Una Ecuación Lineal de Movimiento

Antonio A. Blatter

(2015) Buenos Aires
Argentina

Este trabajo presenta una ecuación lineal de movimiento que es invariante bajo transformaciones entre sistemas de referencia y que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

Introducción

Un par de partículas es una bipartícula. El sistema de partículas $\{\, a,\ b,\ c \text{ y } d \,\}$ puede formar el sistema de bipartículas $\{\, ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd \text{ y } cd \,\}$ o también el sistema de bipartículas $\{\, ad,\ bd \text{ y } cd \,\}$

La masa m_{ij} de una bipartícula ij, está dada por: $m_{ij} \doteq m_i\, m_j/M$, donde m_i es la masa de las partícula i, m_j es la masa de la partícula j y M ($\doteq \sum_k m_k$) es la masa del sistema de partículas en observación.

La posición lineal $\vec{r}_{ij}$, la velocidad lineal $\vec{v}_{ij}$ y la aceleración lineal $\vec{a}_{ij}$ de una bipartícula ij, están dadas por:

$$\vec{r}_{ij} \doteq (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

$$\vec{v}_{ij} \doteq (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

$$\vec{a}_{ij} \doteq (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) - 2\, \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) + \boldsymbol{\omega} \times [\, \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\,] - \boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

donde $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son la velocidad angular y la aceleración angular del free-system (ver Anexo I) $\mathbf{r}_i$ es el vector de posición de la partícula i y $\mathbf{r}_j$ es el vector de posición de la partícula j ($\vec{v}_{ij} \doteq d(\vec{r}_{ij})/dt$) y ($\vec{a}_{ij} \doteq d^2(\vec{r}_{ij})/dt^2$)

El momento lineal $\vec{P}_{ij}$ de una bipartícula ij (m_{ij}) está dado por: $\vec{P}_{ij} \doteq m_{ij}\, \vec{v}_{ij}$, donde $\vec{v}_{ij}$ es la velocidad lineal de la bipartícula ij.

La fuerza lineal $\vec{F}_{ij}$ que actúa sobre una bipartícula ij (m_{ij}) está dada por:

$$\vec{F}_{ij} \doteq m_{ij}\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j)$$

donde $\mathbf{F}_i$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula i, $\mathbf{F}_j$ es la fuerza neta que actúa sobre la partícula j, m_i es la masa de las partícula i y m_j es la masa de la partícula j.

Dinámica Lineal

La ecuación lineal de movimiento para una bipartícula ij (m_{ij}) está dada por:

$$\vec{F}_{ij} \,=\, d(\vec{P}_{ij})/dt \,=\, m_{ij}\,\vec{a}_{ij}$$

donde $\vec{F}_{ij}$ es la fuerza lineal que actúa sobre la bipartícula ij, $\vec{P}_{ij}$ es el momento lineal de la bipartícula ij y $\vec{a}_{ij}$ es la aceleración lineal de la bipartícula ij.

W, K, U, E y L

El trabajo W_{ij} realizado por las fuerzas (vectoriales) que actúan sobre una bipartícula ij, está dado por:

$$W_{ij} \,\doteq\, \int_1^2 \vec{F}_{ij}\cdot d(\vec{r}_{ij}) \,=\, \Delta\,{}^1\!/_2\, m_{ij}\,(\vec{v}_{ij})^2 \,\doteq\, \Delta\, K_{ij}$$

donde $\vec{F}_{ij}$ es la fuerza lineal que actúa sobre la bipartícula ij, $\vec{r}_{ij}$ es la posición lineal de la bipartícula ij, m_{ij} es la masa de la bipartícula ij, $\vec{v}_{ij}$ es la velocidad lineal de la bipartícula ij y K_{ij} es la energía cinética de la bipartícula ij.

