La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (I)

The theory purely affine of the gravity and electromagnetism of Schrödinger (I)

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: wenceslao-segura.es

Sinopsis. En el año 1943 Erwin Schrödinger inició una serie de publicaciones de lo que él llamo Teoría Unitaria de Campo, con la que pretendía unificar los campos gravitatorio, electromagnético y mesónico sobre una base geométrica. El enfoque de su invetigación se basa en la teoría puramente afín, que supone a la conexión afín como el elemento geométrico principal y el tensor métrico como una magnitud derivada. En este trabajo analizamos la primera de las teorías de Schrödinger. Este es el primero de una serie de artículos que analizarán toda la investigación de Schrödinger en teorías unitarias de campo.

Abstract. In 1943 Erwin Schrödinger began a series of publications on Unitary Field Theory, with which wanted to unify the gravitational, electromagnetic and mesonics fields on a geometric basis. His investigation is based on the purely affine theory, which considers the affine connection as the main geometric element and the metric tensor as a derived quantity. In this paper we analyze the first Schrödinger theory. This is the first of a series of articles that expose the entire research Schrödinger in unitary field theories.

Contenido

La versión *v1* del artículo «La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (I)» fue publicada el día 5 de enero de 2015.

La teoría puramente afín de la gravedad y del electromagnetismo de Schrödinger (I)

The theory purely affine of the gravity and electromagnetism of Schrödinger (I)

Wenceslao Segura González
Investigador independiente
e-mail: wenceslaoseguragonzalez@yahoo.es
web: wenceslao-segura.es

1.- Introducción

Cuando Hilbert y Einstein desarrollaron la Relatividad General en 1915 [15] [[5] admitieron de partida que el continuo espacio-temporal tiene una geometría de Riemann, caracterizada por tener un tensor métrico simétrico y porque la conexión (también simétrica) coincide con los símbolos de Christoffel.

Pocos años después, Hermann Weyl [41] [42] planteó la primera teoría de unificación del electromagnetismo y la gravitación, en ella la conexión no se identifica con los símbolos de Christoffel. Esto venía a demostrar que la conexión afín era un concepto geométrico, que al menos, había que considerar al mismo nivel que la métrica.

El siguiente paso en la evolución lo da Eddington [3] [4], quien desarrolló la geometría a partir de la conexión afín, que así fue elevada a concepto geométrico primario, mientras que el tensor métrico surgía como una magnitud derivada. Eddington no desarrolló completamente los aspectos físicos de este planteamiento geométrico. Esta tarea la realizó Einstein [7] [8] [9] [10] [11], quien en el año 1923, publicó una serie de investigaciones en lo que ahora llamamos teoría puramente afín, que se contrapone a la teoría métrica (que toma como elemento básico al tensor métrico) y a la teoría métrico-afín (que toma simultáneamente como magnitudes básicas a la conexión y al tensor métrico).

En su refugio irlandés Erwin Schrödinger retomó durante los conflictivos años cuarenta la teoría puramente afín, en un momento en que el desarrollo de las teorías unitarias geométricas había sido abandonado. Su primer trabajo sobre este asunto data de 1943 [21] y se basa en la teoría de Einstein de 1923 y en la teoría electromagnética que Born e Infeld habían desarrollado en el año 1934[2]. De la primera de las teorías señaladas, Schrödinger tomó la conexión afín, mientras que de la segunda tomó la densidad lagrangiana de la cual obtuvo sus ecuaciones de campo gravitatorio y electromagnético.

Schrödinger usó el principio de mínima acción para la obtención de la conexión afín, un método físico-matemático que habiendo sido aplicado originariamente a los campos en 1912 por Gustav Mie [1], fue usado elegantemente por Hilbert para obtener las ecuaciones de campo de la Relatividad General. La potencia del método fue reconocida pronto por Einstein [6] y se convirtió en el mecanismo matemático con las que, desde entonces, se obtienen las ecuaciones de campo [36].

Para completar sus ecuaciones de campo Schrödinger utilizó un método introducido por Einstein en 1923, que es equivalente a la formulación de Hamilton de la mecánica clásica. Es decir, se aplica la transformación de Legendre a la densidad lagrangiana y posteriormente se aplican las ecuaciones canónicas. Al igual de lo que ocurre en la mecánica clásica, con este método se aumenta el número de potenciales de campo, pero tiene la ventaja de que el orden diferencial de las ecuaciones canónicas es uno, al contrario del orden segundo de las ecuaciones obtenidas por aplicación de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

La intención de la teoría de Schrödinger era una unificación completa de la Física, tanto es así que la llamó Teoría Unitaria de Campo. Aunque en su primera investigación Schröginder se limitó a los campos gravitatorio y electromagnético ya anunciaba que también debía de incluirse el campo mesónico, que entendía era el responsable de la interacción nuclear.

En los años posteriores Schrödinger continuó trabajando en la teoría puramente afín a la que añadió paulatinas modificaciones, cuyos resultados finales han sido bien conocidos gracias a que suscintamente aparecen en su libro *Space-Time Structure* [35].

En este artículos rescatamos el primer trabajo de Schrödinger sobre teoría puramente afín. Para facilitar su comprensión y lectura detallamos todos los cálculos matemáticos e incluimos nueve apéndices donde se aclaran algunas de las relaciones y teoremas aplicados en el texto principal. Advertimos que usamos una notación ligeramente diferente a la que originariamente usó Schrödinger e incluso nos apartamos de su razonamiento en alguna ocasión, en particular en la correlación que en este tipo de teorías geométricas es necesario hacer para identificar las magnitudes geométricas con las físicas.

2.- La conexión de la teoría puramente afín de Einstein

Consideramos en todo nuestro razonamiento un espacio dotado de una conexión simétrica, por lo tanto libre de torsión, en donde se define el tensor de Ricci que se supone, en general, no simétrico [37].

Entendemos que una densidad escalar $\boldsymbol{L}$ es un ente que frente a transformaciones de coordenadas

$$dx'^i = A^i_k \, dx^k$$

se transforma según la ley

$$\boldsymbol{L}' = \frac{1}{|A|}\boldsymbol{L}$$

donde $|A|$ es el determinante de la matriz de la transformación A^i_k . Dado que la raíz cuadrada del determinante a de cualquier tensor de tensor de segundo orden a_{ik} se transforma según

$$\sqrt{a'} = \sqrt{a}\big/|A|$$

podemos entender que la densidad escalar tiene la estructura

$$\boldsymbol{L} = \sqrt{a}\, L$$

donde L es un invariante.

Las ecuaciones de campo son obtenidas a partir de un principio de mínima acción que afirma que la variación de la acción del campo

$$I = \int \boldsymbol{L}\, d\Omega$$

es una extremal, siendo $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ para el caso del espacio-tiempo tetradimensional

En la teoría de campo unificado de Einstein se parte de una densidad lagrangiana que depende exclusivamente de la conexión y de sus primeras derivadas a través de las componentes simétrica $R_{(ik)}$ y antisimétrica $R_{[ik]}$ del tensor de Ricci, es decir

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\left\{R_{(ik)}, R_{[ik]}\right\}.$$

Nótese que el tensor a_{ik}, al que antes nos hemos referido, debe ser en nuestro caso $R_{(ik)}$, $R_{[ik]}$ o una combinación lineal de ambos tensores, ya que no existen más tensores de segundo orden a nuestra disposición.

Definimos dos densidades tensoriales a partir de las relaciones

$$\boldsymbol{g}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{(ik)}}; \qquad \boldsymbol{f}^{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{[ik]}}$$

que en efecto son densidades tensoriales como puede verse por el siguiente razonamiento. Indiquemos primero que la variación δa_{ik} de un tensor calculada en un mismo punto es a su vez un tensor, puesto que la diferencia de dos tensores siempre es un tensor. Por (A.3) tenemos

$$\delta\sqrt{a} = \frac{1}{2}\sqrt{a}\, a^{*ki}\delta a_{ik}$$

que es una densidad escalar ya que resulta de multipicar un escalar $a^{*ki}\delta a_{ik}$ por $\sqrt{a}$ tal como es requerido para ser una densidad escalar. Comprobamos además que

$$\delta\boldsymbol{L} = \delta\left(\sqrt{a}L\right) = \delta\sqrt{a}L + \sqrt{a}\delta L$$

es una densidad escalar, ya que δL es un escalar (diferencia entre dos escalares).

En nuestro caso tenemos

$$\delta\boldsymbol{L} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{(ik)}}\delta R_{(ik)} + \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial R_{[ik]}}\delta R_{[ik]} = \boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{(ik)} + \boldsymbol{f}^{ik}\delta R_{[ik]}$$

para que la expresión sea homogénea y dado que $\delta R_{(ik)}$ y $\delta R_{[ik]}$ son tensores (simétrico el uno y antisimétrico el otro) es necesario que $\boldsymbol{g}^{ik}$ sea una densidad tensorial contravariante simétrica y $\boldsymbol{f}^{ik}$ sea una densidad tensorial contravariante antisimétrica, tal como queriamos demostrar.

Al hallar la variación de la acción del campo obtenemos

$$\delta I = \int \left\{ \boldsymbol{g}^{ik} \delta R_{(ik)} + \boldsymbol{f}^{ik} \delta R_{[ik]} \right\} d\Omega. \tag{1}$$

Como la única variable de campo es la conexión $\Gamma_{ik}^{\ \ r}$ entonces es necesario poner el anterior integrando en función de su variación $\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}$. Para ello utilizamos las identidades de Palatini (C.2). Estas expresiones nos va a permitir, conjuntamente con el teorema integral de Gauss, poner el integrando de la variación de la acción en función de la variación de la conexión.

Analicemos el primer sumando de (1)

$$\boldsymbol{g}^{ik}\delta R_{(ik)} = \boldsymbol{g}^{ik}\left[D_{(i}\,\delta\Gamma_{k)r}^{\ \ \ r} - D_r\,\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}\right] = \boldsymbol{g}^{ik}\left[\frac{1}{2}D_i\,\delta\Gamma_{kr}^{\ \ r} + \frac{1}{2}D_k\,\delta\Gamma_{ir}^{\ \ r} - D_r\,\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}D_i\left(\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{kr}^{\ \ r}\right) - \frac{1}{2}D_i\,\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{kr}^{\ \ r} + \frac{1}{2}D_k\left(\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ir}^{\ \ r}\right) - \frac{1}{2}D_k\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ir}^{\ \ r} - D_r\left(\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}\right) + D_r\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r},$$

a las integrales de las divergencias que aparecen se les puede aplicar el teorema de Gauss (B.2), por ejemplo

$$\int_V \frac{1}{2}D_i\left(\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{kr}^{\ \ r}\right)d\Omega = \int_\Sigma \frac{1}{2}g^{ik}\delta\Gamma_{kr}^{\ \ r}dS_i$$

si suponemos que el campo se anula en los límites del volumen, entonces la integral es nula, así que el primer sumando de (1) se reduce a

$$\int\left(-\frac{1}{2}D_i\,\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{kr}^{\ \ r} - \frac{1}{2}D_k\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ir}^{\ \ r} + D_r\,\boldsymbol{g}^{ik}\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}\right)d\Omega =$$

$$= \int\left(-\frac{1}{2}D_l\,\boldsymbol{g}^{lk}\delta_r^i - \frac{1}{2}D_l\boldsymbol{g}^{il}\delta_r^k + D_r\boldsymbol{g}^{ik}\right)\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}d\,\Omega$$

donde hemos tenido en consideración que la conexión es simétrica.

