

# A Métrica de Schwarzschild em Coordenadas Retangulares (The Schwarzschild Metric in Rectangular Coordinates)

*Valdir Monteiro dos Santos Godoi*

[valdir.msgodoi@gmail.com](mailto:valdir.msgodoi@gmail.com)

**RESUMO** – Transformamos a métrica de Schwarzschild de coordenadas esféricas para retangulares, confirmando que a conclusão obtida por Einstein sobre réguas dispostas perpendicularmente a um campo gravitacional mantém-se inalterada quando utilizamos a solução exata de Schwarzschild, obtida nas condições de campo estático no vácuo e com simetria esférica. Além desta transformação também falamos novamente sobre as velocidades da luz no sentido radial e perpendicular medidas na superfície da Terra, lembramos de testes para a verificação do princípio da constância da velocidade da luz e calculamos a aceleração da luz e dos corpos em geral num campo gravitacional estático radial.

**ABSTRACT** – We transform the Schwarzschild metric in spherical coordinates to rectangular, confirming that the conclusion obtained by Einstein for rulers disposed perpendicular to a gravitational field remains unchanged when using the exact solution of Schwarzschild, obtained under the conditions of static field in vacuum and with spherical symmetry. Beyond this transformation also talked again about the speed of light in radial and perpendicular directions measures in the Earth's surface, we recall tests for the verification of the principle of the constancy of the speed of light and calculate the acceleration of light and bodies in generally, in a radial static gravitational field.

**Palavras-chaves:** métrica, Schwarzschild, Einstein, tempo, espaço, régua, comprimento, distância, coordenadas retangulares, coordenadas esféricas, velocidade, aceleração, luz, Relatividade Geral, Relatividade Restrita, princípio da constância da velocidade da luz, Michelson-Morley, Sol, Terra, blindagem, queda livre, gravidade, campo gravitacional, gravitação, Newton.

**Keywords:** metric, Schwarzschild, Einstein, time, space, ruler, length, distance, rectangular coordinates, spherical coordinates, speed, acceleration, light, general relativity, special relativity, principle of constancy of the speed of light, Michelson-Morley, Sun, Earth, shielding, blindage, free fall, gravity, gravitational field, gravitation, Newton.

## 1. Introdução

Em nosso mais recente artigo sobre a variabilidade da velocidade da luz<sup>[1]</sup> usamos o fato de que as réguas unidade não sofrem alteração em seu tamanho sob a influência de um campo gravitacional estático quando dispostas

perpendicularmente a este campo, isto de acordo com o famoso artigo de Einstein publicado em 1916<sup>[2]</sup>, onde lançou os *Fundamentos da Relatividade Geral*. O mesmo comportamento se pode atribuir a uma régua ou barra de comprimento genérico  $d\rho$ , desde que pequeno comparado com a distância  $r$  ao centro do sistema.

Sabemos que em [2] Einstein não tinha ainda uma solução exata para as suas equações de campo, solução que foi encontrada pela primeira vez por Schwarzschild<sup>[3]</sup>, onde obteve a métrica em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2}{c^2} \Phi\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2}{c^2} \Phi} - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (1)$$

Vamos aqui transformar esta métrica em coordenadas retangulares  $(x, y, z)$  e confirmar que a conclusão obtida por Einstein sobre réguas dispostas perpendicularmente a um campo gravitacional mantém-se inalterada quando utilizamos a solução exata de Schwarzschild, obtida nas condições de campo estático no vácuo e com simetria esférica, conforme se espera que ocorra em sistemas planetários, como o sistema solar<sup>[4]</sup>. O comportamento dos relógios e das réguas dispostas radialmente no campo gravitacional já verificamos<sup>[5]</sup> que está de acordo com o artigo original de Einstein.

