Espaço e Tempo nos Fundamentos da Relatividade Geral
(Space and Time in the Fundamentals of General Relativity)

Valdir Monteiro dos Santos Godoi
valdir.msgodoi@gmail.com

RESUMO – Analisamos as variações de espaço e tempo que ocorrem sob a influência de um campo gravitacional produzido por uma massa *M*, seguindo os Fundamentos da Relatividade Geral, de Einstein (1916). Concluímos que ao utilizarmos as unidades convencionais para a velocidade da luz os valores resultantes são muito diferentes dos que são obtidos adotando a velocidade da luz igual a 1, e que sem dúvida não podem estar de acordo com os valores experimentais. Os encurtamentos das réguas e lentidões dos relógios seriam muito maiores, pois não seriam mais divididos pelo quadrado da velocidade da luz.

ABSTRACT – We examined the variations of space and time that occur under the influence of a gravitational field produced by a mass *M*, following the Foundations of General Relativity, by Einstein (1916). We conclude that when we use the conventional units for the speed of light resulting values are very different from those obtained by adopting the speed of light equal to 1, and that certainly could not be in agreement with the experimental values. The shortening of the rulers (scales) and slowness of the clocks would be much higher, because would no longer divided by the square of the speed of light.

Palavras chaves: espaço, tempo, réguas, relógios, massa, desvio para o vermelho, espectro, riscas espectrais, luz, Relatividade Geral, Einstein, unidade, conversão de unidades, velocidade da luz, gravidade, potencial gravitacional.

Keywords: space, time, rulers, scales, clocks, mass, red shift, spectrum, spectral lines, light, General Relativity, Einstein, unit, unit conversion, speed of light, light velocity, gravity, gravitational potential.

1 – Introdução

Das primeiras aplicações feitas pela Relatividade Geral apenas não falamos ainda do estudo feito sobre o comportamento de réguas e relógios no campo de gravidade estático. É o que faremos neste artigo. Por campo de gravidade estático entende-se o campo de gravidade que para um mesmo ponto do espaço não varia com o passar do tempo.

No § 22 do célebre artigo de Einstein publicado em 1916[1] trata-se inicialmente de como o campo gravitacional produzido por um corpo de massa *M* influencia as propriedades métricas do espaço.

A relação

(1) $$ds^2 = g_{\mu v} dx_\mu dx_v$$

existente entre os comprimentos e tempos medidos localmente (ds), de um lado, e as diferenças de coordenadas (dx_v), de outro, deve ser válida.

Se o "ponto" material gerador do campo se encontra situado na origem do sistema de coordenadas obtém-se em primeira aproximação a seguinte solução de simetria radial (válida para pontos exteriores à massa *M*):

(2.1) $$g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha \frac{x_\rho x_\sigma}{r^3} \ (1 \leq \rho, \sigma \leq 3)$$

(2.2) $$g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0 \ (1 \leq \rho \leq 3)$$

(2.3) $$g_{44} = 1 - \frac{\alpha}{r}$$

onde $\delta_{\rho\sigma}$ é o delta de Kronecker,

(3) $$\alpha = 2\frac{GM}{c^2},$$

e sendo *r* a grandeza positiva

(4) $$r = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_2^3}.$$

As coordenadas espaciais são então (x_1, x_2, x_3), e x_4 é a coordenada temporal. A constante α tem dimensão de distância.

Se uma régua unidade (i.e., de comprimento 1) estiver, por exemplo, colocada em posição paralela ao eixo x (que contém os x_1), tomaremos

$$ds^2 = -1, \ dx_2 = dx_3 = dx_4 = 0,$$

e portanto a equação

(5) $$-1 = g_{11}\, dx_1^2$$

deve ser obedecida.