Ahora analizamos el segundo sumando de la variación de la acción

$$\boldsymbol{f}^{ik}\delta R_{[ik]} = \boldsymbol{f}^{ik}D_{[k}\,\delta\Gamma_{i]r}^{\ \ \ r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{f}^{ik}D_k\delta\Gamma_{ir}^{\ \ r} - \frac{1}{2}\boldsymbol{f}^{ik}D_i\,\delta\Gamma_{kr}^{\ \ r} =$$

$$= \frac{1}{2}D_k\left(\boldsymbol{f}^{ik}\delta\Gamma_{ir}^{\ \ r}\right) - \frac{1}{2}D_k\boldsymbol{f}^{ik}\delta\Gamma_{ir}^{\ \ r} - \frac{1}{2}D_i\left(\boldsymbol{f}^{ik}\delta\Gamma_{kr}^{\ \ r}\right) + \frac{1}{2}D_i\,\boldsymbol{f}^{ik}\delta\Gamma_{kr}^{\ \ r}$$

al aplicar el teorema de Gauss el segundo sumando de la variación de (1) queda

$$\int\left(-\frac{1}{2}D_k\boldsymbol{f}^{ik}\delta\Gamma_{ir}^{\ \ r} + \frac{1}{2}D_i\,\boldsymbol{f}^{ik}\delta\Gamma_{kr}^{\ \ r}\right)d\,\Omega = \int\left(-\frac{1}{2}D_l\,\boldsymbol{f}^{il}\delta_r^k + \frac{1}{2}D_l\,\boldsymbol{f}^{lk}\delta_r^i\right)\delta\Gamma_{ik}^{\ \ r}\,d\,\Omega$$

Reuniendo los dos resultados y aplicando el teorema de mínima acción se obtiene

$$2D_r\boldsymbol{g}^{ik} = \delta_r^i\,D_l\left(\boldsymbol{g}^{kl} + \boldsymbol{f}^{kl}\right) + \delta_r^k D_l\left(\boldsymbol{g}^{il} + \boldsymbol{f}^{il}\right) \tag{2}$$

en el cálculo hemos aprovechado las propiedades de simetría de las densidades $\boldsymbol{g}^{lk}$ y $\boldsymbol{f}^{lk}$.

Definimos

$$\boldsymbol{a}^k = D_i\,\boldsymbol{f}^{ki}$$

como $\boldsymbol{f}^{ki}$ es antisimétrico

$$\boldsymbol{a}^k = \partial_i\,\boldsymbol{f}^{ki}$$

entonces (2) queda

$$2D_r\boldsymbol{g}^{ik} = \delta_r^i\,D_l\,\boldsymbol{g}^{kl} + \delta_r^k D_l\,\boldsymbol{g}^{il} + \delta_r^i\,\boldsymbol{a}^k + \delta_r^k\,\boldsymbol{a}^i. \tag{3}$$

La siguiente etapa de nuestro razonamiento consiste en obtener la conexión en función de g^{ik} y a^k. Contrayendo (3) los índices *i, r* tenemos

$$D_r\boldsymbol{g}^{rk} = -\frac{N+1}{N-1}\boldsymbol{a}^k$$

donde *N* es la dimensión del espacio. Entonces (3) se transforma en

$$D_r \boldsymbol{g}^{ik} = -\frac{1}{N-1}\left(\delta_r^i \boldsymbol{a}^k + \delta_r^k \boldsymbol{a}^i\right). \tag{4}$$

En el caso de métrica simétrica la conexión puede descomponerse en función de los símbolos de Christoffel (D.2)

$$\Gamma_{pq}{}^r = L_{pq}{}^r + X_{pq}{}^r,$$

de tal forma que podemos expresar (4) en función del tensor simétrico $X_{pq}{}^r$

$$D_r\left(\sqrt{g}g^{ik}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ik}g^{pq}\left(-g_{ps}X_{qr}{}^s - g_{sq}X_{pr}{}^s\right) + \sqrt{g}\left(g^{sk}X_{sr}{}^i + g^{is}X_{sr}{}^k\right) = -\frac{1}{N-1}\left(\delta_r^i \boldsymbol{a}^k + \delta_r^k \boldsymbol{a}^i\right),$$

donde tenemos en cuenta que la derivada covariante del tensor métrico basada en los símbolos de Christoffel es nula por la definición de estos símbolos $\left(D^* g_{ik} = 0\right)$ y hemos usado (A.2); simplificando nos queda

$$-g^{ik}X_{sr}{}^s + g^{sk}X_{sr}{}^i + g^{is}X_{sr}{}^k = -\frac{1}{N-1}\left(\delta_r^i a^k + \delta_r^k a^i\right),$$

o bien multiplicando toda la igualdad por $g_{kp}\,g_{iq}$

$$X_{prq} + X_{qrp} - g_{qp}X_{sr}{}^s = -\frac{1}{N-1}\left(g_{rq}a_p + g_{rp}a_q\right).$$

Permutando los índices encontramos las expresiones

$$X_{prq} + X_{qrp} - g_{qp}X_{sr}{}^s = -\frac{1}{N-1}\left(g_{rq}a_p + g_{rp}a_q\right)$$
$$X_{qpr} + X_{rpq} - g_{rq}X_{sp}{}^s = -\frac{1}{N-1}\left(g_{pr}a_q + g_{pq}a_r\right)$$
$$X_{rqp} + X_{qqr} - g_{pr}X_{sq}{}^s = -\frac{1}{N-1}\left(g_{qp}a_r + g_{qr}a_p\right)$$

sumando la primera igualdad con la tercera y restándole la segunda obtenemos

$$2X_{qrp} - g_{qp}X_{sr}{}^s - g_{pr}X_{sq}{}^s + g_{rq}X_{sp}{}^s = -\frac{2}{N-1}g_{rq}a_p \tag{5}$$

donde se ha considerado el carácter simétrico de $X_{pq}{}^r$ y de g_{ik}. Si a la anterior expresión la multiplicamos por g^{pk} queda

$$2X_{qr}{}^k - \delta_q^k X_{sr}{}^s - \delta_r^k X_{sq}{}^s + g^{pk}g_{rq}X_{sp}{}^s = -\frac{2}{N-1}g_{rq}a^k,$$

contrayendo respecto a los índice k y r

$$X_{qk}{}^k = \frac{2}{(N-1)(N-2)}a_q = 2\alpha a_q,$$

que al sustituir en (5) queda

$$X_{qr}{}^k = \alpha\left(\delta_q^k a_r + \delta_r^k a_q - \beta g_{qr}a^k\right)$$

donde los coeficientes son

$$\alpha = \frac{1}{(N-1)(N-2)}; \qquad \beta = N-1.$$

Finalmente podemos expresar la conexión en función del tensor métrico y del vector a^k

$$\Gamma_{qr}{}^k = L_{qr}{}^k + \alpha\left(\delta_q^k a_r + \delta_r^k a_q - \beta g_{qr}a^k\right)$$

observemos que esta expresión ha sido obtenida sin necesidad de especificar la densidad lagrangiana, sólo ha sido necesario saber su dependencia funcional.

Todo el cálculo que hemos hecho se podría repetir, obteniéndose los mismos resultados, si en vez de suponer que la densidad lagrangiana depende de las partes simétrica y antisimétrica del tensor de Ricci se supone que depende exclusivamente del tensor de Ricci $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(R_{ik})$ y entonces se define $\boldsymbol{g}^{ik}$ y $\boldsymbol{f}^{ik}$ como las partes simétrica y antisimétrica de $\partial \boldsymbol{L}/\partial R_{ik}$.

En el caso del espacio-tiempo de cuatro dimensiones

$$\Gamma_{qr}{}^k = L_{qr}{}^k + \frac{1}{6}\delta_q^k a_r + \frac{1}{6}\delta_r^k a_q - \frac{1}{2}g_{qr}a^k. \tag{6}$$

Si $\boldsymbol{a}^k$ es nulo entonces la conexión es idéntica a los símbolos de Christoffel, es decir estaríamos en el espacio de Riemann de la Relatividad General, o sea, estaríamos en presencia de campo gravitatorio exclusivamente.

Contrayendo los índices *k* y *r* de (6) tenemos por (H.1)

$$\Gamma_{qr}^{\ r} = L_{qr}^{\ r} + 2\alpha a_q = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^q} + 2\alpha a_q$$

y si $N = 4$

$$\Gamma_{qr}^{\ r} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^q} + \frac{1}{3}a_q.$$

Conocida la conexión se puede sustituir su valor en el tensor de Ricci que se define como

$$R_{si} = \Gamma_{sk,i}^{\ k} - \Gamma_{si,k}^{\ k} + \Gamma_{sk}^{\ t}\Gamma_{ti}^{\ k} - \Gamma_{si}^{\ t}\Gamma_{tk}^{\ k},$$

dando como resultado después de un simple cálculo

$$R_{si} = G_{si} + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial a_s}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^s}\right) + \frac{1}{6}a_s a_i, \tag{7}$$

donde G_{si} es el tensor de Ricci obtenido a partir de los símbolos de Christoffel.

Démonos cuenta que aún no tenemos una teoría de campo que exige, por una parte, una ecuación como la (6) y además una ecuación diferencial que nos permita obtener las funciones de las variables de campo respecto a las coordenadas. Para obtener esta ecuación se necesita especificar la densidad lagrangiana. En su investigación de la teoría puramente afín, Einstein elegió tres densidades lagrangianas diferentes, que fueron diferentes a la que usó Schrödinger en 1943 que será la que a continuación vamos a examinar.

3.- Teoría puramente afín de Schrödinger-I

En su primer artículo sobre la teoría puramennte afín publicado en el año 1943 [21], Schrödinger dedicó la primera parte de su investigación a obtener las ecuaciones (6) y (7) de Einstein [7], para posteriormente formular las ecuaciones de campo gravitatorio y electromagnético. Si para simplificar ponemos $\gamma_{si} = R_{(si)}$ y $\phi_{si} = R_{[si]}$ entonces a partir de (7) obtenemos

$$\gamma_{si} = G_{si} + \frac{1}{6}a_s a_i; \qquad \phi_{si} = \frac{1}{6}\left(\frac{\partial a_s}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^s}\right) \tag{8}$$

y como

$$G = g^{si}G_{si} = g^{si}\gamma_{si} - \frac{1}{6}a_s a^s$$

encontramos

$$G_{si} - \frac{1}{2}g_{si}G = -T_{si} - \frac{1}{6}\left(a_s a_i - \frac{1}{2}g_{si}\,a_p a^p\right) \tag{9}$$

como se puede comprobar por sustitución y donde hemos definido

$$T_{si} = -\left(\gamma_{si} - \frac{1}{2}g_{si}g^{pq}\gamma_{pq}\right). \tag{10}$$

Entonces las ecuaciones de campo gravitatorio y electromagnético son (8), (9) y

$$\boldsymbol{a}^k = \partial_i \boldsymbol{f}^{ki}. \tag{11}$$

Las ecuaciones de campo (8), (9) y (11) no se pueden resolver, ya que tenemos 36 variables (g_{ik}, γ_{ik}, ϕ_{ik}, a_k, f_{ik}) y sólo 20 ecuaciones, necesitamos, por tanto, otras 16 ecuaciones de campo que, como veremos más adelante, nos serán dadas cuando se conozca la densidad lagrangiana del campo, la que aún no ha sido especificada.

