La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (II)

The theory purely affine of the gravity and electromagnetism of Schrödinger (II)

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: wenceslao-segura.es

Sinopsis. En el año 1943 Erwin Schrödinger inició una serie de publicaciones de lo que llamo Teoría Unitaria de Campo, con la que pretendía unificar los campos gravitatorio, electromagnético y mesónico sobre una base geométrica. En este artículo que, es continuación de [36], analizamos la segunda de las teorías puramente afín de Schrödinger (Schrödinger-II), que basó en una conexión semisimétrica y por tanto con torsión, capaz de acomodar los tres campos que quería unificar.

Abstract. In 1943 Erwin Schrödinger began a series of publications on Unitary Field Theory, with which wanted to unify the gravitational, electromagnetic and mesonics fields on a geometric basis. In this article, which is a continuation of [36], we analyze the second of the purely affine theories Schrödinger (Schrödinger-II), where he used a semi-symmetric connection and therefore with torsion, capable of accommodating the unification of the three fields.

Contenido

La versión *v1* del artículo «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (II)» fue publicada el día 14 de enero de 2015.

La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (II)

The theory purely affine of the gravity and electromagnetism of Schrödinger (II)

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: wenceslao-segura.es

1.- Introducción

Durante los años cuarenta del siglo pasado Erwin Schrödinger desarrolló una amplia investigación sobre lo que hoy llamamos teoría puramente afín, un proyecto que tiene sus antecesores en Weyl, Eddington y principalmente Einstein a quien hay que considerar como el primero que desarrolló una teoría de estas características en varios trabajos publicados en el año 1923. Schrödinger, al igual que antes Einstein, consideró como el principal elemento geométrico la conexión, cuyas componentes son los únicos potenciales de los campos, debiendo la densidad lagrangiana depender de esta conexión y de sus derivadas primeras. El tensor métrico aparece como magnitud derivada y por tanto en un segundo nivel con relación a la conexión.

El primer trabajo de Schrödinger sobre esta asunto data del año 1943, posteriormente fue formulando distintas teorías cada vez más generales. La teoría que denominamos Schrödinger-I la examinamos en [36] y consideraba una conexión simétrica. Si bien en esta investigación Schrödinger pudo formular las ecuaciones de campo sólo logró la unificación de la gravitación y del electromagnetismo. El proyecto de Schrödinger era incluir en esta unificación el campo mesónico, en la época entendido como el responsable de las fuerzas de cohesión de las partículas nucleares. Por esta razón Schrödinger se vio en la necesidad de generalizar Schrödinger-I.

En esta investigación sobre teoría unitaria de campo Schrödinger quería obtener tres conjuntos de potenciales que sirvieran para la descripción de los campos gravitatorio, electromagnético y mesónico. Mientras que el primero tiene que venir descrito (tal como ocurre en Relatividad General) por un tensor de segundo orden simétrico, los dos restantes que corresponden a campos vectoriales, vienen descritos por sendos tensores de segundo orden antisimétricos.

En su primera teoría puramente afín formulada en 1943 Schrödinger partió de una densidad lagrangiana que dependía de las componentes simétricas y antisimétricas del tensor de Ricci, que a su vez se derivan de una conexión simétrica. De esta densidad lagrangiana se obtienen los tensores de los campos gravitatorio y electromagnético por las ecuaciones

$$\boldsymbol{g}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{(ik)}}; \qquad \boldsymbol{f}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{[ik]}}$$

pero no era posible obtener los potenciales del campo mesónico.

La primera sugerencia de Schrödinger se inclinó en suponer la existencia de dos conexiones ambas simétricas de las que se derivarían dos tensores de Ricci R_{ik} y R'_{ik}, que serían los argumentos de la densidad lagrangiana. De esta manera se derivarían dos tensores antisimétricos de segundo orden: los asociados a $R_{[ik]}$ y a $R'_{[ik]}$, pero, a su vez, aparecerían dos tensores métricos, lo que no puede ser. Para evitar esta situación es necesaria condicionar la dependencia funcional de la densidad lagrangina. Schrödinger supuso

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\left\{R_{(ik)} + R'_{(ik)}; R_{[ik]} + R'_{[ik]}; R_{[ik]} - R'_{[ik]}\right\}$$

entonces como

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{(ik)}} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R'_{(ik)}}$$

el tensor métrico es único, existiendo a su vez dos tensores antisimétricos diferentes

$$\boldsymbol{f}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{[ik]}}; \qquad \boldsymbol{m}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R'_{[ik]}}$$

los cuales representarían al campo electromagnético y al mesónico.

Al final del artículo de 1943 [16] el mismo Schrödinger decía que había sido advertido por A. J. McConnell que no era necesario duplicar la conexión afín porque «aunque admisible era después de todo extraña» y que si se partía de una conexión asimétrica, además de la parte simétrica de la conexión existiría su parte antisimétrica, las cuales podrían servir para acomodar los tres campos.

