N-OPERACIONES

Carlos Oscar Rodríguez Leal.

5 de Agosto de 2014

Table of contents

1 Prefacio 5

2 Prólogo 7

I n-operaciones sobre los reales y complejos 9

3 Definición de las n-operaciones y propiedades generales 11

3.1 Definición de las n-operaciones. 11
3.2 n-operaciones inversas. 14
3.3 Propiedades de las n-operaciones. 20

4 n-operaciones 4^a y 5^a 25

4.1 n-operación 4^a 25
4.2 n-operación 5^a 27

5 Cálculo de las n-operaciones 29

5.1 Funciones 29
5.2 Funciones analíticas 30
5.3 Derivadas 31
5.4 Integrales 30
5.5 Ecuaciones diferenciales 31

Epilogue. (Abstract)

En este trabajo se generalizan las seis operaciones aritméticas fundamentales en términos de la n-ésima operación, la n-operación (donde $n \in \mathbb{Z}$), y se descubren muchas propiedades muy interesantes de las n-operaciones. Además este nuevo tipo de operaciones se aplican al cálculo, desarrollando con ello muchas nuevas leyes en las matemáticas modernas (derivadas, integrales, ecs. diferenciales).

This paper generalizes the six basic aritmetic operations in terms of the n-th operation, the n-operation (where $n \in \mathbb{Z}$), and many interesting propierties of the n-operations are discovered. Besides this new tipe of operations are applied to the calculus, thereby developing many new laws in modern mathematics (derivatives, integrals, eqs. differentials).

Prologue

Cuando yo estaba en la escuela secundaria aprendí la definición de los exponentes a^n como una abreviación de la multiplicación de un mismo número a n veces $(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)$, siendo que la multiplicación $a \cdot n$ es a su vez, como ya sabemos, la suma de un mismo número a n veces $(a + a + \cdots + a)$; además, aprendí la operación inversa de los exponentes, los radicales, siendo que las operaciones inversas de la adición y la multiplicación son la sustracción y la división. Motivado por esas definiciones concebí la idea de la definición de una operación que representara a un número a elevado a la potencia a n veces $(((a^a)^a \ldots)^a)$, y de una operación que abreviara a esta operación hecha con un número a sobre sí mismo n veces, y así sucesivamente. Ésta fué mi primera visualización de lo que en un futuro sería este artículo presente.

Durante el resto de mis estudios secundarios y de preparatoria no intenté desarrollar esta idea, y solo fue hasta la universidad cuando comencé a desarrollar ciertos aspectos interesantes sobre este tema; y es hasta ahora cuando he decidido (teniendo finalmente algo de tiempo y las herramientas matemáticas necesarias) desarrollar profundamente dicho trabajo.

En la primera parte de este artículo desarrollo dichas operaciones, las n-operaciones, sobre los campos complejo y real. En la primera sección empiezo con la definición de las n-operaciones y definiciones generales, para después desarrollar las n-operaciones inversas y por último establezco ciertas propiedades generales. En la segunda sección desarrollo propiedades y definiciones particulares de las n-operaciones 4ª y 5ª. Y finalmente en la tercera sección elaboro los temas de funciones, funciones analíticas, derivadas, integrales y ecuaciones diferenciales en términos de las n-operaciones.

En un futuro próximo desarrollaré una segunda parte de este trabajo, la cual considero que será aún más interesante que esta primera.

Espero les guste mi obra.

Part I

n-operaciones sobre los reales y complejos

Chapter 1

Definición de las n-operaciones y propiedades generales.

1.1 Definición de las n-operaciones.

Dadas las tres operaciones aritméticas fundamentales

$$\begin{array}{cc} \textit{Operación} & \textit{Símbolo} \\ \text{Adición} & a+b \\ \text{Multiplicación} & a\cdot b \\ \text{Potenciación} & a\hat{\ }b \end{array},$$

éstas, como sabemos, son operaciones binarias sobre el campo de los números reales o complejos (salvo ciertas excepciones, como la potenciación, que es multivaluada en el campo de los complejos). No obstante, podemos hacer la redefinición (en principio aparentemente innecesaria y complicada)

$$+ \equiv \odot_1, \tag{1.1}$$

$$\cdot \equiv \odot_2, \tag{1.2}$$

$$\hat{\ } \equiv \odot_3, \tag{1.3}$$

donde hemos definido al símbolo de la adición como un primer operador, al de la multiplicación como un segundo operador y al de la potenciación como un tercer operador. Bajo esta lógica, parece natural redefinir de igual manera a los operadores inversos de los tres respectivos operadores mencionados, como

$$- \equiv \odot_{-1}, \tag{1.4}$$

$$/ \equiv \odot_{-2}, \tag{1.5}$$

$$\sqrt[n]{} \equiv \odot_{-3}. \tag{1.6}$$

Definición 1.1. *Entonces podemos representar el conjunto de estas seis operaciones binarias aplicadas sobre un par ordenado (a,b) como*

$$\begin{array}{cc} a+b\equiv a\odot_1 b, & a-b\equiv a\odot_{-1}b, \\ a\cdot b\equiv a\odot_2 b, & a/b\equiv a\odot_{-2}b, \\ a\hat{\ }b\equiv a\odot_3 b, & \sqrt[b]{a}\equiv a\odot_{-3}b \end{array}. \tag{1.7}$$