El significa físico de las distintas magnitudes geométricas que aparecen en las ecuaciones de campo es el siguiente: g_{ik} es el tensor métrico con el que se define el elemento de línea ds^2; ϕ_{ik} es porporcional al tensor de campo electromagnético, de carácter antisimétrico y que por la segunda ecuación (8) cumple

$$\frac{\partial\phi_{ik}}{\partial x^r} + \frac{\partial\phi_{kr}}{\partial x^i} + \frac{\partial\phi_{ri}}{\partial x^k} = 0$$

que representa el segundo grupo de las ecuaciones de Maxwell; T_{ik} es equivalente al tensor energía-momento del campo electromagnético; a^k lo es a la densidad de corriente eléctrica; la ecuación (11) es similar al primer grupo de ecuaciones de Maxwell; por último γ_{ik} es el tensor conjugado a $\boldsymbol{g}^{ik}$, mientras que $\boldsymbol{f}^{ik}$ es el conjugado de ϕ_{ik} (ver apéndice I). Notemos por último que por la segunda ecuación (8) la densidad de corriente eléctrica es proporcional al potencial electromagnético. En el epígrafe 9 detallaremos estas correspondencias cuando procedamos a correlacionar magnitudes geométricas y físicas.

El segundo sumando del segundo miembro de (9) Schrödinger lo indentificó como «reminiscencia del primitivo tensor energía de las partículas», y realmente puede interpretarse como el tensor energía-momento de la materia, que sólo existe si hay campo electromagnético, lo que nos viene a indicar que en la teoría de Schrödinger la materia tiene un origen electromagnético; por lo dicho, la ecuación (9) se puede poner como

$$G_{si} - \frac{1}{2} g_{si} G = -\left(T_{si}^{(c)} + T_{si}^{(m)}\right)$$

donde $T_{si}^{(c)}$ y $T_{si}^{(m)}$ corresponden a los tensores energía-momento del campo electromagnético y de la materia respectivamente.

4.- La transformada de Legendre de la densidad lagrangiana y las ecuaciones canónicas

La densidad lagrangiana tiene la dependencia funcional $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(\gamma_{ik}, \phi_{ik})$ por tanto

$$d\boldsymbol{L} = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \gamma_{ik}} d\gamma_{ik} + \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \phi_{ik}} d\phi_{ik} = \boldsymbol{g}^{ik}\, d\gamma_{ik} + \boldsymbol{f}^{ik} d\phi_{ik}.$$

La densidad escalar transformada de Legendre de $\boldsymbol{L}$ es (ver apéndice E)

$$\overline{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{g}^{ik}\, \gamma_{ik} - \boldsymbol{L} \tag{12}$$

que tiene la dependencia funcional $\overline{\boldsymbol{L}} = \overline{\boldsymbol{L}}(g_{ik}, \phi_{ik})$, entonces

$$d\overline{\boldsymbol{L}} = \gamma_{ik}\, d\boldsymbol{g}^{ik} + \boldsymbol{g}^{ik}\, d\gamma_{ik} - \boldsymbol{g}^{ik}\, d\gamma_{ik} - \boldsymbol{f}^{ik} d\phi_{ik} = \gamma_{ik}\, d\boldsymbol{g}^{ik} - \boldsymbol{f}^{ik} d\phi_{ik},$$

por tanto las correspondientes ecuaciones canónicas son

$$\gamma_{ik} = \frac{\partial \overline{\boldsymbol{L}}}{\partial \boldsymbol{g}^{ik}}; \qquad \boldsymbol{f}^{ik} = -\frac{\partial \overline{\boldsymbol{L}}}{\partial \phi_{ik}} \tag{13}$$

que son las 16 ecuaciones que nos falta para resolver las ecuaciones de campo (8), (9) y (11); es decir sustituimos la primera ecuación (13) en (10) y la segunda ecuación (13) en (11) de tal forma que las variables que aparezcan en las ecuaciones de campo sean: $\boldsymbol{g}_{ik}, \phi_{ik}, a^k$ que corresponden a 20 funciones, tantas como ecuaciones diferenciales.

5.- La transformada de Legendre de la densidad lagrangiana en la teoría de Schrödinger-I

Como hemos dicho, es necesario concretar la densidad lagrangiana para completar las ecuaciones de campo. En su teoría de 1943, Schrödinger eligió como densidad lagrangiana

$$\overline{\boldsymbol{L}} = 2\alpha\left\{\sqrt{-\det(g_{ik} + \phi_{ik})} - \sqrt{-\det(g_{ik})}\right\}, \tag{14}$$

siendo α una constante; como Schrödinger afirmaba en su trabajo, (14) es esencialmente la lagrangiana de la electrodinámica de Born-Infeld (ver apéndice I). Como el producto de un invariante por la raíz cuadrada del determinante de un tensor de segundo orden es una densidad escalar, entonces $\overline{\boldsymbol{L}}$ es la diferencia de dos densidades escalares, que a su vez es otra densidad escalar.

Las distintas magnitudes geométricas (tensor métrico, tensor de Ricci, etc) tienen unidades o pueden ser adimensionales, siendo la longitud la única unidad interviniente. Las coordenadas espacio-temporales son adimensionales, pues sólo son números que identifican a cada uno de los puntos. No obstante, el tensor métrico en forma covariante debe tener la unidad de longitud al cuadrado L^2 ya que el elemento de línea al cuadrado ds^2 tiene esa unidad, por tanto $\sqrt{g}$ tiene la dimensión L^4. Los símbolos de Christoffel son adimensionales, siéndolo también el tensor de Ricci. Esto significa que ϕ_{ik} carece de unidades. Entonces el radicando de la primera raíz de (14) no es homogénea dimensionalmente; porque mientras g_{ik} tiene la dimensión L^2, ϕ_{ik} no tiene dimensiones. Para solventar este problema reescribimos (14)

$$\overline{\boldsymbol{L}} = 2\alpha\left\{\sqrt{-\det(g_{ik} + \lambda\phi_{ik})} - \sqrt{-\det(g_{ik})}\right\} = 2\alpha\left\{\sqrt{-\det(g_{ik} + \phi'_{ik})} - \sqrt{-\det(g_{ik})}\right\} \tag{15}$$

donde λ es un número con la dimensión L^2. La introducción de λ no es exclusivamente por razones dimensionales. Esta contante numérica nos pondera el peso que el campo electromagnético (caracterizado por ϕ_{ik}) va a tener frente al campo gravitatorio (caracterizado por g_{ik}). Si bien las unidades de λ son conocidas, no pasa lo mismo con su valor numérico que queda indeterminado. En (15) hemos definido el nuevo tensor

$$\phi'_{ik} = \lambda \phi_{ik} = \lambda R_{[ik]}$$

que tiene la dimensión L^2, la misma que g_{ik}.

La segunda ecuación (13) también debe modificarse

$$\mathfrak{f}'^{ik} = -\frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial \phi'_{ik}} = \frac{1}{\lambda}\mathfrak{f}^{ik} \tag{16}$$

y por tanto

$$\mathfrak{a}'^{k} = \frac{\partial \mathfrak{f}'^{ki}}{\partial x^i} = \frac{1}{\lambda}\mathfrak{a}^{k}$$

por lo que es necesario modificar las ecuaciones (8) y (9)

$$\gamma_{si} = G_{si} + \frac{\lambda^2}{6} a'_s a'_i; \qquad \phi'_{si} = \frac{\lambda^2}{6}\left(\frac{\partial a'_s}{\partial x^i} - \frac{\partial a'_i}{\partial x^s}\right); \qquad G_{si} - \frac{1}{2} g_{si} G = -T_{si} - \frac{\lambda^2}{6}\left(a'_s a'_i - \frac{1}{2} g_{si}\, a'_p a'^p\right). \tag{17}$$

Por (G.3) tenemos

$$-\det\left(g_{ik} + \phi'_{ik}\right) = g - \phi' + \frac{g}{2} g^{im} g^{kr} \phi'_{mr} \phi'_{ik}$$

donde g es el valor positivo del determinante de g_{ik} (pues suponemos que su traza es -2 y por tanto su determinante es negativo) y ϕ es el determinante de la matriz formada con las componentes del tensor antisimétrico ϕ'_{ik}; entonces (15) queda

$$\bar{\mathfrak{L}} = 2\alpha\sqrt{g}\left[\sqrt{1 - \frac{\phi'}{g} + \frac{1}{2}\phi'^{ik}\phi'_{ik}} - 1\right] = 2\alpha\sqrt{g}\left(\rho - 1\right), \tag{18}$$

notemos que por (G.1)

$$\sqrt{\frac{\phi'}{g}} = I = \frac{1}{8\sqrt{g}} \varepsilon^{pqmn} \phi'_{mn} \phi'_{pq}\ . \tag{19}$$

Ahora estamos en condiciones de evaluar las ecuaciones canónicas (13). Para aplicar la primera de las ecuaciones (13) es más conveniente poner (18) de la foma

$$\bar{\mathfrak{L}} = 2\alpha\left\{\sqrt{g - \phi' + \frac{1}{2}\mathfrak{g}^{im}\mathfrak{g}^{kr}\phi'_{mr}\phi'_{ik}} - \sqrt{g}\right\} = 2\alpha\left(\sqrt{g}\rho - \sqrt{g}\right), \tag{20}$$

utilizando (F.2) se llega a

$$\gamma_{pq} = \frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial \mathfrak{g}^{pq}} = \frac{\alpha}{\rho}\left[g^{kr}\phi'_{qr}\phi'_{pk} - g_{pq}\left(\rho - 1\right)\right]. \tag{21}$$

Para obtener el segundo conjunto de ecuaciones canónicas (16) utilizamos

$$\bar{\mathfrak{L}} = 2\alpha\sqrt{g}\left\{\sqrt{1 - I^2 + \frac{1}{2} g^{im} g^{kr} \phi'_{mr}\phi'_{ik}} - 1\right\}$$

y llegamos a

$$\mathfrak{f}^{pq} = -\frac{\partial \bar{\mathfrak{L}}}{\partial \phi'_{pq}} = -\frac{\alpha\sqrt{g}}{\rho}\left(\phi'^{pq} - I\phi'^{*pq}\right), \tag{22}$$

siendo $\phi^{*pq} = 1/2\,\Delta^{pqik}\phi_{ik}$ donde Δ^{pqik} es el tensor de cuarto orden totalmente antisimétrico, que se define por

$$\Delta^{pqik} = \varepsilon^{pqik}/\sqrt{g}$$

nótese que los símbolos de Levi-Civita ε^{pqik} es una densidad tensorial, por tanto Δ^{pqik} es un tensor.