En la generalización que llamaremos teoría Schrödinger-II publicada en 1944 bajo el título «La unión de los tres campos fundamentales (gravitación, mesón, electromagnetismo)», Schrödinger consideró una conexión no simétrica, lo que permitía acomodar además del campo tensorial de la gravitación, dos campos vectoriales. No obstante, y probablemente por razones simplificadoras, Schrödinger impuso la condición semisimétrica (5) por la cual reducía a sólo cuatro las componetes de la parte antisimétrica de la conexión.

Si la conexión no es simétrica entonces surge un nuevo vector dependiente de las derivadas de la conexión. Se trata de la curvatura homotética V_{ik}, que en el caso de conexión simétrica coincide con la parte antisimétrica del tensor de Ricci. Por tanto, Schrödinger-II considera una densidad lagrangiana con la dependencia funcional

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\left[R_{(ik)}, R_{[ik]}, V_{ik} \right]$$

de la cual se derivan los tres campos (uno tensorial y dos vectoriales).

En este trabaj3 hacemos constante referencia a [36] donde se expone Schrödinger-I, por lo que aconsejamos su previa lectura.

2.- Las contracciones del tensor de curvatura

Definimos el tensor de curvatura o de Riemann por la relación

$$R^k{}_{sir} = \Gamma_{sr,i}{}^k - \Gamma_{si,r}{}^k + \Gamma_{sr}{}^n\Gamma_{ni}{}^k - \Gamma_{si}{}^n\Gamma_{nr}{}^k \tag{1}$$

donde $\Gamma_{sr}{}^k$ es la conexión afín y las comas (,) significan derivación parcial respecto a las coordenadas espacio-temporales. A partir del tensor de curvatura (1) se pueden definir dos nuevos tensores mediante la contracción de índices. Se le llama tensor de Ricci a la contracción

$$R_{si} = R^k{}_{sik} = \Gamma_{sk,i}{}^k - \Gamma_{si,k}{}^k + \Gamma_{sk}{}^t\Gamma_{ti}{}^k - \Gamma_{si}{}^t\Gamma_{tk}{}^k \tag{2}$$

compuesta tanto de parte simétrica como antisimétrica, con independencia de la simetría de la conexión.

La otra posible contracción del tensor de curvatura recibe el nombre de curvatura homotética y es definida por

$$V_{ir} = R^k{}_{kir} = \Gamma_{kr,i}{}^k - \Gamma_{ki,r}{}^k + \Gamma_{kr}{}^n\Gamma_{ni}{}^k - \Gamma_{ki}{}^n\Gamma_{nr}{}^k = \Gamma_{kr,i}{}^k - \Gamma_{ki,r}{}^k,$$

que es un tensor antisimétrico. Las otras contracciones posibles del tensor de curvatura no dan lugar a nuevos tensores.

Por cálculo directo es fácil comprobar que la derivada de la curvatura homotética cumple la relación

$$V_{ir,j} + V_{rj,i} + V_{ji,r} = 0.$$

El tensor de Ricci no es en general simétrico, no obstante siempre se puede descomponer en parte simétrica y antisimétrica

$$R_{si} = R_{(si)} + R_{[si]}.$$

En el caso de que la conexión sea simétrica (o sea, no haya torsión) la parte antisimétrica está relacionada con la curvatura homotética por

$$R_{[is]} = \frac{1}{2}V_{si} \qquad \Leftrightarrow \qquad R_{is} - R_{si} = V_{si}, \tag{3}$$

es decir los tensores R_{si} y V_{si} son independientes entre sí sólo cuando la conexión no es simétrica, teniendo el primero 16 componentes y 6 el segundo tensor. Observamos que el tensor de Ricci tiene parte simétrica y antisimétrica aún en el caso de que la conexión sea simétrica. Por tanto contamos con tres tensores $R_{(si)}$, $R_{[si]}$, V_{si} que dependen de la conexión y de sus primeras derivadas y pueden servir como argumentos para formar una densidad lagrangiana en una teoría puramente afín. En el caso especial de un espacio riemaniano (donde el tensor métrico es simétrico y la conexión coincide con los símbolos de Christoffel) la curvatura homotética es nula, o sea, el tensor de Ricci es simétrico.

3.- El tensor y el vector de torsión

Aunque sin carácter tensorial en general, cualquier conexión puede descomponerse en parte simétrica y antisimétrica

$$\Gamma_{is}{}^{k} = \Gamma_{(is)}{}^{k} + \Gamma_{[is]}{}^{k},$$

donde utilizamos el criterio de que los paréntesis redondeados representan simetrización y los cuadrados antisimetrización, y que son definidos por

$$\Gamma_{(is)}{}^{k} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{is}{}^{k} + \Gamma_{si}{}^{k}\right)$$
$$\Gamma_{[is]}{}^{k} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{is}{}^{k} - \Gamma_{si}{}^{k}\right).$$

Sus leyes de transformación son diferentes, de tal forma que la parte antisimétrica se transforma como un tensor de tercer orden, algo que no ocurre con la parte simétrica. Esto viene a significar que las partes simétricas y antisimétricas no se mezclan y ante una ley de transformación de las coordenadas actúan como magnitudes independientes. La parte antisimétrica de la conexión tiene 24 componentes independientes y la parte simétrica tiene 40 componentes distintas, las que hacen el total de 64 componentes de la conexión.

