Квантовая запутанность гравитационного поля.

Куюков Виталий Петрович

Россия, Сибирский Федеральный Университет

Email: vitalik.kayukov@mail.ru

В данной статье применяется работы Хокинга и Бекенштейна для получения основных положений по выводу энтропии запутывания гравитационного поля и дается совершенно другая интерпретация кривизны геометрии через квантовую запутанность между материей и пространством-временем. Энтропия запутывания гравитационного поля как параметр возникает в геометрических потоках Риччи .

1. Черная дыра и голографический принцип.

В 1970 г. Якоб Бекенштейн выдвинул идею о том, что черные дыры обладают энтропией, которая очень велика. Бекенштейн опирался на общепризнанное и хорошо проверенное второе начало термодинамики, согласно которому энтропия системы постоянно растет. Он показал, что площадь горизонта событий черной дыры, т. е. площадь поверхности вокруг черной дыры, после пересечения которой нет пути назад, всегда увеличивается при любых физических взаимодействиях. Например, если в черную дыру попадет астероид, или если на черную дыру попадет излучение с поверхности близкой звезды, или если две черные дыры столкнутся и объединятся, то полная площадь горизонта событий черной дыры обязательно увеличится. Для Бекенштейна рост этой площади был связующим звеном с ростом энтропии согласно второму началу термодинамики. Он предположил, что площадь горизонта событий черной дыры и есть точная мера ее энтропии.

$$\boldsymbol{S = \frac{k\,A}{4l_p^2}} \qquad (1.1)$$

Хокингу удалось доказать этот вывод и вычислить температуру: оказалось, что она определяется напряженностью гравитационного поля на горизонте черной дыры, в точном согласии с аналогией между черными дырами и термодинамикой.

$$\boldsymbol{T = \frac{\hbar\,g}{2\pi kc} = \frac{\hbar\,c^3}{8\pi k\,GM} = \frac{\hbar\,c}{4\pi k\,R}} \qquad (1.2)$$

Результаты Хокинга показали, что аналогию между физикой черной дыры и термодинамикой следует воспринимать всерьез. У черной дыры есть энтропия и температура на поверхности горизонта событий.

В 1976 г. Хокинг объявил, что квантовый детерминизм нарушается из-за существования теплового излучения у черных дыр. Волновые функции, описывающие вероятности в квантовой механике, изменяются во времени по совершенно определенным математическим правилам, таким, как уравнение Шредингера. Зная волновые функции всех фундаментальных объектов Вселенной в определенный момент времени, можно определить волновые функции в любой предшествующий или последующий момент. Вычисления Хокинга, как и вычисления энтропии, были очень сложными, но главная проблема осталась. Если какой-нибудь объект попадает в черную дыру, туда же отправляется и его волновая функция. Но это означает, что для внешнего наблюдателя волновая функция упавшего предмета в черную дыру будет потерянной. Чтобы полностью предсказать то, что будет завтра, нужно знать волновые функции в настоящий момент времени. И если предмет упал в черную дыру, то содержащаяся о нем информация потеряна.

Хотя проблема все еще не полностью разрешена, недавно т`Хофт и Сасскинд заявили, что существует способ восстановления информации. Идея состоит в том, что для черных дыр, информация можно хранить на поверхности горизонта событий:

$$\boldsymbol{I = \frac{A}{4l_p^2}} \qquad (1.3)$$

Данная формулировка получила название голографического принципа. Существует много формулировок этого принципа, но все сходятся к такому, что максимальное количество информации *I* о веществе внутри некоторого объема определяется площадью поверхности А, ограничивающий данный объем. Этот результат дал шанс теоретикам заявить о том, что при испарении черных дыр информация восстанавливается.

Существует другая формулировка предела энтропии Бекенштейна для материи содержащейся внутри сферы:

$$\boldsymbol{S_m = \frac{2\pi\,k\,mc}{\hbar}\,R}$$

Предел вычисления информации для материального объекта с определенным размером будет:

$$I_m = \frac{2\pi\, k\, mc}{In2\ \hbar}\, R$$

2. Гравитация Верлинде.