6.- Ecuaciones de campo

Para llegar a las ecuaciones de campo de la gravitación y electromagnetismo hay que sustiuir (21) y (22) en (17). Por (21) tenemos

$$\frac{1}{2}g^{pq}\gamma_{pq}=\frac{\alpha}{2\rho}g^{pq}\left[g^{kr}\phi'_{qr}\phi'_{pk}-g_{pq}(\rho-1)\right]=\frac{\alpha}{2\rho}\left[\phi'^{pk}\phi'_{pk}-4(\rho-1)\right], \qquad (23)$$

entonces el tensor energía-momento del campo electromagnético (9) es

$$T_{si}=-\left(\gamma_{si}-\frac{1}{2}g_{si}g^{pq}\gamma_{pq}\right)=-\frac{\alpha}{\rho}\left[g^{kr}\phi'_{ir}\phi'_{sk}-g_{si}(\rho-1)\right]+\frac{\alpha}{2\rho}g_{si}\left[\phi'^{pk}\phi'_{pk}-4(\rho-1)\right]=$$
$$=\frac{\alpha}{\rho}\left[-g^{kr}\phi'_{ir}\phi'_{sk}+\frac{1}{2}g_{si}\phi'^{pk}\phi'_{pk}-g_{si}(\rho-1)\right],$$

y las ecuaciones finales de la teoría de campo unitario de Schrödinger son

$$G_{si}-\frac{1}{2}g_{si}G=-\frac{\alpha}{\rho}\left[-g^{kr}\phi'_{ir}\phi'_{sk}+\frac{1}{2}g_{si}\phi'^{pk}\phi'_{pk}-g_{si}(\rho-1)\right]-\frac{\lambda^2}{6}\left(a'_s a'_i-\frac{1}{2}g_{si}a'_p a'^p\right)$$
$$\phi'_{si}=\frac{\lambda^2}{6}\left(\frac{\partial a'_s}{\partial x^i}-\frac{\partial a'_i}{\partial x^s}\right) \qquad (24)$$
$$\mathbf{a}'^p=-\alpha\frac{\partial}{\partial x^q}\left[\frac{\sqrt{g}}{\rho}\left(\phi'^{pq}-I\phi'^{*pq}\right)\right],$$

comprobamos que son veinte las ecuaciones e igual número las variables del campo. Si hallamos la divergencia de la primera de las ecuaciones (24) con la derivada con asterisco encontramos

$$\frac{\partial\left(\sqrt{g}T_s^{\ i}\right)}{\partial x^i}-\frac{1}{2}\sqrt{g}T^{ri}\frac{\partial g_{ri}}{\partial x^s}-\sqrt{g}\phi'_{si}a'^i=0,$$

donde hemos tenido presente que la divergencia del tensor de Einstein $D^*\left(G_{si}-1/2\,g_{si}G\right)$ es nula; que el tensor energía-momento es simétrico y que a'^i por su definición y por ser $\mathbf{f}^{ik}$ antisimétrico cumple $D_i^* a'^i=0$.

7.- Densidad lagrangiana en la teoría de Schrödinger-I

En su investigación Schrödinger utilizó la transformada de Legendre $\bar{\mathbf{L}}$ de la densidad lagrangiana $\mathbf{L}$, la relación entre ambas es (ver apéndice E)

$$\mathbf{L}=\mathbf{g}^{pq}\gamma_{pq}-\bar{\mathbf{L}}.$$

Como

$$\phi'^{pk}\phi'_{pk}=2\left(\rho^2-1+I^2\right)$$

entonces utlizando (18) y (21) se encuentra

$$\mathbf{L}=\frac{2\alpha\sqrt{g}}{\rho}\left(1-\rho+I^2\right).$$

Si no existiera campo electromagnético, es decir si la parte antisimétrica del tensor de Ricci fuera nula, entonces $\bar{\mathbf{L}}=0$ por (14) y por tanto

$$\mathbf{L}=\mathbf{g}^{pq}\gamma_{pq}=\sqrt{g}g^{pq}R_{pq}=\sqrt{g}R$$

que corresponde a la densidad lagrangiana de la Relatividad General.

8.- Unidades de las magnitudes geométricas

Como antes hemos indicado las magnitudes geométricas tienen unidades Es fácil averiguar las unidades de todas las magnitudes geométricas que hemos utilizado, tal como viene reflejado en la tabla 1.

Magnitudes	g_{ik}	g^{ik}	$\sqrt{g}$	$\mathbf{L}$	$\Gamma_{ik}^{\ r}$	R_{ik}	G_{ik}	$\mathbf{g}^{ik}$
Unidades	L^2	L^{-2}	L^4	L^2	No	No	No	L^2

$\mathbf{g}_{ik}$	$\mathbf{f}'^{ik}$	f^{ik}	$\mathbf{a}'^k$	a'^k	a'_k	γ_{ik}	T_{ik}	ϕ'_{ik}	α
L^6	No	L^{-4}	No	L^{-4}	L^{-2}	No	No	L^2	L^{-2}

Tabla 1.

9.- Correspondencia entre las magnitudes geométricas y físicas

Ahora es necesario correlacionar las magnitudes geométricas con las correspondientes magnitudes físicas. Como hemos señalado en el epígrafe anterior, las magnitudes geométricas tienen unidades pero estas, en general, no corresponden con las unidades de las magnitudes físicas que tienen asociadas. Entonces las magnitudes geométricas y las físicas correspondientes son proporcionales, con un factor de proporcionalidad que, en general, serán constantes numéricas dimensionales. Para establecer la correlación que buscamos es necesario determinar esos coeficientes de proporcionalidad.

La correlación entre las magnitudes geométricas y las físicas (identificadas por llevar acento circunflejo) son

$$g_{ik} = \gamma \hat{g}_{ik}; \qquad \phi'_{ik} = \beta \hat{\phi}'_{ik}; \qquad x^k = \gamma^{-1/2} \hat{x}^k \, (25)$$

donde γ y β son constantes numéricas, la primera con la dimensión L^2 y la segunda tiene la dimensión $M^{-1}LT^3A$ o la unidad $C \cdot m^2/N$ referida Sistema Internacional de Unidades (SI). Observemos que la primera transformación de (25) hace que las componentes físicas del tensor métrico sean adimensionales, mientras que por la última de las relaciones (25) las coordenadas espacio-temporales físicas aquieren la magnitud de longitud. Notemos que la última relación (25) nos viene dada por la necesidad de que el elemento de línea *ds* tenga la unidad de longitud.

Es fácil comprobar que

$$g^{ik} = \gamma^{-1} \hat{g}^{ik}; \qquad \phi'^{ik} = \gamma^{-2} \beta \hat{\phi}'^{ik}; \qquad \sqrt{g} = \gamma^2 \sqrt{\hat{g}};$$

$$\Gamma^r_{ik} = \gamma^{1/2} \hat{\Gamma}^r_{ik}; \qquad G_{ik} = \gamma \hat{G}_{ik}; \qquad G = \hat{G}.$$

Entonces la lagrangiana (20) en función de las magnitudes físicas es

$$\mathcal{L} = 2\alpha\gamma^2 \sqrt{\hat{g}} \left[\sqrt{1 - \gamma^{-4} \beta^4 \frac{\hat{\phi}'}{\hat{g}} + \gamma^{-2} \beta^2 \frac{1}{2} \hat{\phi}'^{ik} \hat{\phi}'_{ik}} - 1 \right]. \tag{26}$$

Para determinar el valor de los coeficientes de proporcionalidad vamos a identificar el radicando de (26) con el radicando de la densidad lagrangiana de Born-Infeld (I.2), por tanto de (I.18)

$$b = \gamma \beta^{-1} = 1{,}189 \cdot 10^{20} \tag{27}$$

que en el SI tiene la unidad N/C.

El tensor energía-momento del campo electromagnético en la teoría de Maxwell-Einstein es

$$\hat{T}_{ik} = -\varepsilon_0 \hat{\phi}'_k{}^r \hat{\phi}'_{ir} + \frac{\varepsilon_0}{4} \hat{g}_{ik} \hat{\phi}'_{pq} \hat{\phi}'^{pq}$$

con la unidad N/m^2; ε_0 es la constante dieléctrica del vacío, por tanto encontramos que

$$T_{ik} = \frac{\alpha \gamma^{-1} \beta^2}{\varepsilon_0} \hat{T}_{ik}$$

válida en la aproximación de campo electromagnético no intenso. Entonces como en esta aproximación es válida la ecuación de campo de la Relatividad General

$$\gamma \left(\hat{G}_{ik} - \frac{1}{2} \hat{g}_{ik} \hat{G} \right) = -T_{ik} = -\frac{\alpha \gamma^{-1} \beta^2}{\varepsilon_0} \hat{T}_{ik} = -\gamma \chi \hat{T}_{ik} = -\gamma \frac{8\pi G}{c^4} \hat{T}_{ik}$$

donde *G* es la constante de gravitación universal; se deduce de la primera de las ecuaciones (24)

$$\frac{\alpha}{\varepsilon_0} \gamma^{-2} \beta^2 = \frac{8\pi G}{c^4} \tag{28}$$

de (27) y (28)

$$\alpha = \varepsilon_0 \chi b^2$$

entonces los valores numéricos γ, β y λ quedan indeterminados. Podemos tomar arbitrariamente $\gamma = 1$ y entonces $\beta = 1/b$, por lo que la densidad lagrangiana queda

$$\mathcal{L} = 2\varepsilon_0 \chi b \sqrt{\hat{g}} \left[\sqrt{1 - \frac{\hat{\phi}'}{b^4 \hat{g}} + \frac{1}{2b^2} \hat{\phi}'^{ik} \hat{\phi}'_{ik}} - 1 \right]. \tag{29}$$

Nos queda por último la identificación del potencial eléctrico $\hat{\phi}_k$ y de la densidad de corriente $\hat{j}_k$ ambas proporcionales a la magnitud geométrica a'_k. La relación entre el tensor de campo electromagnético $\hat{\phi}'_{ik}$ y el potencial es

$$\hat{\phi}'_{ik} = \frac{\partial \hat{\phi}_k}{\partial \hat{x}^i} - \frac{\partial \hat{\phi}'_i}{\partial \hat{x}^k},$$

de la segunda de las ecuaciones (24) y por (25) se deduce

$$\hat{\phi}_k = -\frac{\gamma^{1/2}\lambda^2}{6\beta} a'_k \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\phi}^k = -\frac{\gamma^{1/2}\lambda^2}{6\beta} \gamma a'^k = -\frac{\gamma^{3/2}\lambda^2}{6\beta} a'^k$$

que es, al igual que todas las demás ecuaciones que manejamos en este epígrafe, una ecuación homogénea dimensionalmente.

En ausencia de gravedad y para campos electromagnéticos no muy intensos la tercera ecuación (24) queda

$$\boldsymbol{a}'^p = \gamma^2 \sqrt{\hat{g}} a'^p \approx -\alpha \gamma^{1/2} \beta \frac{\partial}{\partial \hat{x}^q}\left(\sqrt{\hat{g}} \hat{\phi}'^{pq}\right) \Rightarrow a'^p \approx -\frac{\alpha\beta}{\gamma^{3/2}} \frac{\partial \hat{\phi}'^{pq}}{\partial \hat{x}^q} \tag{30}$$

en la que hemos usado coordenadas galileanas. Bajo las condiciones antedichas es de aplicación la teoría de Maxwell cuya primera ecuación es

$$\frac{\partial \hat{\phi}'^{pq}}{\partial \hat{x}^q} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \hat{j}^p$$

por tanto

$$\hat{j}^p = \frac{\varepsilon_0}{\alpha\beta} \gamma^{3/2} a'^p \tag{31}$$

que de nuevo comprobamos que es homogénea dimensionalmente; téngase presente que el tetravector densidad de corriente lo definimos por $j^p = \rho u^p / c$ (ρ es la densidad propia de carga eléctrica y u^p es la tetravelocidad) por lo que sus unidades en el SI es C/m^3. Relacionando (30) con (31)

$$\hat{j}^p = -\frac{6\varepsilon_0}{\alpha\lambda^2} \hat{\phi}^p = -\frac{6}{\chi b^2 \lambda^2} \hat{\phi}^p = -\Lambda_L \hat{\phi}^p \tag{32}$$

a la constante numérica Λ_L la llamó Schrödinger la «constante cosmológica de la luz», diferente a la constante cosmológica de la gravitación. Indiquemos que Λ_L es inversamente proporcional al valor indeterminado λ^2. Aunque (32) la hemos obtenido para el caso de campo electromagnético débil podemos extenderla (a modo de definición) para cualquier valor del campo.