Além desta transformação também falaremos novamente sobre as velocidades da luz no sentido radial e perpendicular (seção 4) medidas na superfície da Terra, lembraremos de testes para a verificação do princípio da constância da velocidade da luz e calcularemos a aceleração da luz e dos corpos em geral num campo gravitacional estático radial (seção 5), concluindo este trabalho na seção 6.

## 2 – A transformação de coordenadas

A transformação entre coordenadas retangulares e esféricas é dada por

$$x = r \text{sen}\theta \cos\varphi, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

$$y = r \text{sen}\theta \text{sen}\varphi, \quad y \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

$$z = r \cos\theta, \quad z \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

cujas transformações inversas são

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad 0 \leq r < \infty \quad (3.1)$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{y}{x}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.2)$$

$$\theta = \text{arctg} \left( \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \right), \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (3.3)$$

Da regra da cadeia

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (4)$$

e a derivada do arco-tangente

$$\frac{d}{du} \arctg u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arctg u < \frac{\pi}{2} \quad (5)$$

obtemos

$$dr = \frac{xdx+ydy+zdz}{r} \quad (6.1)$$

$$d\varphi = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} \quad (6.2)$$

$$d\theta = \frac{1}{r^2} \frac{[(xdx+ydy)z-(x^2+y^2)dz]}{\sqrt{x^2+y^2}}. \quad (6.3)$$

A métrica (1) transforma-se em coordenadas retangulares substituindo as relações (3) e (6) em (1), com

$$r^2 \text{sen}^2 \theta = x^2 + y^2. \quad (7)$$

Assim

$$dr^2 = (x^2 dx^2 + y^2 dy^2 + z^2 dz^2 + 2xy dx dy + 2xz dx dz + 2yz dy dz) / r^2 \quad (8.1)$$

$$d\varphi^2 = \frac{y^2 dx^2 - 2xy dx dy + x^2 dy^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad (8.2)$$

$$d\theta^2 = \frac{1}{r^4} \frac{[(xdx+ydy)^2 z^2 - 2(xdx+ydy)(x^2+y^2)zdz + (x^2+y^2)^2 dz^2]}{x^2+y^2} \quad (8.3)$$

e portanto

$$ds^2 = A dt^2 - \frac{(x^2 dx^2 + y^2 dy^2 + z^2 dz^2 + 2xy dx dy + 2xz dx dz + 2yz dy dz)}{Ar^2} - \frac{1}{r^2} \frac{[(xdx+ydy)^2 z^2 - 2(xdx+ydy)(x^2+y^2)zdz + (x^2+y^2)^2 dz^2]}{x^2+y^2} - \frac{(y^2 dx^2 - 2xy dx dy + x^2 dy^2)}{x^2+y^2}, \quad (9)$$

com

$$A = \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right), \Phi = \frac{GM}{r}, \quad (10)$$

e os usuais significados de  $G$ ,  $M$  e  $c$ .

Sendo assim, a métrica de Schwarzschild escreve-se de forma pouco elegante em coordenadas retangulares, ao contrário do que acontece quando escrita em coordenadas esféricas, mas ao menos através desta forma será possível analisar melhor, mais exatamente, o comportamento de réguas (comprimentos, distâncias) dispostas perpendicularmente ao campo central. Nas coordenadas esféricas, por sua vez, o formato natural destas réguas unidade seriam curvas, arcos de círculo, mais adequadas para se medirem ângulos.

### 3 – Réguas dispostas perpendicularmente ao campo gravitacional

Estando a massa  $M$  na origem do sistema de coordenadas, com base na métrica de Schwarzschild em coordenadas retangulares (9), uma régua de comprimento 1 na ausência de campo de gravidade, com um dos extremos localizado em  $(x, 0, 0)$  e o outro em  $(x, 1, 0)$  terá, na presença do campo, um comprimento

$$ds^2 = -1 = -\lim_{dx \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{(-ydx + xdy)^2}{x^2 + y^2} = -dy^2, \quad (11)$$

onde se fez em (9)  $dx = dz = dt = 0$ ,  $dy \neq 0$ ,  $y = z = 0$ ,  $x \neq 0$ .