Si una conexión es simétrica en un sistema de coordenadas, será simétrica en cualquier otro sistema, pues en este caso la parte antisimétrica es nula y al ser un tensor, seguirá siendo nula en cualquier otro sistema de coordenadas. No obstante, la conexión antisimétrica no tiene carácter invariante, es decir la conexión puede ser antisimétrica en un sistema de coordenadas y no serlo en otro.

La parte antisimétrica de una conexión no es una conexión, ya que se transforma como un tensor y no con la ley de transformación de las conexiones. No obstante, la parte simétrica de una conexión es a su vez una conexión.

Definimos el tensor de torsión por

$$\tau_{is}{}^{k} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{is}{}^{k} - \Gamma_{si}{}^{k}\right) = \Gamma_{[is]}{}^{k},$$

que es antisimétrico. Contrayendo los índice k y s obtenemos

$$\tau_{i} = \tau_{ik}{}^{k} = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{ik}{}^{k} - \Gamma_{ki}{}^{k}\right)$$

llamado vector de torsión.

Podemos separar las partes simétrica y antisimétrica de la conexión en las expresiones del tensor de Ricci y de la curvatura homotética

$$\begin{gathered} R_{si} = \left(R_{si}\right)_{\Gamma} + D_{i}\Gamma_{[sk]}^{\;\;k} - D_{k}\Gamma_{[si]}^{\;\;k} + \Gamma_{[sk]}^{\;\;t}\Gamma_{[ti]}^{\;\;k} - \Gamma_{[si]}^{\;\;t}\Gamma_{[tk]}^{\;\;k} \\ V_{si} = \left(V_{si}\right)_{\Gamma} + \Gamma_{[ki],s}^{\;\;k} - \Gamma_{[ks],i}^{\;\;k}, \end{gathered} \tag{4}$$

donde $\left(R_{si}\right)_{\Gamma}$ y $\left(V_{si}\right)_{\Gamma}$ representan el tensor de Ricci y la curvatura homotética en función de $\Gamma_{is}{}^{k}$, observando que las derivadas covariantes se calcula respecto a la parte simétrica de la conexión. Notemos que $\left(R_{si}\right)_{\Gamma}$ coincide con el tensor de Ricci que aparece en las geometrías basadas en una conexión simétrica, siendo los demás términos de la primera ecuación (4) los añadidos en la teoría de conexión no simétrica.

4.- La conexión semisimétrica

En la teoría Schrödinger-I se postula que la torsión o parte antisimétrica de la conexión tiene la forma

$$\Gamma_{[is]}^{\;\;k} = \delta_{i}^{k} V_{s} - \delta_{s}^{k} V_{i} \tag{5}$$

donde V_i es un vector arbitrario. De (5) se deduce que el vector V_i está relacionado con el vector de torsión por la relación

$$V_{i} = -\frac{1}{3}\tau_{i}.$$

Con la definición (5) se reduce el número de componentes de la parte antisimétrica de la conexión a solamene 4 en vez de las 24 que tienen normalmente. Si le sumamos las 40 componentes independientes de la parte simétrica de la conexión nos encontramos con $40+4=44$ potenciales de campo. Si se cumple (5) encontramos que

$$\varepsilon^{ijkl}\Gamma_{kl}^{\ \ r}$$

resulta ser una densidad antisimétrica en los índices *i, j, r*. En efecto

$$\varepsilon^{ijkl}\Gamma_{kl}^{\ \ r}=\varepsilon^{ijkl}\Gamma_{(kl)}^{\ \ \ r}+\varepsilon^{ijkl}\Gamma_{[kl]}^{\ \ \ r}=\varepsilon^{ijkl}\Gamma_{[kl]}^{\ \ \ r} \tag{6}$$

ya que en el primer sumando del segundo miembro hay un factor antisimétrico en *k, l* y otro simétrico en los mismos índices. (6) nos queda cuando usamos (5)

$$\varepsilon^{ijkl}\Gamma_{[kl]}^{\ \ \ r}=2\varepsilon^{ijkl}V_l$$

que evidentemente es simétrico respecto a los índice *i, j, k*.

