14)$$
$$\gamma = 1, 2, \ldots, \ell_i \; , \; i = 1, 2, \ldots, n; \; \beta = 1, 2, \ldots, \ell_j \; , \; j = 1, 2, \ldots, m.$$

В частности, если $F \equiv 0$, то $\psi_i^{(\xi)j}(t_2) = 0, \; \xi = 1, 2$. Так как граничные значения $\psi_i^{(\xi)j}$ нам заданы на правом конце, то систему (3.I3) необходимо интегрировать справа налево, полагая $t = -\tau$ от $\tau_1 = -t_2$, до $\tau_2 = -t_1$. При этом удобно подставить (3.I0) (соответственно (3.II), (3.I2), в (3.5), (3.6) находить в процессе счета $\bar{u}^{\gamma}(t), \bar{v}^{\beta}(t)$ в узлах и выводить их прямо на печать.

Предлагаемый метод синтеза имеет ряд преимуществ:

I) система (3.I3) разрешена относительно производных;

2) точность может быть существенно увеличена практически без усложнения правых частей уравнений за счет выбора более точных формул численного дифференцирования (при использовании

212-213

семи точек погрешность определения производной порядка $\sim h^4$).

Если интервал интегрирования не слишком велик, синтез можно строить только в части фазового пространства $X \times Y \times T$. Это ограничение практически снимается, если синтез строится вокруг известной минимали или в части пространства, ограниченного минималями.

В последнем случае шаг h можно брать зависящим от t (однако узлы при применении (3.10), (3.11) должны оставаться равноотстоящими).

Если на правом конце требуется попасть в заданную точку $x_i(t_2)=x_{i2}$, $y_i(t_2)=y_{i2}$, то добавляем к F_{12}, F_{22} в (1.19) "штраф" $\lambda_i^{(1)}(x_i-x_{i2})^2\big|_{t_2}$ и $\lambda_j^{(2)}(y_j-y_{j2})^2\big|_{t_2}$ соответственно, где взяты достаточно большие $\lambda_i^{(1)}>0$, $\lambda_j^{(2)}>0$.

В частности, если система (1.5), (1.6) автономна, $F_{12}=0$, $F_{22}=0$; правый конец свободен, время процесса не фиксировано и $\hat{x}_i^\gamma$, $\hat{y}_i^\beta$ постоянные, то $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}$ не будет явно зависеть от t, $\dot{\psi}_i^{(1)\gamma}=0$, $\dot{\psi}_j^{(2)\beta}=0$ и система (3.13) превратится в систему конечных уравнений:

$$\mathcal{H}^{(1)}(\hat{x}_i^\gamma, \hat{y}_j^\beta, \psi_i^{(1)\gamma}, \psi_j^{(2)\beta})=0,$$
$$\mathcal{H}^{(2)}(\hat{x}_i^\gamma, \hat{y}_j^\beta, \psi_i^{(1)\gamma}, \psi_j^{(2)\beta})=0,$$
$$\gamma=1,2,\dots,\ell_i,\ i=1,2,\dots,n;\ \beta=1,2,\dots,\ell_j,\ j=1,2,\dots,m.$$

Эту систему надо решить только один раз.

Систему (1.5), (1.6) можно превратить в автономную, добавив к ней уравнение $\dot{t}=1$. Задачу с фиксированным концом можно превратить (приближенно) в задачу со свободным концом, добавив к F_1, F_2 в (1.5), (1.6) (4.1 данной работы) "штраф" в виде $\lambda_i^{(1)}(x_i-x_{i2})^2\big|_{t_2}$, $\lambda_i^{(2)}(y_i-y_{i2})\big|_{t_2}$ соответственно, избавляясь от F_{12}, F_{22} при помощи дифференцирования $\Gamma_{12}[x(t)]$, $\Gamma_{22}[y(t)]$ по переменному t_2 и исключения производных $\dot{x}, \dot{y}$ при помощи (1.5), (1.6). В этом случае функционалы в (1.5), (1.6) принимают вид:

$$I_1=\int_{t_1}^{t_2}(F_{1x_i} f_i+f_0)dt, \quad I_2=\int_{t_1}^{t_2}(F_{2y_j}\varphi_j+\varphi_0)dt.$$