A equação (11) leva a  $dy = \pm 1$ , mostrando que nossa régua não sofre alteração de tamanho sob a influência do campo gravitacional, quando disposta perpendicularmente a este campo, conforme o resultado original obtido por Einstein em [2].

Estando a régua paralela ao eixo  $z$ , de  $(0, y, 0)$  a  $(0, y, 1)$ , com  $dx = dy = dt = 0$ ,  $dz \neq 0$ ,  $x = z = 0$ ,  $y \neq 0$ , obtemos, semelhantemente,

$$ds^2 = -1 = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \frac{(x^2 + y^2)^2 dz^2}{x^2 + y^2} = -dz^2, \quad (12)$$

e daí  $dz = \pm 1$ , tal qual o resultado anterior.

Se a régua estiver com um dos extremos no eixo  $z$  e paralela ao eixo  $x$ , de  $(0, 0, z)$  a  $(1, 0, z)$ , com  $dy = dz = dt = 0$ ,  $dx \neq 0$ ,  $x = y = 0$ ,  $z \neq 0$ , teremos

$$ds^2 = -1 = -\lim_{x,y \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \frac{(xdx)^2 z^2}{x^2 + y^2} = -dx^2, \quad (13)$$

e então  $dx = \pm 1$ , conforme esperado, garantindo assim que a conclusão de Einstein em primeira ordem de aproximação também vale para a solução exata.

#### 4 – Velocidades da luz em três situações

Sabendo que há simetria entre as três direções  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ou seja, a régua pode estar indistintamente paralela ao eixo  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , respectivamente com um de seus extremos sobre o eixo  $y$ ,  $z$  ou  $x$ , seu tamanho não sofrerá alteração quando um campo gravitacional tem origem no centro do sistema de coordenadas.

Então nós temos para a velocidade da luz movendo-se radialmente em relação ao centro de forças

$$c' = \left(1 - \frac{2}{c^2} \Phi\right) c, \quad (14)$$

e para a velocidade da luz movendo-se perpendicularmente a este campo

$$c^T = \sqrt{1 - \frac{2}{c^2} \Phi} c \approx \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) c, \quad (15)$$

sendo  $c$  a velocidade da luz no vácuo e livre de efeitos gravitacionais,  $\Phi = \frac{GM}{r}$  o valor absoluto do potencial gravitacional e  $r$  a distância do ponto onde se mede a velocidade à origem do sistema.  $c'$  indica um movimento acelerado para a velocidade da luz no sentido radial, conforme veremos na próxima seção.

Existem dois principais momentos em que podemos considerar que a luz, movendo-se sobre uma superfície horizontal na Terra, está num movimento perpendicular ao centro de forças (o Sol): quando o Sol está na máxima altura, i.e., ao meio-dia (aproximadamente), e decorridas mais 12 horas, ou seja, à meia-noite (aproximadamente), quando a distância ao centro do Sol é máxima. Será nesta última situação que a velocidade da luz será máxima ( $c^+$ ), pois a influência gravitacional será mínima.

Se  $M_S$  é a massa do Sol,  $D_{T-S}$  é a distância Terra-Sol e  $R_T$  é o raio da Terra teremos (usando valores médios)

$$c' = c - \frac{2}{c} \frac{GM_S}{D_{T-S}}, \quad \Delta c' = c - c' \approx 5,9199 \text{ m/s} \quad (16.1)$$

$$c^T \approx c - \frac{1}{c} \frac{GM_S}{D_{T-S} - R_T}, \quad \Delta c^T = c - c^T \approx 2,9601 \text{ m/s} \quad (16.2)$$

$$c^+ = c - \frac{1}{c} \frac{GM_S}{D_{T-S} + R_T}, \quad \Delta c^+ = c - c^+ \approx 2,9598 \text{ m/s}, \quad (16.3)$$

valores estes que variam conforme a época do ano (solstícios, equinócios, periélio, afélio, etc.) e latitude geográfica.