El tensor energía-momento de la materia que definimos en el epígrafe 3 se puede formular con respecto a las magnitudes físicas mediante un procedimiento similar al seguido con el tensor energía-momento del campo electromagnético, resultando

$$\hat{T}_{si}^{(m)} = \frac{6\beta^2}{\gamma^2 \chi \lambda^2}\left(\hat{\phi}_s \hat{\phi}_i - \frac{1}{2}\hat{g}_{si} \hat{\phi}^p \hat{\phi}_p\right) = \Lambda_L \left(\hat{\phi}_s \hat{\phi}_i - \frac{1}{2}\hat{g}_{si} \hat{\phi}^p \hat{\phi}_p\right). \tag{33}$$

Con los resultados obtenidos podemos hacer unos cálculos especulativos. Identificamos $\hat{T}_{si}^{(m)}$ con el tensor energía-momento fenomenológico, si ρ_0 es la densidad de masa y en reposo es $\hat{T}_{00}^{(m)} = \rho_0 c^2$, entonces

$$\rho_0 = \frac{1}{\Lambda_L c^2} \phi^2 \tag{34}$$

siendo ϕ el potencial electroestático en el interior de la carga eléctrica. Combinando (32) y (34) llegamos a relacionar la densidad de masa ρ_0 con la densidad de carga ρ

$$\rho_0 = \frac{1}{\Lambda_L^3 c^2} \rho^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_0}{q} = \frac{1}{\Lambda_L^3 c^2} \rho,$$

m_0 y q es la masa y la carga de la partícula

Démonos cuenta que tanto (32) como (34) dependen de factores numéricos dependiente de λ^2, cuyo valor desconocemos, como hemos dicho. Como la densidad de corriente sólo puede tener valor apreciable en el interior de las cargas eléctricas (donde el potencial es muy elevado) significa, por (32), que la constante cosmológica de la luz tiene que ser muy pequeña. Igualmente comprobamos por (34) que como la densidad de masa en el interior de las cargas debe ser muy elevado, la constante Λ_L debe ser muy pequeña. En todo nuestro razonamiento debemos tener presente que el potencial absoluto b es relativo a cada partícula cargada; en particular el valor dado en (27) es el correspondiente a un electrón, para otras partículas cargadas su valor debe ser recalculado a partir de (I.18).

10.- Variación del módulo de un vector en un desplazamiento paralelo

Sea un vector de componentes contravariantes A^i, se dice que se le somete a traslación paralela si las componentes cambian según la ley

$$dA^i = -A^s \Gamma_{sr}{}^i dx^r \tag{35}$$

siendo dx^r la diferencia entre las coordendas del punto del partida de la traslación y del punto de llegada.

En el caso de ula geometría de Riemann (en el que la conexión coincide con los símbolos de Christoffel y el tensor métrico es simétrico) no varía el módulo de un vector cuando se le traslada paralelalemente a consecuenica de que la derivada covariante del tensor métrico es nulo. También es válida la afirmación inversa, es decir si al trasladar paralelamente un vector su módulo no varía (con independencia del camino recorrido), entonces la geometría es de Riemann, o sea, la conexión son los símbolos de Christoffel.

En la geometría de la teoría de Schrödinger la conexión no coincide con los símbols de Christoffel, por tanto no es nula la derivada covariante del tensor métrico y por consiguiente el módulo de un vector se modifica cuando es sometido a un desplazamiento paralelo.

Primeramente vamos a determinar Dg_{ik} a partir de (6). Como $D^* g_{ik} = 0$ entonces

$$Dg_{ik} = -\frac{1}{3} g_{ik} a_m dx^m + \frac{1}{3} g_{im} a_k dx^m + \frac{1}{3} g_{km} a_i dx^m . \tag{36}$$

Cuando se traslada paralelamente un vector su módulo cambia según

$$DA^2 = D\left(A_i A^i\right) = D\left(g_{ik} A^k\right) A^i + A_i DA^i = Dg_{ik} A^k A^i$$

puesto que por (35) $DA^i = 0$. Utilizando (36)

$$DA^2 = -\frac{1}{3} A^2 a_m dx^m + \frac{2}{3} a^k A_k A_m dx^m , \tag{37}$$

al contrario de lo que ocurre en la teoría de Weyl en que la variación del módulo del vector en una traslación paralela es proporcional al módulo de ese vector, en la teoría de Einstein-Schrödinger ya no se da esta circunstancia como indica (37), donde la variación experimentada no sólo depende del módulo del vector desplazado sino también de sus componentes, es decir de su orientación.

11.- La no invariancia gauge

Schrödinger señaló el gran parecido de la conexión (6) con la conexión derivada de la teoría de Weyl [36]

$$\Gamma_{qr}^{\ \ k} = L_{qr}^{\ \ k} + \delta_q^k \phi_r + \delta_r^k \phi_q - g_{qr} \phi^k \tag{38}$$

donde el tetravector ϕ_r se define por

$$Dg_{ik} = -2 g_{ik} \phi_r dx^r ,$$

Scrhödinger comprobó que mientras (38) es invariante frente a una transformación gauge definida por las relaciones

$$g'_{ik} = \lambda^2 g_{ik}; \qquad \phi'_k = \phi_k - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x^k} \tag{39}$$

λ es un función escalar dependiente de las coordenadas, la conexión (6) no es invariente frente a (39) (donde previamente se hace la sustitución $\phi_k \to a_k$) a causa de los coeficientes numéricos de (6); en efecto de la ley de transformación (39) se comprueba que los símbolos de Christoffel se transforma según

$$L'_{qr}{}^{k} = L_{qr}^{\ \ k} + \delta_q^k \left(\frac{1}{\lambda} \partial_r \lambda\right) + \delta_r^k \left(\frac{1}{\lambda} \partial_q \lambda\right) - g_{qr} g^{kt} \left(\frac{1}{\lambda} \partial_t \lambda\right)$$

entonces para que la conexión sea invariante es necesario que

$$\frac{1}{6}\delta_q^k a'_r + \frac{1}{6}\delta_r^k a'_q - \frac{1}{2} g_{qr} a'^k = \frac{1}{6}\delta_q^k a_r + \frac{1}{6}\delta_r^k a_q - \frac{1}{2} g_{qr} a^k - \delta_q^k \left(\frac{1}{\lambda}\partial_r \lambda\right) - \delta_r^k \left(\frac{1}{\lambda}\partial_q \lambda\right) + g_{qr} g^{kt} \left(\frac{1}{\lambda}\partial_t \lambda\right)$$

pero esta igualdad no se cumple con la segunda de la relaciones (39); es más, no existe una solución general para cualquier valor de los coeficientes *k*, *q* y *r*.

Schrödinger consideraba que la falta de invariancia gauge representaba una «aparente falta de belleza», pero sugería que la invariancia gauge sería restaurada cuando además de los campos gravitatorio y electromagnético se considerara el campo «mesónico» que por entonces se suponía el responsable de la interacción nuclear.

12.- El término cosmológico

En la teoría de Schrödinger que presentamos no aparece de forma natural la constante cosmológica. Al igual que ocurre en la Relatividad General es necesario introducirla *ad hoc*. La forma de hacerlo es modificar la densidad lagrangiana (15)

$$\overline{\mathcal{L}} = 2\alpha\left\{\sqrt{-\det\left[\left(1+\frac{\Lambda}{2\alpha}\right)\left(g_{ik}+\lambda\phi_{ik}\right)\right]}-\sqrt{-\det\left(g_{ik}\right)}\right\},$$

Λ es la constante cosmológica que tiene las unidades L^{-2}.

Introducimos los nuevos potenciales de campo

$$\overline{g}_{ik}=\left(1+\frac{\Lambda}{2\alpha}\right)g_{ik};\qquad \overline{\phi}_{ik}=\lambda\left(1+\frac{\Lambda}{2\alpha}\right)\phi_{ik}=\left(1+\frac{\Lambda}{2\alpha}\right)\phi'_{ik}$$

entonces la ecuación (20) queda

$$\overline{\mathcal{L}}=2\alpha\left\{\sqrt{\overline{g}-\overline{\phi}+\frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{g}}^{im}\overline{\boldsymbol{g}}^{kr}\overline{\phi}_{mr}\overline{\phi}_{ik}}-\sqrt{g}\right\}=2\alpha\left\{\left(1+\frac{\Lambda}{2\alpha}\right)^2\sqrt{g-\phi'+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}^{im}\boldsymbol{g}^{kr}\phi'_{mr}\phi'_{ik}}-\sqrt{g}\right\}$$

o bien

$$\overline{\mathcal{L}}\approx 2\alpha\sqrt{g}\left[\left(1+\frac{\Lambda}{4\alpha}\right)-1\right].$$

Con la introducción de la constante cosmológica (21) se transforma, obteniéndose ahora

$$\gamma_{pq}=\frac{\partial\overline{\mathcal{L}}}{\partial\boldsymbol{g}^{pq}}=\frac{\alpha}{\rho}\left[g^{kr}\phi'_{qr}\phi'_{pk}-g_{pq}\left(\rho-1\right)\right]+\frac{\Lambda}{\rho}\left(g_{pq}+g^{kr}\phi'_{qr}\phi'_{pk}\right)$$

cuando despreciamos el campo electromagnético ϕ'_{ik} nos queda

$$\gamma_{pq}=\Lambda g_{pq}$$

y la ecuación de campo gravitatorio (12) es ahora

$$G_{si}-\frac{1}{2}g_{si}G-\Lambda g_{si}=-T_{si}^{(m)}$$

que es la ecuación de la Relatividad General con término cosmológico.

Aunque Schrödinger reconocía la forma poco natural de introducir de esta forma la constante cosmológica; no obstante anunciaba que esta constante aparecería naturalmente en el momento en que además de los campos gravitatorio y electromagnético se considerara el campo mesónico.