Si se cumple (5) decimos que la conexión es semisimétrica o débilmente simétrica. En este caso se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{[ik]}^{\ \ \ k}=-3V_i\\
&D_k\Gamma_{[is]}^{\ \ \ k}=D_iV_s-D_sV_i\\
&\Gamma_{[is]}^{\ \ \ k}\Gamma_{[km]}^{\ \ \ s}=-3V_iV_m\\
&\Gamma_{[ik]}^{\ \ \ k}\Gamma_{[sm]}^{\ \ \ i}=0.
\end{aligned}$$

Y el tensor de Ricci y la curvatura homotética quedan

$$\begin{aligned}
R_{si}&=\left(R_{si}\right)_\Gamma-D_sV_i-2D_iV_s-3V_sV_i\\
V_{si}&=\left(V_{si}\right)_\Gamma-3D_sV_i+3D_iV_s.
\end{aligned} \tag{7}$$

5.- El principio de minima acción

En vez de trabajar con una densidad lagrangiana con la dependencia funcional

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}\left[R_{ik},V_{ik}\right]$$

Schrödinger eligió nuevos argumentos de $\boldsymbol{L}$ definidos como combinación lineal del tensor de Ricci y de la curvatura homotética

$$\begin{aligned}
M_{si}&=\frac{1}{4}\left(V_{si}+R_{si}-R_{is}\right)\\
P_{si}&=R_{si}+2M_{si},
\end{aligned} \tag{8}$$

los potenciales de campo respecto a los cuales se va a variar la densidad lagrangiana son las cuarenta componentes de $\Gamma_{(si)}^{\ \ \ r}$ y la cuatro componentes del vector V_i, poniendo (8) en función de estos potenciales y de sus derivadas tenemos

$$\begin{aligned}
M_{si}&=D_sV_i-D_iV_s\\
P_{si}&=\left(R_{si}\right)_\Gamma+D_sV_i-4D_iV_s-3V_sV_i
\end{aligned} \tag{9}$$

recordamos de nuevo que las derivadas covariantes están calculadas respecto a la parte simétrica de la conexión y que hemos hecho uso de (3) para simplificar la segunda fórmula (9). Por (9) comprobamos que M_{si} es completamente antisimétrica, pero P_{si} tiene parte simétrica y antisimétrica, siendo la simétrica igual a $R_{(si)}$. Entonces la dependencia funcional de la densidad lagrangiana es

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}\left(M_{si};P_{si}\right)$$

quedando de momento indeterminada la forma concreta de la densidad lagrangiana.

Se definen las siguientes densidades tensoriales

$$\boldsymbol{g}^{si}=\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial P_{(si)}};\qquad \boldsymbol{f}^{si}=\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial P_{[si]}};\qquad \boldsymbol{m}^{si}=-\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial M_{si}}$$

siendo la primera simétrica y las dos restantes antisimétricas.

Al aplicar el principio de mínima acción se obtiene

$$\delta I=\delta\int L\,d\Omega=\int\left\{\boldsymbol{g}^{si}\delta P_{(si)}+\boldsymbol{f}^{si}\delta P_{[si]}-\boldsymbol{m}^{si}\delta M_{si}\right\}d\,\Omega=0. \tag{9}$$

donde se varía respecto a las 44 variables de campo, que son $\Gamma_{(si)}^{\ \ \ r}$ y V_i.

6.- Variación respecto a $\Gamma_{(si)}^{\ \ r}$

Ante una variación de las componentes simétricas de la conexión se tiene

$$\begin{aligned}\delta M_{si} &= V_m\left[\delta\Gamma_{(is)}^{\ \ m}-\delta\Gamma_{(si)}^{\ \ m}\right]=0\\ \delta P_{si} &= \delta\left(R_{si}\right)_\Gamma+V_m\left[4\delta\Gamma_{(si)}^{\ \ m}-\delta\Gamma_{(is)}^{\ \ m}\right]=\left[D_i\,\delta\Gamma_{(sk)}^{\ \ k}-D_k\,\delta\Gamma_{(si)}^{\ \ k}\right]+V_m\left[4\delta\Gamma_{(si)}^{\ \ m}-\delta\Gamma_{(is)}^{\ \ m}\right]\end{aligned} \tag{11}$$

entonces

$$\begin{aligned}\delta P_{(si)} &= \frac{1}{2}\left[D_i\,\delta\Gamma_{(sk)}^{\ \ k}+D_s\,\delta\Gamma_{(ki)}^{\ \ k}\right]-D_k\,\delta\Gamma_{(si)}^{\ \ k}+3V_m\,\delta\Gamma_{(si)}^{\ \ m}\\ \delta P_{[si]} &= D_i\,\delta\Gamma_{(sk)}^{\ \ k}-D_s\,\delta\Gamma_{(ik)}^{\ \ k},\end{aligned} \tag{12}$$

la primera de las ecuaciones (11) y las dos ecuaciones (12) son las que hay que aplicar en (10). Debemos notar que parte de los términos que aparecen en (10) ya fueron evaluados en [36]. El término de (10) que ahora nos interesa es el que contiene la variación siguiente

$$\delta P'_{(si)}=3V_m\delta\Gamma_{(si)}^{\ \ m}.$$

Entonces la ecuación (2) de [36] que resulta de aplicar el principio de mínima acción (10) se transforma en