A menor velocidade ( $c'$ ) é obtida ao nascer ou pôr do Sol, e a maior velocidade ( $c^+$ ) é a obtida por volta da meia-noite. Percebe-se que  $c^+$  e  $c^T$  distam entre si de apenas  $0,0003 \text{ m/s}$ , e em termos práticos nenhuma diferença apresentariam (exceto que se verifique durante as medidas que a Terra se comporta como uma blindagem para a gravidade do Sol, ou seja, sua gravidade não chegaria até a superfície da face oposta na Terra, o que seria mais uma grande descoberta).

Diferença maior está entre  $c^T$  (ou  $c^+$ ) e  $c'$ . Nós temos

$$\Delta c = c^T - c' \approx 2,96 \text{ m/s} \approx c^T \approx c^+, \quad (17)$$

como é fácil perceber que  $c'$  é aproximadamente igual ao dobro das outras duas velocidades.

A Terra também contribui com a alteração da velocidade da luz em sua superfície, mas sua influência ainda é menor que a do Sol, cerca de 14 vezes menor:

$$\frac{M_S/D_{T-S}}{M_T/R_T} \approx 14,18. \quad (18)$$

A equação (16.2) aplicada apenas a Terra fornece

$$c^T \approx c - \frac{1}{c} \frac{GM_T}{R_T}, \quad \Delta c^T = c - c^T \approx 0,21 \text{ m/s}, \quad (19)$$

onde se usou nos cálculos acima o valor padrão para a velocidade da luz no vácuo:  $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ . O resultado (19) mostra pequena a influência da Terra na velocidade da luz quando comparada com a do Sol, equações (16).

Lembrando que a Terra está em movimento, possui tanto um movimento de rotação em torno de seu próprio eixo ( $465 \text{ m/s}$ ) quanto um movimento de translação ao redor do Sol ( $\approx 29,78 \text{ km/s}$ ), temos ainda boa oportunidade de testar o princípio da constância da velocidade da luz. Para qualquer um dos horários em que se tomem medidas de velocidade deve-se calcular a velocidade da luz tanto num sentido (A-B) quanto no outro (B-A). Dado o

princípio da inércia, e sendo curto o trajeto, não é esperada variação da velocidade da luz ao mudar o sentido de seu trajeto (o que também explica o resultado negativo da experiência de Michelson-Morley com o interferômetro, sem precisarmos recorrer a nenhuma contração espacial ou dilatação temporal).

## 5 – Aceleração da luz e dos corpos num campo gravitacional radial

A velocidade (14) no sentido radial ao campo gravitacional prevê aceleração, já que a distância  $r$  ao centro varia com o movimento, e portanto a velocidade varia com o tempo. Vamos nesta seção calcular esta aceleração seguindo o que é possível deduzir da Relatividade Geral, primeiro para a luz e depois para os corpos em geral.

Em “*Espaço-Tempo e a Métrica de Schwarzschild*”<sup>[5]</sup> obtivemos

$$dr = \sqrt{1 - \frac{2}{c^2}\Phi} d\rho, \quad (20)$$

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{2}{c^2}\Phi}}. \quad (21)$$

e daí

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{2}{c^2}\Phi\right) \frac{d\rho}{d\tau}, \quad (22)$$

velocidade  $V_r$  medida em um movimento radial sob um campo gravitacional estático com simetria esférica e origem no centro do sistema e onde  $\frac{d\rho}{d\tau}$  é a respectiva velocidade medida na ausência do campo. Conforme temos adotado,  $\Phi = \frac{GM}{r}$ , o valor absoluto do potencial gravitacional.