APÉNDICE A
Variación del tensor métrico

Sea una matriz *A* de determinante no nulo cuyos elementos son las componentes del tensor a_{ik} y que tiene una matriz inversa A^{-1}, cuyas componentes a^{*ik} cumplen la relación

$$a_{ik}a^{*kr}=\delta_i^r, \tag{A.1}$$

si α^{ik} es el menor adjunto asociado al elemento *i,k* de la matriz *A,* entonces los elementos de la matriz A^{-1} son

$$a^{*ik}=\frac{1}{a}\alpha^{ki}.$$

El anterior razonamiento es igualmente válido para el tensor métrico g_{ik}. En este caso definimos sus componentes contravariantes g^{ik} como el traspuesto de los elementos de la matriz inversa de $G=\left(g_{ik}\right)$, es decir

$$g^{ik}=g^{*ki}$$

y por tanto

$$g_{ik}g^{rk}=\delta_i^r.$$

Por definición del determinante del tensor métrico se encuentra que su variación es

$$\delta g=\alpha^{ik}\delta g_{ik}=gg^{ik}\delta g_{ik}. \tag{A.2}$$

Si en vez del tensor métrico nos referimos a un tensor genérico a_{ik} entonces (A.2) toma la forma

$$\delta a=aa^{*ki}\,\delta a_{ik} \tag{A.3}$$

donde a es el determinante de $A=\left(a_{ik}\right)$ y a^{*ik} son los elementos de la matriz A^{-1}. Notemos que a^{*ik} son también las componentes de un tensor de segundo orden contravariante como se aprecia por (A.1)

APÉNDICE B
Teorema de Gauss

El teorema integral de Gauss afirma que es válida la siguiente relación funcional

$$\int_V \frac{\partial A^k}{\partial x^k} d\Omega = \int_\Sigma A^k d\tilde{S}_k , \tag{B.1}$$

siendo x^k las coordenadas. Si para concretar nos limitamos a un espacio tridimensional se cumple

$$d\tilde{S}_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{kpq}\, dS^{pq}$$

dS^{pq} es el tensor de superficie bidimensional y ε_{kpq} son los símbolos de Levi-Civita.

Tenemos que observar que (B.1) es una relación analítica independiente de la geometría del espacio y del significado de A^k de las que sólo se exige que sean funciones de las coordenadas.

ε_{kpq} no tiene carácter tensorial, por ello se define el tensor $\Delta_{kpq} = \sqrt{g}\varepsilon_{kpq}$, entonces el vector superficie es

$$dS_k = \frac{1}{2}\Delta_{kpq}\, dS^{pq} = \sqrt{g}\, d\tilde{S}_k .$$

El teorema de Gauss se puede formular de varias formas en un espacio genérico. Teniendo en cuenta que la divergencia de una densidad vectorial es

$$D_k \boldsymbol{A}^k = D_k\left(\sqrt{g}\, A^k\right) = \partial_k\left(\sqrt{g} A^k\right) + \sqrt{g} A^k \tau_k ,$$

y que la divergencia de un vector es

$$D_k A^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\left(\sqrt{g} A^k\right)}{\partial x^k} + v^k\left(\tau_k - 2\kappa_k\right),$$

nótese que el tensor de torsión lo definimos según

$$\tau_{is}{}^k = \Gamma_{is}{}^k - \Gamma_{si}{}^k = 2\Gamma_{[is]}{}^k$$

el vector de torsión es $\tau_i = \tau_{ik}{}^k$ y κ_k es el vector de no-metricidad definido por

$$\kappa_k = \frac{1}{4} g^{ir} Q_{irk} = \frac{1}{4} g^{ir} D_k g_{ir}$$

entonces el teorema queda

$$\int D_k \boldsymbol{A}^k d\Omega = \int A^k dS_k + \int \boldsymbol{A}^k \tau_k\, d\Omega$$

o bien

$$\int_V D_k A^k dV = \int_\Sigma A^k dS_k + \int_V v^k\left(\tau_k - 2\kappa_k\right) d\Omega .$$

Finalmente tenemos otra forma de expresar el teorema integral de Gauss al utilizar la derivada covariante D^* que se evalúa con los símbolos de Christoffel en vez de con la conexión, resultando entonces

$$\int_V D_k^* A^k dV = \int_\Sigma \sqrt{g} A^k d\tilde{S}_k = \int_\Sigma A^k dS_k .$$

En el caso de que no exista torsión, como ocurre en la teoría que examinamos, el teorema de Gauss es

$$\int_V D_k\left(\sqrt{g} A^k\right) d\Omega = \int_\Sigma A^k dS_k ; \qquad \int_V D_k A^k dV = \int_\Sigma A^k dS_k - 2\int_V v^k \kappa_k\, d\Omega. \tag{B.2}$$

APÉNDICE C
Identidades de Palatini

Sometemos la conexión a una variación infinitesimal

$$\Gamma'_{si}{}^k = \Gamma_{si}{}^k + \delta\Gamma_{si}{}^k \text{(C.1)} \tag{C.1}$$

expresión que está definida en un mismo punto. Por efecto de esta variación el tensor de Ricci también se ve afectado por una variación que por cálculo directo se encuentra que es

$$\delta R_{ik} = D_k\, \delta\Gamma_{ir}{}^{r} - D_r \delta\Gamma_{ik}{}^{r} + \tau^{r}_{mk}\, \delta\Gamma_{ir}{}^{m}$$

en la deducción se ha tenido en cuenta que $\delta\Gamma_{ik}^{\ p}$ es un tensor por ser la diferencia de dos conexiones.

El tensor de Ricci está formado por parte simétrica y antisimétrica

$$R_{ik} = R_{(ik)} + R_{[ik]}$$

y ante una variación del tipo (C.1) tanto la parte simétrica como la antisimétrica sufrirán una variación

$$\delta R_{(ik)} = \frac{1}{2}\left(\delta R_{ik} + \delta R_{ki}\right),$$

teniendo en cuenta (C.1) y que

$$\delta\Gamma_{(si)}^{\ \ k} = \delta\Gamma_{si}{}^{k} - \frac{1}{2}\delta\tau_{si}{}^{k}$$

según se desprende de la definición de vector de torsión; entonces queda

$$\delta R_{(ik)} = D_{(i}\delta\Gamma_{k)r}{}^{r} - D_r\, \delta\Gamma_{ik}{}^{r} + \frac{1}{2}D_r\, \delta\tau_{ik}{}^{r} + \tau_{m(i}{}^{r}\delta\Gamma_{s)k}{}^{m}$$

donde los paréntesis redondos significan simetrización. En cuanto a la parte antisimétrica

$$\delta R_{[ik]} = \frac{1}{2}\left(\delta R_{ik} - \delta R_{ki}\right) = D_{[k}\, \delta\Gamma_{i]r}{}^{r} - \frac{1}{2}D_r \delta\tau_{ik}{}^{r} + \tau_{m[k}{}^{r}\delta\Gamma_{i]r}{}^{m}$$

donde los paréntesis cuadrados representan antisimetrización.

Para el caso considerado en el texto principal de geometría sin torsión las fórmulas encontradas se reducen a

$$\begin{aligned} \delta R_{ik} &= D_k\, \delta\Gamma_{ir}{}^{r} - D_r \delta\Gamma_{ik}{}^{r} \\ \delta R_{(ik)} &= D_{(i}\delta\Gamma_{kr}{}^{r} - D_r \delta\Gamma_{ik}{}^{r} \\ \delta R_{[ik]} &= D_{[k}\, \delta\Gamma_{i]r}{}^{r}, \end{aligned} \tag{C.2}$$

que son conocidas como identidades de Palatini.

La identidad de Palatini se puede extender a la curvatura homotética

$$\delta V_{ir} = D_i\, \delta\Gamma_{kr}{}^{k} - D_r \delta\Gamma_{ki}{}^{k} + \tau^{s}_{ri}\, \delta\Gamma_{ks}{}^{k}.$$

APÉNDICE D
Descomposición de la conexión

Vamos a suponer que el tensor métrico es simétrico, pero el espacio está dotado de torsión y además no es nulo el tensor de no-metricidad $\left(Q_{ikr} = D_r g_{ik}\right)$. En este caso es posible establecer una relación entre la conexión y los símbolos de Christoffel. Para obtener esta relación partimos de la derivada covariante del tensor métrico

$$\begin{aligned} D_r g_{pq} &= \partial_r g_{pq} - g_{sq}\Gamma_{pr}{}^{s} - g_{ps}\Gamma_{qr}{}^{s} = Q_{pqr} \\ D_q g_{rp} &= \partial_q g_{rp} - g_{sp}\Gamma_{rq}{}^{s} - g_{rs}\Gamma_{pq}{}^{s} = Q_{rpq} \\ D_p g_{qr} &= \partial_p g_{qr} - g_{sr}\Gamma_{qp}{}^{s} - g_{qs}\Gamma_{rp}{}^{s} = Q_{qrp} \end{aligned}$$

entonces sumando la primera con la tercera y restándole la segunda se obtiene

$$\Gamma_{rpq} = L_{rpq} + \frac{1}{2}K_{rpq} + \frac{1}{2}\left(Q_{rpq} - Q_{pqr} - Q_{qrp}\right) \tag{D.1}$$

donde K_{rpq} es el tensor de contorsión que es definido en función del tensor de torsión según

$$K_{rpq} = \tau_{rpq} + \tau_{pqr} - \tau_{qrp}.$$

y τ_{rpq} es el tensor de torsión en forma covariante.

En el caso que consideramos en el texto principal en que la torsión es nula, la relación entre la conexión y los símbolos de Christoffel es

$$\Gamma_{rpq} = L_{rpq} + \frac{1}{2}\left(Q_{rpq} - Q_{pqr} - Q_{qrp}\right)$$

siendo L_{rpq} los símbolos de Christoffel en forma covariante; o puesto en forma más general

$$\Gamma_{pq}{}^{r} = L_{pq}{}^{r} + X_{pq}{}^{r}, \tag{D.2}$$

$X_{pq}{}^{r}$ es un tensor simétrico, por serlo la conexión y los símbolos de Christoffel.

APÉNDICE E
La transformación de Legendre

Sea la función

$$f = f(x, y)$$

cuya diferencial total es

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = udx + vdy.$$

Buscamos una nueva función $g = g(u, y)$ tal que su diferencial se exprese en función de du y dy. La función buscada es

$$g = ux - f, \tag{E.1}$$

en efecto, al hallar su diferencial se encuentra

$$dg = xdu + udx - df = xdu + udx - udx - vdy = xdu - vdy$$

tal como queríamos. Además encontramos las relaciones

$$x = \frac{\partial g}{\partial u}; \quad v = -\frac{\partial g}{\partial y} \tag{E.2}$$

a las que llamamos ecuaciones canónicas.