В 2010 году в опубликованной работе «О природе тяготения и законов ньютона» Эрик Верлинде показал, что связь между тяготением и энтропией может существовать не только для ЧД, но и для “обычных” массивных тел, далеких от гравитационного коллапса. Он ввел для каждого такого тела представление о гипотетическом сферическом экране, несущим информацию о нем и окружающем это тело, и предположил, что силы гравитации имеют не фундаментальный, а вторичный характер, будучи в точности обусловленными по величине возникающим градиентом энтропии при изменении радиуса экрана.
Его предположение начинается непосредственно с работ Бекенштейна над мысленными экспериментами, от которого получилась формула энтропии голографического экрана для материи.

$$S_m = \frac{2\pi\, k\, mc}{\hbar}\, R$$

Экран границы как часть пространства, которая содержит и хранит данные о свойствах частицы на определенном расстоянии от него.
Руководствуясь аргументами Бекенштейна, Эрик Верлинде предположил: если частица смещается относительно голографического экрана, то изменение энтропии, связанное с информацией на границе равно:

$$\Delta S_m = \frac{2\pi\, k\, mc}{\hbar}\, \Delta x$$

Следуя примеру Бекенштейна, Верлинде рассмотрел падение пробной частицы на источник поля тяготения. Пусть пробная частица пересекает мысленную сферу определенного радиуса, окружающего источник (в данном случае – не черную дыру). Для другой пробной частицы вне этой сферы дело выглядит так, что масса источника увеличилась за счет первой пробной массы и, соответственно, увеличилось число возможных конфигураций распределения массы внутри указанной сферы. То есть первая пробная масса привносит в сферу связанную с ней энтропию, что в точности напоминает ситуацию с черной дырой.
Сказанное можно сформулировать и в терминах термодинамики. Как известно, приращение энергии/работы **dW** можно представить в виде произведения обобщенной силы на приращение обобщенной координаты. Например, это может быть произведение обычной силы (например, тяготения) на перемещение вдоль координаты **(dW=F•dx)**, или произведение давления (газа) на приращение объема **(dW=p•dV)**. Но с таким же успехом это может быть и произведение температуры на приращение энтропии **(dW=T•dS).**
Эрик Верлинде связал воедино формулы для температуры и энтропии, относящиеся к обычному массивному телу.
Для температуры он использовал формулу Унру, согласно принципу эквивалентности в гравитационном поле ***a = g***:

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi k c}$$

Отсюда, согласно гипотезе Верлинде сила тяготения рассматривается как градиент энтропии экрана:

$$\Delta A = F\, \Delta x = T\, \Delta S$$

$$F = T\, \frac{\Delta S}{\Delta x} = mg$$

Однако допущение о присутствии подобного “голографического” экрана, несущего информацию, не кажется достаточно обоснованным. С другой стороны, наличие несомненной связи между гравитацией и энтропией вовсе не обязательно должно приводить к идее о первичности именно энтропии. Так, автор другой работы по термодинамике и гравитации Фернандо Порцелли показывает, что нет оснований однозначно считать энтропию источником гравитации, поскольку правомерна и другая точка зрения: термодинамическое уравнение состояния может быть выведено на основании уравнений теории тяготения.

В этом смысле связь между “фундаментальной” силой и энтропией вовсе не является привилегией гравитационного взаимодействия, поэтому концепция Верлинде не кажется совсем правильной.

3. Энтропия гравитационного поля.

Рассмотрим временную компоненту псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля:

$$\begin{aligned} t^{ik} = \frac{c^4}{16\pi k}\{(2\Gamma^n_{lm}\Gamma^p_{np} - \Gamma^n_{lp}\Gamma^p_{mn} - \Gamma^n_{ln}\Gamma^p_{mp})(g^{il}g^{km} - g^{ik}g^{lm}) + \\ + g^{il}g^{mn}(\Gamma^k_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^k_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^k_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^k_{lm}\Gamma^p_{np}) + \\ + g^{kl}g^{mn}(\Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{mn} + \Gamma^i_{mn}\Gamma^p_{lp} - \Gamma^i_{np}\Gamma^p_{lm} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^p_{np}) + \\ + g^{lm}g^{np}(\Gamma^i_{ln}\Gamma^k_{mp} - \Gamma^i_{lm}\Gamma^k_{np})\}, \end{aligned}$$

В случае слабого гравитационного поля плотность энергии:

$$\boldsymbol{t_{00}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{8\pi G}}(\boldsymbol{\nabla\varphi})^2$$

Унру показал, что понятие о вакууме зависит от того, как наблюдатель движется сквозь пространство-время. Если вокруг неподвижного наблюдателя находится только вакуум, то ускоряющийся наблюдатель увидит вокруг себя много частиц, находящихся в термодинамическом равновесии, то есть тёплый газ.