Se a régua estiver sobre o eixo x (i.e., onde $x_2 = x_3 = 0$) deve valer também

(6) $$g_{11} = -\left(1 + \frac{\alpha x_1^2}{r^3}\right) = -\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) = -\left(1 + \frac{\alpha}{|x_1|}\right),$$

conforme (2.1), e assim

(7.1) $$-1 = -\left(1 + \frac{\alpha}{|x_1|}\right) dx_1^2$$

(7.2) $$dx_1^2 = \frac{1}{1+\frac{\alpha}{|x_1|}}$$

(7.3) $$dx_1 \approx 1 - \frac{\alpha}{2|x_1|}.$$

Em seu artigo Einstein escreve (7.3) como

(8) $$dx = 1 - \frac{\alpha}{2r},$$

justificando-a "com o rigor da primeira aproximação", e conclui que a régua unidade, quando está colocada radialmente no campo de gravidade, apresenta em relação ao sistema de coordenadas, em conseqüência da existência do campo, um encurtamento cujo valor é o dado em (8). Talvez (8) seja uma forma mais simples de contextualizar (7.3).

Mas diríamos que uma maneira mais exata de entender o significado de (7.3) é a seguinte:

Nossa régua unidade, localizada inteiramente sobre o eixo x, que na ausência da massa *M* se localizaria da posição x_1 a $x_1 + \Delta x_1$, com $\Delta x_1 = 1$, na presença do campo da massa *M* na origem do sistema teria sua medida alterada, passando a se localizar, por exemplo, da posição x_1 a $x_1 + \left(1 - \frac{\alpha}{2|x_1|}\right)$, ou seja, neste caso $\Delta x_1 = 1 - \frac{\alpha}{2|x_1|} < 1$. Daí que se diz que a régua unidade encurta na presença da massa *M*, quando colocada radialmente sob o campo gravitacional.

A partir da próxima seção chamaremos o sistema MKS de unidades como o nosso sistema de unidades convencional, ou habitual. Também chamaremos de potencial gravitacional (Φ) o potencial em valor absoluto, embora o correto sinal do potencial gravitacional seja o negativo.

2 – Crítica ao resultado sobre o comportamento das réguas

A crítica que fazemos, entendendo as limitações da passagem de (7.2) a (7.3), e a (8), refere-se ao fato de que a velocidade da luz no vácuo utilizada por Einstein é igual a 1, conforme definido no § 4 e utilizado nos § 21, onde se trata da teoria de Newton como primeira aproximação, e § 22, onde se fazem as primeiras aplicações da Relatividade Geral. Sua unidade de distância mantém-se a mesma, mas não sua unidade de tempo, o que já mencionamos em [2].

A quantidade $\frac{\alpha}{2|x_1|}$ que aparece em (7.3), e que numa situação mais genérica (quaisquer (x_1, x_2, x_3)) seria igual a $\frac{\alpha}{2r}$, é o potencial do campo gravitacional newtoniano (em valor absoluto),

(9) $$\Phi_N = \frac{GM}{r},$$

se fosse escrito na unidade convencional do tempo. Na unidade de tempo utilizada por Einstein, na qual a velocidade da luz no vácuo vale 1, temos

(10) $$\Phi_E = \frac{GM}{c^2 r},$$

em conformidade com o valor de α dado em (3).

Em termos de verificações e confirmações experimentais isto faz significativa diferença. Afinal, um encurtamento de ΔL e um de $\frac{\Delta L}{c^2}$ são extraordinariamente diferentes, se ΔL é maior que zero e $c \approx 3 \times 10^8\ m/s$ é a velocidade da luz no vácuo.

Vejamos dados numéricos para a superfície da Terra, massa e raio médio da Terra dados respectivamente por

$$M_T = 5{,}9722 \times 10^{24}\ kg,$$

$$R_T = 6{,}371 \times 10^6\ m.$$

O potencial gravitacional Φ_N^{Terra} na superfície da Terra, usando seu raio médio, é então

(11) $$\Phi_N^{Terra} = \frac{GM_T}{R_T} \approx 6{,}26 \times 10^7 m^2/s^2,$$

na unidade convencional para o tempo, onde usamos

$$G = 6{,}674287 \times 10^{-11}\, m^3 kg^{-1} s^{-2}.$$

Na unidade de Einstein, para

$$c = 299\,792\,458\, m/s,$$

temos o potencial gravitacional Φ_E^{Terra} tal que

(12) $$\Phi_E^{Terra} = \frac{GM_T}{c^2 R_T} \approx 6{,}96 \times 10^{-10},$$

sem unidade dimensional resultante para Φ_E.