Además, dadas estas definiciones, resulta que
$a\odot_n a = a\odot_{n+1} 2$ y $\underbrace{(\ldots(a\odot_n a)\odot_n\ldots)\odot_n a}_{m\ a\text{'s}} = a\odot_{n+1} m$
,
para $n=1,2$, $m=2,3,4,\ldots$; e igualmente podemos establecer la definición

$$a\odot_n 1 \equiv a,$$

para $n=2,3$.

Definición 1.2. *En base a lo anterior establecemos la siguiente definición general:*

$$\boxed{\underbrace{(\ldots(a\odot_n a)\ldots)\odot_n a}_{m\,a's} \equiv a\odot_{n+1} m}, \tag{1.8}$$

para $a\in\mathbb{C}$, $m=2,3,4,\ldots$, $n\in\mathbb{N}$, *y*

$$\boxed{a\odot_n 1\equiv a} \quad , \tag{1.9}$$

para $a\in\mathbb{C}$, $n=2,3,4,\ldots$; *donde en la simbología*

$$a\odot_n b=c \tag{1.10}$$

tenemos que a *es el operando o base (quien se va a operar),* b *es el operante o exponente e indica el grado de la operación,* $\odot_n$ *es el operador de* n-*é*simo *orden ó* n-*operador ó simplemente operador (si el contexto no causa ambigüedad), e indica el orden de la operación,* $a\odot_n b$ *es la operación de* n-*ésimo orden ó* n-*operación ó simplemente operación (si el contexto no causa confusión) y* c *es el resultado de dicha operación. Además, la expresión* $a\odot_n b$ *se leé como a, operador ene, b, ó a, op ene, b (ver* ***figura 1****).*

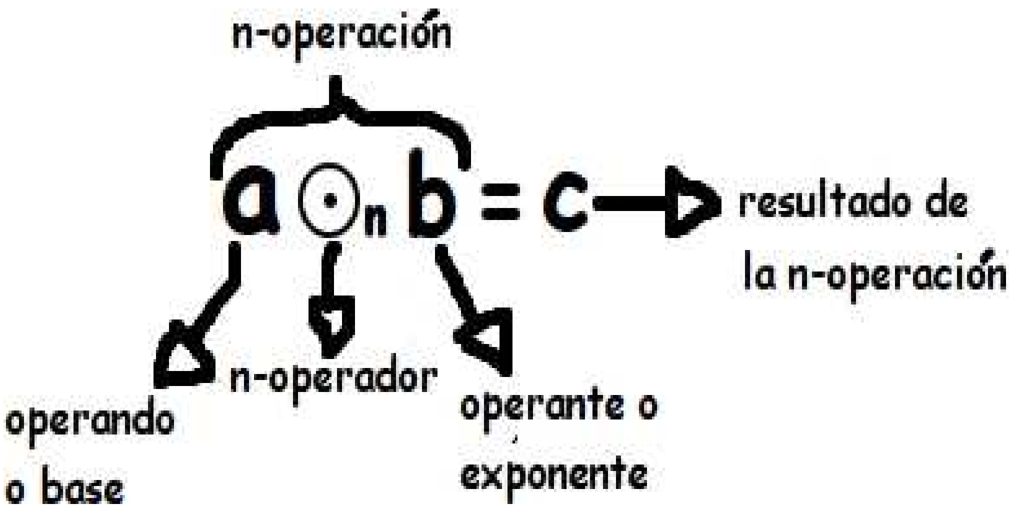

Figura 1.

Corolario 1.3. *Como caso particular tenemos que*

$$a\odot_n a=a\odot_{n+1} 2. \tag{1.11}$$

Definición 1.4. *Como en las* n-*operaciones seguiremos haciendo válida la jerarquía de operaciones, entonces al tener operadores del mismo orden podemos quitar los paréntesis asociativos sobreentendiendo que se opera según la ley de izquierda a derecha, i.e.*

$$\boxed{\begin{array}{rcl}\underbrace{a\odot_n a\odot_n\ldots\odot_n a}_{m\text{ veces}} & = & \underbrace{(\ldots((a\odot_n a)\odot_n a)\ldots)\odot_n a}_{m\text{ veces}} \\ & \equiv & a\odot_{n+1} m\end{array}}. \tag{1.12}$$

Además, cuando tenemos operadores de distinto orden, primero se realizará la operación dada por el operador de orden mayor.