APÉNDICE F
Variación del determinante del tensor métrico en función de la densidad del tensor métrico

Es de interés expresar la variación de la raíz cuadrada del determinante del tensor métrico en función de la variación de la densidad tensorial $\boldsymbol{g}^{ik} = \sqrt{g}\, g^{ik}$; por (A.2) tenemos

$$\delta\sqrt{g} = -\frac{1}{2}\sqrt{g}g_{pq}\delta g^{pq} = -\frac{1}{2}g_{qp}\delta\boldsymbol{g}^{qp} + \frac{1}{2}g_{qp}g^{qp}\delta\sqrt{g}$$

y como $g_{qp}g^{qp} = 4$ entonces

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}g_{qp}\delta\boldsymbol{g}^{qp} \tag{F.1}$$

entonces

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial\boldsymbol{g}^{qp}} = \frac{1}{2}g_{qp}. \tag{F.2}$$

Podemos también expresar la variación de $\sqrt{g}$ en función de las componentes covariantes de la densidad del tensor métrico. Para ello partimos de

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{pq}\delta g_{pq} = \frac{1}{2}g^{pq}\delta\boldsymbol{g}_{pq} - \frac{1}{2}g^{pq}g_{pq}\delta\sqrt{g} \quad \Rightarrow \quad \delta\sqrt{g} = \frac{1}{6}g^{pq}\delta\boldsymbol{g}_{pq}. \tag{F.3}$$

APÉNDICE G
Determinante de un tensor métrico asimétrico

Un tensor métrico asimétrico se descompone en parte simétria y antisimétrica

$$g_{ik} = g_{(ik)} + g_{[ik]} = \gamma_{ik} + \varphi_{ik}$$

donde γ_{ik} representa la parte simétrica y φ_{ik} la antisimétrica. El tensor métrico en forma contravariante también se descompone en parte simétrica h^{ik} y en parte antisimétrica f^{ik}

$$g^{ik} = h^{ik} + f^{ik}$$

Definimos las componentes contravariantes de las partes simétricas y antisimétricas del tensor métrico por

$$\gamma_{ij}\gamma^{ik} = \delta^k_j; \quad \varphi_{ij}\varphi^{ik} = \delta^k_j; \quad h_{ij}h^{ik} = \delta^k_j; \quad f_{ij}f^{ik} = \delta^k_j.$$

En un espacio de cuatro dimensiones, al que suponemos con signatura -2, el determinante de un tensor antisimétrico como φ_{ij} es

$$\varphi = \left(\varphi_{12}\varphi_{34} + \varphi_{31}\varphi_{24} + \varphi_{23}\varphi_{14}\right)^2 .$$

Por cómputo directo se comprueba que

$$\varepsilon^{ikpq}\varphi_{ik}\varphi_{pq} = 8\sqrt{\varphi} \tag{G.1}$$

e igualmente

$$\varepsilon^{ikpq}\varphi_{im}\varphi_{pq} = 0$$

si $k \neq m$. Entonces

$$\varepsilon^{ikpq}\varphi_{im}\varphi_{pq} = 2\sqrt{\varphi}\,\delta^k_m ,$$

multiplicando ambos términos por φ^{rm} se llega a

$$\varphi^{rk} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}\varepsilon^{rkpq}\varphi_{pq} \tag{G.2}$$

que nos relaciona las componentes contravariantes de la parte antisimétrica del tensor métrico con sus componentes covariantes. Una fórmula igual que (G.1) se aplica a f^{ik}.

Como γ_{ij} es simétrico y real es siempre posible elegir en cada punto del espacio un sistema de coordenadas respecto al cual γ_{ij} tenga la siguiente forma diagonal

$$\left(\gamma_{ik}\right) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

donde λ es un número positivo cualquiera. En el sistema de coordenadas elegido el determinante de γ_{ik} es $\gamma = -\lambda^4$. Démonos cuenta que en otro punto del espacio el tensor γ_{ik} tendrá, en general, una forma distinta de la diagonal, pero nosotros los cálculos lo estamos haciendo con referencia a un sólo punto.

La parte antisimétrica del tensor métrico es

$$\left(\varphi_{ik}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta & \beta & -X \\ \delta & 0 & -\alpha & -Y \\ -\beta & \alpha & 0 & -Z \\ X & Y & Z & 0 \end{pmatrix},$$

al hallar directamente el determinante de g_{ik} se encuentra

$$g = -\lambda^4 - \lambda^2\left(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 - X^2 - Y^2 - Z^2\right) + \left(\alpha X + \beta Y + \delta Z\right)^2 ,$$

un cálculo directo nos da

$$\varphi = \left(\alpha X + \beta Y + \delta Z\right)^2$$

entonces

$$g = \gamma + \varphi - \lambda^2\left(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 - X^2 - Y^2 - Z^2\right).$$

Teniendo presente que

$$\left(\gamma^{ik}\right) = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces se calcula directamente que

$$\frac{\lambda^2}{2}\gamma^{im}\gamma^{kr}\varphi_{mr}\varphi_{ik} = \alpha^2 + \beta^2 + \delta^2 - X^2 - Y^2 - Z^2$$

por tanto nos queda

$$g = \gamma + \varphi + \frac{\gamma}{2}\gamma^{im}\gamma^{kr}\varphi_{mr}\varphi_{ik} ,$$

o bien

$$g=-|g|=-|\gamma|+\varphi-\frac{|\gamma|}{2}\gamma^{im}\gamma^{kr}\varphi_{mr}\varphi_{ik} \quad \Rightarrow \quad |g|=|\gamma|-\varphi+\frac{|\gamma|}{2}\gamma^{im}\gamma^{kr}\varphi_{mr}\varphi_{ik}. \tag{G.3}$$

Esta expresión la hemos calculado para un determinado sistema de coordenadas, aquel en que la parte simétrica del tensor métrico tiene forma diagonal en un determinado punto. Los tres sumandos del segundo miembro de (G.3) dependen del determinante de un tensor de segundo orden y los últimos cuatro factores forman un invariante. Ante una transformación de coordenadas los tres determinantes que aparecen en (G.3) se transforman con la misma ley, es decir, (G.3) es una expresión invariante aunque no tensorial. Entonces si es válida para un determinado sistema de coordenadas, seguirá siendo válida en cualquier otro sistema, por tanto (G.3) tiene carácter general.

APÉNDICE H
Los símbolos de Christoffel

En una variedad dotada de tensor métrico simétrico se definen los símbolos de Christoffel de segunda especie por

$$L_{ik}{}^{r}=\frac{1}{2}g^{rs}\left(\partial_i g_{sk}+\partial_k g_{si}-\partial_s g_{ik}\right),$$

mientras que los símbolos de Christoffel en forma covariante o de primera especie son definidos por

$$L_{ikp}=g_{rp}L_{ik}{}^{r}=\frac{1}{2}\left(\partial_i g_{pk}+\partial_k g_{pi}-\partial_p g_{ik}\right).$$

Se define la derivada covariante con asterisco D^* como la derivada covariante calculada con respecto a los símbolos de Christoffel en vez de respecto a la conexión de la variedad

$$\overset{*}{D}_r a_{ik}=\partial_r a_{ik}-a_{sk}L_{ir}{}^{s}-a_{is}L_{kr}{}^{s}.$$

Como se puede comprobar por cálculo directo

$$\overset{*}{D}_r g_{ik}=\partial_r g_{ik}-g_{sk}L_{ir}{}^{s}-g_{is}L_{kr}{}^{s}=0$$

al multiplicar la anterior expresión por g^{ik} se encuentra

$$L_{sr}{}^{s}=\frac{1}{2}g^{ik}\partial_r g_{ik}$$

y por (A.2)

$$L_{sr}{}^{s}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{r}}. \tag{H.1}$$

Notemos por último que los símbolos de Christoffel son las componentes de una conexión. En efecto, por (D.1) vemos que los símbolos de Christoffel, en el caso de métrica simétrica que estamos considerando, es igual a una conexión más un tensor, suma que tiene la misma propiedad de transformación que la conexión.

APÉNDICE I
La electrodinámica de Born-Infeld

En el año 1934 Born e Infeld desarrollaron una teoría no lineal del electromagnetismo [2] que conseguía una visión unitaria, en el sentido de concebir a las partículas cargadas como parte del propio campo, eliminando las singularidades que con la visión dualista del electromagnetismo (como la teoría de Maxwell) surgen con las partículas cargadas.

Born e Infeld formularon su teoría en el marco de la teoría especial de la relatividad, o sea, no tuvieron en consideración el campo gravitatorio. La teoría parte de un tensor a_{ik} que se descompone en parte simétrica g_{ik} y antisimétrica f_{ik}, la primera representando el tensor métrico y la segunda el tensor de campo electromagnético. Teniendo presente que la acción del campo debe ser un invariante se elige como densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}=\sqrt{-\det\left(g_{ik}+f_{ik}\right)}-\sqrt{-\det\left(g_{ik}\right)} \tag{I.1}$$

(I.1) se desarrolla utilizando (G.3) y queda

$$\mathcal{L}=\sqrt{g}\left(\sqrt{1+F+G^{2}}-1\right) \tag{I.2}$$

siendo

$$F = \frac{1}{2} f_{ik} f^{ik}; \quad G^2 = \frac{1}{g} \det\left(f_{ik}\right).$$

Si no hay gravedad y usando coordenadas galileanas, encontramos que para campos electromagnéticos pequeños [en los que $\det\left(f_{ik}\right)$ se puede despreciar] (I.2) se reduce a la forma habitual de la teoría de Maxwell $\boldsymbol{L} = 1/4\, f_{ik} f^{ik}$, de aquí que el electromagnetismo de Maxwell sea de aplicación en todas las situaciones, excepto en la cercanía o interior de las partículas cargadas.

El tensor f_{ik} como es usual se deriva de un potencial vector ϕ_k

$$f_{ik} = \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k}$$

y por tanto cumple la propiedad cíclica

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x^r} + \frac{\partial f_{kr}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{ri}}{\partial x^k} = 0, \tag{I.3}$$

que representa el segundo grupo de ecuaciones de campo electromagnético.

Se define el tensor antisimétrico p^{ik} por

$$\sqrt{g}\, p^{ik} = \boldsymbol{p}^{ik} = \frac{\partial L}{\partial f_{ik}}, \tag{I.4}$$

entonces variando la densidad lagrangiana (I.3) con respecto al potencial electromagnético ϕ_k se obtiene la ecuación de campo

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}^{ik}}{\partial x^k} = 0 \tag{I.5}$$

que representa el primer grupo de las ecuaciones de campo electromagnético.

f_{ik} no es idéntico al tensor de campo electromagnético, sino proporcional, con un coeficiente de proporcionalidad dimensional b al que se le llama campo absoluto. Introducimos el campo magnético **B** y el campo eléctrico **E** entonces

$$F = \frac{1}{b^2}\left(c^2 B^2 - E^2\right); \quad G = \frac{1}{b^2} c\, \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}\,. \tag{I.6}$$

La identificación de la densidad lagrangiana (I.1) con la densidad lagrangiana física se realiza por la relación

$$\boldsymbol{L}' = -\varepsilon_0 b^2 \boldsymbol{L} = -\varepsilon_0 b^2 \left(\sqrt{1 + F + G^2} - 1\right), \tag{I.7}$$

en la que hemos utilizado coordenadas galileanas, por lo que podemos identificar las diferencias de coordenadas como intervalos de longitud o diferencias de tiempo. Notemos que (I.7) tiene las unidades de energía por unidad de volumen. Tanto en (I.7) como en las fórmulas siguientes utilizaremos el Sistema Internacional de Unidades.