Fazendo  $\frac{d\rho}{d\tau} = c$  a velocidade da luz no vácuo, (22) fica igual a

$$c' = \left(1 - \frac{2}{c^2}\Phi\right) c = c - 2 \frac{GM}{cr}, \quad (23)$$

ou seja, a velocidade  $c'$  da luz diminui quando a luz viaja radialmente sob a influência de um campo gravitacional, diminuição esta em relação à sua velocidade  $c$  sem campo de gravidade.

Mencionamos em nossa “*Nota sobre a Variabilidade da Velocidade da Luz*”<sup>[1]</sup> que (23) corresponde a um movimento levemente acelerado, mas trata-

se de uma aceleração maior do que os corpos materiais comuns têm na superfície da Terra.

Derivando (23) em relação ao tempo obtemos a aceleração radial do movimento da luz:

$$\frac{d}{dt}c' = -2 \frac{GM}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right) = +2 \frac{GM}{c} \frac{\dot{r}}{r^2}. \quad (24)$$

Fazendo  $\dot{r} \approx c$  obtemos

$$\frac{d}{dt}c' \approx +2 \frac{GM}{r^2}, \quad (25)$$

o dobro da aceleração que os corpos materiais normalmente têm num campo gravitacional, produzido pela massa  $M$ .

Fazendo  $\dot{r} = c'$  em (24) temos, mais exatamente,

$$\frac{d}{dt}c' = +2 \frac{GM}{c} \frac{c'}{r^2} = +2 \frac{GM}{r^2} \left( 1 - 2 \frac{GM}{c^2 r} \right), \quad (26)$$

o que mostra que a aceleração da luz decresce com o aumento da distância ao centro. No infinito temos

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{d}{dt}c' = 0. \quad (27)$$

Resultado mais inesperado que o dado em (25) é a aceleração dos corpos ordinários neste campo gravitacional.

Fazendo  $\frac{d\rho}{d\tau} = V_0$  em (22), a velocidade constante (por exemplo) que se obteria sem a influência da massa  $M$ , temos

$$\frac{d}{dt}V_r = \frac{d}{dt} \left( -\frac{2GM}{c^2 r} V_0 \right) = -2GM \frac{V_0}{c^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right) = +2GM \frac{V_0}{c^2} \frac{\dot{r}}{r^2}. \quad (28)$$

Fazendo então

$$\dot{r} = V_r = \left( 1 - \frac{2}{c^2} \Phi \right) V_0 \quad (29)$$

em (28), conforme (22), obtemos finalmente

$$a_r = \frac{d}{dt}V_r = +2 \frac{GM}{r^2} \frac{V_0^2}{c^2} \left( 1 - \frac{2}{c^2} \frac{GM}{r} \right), \quad (30)$$



que é muito diferente do que se obtém experimentalmente na superfície da Terra,

$$a_r^{Newton} = \frac{GM}{r^2}. \quad (31)$$

Este é um resultado fundamental sobre o espaço-tempo, que merece nossa reflexão. Parece razoavelmente aceitável quando  $V_0 = c$ , mas para pequenos valores de  $V_0$ , as velocidades habituais que estamos acostumados, por exemplo, um lançamento de bolinhas para cima ou uma queda livre em direção ao chão, fornece algo muito diferente do valor medido por nossas experiências, que na superfície da Terra é  $a_r^{Newton} \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ .

Em especial, se  $V_0 = 0$  temos  $a_r = 0$ , ou seja, corpos originalmente imóveis não teriam aceleração quando colocados neste campo. Difícil de acreditar, difícil de entender. Teríamos que imaginar talvez que na ausência de gravidade só existiria a velocidade da luz ( $V_0 = c$ ), para que quando na presença desta força cheguemos a uma aceleração mais ou menos igual a que conhecemos (exceto pelo fator 2). Embora seja muito sedutor imaginar um mundo de luz, onde só grandes massas possam afetar esta velocidade, não creio que seja isso o mais sensato a concluir.