Пусть $n=m=1$, система (1.5), (1.6) имеет вид:

$$I_1=\int_{t_1}^{t_2} f(x,y,u,v)dt,\ \dot{x}=f(x,y,u,v),\ u\in U;\ I_2=\int_{t_1}^{t_2}\varphi_0(x,y,u,v)dt,\ \dot{y}=\varphi(x,y,u,v),\ v\in V, \quad (3.15)$$

t_2 – не задано, правые концы $x(t_2)$, $y(t_2)$ свободны. Возьмем $\Psi^{(1)}=\Psi^{(1)}(x)$, $\Psi^{(2)}=\Psi^{(2)}(y)$ (не зависящие от t) и найдем

$$\mathcal{H}^{(1)}(x,y,\Psi_x^{(1)},\Psi_y^{(2)})=0,\quad \mathcal{H}^{(2)}(x,y,\Psi_x^{(1)},\Psi_y^{(2)})=0. \quad (3.16)$$

Предположим, что из этой системы можно найти $\Psi_x^{(1)}, \Psi_y^{(2)}$. Тогда, подставляя их в (3.5), (3.6), мы получим синтез опти-

мального управления:

$$\bar{u}(x,y),\ \bar{v}(x,y).$$

Аналогично может быть найдено приближенное решение уравнения (3.7).

Пусть (1.26) таково:

$$I=\int_{t_1}^{t_2} f(x,v,u,v)dt,\ \dot{x}=f(x,y,u,v),\ u\in U,\ v\in V, \quad (3.17)$$

t_2 не задано, конец $x(t_2)$ свободен. Возьмем $\Psi=\Psi(x)$ (не зависящее от t). Тогда (3.7) превратится в $\mathcal{H}(x,\Psi_x)=0$. Если отсюда можно найти $\Psi_x(x)$, то подставляя его в (3.9), получим оптимальный синтез: $\bar{u}(x)$, $\bar{v}(x)$. Этот же метод приближенного синтеза можно использовать и для решения обычных (не игровых) оптимальных задач.

В) <u>Метод 2 (разложение решения в ряд)</u>. Будем искать решение системы (3.1) в виде суммы однородных многочленов

$$\Psi^{(1)}=M^{(0)}+M^{(1)}+\dots+M^{(\gamma)}+\dots,\ \Psi^{(2)}=N^{(1)}+N^{(2)}+\dots+N^{(\beta)}+\dots, \quad (3.18)$$

где

$$M^{(\gamma)}=\sum a^{(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)}(t)\,x_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}\dots x_n^{\gamma_n},\ \sum_{i=1}^{n}\gamma_i=\gamma, \quad (3.19)$$

$$N^{(\beta)}=\sum b^{(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_m)}(t)\,x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_m^{\beta_m},\ \sum_{i=1}^{m}\beta_i=\beta. \quad (3.20)$$

Количество неопределенных коэффициентов $a(t)$, $b(t)$ в (3.19), (3.20) равно соответственно

$$N_1=1+\sum_{\ell=1}^{\gamma}\frac{(n+\ell-1)!}{(n-1)!\,\ell!},\quad N_2=1+\sum_{\ell=1}^{\beta}\frac{(m+\ell-1)!}{(m-1)!\,\ell!}. \quad (3.21)$$

Подставляя (3.18) в (3.1) и выбирая сетку $\hat{x}$, $\hat{y}$ с количеством узлов N_1+N_2, получим систему из (N_1+N_2)-го обыкновенного дифференциального уравнения относительно $a(t), b(t)$.

Полученная таким способом система хотя и не разрешена относительно производных $\dot{a}(t)$, $\dot{b}(t)$, но линейна относительно них. Определитель этой системы относительно $\dot{a}(t)$, $\dot{b}(t)$ при соответствующем выборе сетки $\hat{x}$, $\hat{y}$ не равен нулю и эти производные могут быть найдены и система переписана в нормальной форме Коши. Начальные значения для $a(t)$, $b(t)$ определяем из (1.19), в которые предварительно следует поставить (3.18) и последовательно подставлять значения $\hat{x}$, $\hat{y}$ в узлах. В частности, если $F_{12}=F_{22}=0$, то $a(t_2)=b(t_2)=0$. Интегрирование идет справо налево. Подставляя найденные $a(t)$, $b(t)$ в (1.10), (1.11), получаем приближенный оптимальный синтез.

В частности, если система (1.5), (1.6) автономная, правый конец свободен, то вектора a, b можно считать постоянными и система (3.1) превратится в систему конечных нелинейных уравнений.

214-215

Аналогично может быть найдено приближенное решение уравнения (8.7). Заметим также, что зависимости могут быть взяты таким образом, что система (8.I) будет системой в нормальной форме Коши, если компоненты вектор-функции $a(t)$, $b(t)$ будут обращаться в нули во всех узлах, кроме выбранного.

Литература к главе XI

I. Б.П. Демидович и И.А. Марон. Основы вычислительной математики, Физматгиз, I960.

2. В.П. Пасюков. Методы решения некоторых дифференциальных игр. "Техническая кибернетика", I968, № 5.

ОГЛАВЛЕНИЕ

218-219

220