$$2D_r\boldsymbol{g}^{ik}=\delta_r^i\,D_l\left(\boldsymbol{g}^{kl}+\boldsymbol{f}^{kl}\right)+\delta_r^k D_l\left(\boldsymbol{g}^{il}+\boldsymbol{f}^{il}\right)-6V_r\boldsymbol{g}^{ik}, \tag{13}$$

si ahora contraemos respecto a i y r

$$D_r\boldsymbol{g}^{rk}=-\frac{5}{3}\boldsymbol{a}^k+2V_r\boldsymbol{g}^{rk}, \tag{14}$$

donde

$$\boldsymbol{a}^k=D_i\boldsymbol{f}^{ki}=\partial_i\boldsymbol{f}^{ki}$$

nótese que (14) es válida para un espacio tetradimensional. Al sustituir (14) en (13)

$$D_r\boldsymbol{g}^{ik}=\delta_r^i\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}^k+V_l\boldsymbol{g}^{lk}\right)+\delta_r^k\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}^i+V_l\boldsymbol{g}^{il}\right)-3V_r\boldsymbol{g}^{ik}. \tag{15}$$

A continuación seguimos el mismo procedimiento explicado en [36] para obtener de (15) la expresión de la conexión en función del tensor métrico y de los vectores V_i, a^i. Descomponemos la parte simétrica de la conexión en la forma

$$\Gamma_{(pq)}^{\ \ r}=L_{pq}^{\ \ r}+X_{pq}^{\ \ r},$$

donde $L_{pq}^{\ \ r}$ son los símbolos de Christoffel y $X_{pq}^{\ \ r}$ es una tensor de tercer orden simétrico respecto a sus índices inferiores. Con esta suposición se deriva de (15)

$$X_{prq}+X_{qrp}-g_{qp}X_{sr}^{\ \ s}=-\frac{1}{3}\left(g_{rq}a_p+g_{rp}\,a_q\right)+g_{rq}V_p+g_{rp}V_q-3g_{qp}V_r \tag{16}$$

donde hemos tenido en cuenta que $D^*g_{ik}=0$ donde D^* es la derivada covariante usando los símbolos de Christoffel en vez de la conexión.

Permutando los índices de (16)

$$\begin{aligned}X_{prq}+X_{qrp}-g_{qp}X_{sr}^{\ \ s} &= -\frac{1}{3}\left(g_{rq}a_p+g_{rp}\,a_q\right)+g_{rq}V_p+g_{rp}V_q-3g_{qp}V_r\\ X_{qpr}+X_{rpq}-g_{rq}X_{sp}^{\ \ s} &= -\frac{1}{3}\left(g_{pr}a_q+g_{pq}\,a_r\right)+g_{pr}V_q+g_{pq}V_r-3g_{rq}V_p\\ X_{rqp}+X_{pqr}-g_{pr}X_{sq}^{\ \ s} &= -\frac{1}{3}\left(g_{qp}a_r+g_{qr}\,a_p\right)+g_{qp}V_r+g_{qr}V_p-3g_{pr}V_q\end{aligned}$$

sumando la primera igualdad con la tercera y restándole la segunda obtenemos

$$2X_{qrp}-g_{qp}X_{sr}^{\ \ s}-g_{pr}X_{sq}^{\ \ s}+g_{rq}X_{sp}^{\ \ s}=-\frac{2}{3}g_{rq}\,a_p+5g_{rq}V_p-3g_{pr}V_q-3g_{qp}V_r \tag{17}$$

multiplicando por g^{pk} y después contrayendo los índices k y r

$$X_{qk}^{\ \ k}=\frac{1}{3}a_q+5V_q$$

que lo sustituimos en (17) obteniéndose

$$X_{qr}{}^{k}=\delta_q^k\left(\frac{1}{6}a_r+V_r\right)+\delta_r^k\left(\frac{1}{6}a_q+V_q\right)-\frac{1}{2}g_{rq}\,a^k$$

finalmente obtenemos que la conexión en función del tensor métrico y de los vectores a_i y V_i es

$$\Gamma_{(qr)}{}^{k}=L_{qr}{}^{k}+\delta_q^k\left(\frac{1}{6}a_r+V_r\right)+\delta_r^k\left(\frac{1}{6}a_q+V_q\right)-\frac{1}{2}g_{rq}\,a^k\,, \tag{18}$$

mientras que la parte antisimétrica de la conexión es dada por (5), entonces la conexión en la teoría de Schrödinger-II es

$$\Gamma_{qr}{}^{k}=\Gamma_{(qr)}{}^{k}+\Gamma_{[qr]}{}^{k}=L_{qr}{}^{k}+\delta_q^k\left(\frac{1}{6}a_r+2V_r\right)+\frac{1}{6}\delta_r^k a_q-\frac{1}{2}g_{rq}\,a^k \tag{19}$$

lo que nos muestra que en asuencia de campo electromagnético y mesónico, la conexión coincide con los símbolos de Christoffel, lo que significa que el espacio sería el de Riemann de la Relatividad General.