Se ao invés da Terra utilizarmos dados do Sol, massa e raio (médio) dados respectivamente por

$$M_S = 1{,}989 \times 10^{30}\, kg,$$

$$R_S = 6{,}960 \times 10^{8}\, m,$$

chegamos a

(13) $$\Phi_N^{Sol} = \frac{GM_S}{R_S} \approx 1{,}91 \times 10^{11}\, m^2/s^2$$

e

(14) $$\Phi_E^{Sol} = \frac{GM_S}{c^2 R_S} \approx 2{,}12 \times 10^{-6}.$$

Vemos que apenas na unidade de Einstein tivemos encurtamentos $\Delta L = \Phi$ que pareceriam razoáveis, por serem pequenos, enquanto na unidade convencional, que pensamos rotineiramente em utilizar, os encurtamentos, comparados com os de Einstein, são absurdamente grandes, em princípio parecendo que o comportamento é o de um grande "alargamento", ou seja, as réguas pareceriam aumentar de tamanho (um melhor esclarecimento sobre esta questão é dado na seção 5).

Não encontramos muito o que dizer sobre as réguas dispostas tangencialmente sob um campo gravitacional, i.e., perpendicularmente a ele. Segundo Einstein, neste caso o encurtamento é nulo, fazendo

$$ds^2 = -1,\; dx_1 = dx_3 = dx_4 = 0,\; x_1 = r,\; x_2 = x_3 = 0,$$

resultando assim em

(15) $$-1 = g_{22}\ dx_2^2 = -dx_2^2,$$

ou seja, $g_{22} = -1$ e $dx_2 = 1$, como seria sem a presença da massa.

Precisamos apenas esclarecer que não seria possível a régua estar inteiramente em $x_2 = x_3 = 0$ e ter um comprimento igual a 1, obviamente. É o início da régua, ou um de seus extremos, que estaria, por exemplo, em (*r*, 0, 0), e seu término, o outro extremo, estaria em (*r*, 1, 0). Podemos substituir *r* por –*r* ou 1 por -1, ou trocar x_2 por x_3, e a conclusão seria a mesma.

3 – A Conversão de Unidades

No § 21 de [1], onde se trata da teoria de Newton como primeira aproximação da Relatividade Geral, Einstein obtém para o potencial gravitacional (em primeira ordem de aproximação)

(16) $$V = -\frac{\chi}{8\pi}\int\frac{\rho d\tau}{r},$$

sendo χ uma constante, compatível com a unidade temporal na qual a velocidade da luz no vácuo é igual a 1.

Como a teoria de Newton dá, também para a nova unidade de tempo,

(17) $$V = -\frac{G}{c^2}\int\frac{\rho d\tau}{r},$$

então obtém-se para a constante χ em (16) o valor

(18) $$\chi = \frac{8\pi G}{c^2} \approx 1{,}8664 \times 10^{-26}.$$

Mas na unidade convencional o potencial gravitacional newtoniano é dado por

(19) $$V = -G\int\frac{\rho d\tau}{r},$$

que comparado com (17) faz-se perceber que a constante gravitacional G na unidade de Einstein, que chamaremos de G', é então

(20) $$G' = \frac{G}{c^2}.$$

A expressão (20) pode ser obtida também da definição de que a velocidade da luz é igual a 1, na unidade temporal de Einstein, e de que o valor de G se expressa (no sistema MKS) como

$$G = 6{,}674287 \times 10^{-11}\, m^3 kg^{-1} s^{-2},$$

pois 1 s é igual a c s’ na nova unidade s’ de tempo, para que valha

(21) $$c\, m/s = 1\, m/s',$$

o que leva à relação (20).