Los campos **H** y **D** se definen por

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \boldsymbol{L}'}{\partial \mathbf{B}}; \quad \mathbf{D} = \frac{\partial \boldsymbol{L}'}{\partial \mathbf{E}}\,. \tag{I.8}$$

Las ecuaciones de la teoría de Born-Infeld (I.3) y (I.5) son formalmente idénticas a las de Maxwell, o sea

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \nabla \wedge \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \tag{I.9}$$

Ya estamos en condiciones de obtener la solución estática con simetría esférica de las anteriores ecuaciones de campo. De la segunda de las ecuaciones (I.9) se obtiene utilizando coordenadas esféricas

$$D_r = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} = \varepsilon_0 \frac{e}{r^2},$$

o sea, lo mismo que en el caso de la teoría de Maxwell. De la primera de las ecuaciones (I.9) aplicada al caso electroestático

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad \Rightarrow \quad E_r = -\phi'(r) \tag{I.10}$$

donde ϕ es el potencial escalar eléctrico. Definimos el «radio» de la partícula cargada por

$$r_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{b}} = \sqrt{\frac{e}{b}}$$

entonces por la segunda ecuación (I.8)

$$D_r = \frac{\varepsilon_0 E_r}{\sqrt{1 - E_r^2/b^2}} = -\frac{\varepsilon_0 \phi'}{\sqrt{1 - \phi'^2/b^2}} \quad \Rightarrow \quad \phi' = \frac{e}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r_0}{r}\right)^4}} = \frac{e}{r_o^2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{r_0}\right)^4}}, \tag{I.11}$$

y al integrar

$$\phi(r) = \frac{e}{r_o}\int_{r/r_0}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{1+u^4}}.$$

El tensor energía-momento del campo electromagnético se calcula por la técnica habitual

$$\frac{1}{2}\sqrt{g}T_{ik} = \frac{\partial \boldsymbol{L}''}{\partial g^{ik}} \tag{I.12}$$

este es un procedimiento que es independiente de si existe o no campo gravitatorio, por lo que g^{ik} no representa el potencial gravitatorio sino el tensor métrico, por ello la densidad lagrangiana a la que hay que aplicar (I.12) es

$$\boldsymbol{L}'' = -\varepsilon_0 b^2 \sqrt{g}\left(\sqrt{1+F+G^2} - 1\right)$$

mientras que el invariante *F* es

$$F = \frac{1}{2}g^{ip}g^{kq}f_{ik}f_{pq}$$

y después de hacer la derivación (I.12) hay que sustituir el tensor métrico por el tensor métrico de Minkowski. Para el caso que estamos considerando de campo magnético nulo el tensor de energía-momento es

$$T_{ik} = -\boldsymbol{L}'' g_{ik} - \varepsilon_0 b^2 \frac{g^{rp}f_{ir}f_{kp}}{\sqrt{1+F}}$$

que puesto en función del campo electroestático queda para la componente 0,0

$$T_{00} = \varepsilon_0 b^2\left(\sqrt{1 - E^2/b^2} - 1\right) + \varepsilon_0 \frac{E^2}{\sqrt{1 - E^2/b^2}}, \tag{I.13}$$

que corresponde a la densidad de energía electromagnética por unidad de volumen. Por mediación de (I.10) y (I.11) se obtiene la expresión del campo eléctrico

$$E = \frac{e}{r_0^2}\frac{1}{\sqrt{1+(r/r_0)^4}}, \tag{I.14}$$

con lo que podemos poner (I.13) en función de *r*. El primer sumando de (I.13) queda

$$\varepsilon_0 b^2\left(\sqrt{1 - E^2/b^2} - 1\right) = \varepsilon_0 b^2\left(\frac{r^2/r_0^2}{\sqrt{1-(r/r_0)^4}} - 1\right) \tag{I.15}$$

ahora integramos sobre todo el volumen; al usar coordenadas esféricas y como el integrando sólo depende de *r*, entonces $dV = 4\pi r^2 dr$ y de (I.15) se deduce

$$4\pi\varepsilon_0 \frac{e^2}{r_0}\int_0^{\infty}\left(\frac{u^2}{\sqrt{1+u^4}} - 1\right)u^2 du. \tag{I.16}$$

Del segundo sumando del segundo miembro de (I.13) tenemos

$$\varepsilon_0 \frac{E^2}{\sqrt{1 - E^2/b^2}} = \varepsilon_0 \frac{e^2}{r_0^2}\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sqrt{1+(r/r_0)^4}}$$

y al hacer la integración de volumen obtenemos

$$4\pi\varepsilon_0 \frac{e^2}{r_0} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}. \tag{I.17}$$

Reuniendo (I.16) y (I.17)

$$4\pi\varepsilon_0 \frac{e^2}{r_0} \left\{ \int_0^\infty \left(\frac{u^2}{\sqrt{1+u^4}} - 1 \right) u^2 du + \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}. \right\} = 1{,}2361 \cdot 4\pi\varepsilon_0 \frac{e^2}{r_0},$$

que es la energía de una partícula de carga eléctrica e y de radio r_0, energía que debe ser igual a $m_0 c^2$ donde m_0 es la masa de la partícula. Entonces de la teoría se infiere que el radio de la partícula cargada es

$$r_0 = 1{,}2361 \cdot 4\pi\varepsilon_0 \frac{e^2}{m_0 c^2} = 1{,}2361 \cdot r_C$$

r_C es el radio clásico del electrón; por tanto el potencial absoluto es

$$b = \frac{e}{r_0^2} = 1{,}189 \cdot 10^{20} \tag{I.18}$$

que expresado en el SI tiene la unidad C/N.

Bibliografía

[1] Born, Max: «The momentum-energy law in the ertlectrodynamics of Gustav Mie» en *The Genesis of General Relativity*, Jürgen Renn (editor), *Gravitation in the Twilight of Classical Physics: Them Promise of Mathematics*, Springer, 2007, vol. 4, pp. 745-756.

[2] Born, M.; Infeld, L.: «Foundations of the New Field Theory», *Proceedings of the Royal Society of London A* **144** (1934) 425-451.

[3] Eddington, A. S.: «A Generalisation of Weyl's Theory of the Electromagnetic and Gravitational Fields», *Proceedings of the Royal Society of London; Philosophical Transactions of the Royal Society* **99** (1921) 104-112.

[4] Eddington, A. S.: *The mathematical theory of Relativity*, Chelsea Publishing, 1975, pp. 213-240 y pp. 257-263.

[5] Einstein, Albert: «The Foundation of the General Theory of Relativity», en *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, pp. 111-164, (primeramente editado en 1916).

[6] Einstein, Albert: «Hamilton's Principle and the General Theory of Relativity», en *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, pp. 167-173, (primeramente editado en 1916).

[7] Einstein, A.: «Zür allgemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 32-38.

[8] Einstein, A.: «Zür allgemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 76–77.

[9] Einstein, A.: «Bemerkung zu meiner Arbeit 'Zur allegemeinen Relativitätstheorie», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1923) 137-140.

[10] Einstein, A.: «The Theory of the Affine Field», *Nature* **112** (1923) 448-449.

[11] Einstein, A.: «Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften su Berlin. Physikalisch-Matematische Klasse* (1925) 414-419, traducción al inglés con el título «Unified Field Theory of Gravitation and Electricity» por A. Unzicker and T. Case en www.alexander-unzicker.de/rep0.pdf.

[13] Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field Theories», *Living Reviews Relativity* **7** (2004) 1-153.

[14] Goenner, Hubert F. M.: «On the History of Unified Field Theories.Part II. (ca. 1930 – ca. 1965)», *Living Reviews Relativity* **17** (2014) 1-241.

[15] Hilbert, David: «Die Grundlagen der Physik. (Erste Mitteilung), Nachirchten von der Köiglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 8 (1916) 395-407. Traducción al inglés con el título «The Foundations of Physics (firts communication)», en *The Genesis of General Relativity*, Jürgen Renn (editor), *Gravitation in the Twilight of Classical Physics: Them Promise of Mathematics*, Vol. 4, Springer, 2007, pp. 1003-1015.

[16] Hittmair, O.: «Schrödinger's Unified Field Theory Seen 40 Years Later», en *Schrödinger: Centenary Celebration of a Polymath*, Kilmister, C. W. (editor), Cambridge University Press, 1989, pp.165-175,

[17] Schrödinger, Erwin: «Über die Unanwendbarkeit der Geometrie im Kleinen», *Naturwissenschaften* **22-31**

(1934) 518-520.
[18] Schrödinger, Erwin: "Contributions to Born's New Theory of the Electromagnetic Field", *Proceedings of the Royal Society of London A* **150** (1935). 465-477.
[19] Schrödinger, Erwin: «Sur la théorie du monde d'Eddington», *Il Nuovo Cimento* **15-4** (1938) 246-254.
[20] Schrödinger, Erwin: «The Point Charge in the Unitary Field Theory», *Procedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943-1944) 225-235.
[21] Schrödinger, E.: «The General Unitary Theory of the Physical Fields», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943) 43-58.
[22] Schrödinger, E.: «The Union of the three Fundamental Fields (Gravitation, Meson, Electromagnetism)», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1944) 275-287.
[23] Schrödinger, E.: «The Affine Connexion in Physical Field Theories», *Nature* **153** (1944) 572-575.
[24] Schrödinger, Erwin: «On Distant Affine Connection», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **50** (1944/1945) 143-154.
[25]Schrödinger, E.: «The general affine field laws», *Proceedings of the Royal Irish Academy Section A Mathematical and physical sciences* **51** (1946) 41-50.
[26] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws I», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1947) 163-171.
[27] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws II», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1948) 205-216.
[28] Schrödinger, Erwin: «The Final Affine Field Laws III», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **52** (1948) 1-9.
[29] Schrödinger, E.: «Studies in the Non-Symmetric Generalization of the Theory of Gravitation», *Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies, Series A,* 1951, vol. 6.
[30] Schrödinger, E.; Hittmair, O.: «Studies in the Non-symmetric Generalization of the Theory of Gravitation II: The Velocity of Light», *Communications of the Dublin Institute for Advanced Studies A*, 1951, vol. 8.
[31] Schrödinger, E.: «Unitary Field Theory: Conservation Identities and Relation to Weyl and Eddington», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **49** (1943-1944) 237-244.
[32] Schrödinger, E.: «The Relation betwenn metrica and affinity», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **51** (1945-1948) 147-150.
[33] Schrödinger, E.: «On the differential identities of an affinity», *Proceedings of the Royal Irish Academy A* **54** (1951-1952) 79-85.
[34] Schrödinger, Erwin: «Electric Charge and Current Engendered by Combined Maxwell-Einstein Fields», *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A* **56** (1953/1954) 13-21.
[35] Schrödinger, Erwin: *Space-Time Structure*, Cambridge University Press, 1991, pp. 106-119, (primera edición del año 1950).
[36] Segura González, Wenceslao: *Teoría de campo relativista*, eWT Ediciones, 2014.
[37] Segura González, Wenceslao: «Teoría general de la conexión afín», 2014, http://vixra.org/abs/1410.0160.
[38] Treder, H. J.: «Hamiltonian dynamics of purely affine fields», *Astronomische Nachrichten* **315** (1994) 1-9.
[39] Tonnelat, Marie-Antoinette: *Les théories unitaires de l'electromagnétism et de la gravitation*, Gauthier-Villars, 1965, pp. 266-273.
[40] Vizgin, Vladimir P.: *Unified Field Theories in the first third of the 20th century*, Birkhäuser, 1994, pp. 137-149, 188-197.
[41] Weyl, Hermann: «Gravitation und Elektrizität», *Sitzungsbericte der Preussischen Akad. d.Wissenschaften* (1918) 465-480, traducción al inglés en: Weyl, H.: «Gravitation and Electricity», en *The Principle of Relativity*, Dover, 1952, pp. 201-216.
[42] Weyl, Hermann: *Space-Time-Matter*, Dover, 1952, pp. 121-138 y pp. 282-312.