7.- Variación respecto a V_i

(18) son 40 ecuaciones correspondientes a igual número de componentes de la parte simétrica de la conexión. Nos quedan por obtener las cuatro componentes de la parte antisimétrica de la conexión que suponemos semisimétrica, es decir cumple (5). Para ello vamos a variar los potenciales V_i y aplicar el princpio de mínimo acción (10).

Al variar V_i se obtiene

$$\begin{aligned}\delta M_{si}&=D_s\delta V_i-D_i\,\delta V_s\\ \delta P_{si}&=D_s\delta V_i-4D_i\,\delta V_s-3\delta V_sV_i-3\delta V_iV_s\end{aligned} \tag{20}$$

habiendo intercambiado el orden de la variación δ y la derivación covariante. Descomponemos la segunda ecuacion (20) en parte simétrica y antisimétrica

$$\begin{aligned}\delta P_{(si)}&=-\frac{3}{2}\left(D_s\delta V_i+D_i\,\delta V_s\right)-3\delta V_sV_i-3\delta V_iV_s\\ \delta P_{[si]}&=\frac{5}{2}\left(D_s\delta V_i-D_i\,\delta V_s\right)\end{aligned} \tag{21}$$

Llevamos la primera ecuación (20) y las ecuaciones (21) a la expresión del principio de mínima acción (10) y hacemos el cálculo en la forma habitual (ver [36]) usando el teorema de Gauss y tras hacer las simplificaciones se obtiene

$$D_s\boldsymbol{m}^{si}=0\qquad\Leftrightarrow\qquad\frac{\partial\boldsymbol{m}^{si}}{\partial x^s}=0 \tag{22}$$

donde hemos tenido en consideración que $\boldsymbol{m}^{si}$ es antisimétrico y que la derivada covariante está calculada respecto a la parte simétrica de la conexión.

8.- Ecuaciones de campo

Debemos advertir que para obtener los resultados (19) y (22) sólo ha sido necesario conocer la dependencia funcional de la densidad lagrangiana. Nos proponemos obtener las ecuaciones de campo, para ello sí será necesario conocer expresamente la densidad lagrangiana para obtener el número de ecuaciones diferenciales necesarias para resolver los potenciales de campo.

Como paso previo a la formulación de las ecuaciones de campo vamos a sustituir (18) en la segunda ecuación (9). El cálculo se simplifica si hacemos la siguiente descomposición de (18)

$$\Gamma_{(qr)}{}^{k}=\Gamma'_{(qr)}{}^{k}+\delta_q^kV_r+\delta_r^kV_q$$

$\Gamma'_{(qr)}{}^{k}$ es la conexión que aparece en la teoría de Schrödinger-I. A hacer la sustitución encontramos que los potenciales V_i se cancelan, quedando

$$\left(R_{si}\right)_{\Gamma}=\left(R_{si}\right)_{\Gamma'}\,,$$

por tanto el resultado es el mismo que Schrödinger-I, o sea la fórmula (7) de [36]

$$P_{si}=G_{si}+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial a_s}{\partial x^i}-\frac{\partial a_i}{\partial x^s}\right)+\frac{1}{6}a_sa_i\,,$$

donde G_{si} es el tensor de Ricci calculado a partir de los símbolos de Christoffel.

En similitud con la teoría de Schrödinger-I se definen los tensores

$$\gamma_{si} = P_{(si)}; \quad \phi_{si} = P_{[si]}$$

y por tanto

$$\gamma_{si} = G_{si} + \frac{1}{6} a_s a_i; \qquad \phi_{si} = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial a_s}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^s}\right) \tag{23}$$

readaptando la primera ecuación (23) se tiene

$$G_{si} - \frac{1}{2} g_{si} G = -T_{si} - \frac{1}{6}\left(a_s a_i - \frac{1}{2} g_{si}\, a_p a^p\right) \tag{24}$$

donde

$$T_{si} = -\left(\gamma_{si} - \frac{1}{2} g_{si} g^{pq} \gamma_{pq}\right).$$

Si ahora sustituimos (18) en la primera ecuación (9)

$$M_{si} = \frac{\partial V_i}{\partial x^s} - \frac{\partial V_s}{\partial x^i}. \tag{25}$$

Reuniendo todos los resultados, las ecuaciones de campo de la teoría Schrödinger-II son

$$\begin{aligned}
&G_{si} - \frac{1}{2} g_{si} G = \left(\gamma_{si} - \frac{1}{2} g_{si} g^{pq} \gamma_{pq}\right) - \frac{1}{6}\left(a_s a_i - \frac{1}{2} g_{si}\, a_p a^p\right)\\
&\phi_{si} = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial a_s}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^s}\right)\\
&\boldsymbol{a}^k = \partial_i \boldsymbol{f}^{ki}\\
&M_{si} = \frac{\partial V_i}{\partial x^s} - \frac{\partial V_s}{\partial x^i}\\
&\frac{\partial \boldsymbol{m}^{si}}{\partial x^s} = 0,
\end{aligned} \tag{26}$$

Nótese que en las ecuaciones aparecen ocho funciones

$$g_{ik};\ \gamma_{ik};\ a_i;\ \phi_{ik};\ \boldsymbol{f}^{ik};\ M_{ik};\ V_i;\ \boldsymbol{m}^{ik}$$

que representan 52 funciones independientes, no obstante (26) son sólo 30 ecuaciones diferenciales; o sea, se necesitan 22 nuevas ecuaciones que son obtenidas cuando hallamos definido la densidad lagrangiana.