Температура наблюдаемого излучения Унру выражается простой формулой, и зависит от свободного ускорения a = g.

$$T = \frac{\hbar a}{2\pi k c}$$

Определим энтропию вакуума Урну в некотором малом объеме пространства. По второму закону

термодинамики энтропия определяется как:

$$\boldsymbol{dS = \frac{\delta Q}{T}}$$

Если рассматривается сплошная среда с плотностью внутренней энергии $\boldsymbol{w = \frac{U}{V}}$, где работа внешних сил равна нулю:

$$\boldsymbol{dS = \frac{dU}{T} = \frac{dU}{V}\,\frac{dV}{T} = dw\,\frac{V}{T}}$$

Вакуум Унру это место, где существует гравитационное поле. По закону сохранения, можно приписать изменение внутренней энергии вакуума Унру самой энергии гравитационного поля. Тогда энтропия такой термодинамической системы как вакуум гравитационного поля будет:

$$\boldsymbol{dS = dw\frac{V}{T} = \frac{dgg}{4\pi G}\,\frac{V}{T} = \frac{dgg}{4\pi G}\,\frac{2k\pi c\,V}{\hbar\,g} = \frac{kc\,dg}{2\,G\,\hbar}\,V}$$

$$S = \frac{kc\,g}{2\,G\,\hbar}\,V \quad (V \to 0)$$

Или объемная плотность энтропии гравитационного поля имеет вид:

$$S_V = \frac{S}{V} = \frac{kc\,g}{2G\hbar}$$

Как видно, энтропия слабого гравитационного поля зависит от напряженности (ускорения свободного падения). С другой стороны по общей теории относительности гравитация это искривление пространства-времени. Поэтому логично предположить, что существует энтропия, характеризующая в определенном объеме количество конфигураций состояния геометрии пространства-времени.

Если рассматривать источник тяготения в виде материальной точки, то энтропия гравитационного поля, заключенная в сферической оболочке имеет вид:

$$S = \int_0^R S_V\,dV = \int_0^R \frac{kc\,g}{2G\hbar}\,4\pi r^2 dr = \int_0^R \frac{k\,M}{2\hbar\,r^2}\,4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\,k\,Mc}{\hbar}\,R$$

Как видно, энтропия гравитационного поля материальной точки, заключенная в сферической оболочке имеет квантовую природу и зависит от радиуса сферы пространства и массы источника. Единственная величина, характеризующая термодинамическую систему на квантовом уровне, является энтропия фон Неймана:

$$\varepsilon = -Tr\,Z\,lnZ$$

Она же и характеризует квантовую запутанность для системы из многих частиц. Здесь она характеризует квантовую запутанность между материей и самим пространством-временем.

$$\varepsilon = \frac{2\pi\,Mc}{\hbar}\,R$$

Каждая точка границы пространства запутывается с массой материи, в результате меняется конфигурация микросостояния и появляется энтропия на данной поверхности. Данная формула энтропии запутывания материи с границей пространства совпадает с голографическим пределом Бекенштейна.

4.Голографическая энтропия запутывания и геометрические потоки Риччи.

Начнем с доказательства того, что гравитационный потенциал в вакууме удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = 0$$

Действительно получаем:

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{GM}{R}\right) = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial\varepsilon} - \frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\frac{M}{R} = 0$$

Его решение представляется в виде голографической энтропии запутывания на экране (предел Бекенштейна):

$$\boldsymbol{\varepsilon = \frac{2\pi\, Mc}{\hbar}\, R}$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial M}{\partial \varepsilon} = \frac{\hbar}{2\pi c R}}, \qquad \boldsymbol{\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \frac{\hbar}{2\pi c M}}$$

Что и требовалось доказать, что гравитационный потенциал в вакууме удовлетворяет данному условию:

$$\boldsymbol{\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = 0}$$

Это условие также показывает энергетический минимум: гравитационный потенциал в вакууме имеет минимальное состояние при голографической энтропии запутывания на поверхности сферы.

Классическая теория тяготения описывается с помощью гравитационного потенциала, который является решением уравнения Пуассона:

$$\boldsymbol{\Delta\varphi = 4\pi G\rho}$$

В вакууме уравнение Пуассона имеет вид:

$$\boldsymbol{\Delta\varphi = 0}$$

Поэтому для слабого гравитационного поля в вакууме имеем систему уравнений:

$$\boldsymbol{\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = 0},$$

$$\boldsymbol{\Delta\varphi = 0}$$

Эта из этой системы можно прийти как уравнению типа:

$$\boldsymbol{\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = \lambda\, \Delta\varphi = 0}$$

Где $\boldsymbol{\lambda}$- некоторый параметр уравнения.

Можно показать, что данное уравнение существует и для случая когда $\boldsymbol{\rho \neq 0}$.