Vejamos a título de curiosidade: igualando (30) e (31) obtemos

$$V_0 \approx c \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071c,$$

que seria então a velocidade aproximada que os corpos teriam num “mundo sem gravidade”, para que sob o efeito gravitacional adquiram a aceleração clássica, de Newton, dada por (31). Mesmo a aceleração sendo a mesma, a velocidade continuaria muito grande comparada com as velocidades não relativistas que temos, e portanto é pura especulação uma velocidade tão alta e que pudesse ser considerada normal.

## 6 – Conclusão

Em algumas situações é mais vantajoso utilizar a solução de Schwarzschild em coordenadas retangulares, embora apresente mais longa expressão que a solução em coordenadas esféricas.

Um campo gravitacional não altera o tamanho de uma régua quando disposta perpendicularmente a este campo, o que vimos com a solução exata de Schwarzschild expressa em coordenadas retangulares.

Temos quatro momentos do dia onde é interessante medirmos a velocidade da luz na superfície da Terra: nascer do Sol, meio-dia (ou com o Sol o mais próximo possível do zênite), pôr do Sol e meia-noite (ou com o Sol o

mais próximo possível do zênite no extremo oposto da Terra), momentos onde pode-se verificar as equações dadas em (16). Talvez a medida de  $c^+$  possa indicar uma blindagem gravitacional da Terra para a gravidade do Sol, mesmo que parcial.

Toda medida da velocidade da luz pode ser um bom momento para verificarmos também o princípio da constância da velocidade da luz na Relatividade Restrita, medindo-a em um sentido e também no sentido oposto, considerando a Terra um referencial inercial em movimento (ao menos por breves momentos, durante as medidas).

O que calculamos na seção 5 sobre a aceleração da luz e dos corpos foi, para nós, uma surpresa. A luz não só tem velocidade variável, o que já tinha sido exposto por Einstein<sup>[6]</sup>, mas apresenta aceleração em um movimento alinhado a um campo gravitacional, segundo a Relatividade Geral, que é da ordem do dobro da que os corpos comuns têm neste campo, a conhecida aceleração  $\frac{GM}{r^2}$  da gravitação de Newton. Mesmo se isto é aceitável para o movimento da luz, não nos parece viável a aceleração destes corpos comuns quando calculada pela Relatividade Geral; calcula-se um valor bem menor que o medido pelas verificações experimentais.

*Mais simples que viajar a Plutão é medir a velocidade da luz na superfície da Terra, e mais simples que medir a velocidade da luz é medir a velocidade de uma bolinha na superfície da Terra, e sua aceleração.*

## DEDICATÓRIA

A Stephen e Jane Hawking, à *Teoria de Tudo*, a Deus.

## REFERÊNCIAS

1. Godoi, V.M.S., *Note on the Variability of the Speed of Light*, disponível em <http://vixra.org/abs/1502.0070> (2015).
2. Einstein, A., *Os Fundamentos da Teoria da Relatividade Geral*, em Textos Fundamentais da Física Moderna, vol. I, O Princípio da Relatividade, tradução de Mário José Saraiva do artigo original *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik, **49**, 769-822 (1916). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian (1983).
3. Schwarzschild, K., *On the Gravitational Field of a Point-Mass, According to Einstein's Theory*, em <http://zemanov.ptep-online.com/papers/zj-2008-03.pdf>, do original "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie", Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189-196 (1916).

4. Lorenci, V. de, *Teoria da Gravitação*, em *Programa Mínimo de Cosmologia*, cap. 1, org. Mario Novello et al. Rio de Janeiro: Jauá Editora (2010).
5. Godoi, V.M.S., *Space-Time and the Schwarzschild Metric*, disponível em <http://vixra.org/abs/1501.0233> (2015).
6. Einstein, A., *Sobre a Influência da Gravidade na Propagação da Luz*, em *Textos Fundamentais da Física Moderna*, vol. I, O Princípio da Relatividade, trad. Annalen der Physik, **35** (1911). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian (1983).