La densidad lagrangiana que estamos utilizando tiene la dependencia funcional

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(\gamma_{ik}; \phi_{ik}; M_{ik})$$

de la que derivamos su transformada de Legendre

$$\overline{\boldsymbol{L}} = \overline{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{g}_{ik}; \phi_{ik}; M_{ik}) = \boldsymbol{g}^{ik}\gamma_{ik} - \boldsymbol{L}$$

entonces

$$\gamma_{ik} = \frac{\partial \overline{\boldsymbol{L}}}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}}; \qquad \boldsymbol{f}^{ik} = \frac{\partial \overline{\boldsymbol{L}}}{\partial \phi_{ik}}; \qquad \boldsymbol{m}^{ik} = \frac{\partial \overline{\boldsymbol{L}}}{\partial M_{ik}} \tag{27}$$

es decir que γ_{ik}, $\boldsymbol{f}^{ik}$, $\boldsymbol{m}^{ik}$ son funciones que deben ser obtenidas a partir de la densidad lagrangiana para lo que será necesario conocer su forma explícita. En (27) encontramos 22 nuevas ecuaciones diferenciales, que unidas a las 30 de (26) nos dan las 52 ecuaciones diferenciales que necesitamos para resolver las ecuaciones de campo. El procedimiento a seguir es aplicar (27) y sustituir los valores obtenidos en las ecuaciones (26).

En su artículo titulado «La unión de los tres campos fundamentales (gravitación, mesón, electromagntismo)» del año 1944, Schrödinger concluyó el análisis de su investigación en este punto, es decir no se decidió a elegir una densidad lagrangiana que nos permitiera la completa formulación de las ecuaciones de campo.

No obstante en su primer trabajo sobre teoría unitaria de campo [16] Schrödinger planteó la hipótesis de usar la siguiente densidad lagrangiana

$$\overline{\boldsymbol{L}} = 2\alpha\left\{\sqrt{\det(g_{ik} + \phi_{ik})} + \frac{\alpha'}{\alpha}\sqrt{\det(g_{ik} + \phi_{ik} + M_{ik})}\right\}$$

confesaba que aunque no la había evaluado era probable que fuera la densidad lagrangiana correcta.

Tal como se pretendía las ecuaciones de campo (26) y (27) describen el campo gravitatorio, recuperándose las ecuaciones de la Relatividad General cuando $\phi_{ik} = 0$ y $M_{si} = 0$. Los otros dos campos que vienen descritos por tensores de segundo orden antisimétrico deben ser asociados al electromagnetismo y al campo mesónico.

En la teoría Schrödinger-II que comentamos, Schrödinger se inclinó a considerar que las magnitudes $(a_k, \phi_{ik}, \boldsymbol{f}^{ik})$ representan al campo mesónico y $(V_k, M_{ik}, \boldsymbol{m}^{ik})$ correspondía al campo electromagnético, lo que viene a significar que la torsíón es la responsable del electromagnetismo.

Schrödinger basó su elección en que entendía que el campo mesónico tenía una más similitud con la gravitación que el electromagnético y por lo tanto debía tener contribución a las geodésicas, es decir el campo mesónico debía estar relacionado con la parte simétrica de la conexión, en tanto que la parte antisimétrica (ahora asociada al electromagnetismo) no influye en la ecuación de la línea geodésica.

9.- Conclusión

Este artículo es el segundo de una serie en los que analizamos las investigaciones de Schrödinger en teoría puramente afín. En esta ocasión tratamos con la que denominamos teoría Schrödinger-II formulada en el año 1944 [17]. Es una teoría con conexión no simétrica, pero que limita la forma del tensor torsión al imponerle que satisfaga la condición semisimétrica (5).

Hemos obtenido la expresión general de la conexión en función del tensor métrico y de los vectores a_i y V_i y posteriormente hemos hallado las ecuaciones de campo que además del campo gravitatorio admite dos campos vectoriales definidos por tensores de segundo orden antisimétrico. Schrödinger entendió que estos campos eran el electromagnético y el mesónico, con lo que conseguía la unificación de los tres campos de fuerzas que se conocían a mitad de los años cuarenta del siglo pasado.

Schrödinger no desarrolló plenamente la teoría Schrödinger-II, para ello hubiera sido necesario establecer una definida densidad lagrangiana con la que obtener todas las ecuaciones diferenciales de campo variables de campo, algo que Scrhödinger no hizo en la publicación que analizamos, ni tampoco en investigaciones posteriores en las que sí procedió a generalizar aún más la teoría puramente afín eliminando el condicionamiento de conexión semisimétrica.