Da igualdade (2.3) para g_{44} e de (16) para o potencial gravitacional obtém-se para α o valor

(22) $$\alpha = \frac{\chi M}{4\pi} = 2\frac{GM}{c^2},$$

em acordo com (3), o que deixa claro que o termo $\frac{\alpha}{r}$ nos coeficientes da métrica é então o dobro do potencial gravitacional, expresso na unidade de Einstein, e que $\frac{G}{c^2}$ é o valor da constante gravitacional G' nesta unidade especial.

Utilizou-se em (22), evidentemente, a relação

(23) $$M = \int \rho d\tau,$$

onde ρ é a densidade da massa *M* que gera o campo e $d\tau$ é o elemento de volume, volume este onde concentra-se *M*.

4 – Comportamento de relógios no campo gravitacional estático

Segundo Einstein, para um período de funcionamento de um relógio unidade que se encontra em repouso num campo gravitacional estático tem-se

$$ds^2 = 1,\ dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0,$$

e portanto

(24) $$1 = g_{44}\, dx_4^2,$$

donde

(25) $$dx_4 = \frac{1}{\sqrt{g_{44}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\alpha}{r}}} \approx 1 + \frac{\alpha}{2r},$$

ou seja,

(26) $$dx_4 \approx 1 + \frac{\chi}{8\pi}\int \frac{\rho d\tau}{r}.$$

Conforme vimos na seção anterior, o último termo que aparece em (26) é o potencial gravitacional, em valor absoluto, que toma valores “razoáveis” na unidade onde a velocidade da luz é igual a 1, mas fornece valores “enormes” na unidade convencional de espaço e tempo (por exemplo, no sistema MKS).

Einstein conclui que o relógio funciona com maior lentidão (período maior) quando está colocado nas proximidades de massas ponderáveis (ou melhor, sob influência de um campo gravitacional), e assim as riscas espectrais da luz que nos chegam da superfície de grandes astros devem apresentar-se desviadas para o extremo vermelho do espectro (frequência menor, período maior da luz).

Esta última conclusão, de grande significado, traz consigo a seguinte implicação: uma vez sob o efeito de um campo gravitacional, à distância *r* do centro desta fonte, quando longe desta fonte, numa nova distância $r' >> r$, o efeito recebido na distância *r* ainda permanecerá, i.e., em *r’*. Isto porque uma vez emitida a luz com certa freqüência, “alterada” pela presença da massa *M*, longe desta massa a luz não voltaria a oscilar com sua freqüência padrão, para que na Terra a medíssemos ainda alterada, i.e., desviada para o vermelho, conforme os resultados experimentais parecem indicar.

No caso de nosso relógio unidade, uma vez tendo sua marcha alterada pela presença “próxima” de *M*, de tal maneira que (26) seja verdadeira, longe de *M* sua marcha, ou período, não voltaria mais ao normal, exceto sob outra intervenção externa. Parece-me algo estranho, contrário a outras evidências experimentais.

5 – Conclusão

Aqui analisamos as variações sofridas no espaço e no tempo sob a influência de um campo gravitacional estático, com simetria radial, deduzidas da solução das equações de Einstein em primeira ordem de aproximação.

Vimos que os resultados obtidos por Einstein parecem razoavelmente possíveis, mas, nos casos da superfície da Terra e do Sol, desde que estejamos utilizando uma unidade de tempo na qual a velocidade da luz no vácuo é igual a 1, permanecendo inalteradas as demais unidades.

Na unidade convencional de tempo e espaço, onde a velocidade da luz no vácuo vale $c \approx 3 \times 10^8\ m/s$, os encurtamentos de réguas e lentidões nas marchas dos relógios seriam muito diferentes do que se aceita, pois neste caso o potencial gravitacional, e equivalentemente a constante gravitacional *G*, não seriam mais divididos por c^2.