El trabajo W_{ij} realizado por las fuerzas (vectoriales) conservativas que actúan sobre una bipartícula ij es igual y de signo opuesto a la variación en la energía potencial U_{ij} de la bipartícula ij.

$$\Delta\, U_{ij} \,\doteq\, -\int_1^2 \vec{F}_{ij}\cdot d(\vec{r}_{ij})$$

Por lo tanto, la energía mecánica E_{ij} de una bipartícula ij permanece constante si la bipartícula ij está sujeta sólo a fuerzas (vectoriales) conservativas.

$$\Delta\, E_{ij} \,\doteq\, \Delta\, K_{ij} + \Delta\, U_{ij} \,=\, 0$$

$$E_{ij} \,\doteq\, K_{ij} + U_{ij} \,=\, constante$$

donde K_{ij} es la energía cinética de la bipartícula ij y U_{ij} es la energía potencial de la bipartícula ij.

Finalmente, el Lagrangiano L_{ij} de una bipartícula ij, está dado por:

$$L_{ij} \,\doteq\, K_{ij} - U_{ij}$$

donde K_{ij} es la energía cinética de la bipartícula ij y U_{ij} es la energía potencial de la bipartícula ij.

Observaciones

Todas las ecuaciones de este trabajo pueden ser aplicadas en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial.

Los sistemas de referencia inerciales y no inerciales no deben introducir las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$ ni sobre $\mathbf{F}_j$.

Todas las magnitudes de este trabajo ($\vec{r}_{ij}, \vec{v}_{ij}, \vec{a}_{ij}, \vec{P}_{ij}, \vec{F}_{ij}, W_{ij}, K_{ij}, U_{ij}, E_{ij}$ y L_{ij}) son invariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia.

Las magnitudes ($W_{ij}, K_{ij}, U_{ij}, E_{ij}$ y L_{ij}) son en realidad magnitudes escalares nuevas que por comodidad en este trabajo se les quitó el adjetivo «lineal»

Un sistema de referencia S es no rotante si la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del free-system respecto a S es igual a cero y además S es inercial si la aceleración $\mathbf{A}$ del centro de masa del free-system respecto a S es igual a cero.

Por otro lado, este trabajo no contradice la dinámica de Newton. De hecho, si un sistema de referencia inercial está fijo sobre la partícula j ($\boldsymbol{\omega} = \mathbf{r}_j = \mathbf{v}_j = \mathbf{a}_j = \mathbf{F}_j = 0$) de una bipartícula ij (m_{ij}) entonces de la ecuación lineal de movimiento, se obtiene:

$$m_{ij}\,(\mathbf{F}_i/m_i) \,=\, m_{ij}\,(\mathbf{a}_i)$$

$$m_{ij}\,(\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{a}_i) \,=\, 0$$

$$\rightarrow\ \ \mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{a}_i \,=\, 0$$

puesto que en todo sistema de referencia inercial siempre $\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i/m_i$ (así como en todo sistema de referencia no inercial introduciendo las fuerzas ficticias sobre $\mathbf{F}_i$)

Finalmente, este trabajo considera que es posible desarrollar una dinámica lineal alternativa basada en el Lagrangiano L_{ij} o en el Lagrangiano L_i (ver Anexo III) que puede ser aplicada en cualquier sistema de referencia inercial o no inercial sin necesidad de introducir las fuerzas ficticias.

Bibliografía

A. Einstein, Sobre la Teoría de la Relatividad Especial y General.

E. Mach, La Ciencia de la Mecánica.

H. Goldstein, Mecánica Clásica.

Anexo I

Transformaciones

$$\vec{r}'_{ij} \;=\; \vec{r}_{ij}$$

$$\vec{v}'_{ij} \;=\; \vec{v}_{ij}$$

$$\vec{a}'_{ij} \;=\; \vec{a}_{ij}$$

$$\mathbf{r}'_{ij} \;=\; \mathbf{r}_{ij}$$

$$\mathbf{v}'_{ij} - \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'_{ij} \;=\; \mathbf{v}_{ij} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ij}$$

$$\mathbf{a}'_{ij} - 2\,\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}'_{ij} + \boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'_{ij}) - \boldsymbol{\alpha}' \times \mathbf{r}'_{ij} \;=\; \mathbf{a}_{ij} - 2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{ij} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{ij}) - \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{ij}$$

Free-System

El free-system es un sistema de N partículas que está siempre libre de fuerzas externas e internas, que es tridimensional y que las distancias relativas entre las N partículas permanecen siempre constantes.