Пусть имеется равномерное распределение материи в пространстве в любом заданном объеме:

$$\boldsymbol{\rho = const \neq 0}.$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} = \lambda\, \Delta\varphi = \lambda\, 4\pi G\rho = const}$$

$$\varphi = \int \lambda\, 4\pi G\rho\, \partial\varepsilon = 4\pi G\rho \int \lambda\ \partial\varepsilon$$

Так гравитационный потенциал выбирается как отрицательная физическая величина, то параметр должен быть $\lambda < 0$

Найдем минимальное значение гравитационного потенциала для данной задачи:

$$\varphi_{min} = 4\pi G\rho \int_0^{E_{MAX}} \lambda\ \partial\varepsilon$$

Для этого решения необходимо применить общую теорию относительности, согласно которой в такой сплошной среде с равномерно распределенной плотностью материи, гравитационный потенциал имеет условие, когда для наблюдателя существует горизонт событий:

$$2\ \varphi_{min} = -c^2$$

Радиус данного горизонта событий определяется как:

$$R_g^2 = \frac{3c^2}{8\pi G\rho}$$

Отсюда определяется величина максимальная энтропии запутывания на горизонте событий:

$$-R_g^2 = 3\int_0^{E_{MAX}} \lambda\ \partial\varepsilon = 3\ \lambda\ \varepsilon_{max}$$

Согласно Бекенштейну максимальная энтропия черной дыры равна одной четверти площади горизонта событий:

$$\varepsilon_{max} = \frac{A}{4l_p^2} = \frac{\pi R_g^2}{l_p^2}$$

Отсюда определяется параметр:

$$\lambda = -\frac{l_p^2}{3\pi} = -\frac{G\hbar}{3\pi\ c^3}$$

Уравнение, связывающий гравитационный потенциал, голографическую энтропию запутывания и плотность материи имеет следующий вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon} = \lambda\, 4\pi G\rho$$

Согласно общей теории относительности в сильных полях гравитационный потенциал заменяется метрикой пространства-времени, а плотность материи на тензор энергии-импульса. Поэтому последнее уравнение имеет обобщенный вид:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial\varepsilon} = \lambda\ \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

Уравнения Эйнштейна для гравитационного поля связывает кривизну пространства-времени с распределением материей:

$$\boldsymbol{R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}}$$

Отсюда получаем следующие дифференциальные уравнения, которые связывают энтропию квантовой запутанности, метрику и кривизну пространства-времени:

$$\boldsymbol{\frac{\partial g_{ik}}{\partial \varepsilon} = \lambda \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right)}$$

Данное уравнения в математике носит название потоки Риччи. Впервые их рассмотрел Григорий Перельман для доказательства гипотезы Пуанкаре. Последнее утверждает, что компактное замкнутое трехмерное многообразие изменяется в форму топологии трехмерной сферы. Перельман успешно решил и доказал известную проблему Пуанкаре в этой области геометрии.

Как видно, потоки Риччи существуют в геометрии пространства-времени, для изучения поведения таких уравнений необходимо подробно изучить работы по топологии, дифференциальной геометрии и доказательства Григория Перельмана гипотезы Пуанкаре.

Литература:

1. Banados M., Teitelboim C., Zanelli J. Black hole in three-dimensional spacetime // Physical Review Letters. – 1992. – Vol. 69. – №. 13. – P. 1849.

2. Carlip S. Black hole entropy from conformal field theory in any dimension // Physical Review Letters. – 1999. – Vol. 82. – №. 14. – P. 2828.

3. Frolov V. P., Fursaev D. V. Thermal fields, entropy and black holes // Classical and Quantum Gravity. – 1998. – Vil. 15. – №. 8. – P. 2041.

4. Gubser S. S., Klebanov I. R., Polyakov A. M. Gauge theory correlators from non-critical string theory // Physics Letters B. – 1998. – Vol. 428. – №. 1. – P. 105-114.

5. Holzhey C., Larsen F., Wilczek F. Geometric and renormalized entropy in conformal field theory // Nuclear Physics B. – 1994. – Vol. 424. – №. 3. – P. 443-467.

6. Maldacena J. The large N limit of superconformal field theories and supergravity // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. – 1998. – Vol. 2. – №. 2. – P. 231 – 252.

7. Polyakov A.M. Gauge Fields and Strings. – Chur, Switzerland : Harwood Academic Publishers, 1987. – 301 p.

8. Strominger A. Black hole entropy from near-horizon microstates // Journal of High Energy Physics. – 1998. – Vol. 1998. – № 02. – P. 009.

9. Witten E. Anti-de Sitter space and holography // Advances in Theoretical and Mathematical Physics. – 1998. – Vol. 2. – P. 253 – 291.