Na realidade, quando utilizamos a unidade convencional do tempo, o valor (em módulo) do potencial gravitacional, $\Phi_N = \frac{GM}{r}$, pode ser muito grande, assim não valem sempre as relações $|\Phi_N| << 1$ ou $|\Phi_N| \approx 0$, e a passagem de (7.2) para (7.3) não seria mais válida. Neste caso o valor que aproxima (7.2) é

(27) $$dx_1 \approx \sqrt{\frac{|x_1|}{2GM}},$$

e semelhantemente (8) deve ser substituído por

(28) $$dx = \sqrt{\frac{r}{2GM}}.$$

Usando os valores para a superfície da Terra encontramos

$$dx^{Terra} \approx 8{,}94 \times 10^{-5}\ m,$$

enquanto para o Sol temos

$$dx^{Sol} \approx 1{,}62 \times 10^{-6}\ m,$$

ou seja, nossa régua unidade original, que antes media 1 metro, sob a influência do campo de gravidade tem sua medida reduzida para cerca de um décimo de milímetro, na superfície da Terra, e um milésimo e meio de milímetro se fosse na superfície do Sol, o que é muito diferente das pequenas variações dadas por (12) e (14), respectivamente.

Para o tempo, a lentidão dos relógios, encontramos ainda um outro problema: a equação (26) não é válida sempre, pois $1 - \Phi_N$, de (25), pode ser um número negativo (na superfície da Terra, por exemplo), e neste caso dx_4 se torna um número imaginário. Se tomarmos dx_4 em módulo, entretanto, chegamos a um resultado semelhante a (28), ou seja,

(29) $$dt = \sqrt{\frac{r}{2GM}},$$

e sendo assim nossa unidade de tempo (1 *s*) se transformaria também em uma duração muito pequena.

Claro que para as distâncias muito grandes tais que o valor absoluto do potencial $\frac{GM}{r}$ também é pequeno, ou seja, quando ainda vale a desigualdade $|\Phi_N| << 1$ ou $|\Phi_N| \approx 0$, as equações (8) e (25) continuam válidas, substituindo-se α por 2*GM*, ou seja, sem a divisão por c^2, para que tenhamos as unidades convencionais. Lembremos que nas (muito) grandes distâncias pode não haver procedimento experimental algum capaz de comprovar qualquer efeito gravitacional produzido no espaço ou no tempo por *M*, e tanto diferenças de $\frac{GM}{c^2 r}$ quanto de $\frac{GM}{r}$ seriam equivalentes ao zero experimental.

Nos casos em que (25) ainda é válido, lembrando que dx_4 é uma medida temporal, e que obtemos de (21) as relações de conversão

(30.1) $$1\ s' = c\ s$$

(30.2) $$1\ s = 1/c\ s'$$

vamos partir de (25) utilizando a unidade temporal correspondente:

(31) $$dx_4\ (s') \approx \left(1 + \frac{\alpha}{2r}\right)\ (s').$$

Usando (30.1) em (31) vem

(32) $$dx_4 \cdot c\ (s) \approx \left(1 + \frac{\alpha}{2r}\right) \cdot c\ (s)$$

e então

(33) $$dx_4\ (s) \approx \left(1 + \frac{\alpha}{2r}\right)\ (s),$$

o que nos faria crer que em ambas as unidades de tempo a expressão para a variação temporal permanece a mesma, igual a (25). O fato de não convertermos o valor de α na passagem de (31) para (32), entretanto, deve prejudicar esta conclusão. O valor de α convertido, quando se usa a unidade convencional de tempo, deve ser $\alpha = 2GM$, conforme se pode perceber.

Nossa análise prosseguirá com a solução exata das equações de Einstein dada pela métrica de Schwarzschild e usando o valor habitual da velocidade da luz, onde uma conclusão mais definitiva poderá ser encontrada.

Por ora, não creio que chegaremos a conclusão mais positiva sobre a Relatividade Geral.

REFERÊNCIAS

1. Einstein, A., *Os Fundamentos da Teoria da Relatividade Geral*, em Textos Fundamentais da Física Moderna, vol. I, O Princípio da Relatividade, tradução de Mário José Saraiva do artigo original *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie,* Annalen der Physik, **49**, 769-822 (1916). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian (1983).

2. Godoi, V.M.S, *The Deflection of Light by the Sun. The Einstein's Calculation in 1916*, http://vixra.org/abs/1412.0141 (2014).