Bibliografía

[1] Eddington, A. S.: *The mathematical theory of Relativity*, Chelsea Publishing, 1975, pp. 213-240 y pp. 257-263.

[2] Einstein, Albert: «The Foundation of the General Theory of Relativity», en *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, pp. 111-164, (primeramente editado en 1916).

[3] Einstein, Albert: «Hamilton's Principle and the General Theory of Relativity», en *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, pp. 167-173, (primeramente editado en 1916).

[4] Einstein, A.: «Zür allgemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 32-38.

[5] Einstein, A.: «Zür allgemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 76–77.

[6] Einstein, A.: «Bemerkung zu meiner Arbeit 'Zur allegemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 137-140.

[7] Einstein, A.: «The Theory of the Affine Field», *Nature* **112** (1923) 448-449.

[8] Einstein, A.: «Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1925) 414-419, traducción al inglés con el título «Unified Field Theory of Gravitation and Electricity» por A. Unzicker and T. Case en www.alexander-unzicker.de/rep0.pdf.

[9] Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field Theories», *Living Reviews Relativity* **7** (2004) 1-153.

[10] Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field Theories.Part II. (ca. 1930 – ca. 1965)», *Living Reviews Relativity* **17** (2014) 1-241.

[11] Hittmair, O.: «Schrödinger's Unified Field Theory Seen 40 Years Later», en *Schrödinger: Centenary Celebration of a Polymath*, Kilmister, C. W. (editor), Cambridge University Press, 1989, pp.165-175,

[12] Schrödinger, Erwin: «Über die Unanwendbarkeit der Geometrie im Kleinen», *Naturwissenschaften* **22-31** (1934) 518-520.

[13] Schrödinger, Erwin: "Contributions to Born's New Theory of the Electromagnetic Field", *Proceedings of*

the Royal Society of London A **150** (1935). 465-477.
[14] Schrödinger, Erwin: «Sur la théorie du monde d'Eddington», *Il Nuovo Cimento* **15-4** (1938) 246-254.
[15] Schrödinger, Erwin: «The Point Charge in the Unitary Field Theory», *Procedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943-1944) 225-235.
[16] Schrödinger, E.: «The General Unitary Theory of the Physical Fields», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943) 43-58.
[17] Schrödinger, E.: «The Union of the three Fundamental Fields (Gravitation, Meson, Electromagnetism)», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1944) 275-287.
[18] Schrödinger, E.: «The Affine Connexion in Physical Field Theories», *Nature* **153** (1944) 572-575.
[19] Schrödinger, Erwin: «On Distant Affine Connection», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **50** (1944/1945) 143-154.
[20]Schrödinger, E.: «The general affine field laws», *Proceedings of the Royal Irish Academy Section A Mathematical and physical sciences* **51** (1946) 41-50.
[21] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws I», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1947) 163-171.
[22] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws II», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1948) 205-216.
[23] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws III», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **52** (1948) 1-9.
[24] Schrödinger, E.: «Studies in the Non-Symmetric Generalization of the Theory of Gravitation», *Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, Series A,* 1951, vol. 6.
[25] Schrödinger, E.; Hittmair, O.: «Studies in the Non-symmetric Generalization of the Theory of Gravitation II: The Velocity of Light», *Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies A*, 1951, vol. 8.
[26] Schrödinger, Erwin y Papapetrou A.: «The Point-Charge in the Non-symmetric Field Theory», *Nature* **168** (1951) 40-41.
[27] Schrödinger, E.: «Unitary Field Theory: Conservation Identities and Relation to Weyl and Eddington», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943-1944) 237-244.
[28] Schrödinger, E.: «The Relation betwenn metrica and affinity», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1945-1948) 147-150.
[29] Schrödinger, E.: «On the differential identities of an affinity», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **54** (1951-1952) 79-85.
[30] Schrödinger, Erwin: «Electric Charge and Current Engendered by Combined Maxwell-Einstein Fields», *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A* **56** (1953/1954) 13-21.
[31] Schrödinger, Erwin: *Space-Time Structure*, Cambridge University Press, 1991, pp. 106-119, (primera edición del año 1950).
[32] Segura González, Wenceslao: *Teoría de campo relativista*, eWT Ediciones, 2014.
[33] Segura González, Wenceslao: «Teoría general de la conexión afín», 2014, http://vixra.org/abs/1410.0160.
[34] Tonnelat, Marie-Antoinette: *Les théories unitaires de l'electromagnétism et de la gravitation*, Gauthier-Villars, 1965, pp. 266-273.
[35] Vizgin, Vladimir P.: *Unified Field Theories in the first third of the 20th century*, Birkhäuser, 1994, pp. 137-149, 188-197.
[36] Segura González, Wenceslao: «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (I)», 2015, http://vixra.org/abs/1501.0064.