La posición **R**, la velocidad **V** y la aceleración **A** del centro de masa del free-system respecto a un sistema de referencia S, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del free-system respecto al sistema de referencia S, están dadas por:

$$\mathrm{M} \;\doteq\; \textstyle\sum_i^N \, m_i$$

$$\mathbf{R} \;\doteq\; \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^N \, m_i \, \mathbf{r}_i$$

$$\mathbf{V} \;\doteq\; \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^N \, m_i \, \mathbf{v}_i$$

$$\mathbf{A} \;\doteq\; \mathrm{M}^{-1} \textstyle\sum_i^N \, m_i \, \mathbf{a}_i$$

$$\boldsymbol{\omega} \;\doteq\; \mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{L}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \;\doteq\; d(\boldsymbol{\omega})/dt$$

$$\mathbf{I} \;\doteq\; \textstyle\sum_i^N \, m_i \, [\, |\mathbf{r}_i - \mathbf{R}|^2 \, \mathbf{1} - (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \otimes (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \,]$$

$$\mathbf{L} \;\doteq\; \textstyle\sum_i^N \, m_i \, (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V})$$

donde M es la masa del free-system, **I** es el tensor de inercia del free-system (respecto a **R**) y **L** es el momento angular del free-system respecto al sistema de referencia S.

Anexo II

Sistema de N Partículas

$$K_{ij} \doteq \sum_{j>i}^{N} {}^1\!/_2\, m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1}\, [\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\,]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} {}^1\!/_2\, m_i\, [\, (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}_{cm}) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})\,]^2$$

$$W_{ij} \doteq \sum_{j>i}^{N} m_i\, m_j\, \mathrm{M}^{-1} \int_1^2 [\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_j/m_j) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)\,]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \int_1^2 [\, (\mathbf{F}_i/m_i - \mathbf{F}_{cm}/M) \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})\,]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_1^2 [\, \mathbf{F}_i \cdot d(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm})\,] \,=\, \Delta\, K_{ij}$$

Anexo III

Partícula i & Free-System

$$\vec{r}_i \doteq (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})$$

$$\vec{v}_i \doteq (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})$$

$$\vec{a}_i \doteq (\mathbf{a}_i - \mathbf{A}) - 2\, \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_i - \mathbf{V}) + \boldsymbol{\omega} \times [\, \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})\,] - \boldsymbol{\alpha} \times (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})$$

$$\vec{P}_i \doteq m_i\, \vec{v}_i$$

$$\vec{F}_i \doteq \mathbf{F}_i$$

$$\vec{F}_i = d(\vec{P}_i)/dt = m_i\, \vec{a}_i$$

$$Si\ \ \mathbf{F}_i = 0 \ \rightarrow\ \vec{P}_i = constante$$

$$W_i \doteq \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d(\vec{r}_i) = \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i\, (\vec{v}_i)^2$$

$$\Delta\, K_i \doteq \Delta\, {}^1\!/_2\, m_i\, (\vec{v}_i)^2$$

$$\Delta\, U_i \doteq -\int_1^2 \vec{F}_i \cdot d(\vec{r}_i)$$

$$E_i \doteq K_i + U_i$$

$$L_i \doteq K_i - U_i$$

$$Si\ \ \mathbf{F}_i = fuerzas\ conservativas \ \rightarrow\ E_i \doteq K_i + U_i = constante$$