***Ejemplo* 1.5.** $2\odot_2 3\odot_3 2=2\odot_2(3\odot_3 2)=2\cdot(3^2)=2\cdot 3^2=18$
$\neq(2\odot_2 3)\odot_3 2=(2\cdot 3)^2=36$

Así, la operación cuarta se define como una abreviación de la operación tercera (la potenciación), la operación quinta se define como una abreviación de la operación cuarta, y así sucesivamente.

Remarcación 1.6. *Para $\odot_1 \equiv +$, $\odot_2 \equiv \cdot$ y $\odot_3 \equiv \hat{}$, podemos seguir usando los dominios y propiedades ya conocidos para dichas operaciones (como el dominio complejo para el operando y operante, las propiedades de campo para el triplete $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ y las leyes de los exponentes).*

Remarcación 1.7. *La forma en que asociamos las repetidas $\odot_n$ en la fórmula (1.8), con asociación por izquierda, equivale a la jerarquía de operaciones aceptada, donde para operaciones de igual orden operamos de izquierda a derecha; sin embargo, pudimos haber dado dicha fórmula con asociación por derecha, haciendo las repetidas operaciones de derecha a izquierda, es decir*

$$\underbrace{a \odot_n (\ldots (a \odot_n a) \ldots)}_{ma's} \equiv a \odot_{n+1} m,$$

lo cual no necesariamente debe arrojar el mismo resultado que la fórmula (1.8), pues es lo mismo para $n=1,2$ debido a la propiedad asociativa de la suma y la multiplicación, mas para $n=3$ ya no se presenta la igualdad debido a que los exponentes no poseen la propiedad asociativa. No obstante, debido a como se definen la multiplicación y la potenciación, con asociación por izquierda

$$\begin{aligned} a \cdot n \equiv \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n veces} &= ((a+a)+a) + \cdots + a, \\ a^n \equiv \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n veces} &= \underbrace{((a \cdot a) \cdot a) \cdot \cdots \cdot a}_{n veces}, \end{aligned}$$

decidí definir de igual forma a las n-operaciones.

Teorema 1.8. ***Recursividad.*** *Ahora, de la fórmula (1.8) obtenemos a la inversa el principio*

$$\boxed{a \odot_n m = \underbrace{(a \odot_{n-1} a) \ldots \odot_{n-1} a}_{ma's}}, \tag{1.13}$$

donde n, $m = 2, 3, 4, \ldots$ Por lo tanto, dada una operación cualquiera $a \odot_n m$, con $n > 3$, podemos obtener su resultado aplicando la identidad (1.13).

***Ejemplo* 1.9.** *Por ejemplo, $3 \odot_5 2 = 3 \odot_4 3 = 3 \odot_3 3 \odot_3 3 = (3^3)^3 = 3^9 = 19,683$,*

$$\begin{aligned} 2 \odot_6 3 &= 2 \odot_5 2 \odot_5 2 = (2 \odot_4 2) \odot_5 2 \\ &= (2 \odot_3 2) \odot_5 2 = (2^2) \odot_5 2 = 4 \odot_5 2 \\ &= (4 \odot_4 4) = 4 \odot_3 4 \odot_3 4 \odot_3 4 \\ &= ((4^4)^4)^4 = 4^{4^3} \\ &= 340'282,366'920,938'463,463'374,607'431,768'211,456, \end{aligned}$$

es decir, más de 340 exallones!; además

$$\begin{aligned} 3 \odot_6 2 &= 3 \odot_5 3 = 3 \odot_4 3 \odot_4 3 \\ &= [3 \odot_3 3 \odot_3 3] \odot_4 3 \\ &= [3 \odot_3 3 \odot_3 3] \odot_3 [3 \odot_3 3 \odot_3 3] \odot_3 [3 \odot_3 3 \odot_3 3] \\ &= \left(((3^3)^3)^{(3^3)^3}\right)^{(3^3)^3} = \left((3^9)^{3^9}\right)^{3^9} = 19,683^{19,683^2} = !!!, \end{aligned}$$

resultando ser una cantidad exorbitante; lo cual demuestra que para operaciones de orden mayor a tres obtenemos resultados astronómicos y mucho más que eso aún siendo pequeños el operando y el operante.

Por otro lado, a partir del operador quinto, el operando $a \in \mathbb{N}$, pues para $n \leq 3$ $a \odot_n b$ queda definido incluso para un operando a complejo (el dominio de las operaciones adición, multiplicación y potenciación está extendido hasta los complejos), y para $a \odot_4 m$, $m \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$a \odot_4 m = a \odot_3 a \ldots \odot_3 a = ((a^a)^a \ldots)^a = a^{a^{m-1}},$$

sin importar que a sea complejo; mas para $a\odot_5 m$ tenemos el problema

$$a\odot_5 m = a\odot_4 a\dots\odot_4 a = a\odot_3 !? = !?,$$

es decir tenemos indefiniciones del tipo $a\odot_4 a$, con el operante complejo, real o racional. Por lo tanto, para que puedan quedar definidas las operaciones, debemos establecer la siguiente remarcación.

Remarcación 1.10. *Para un operador menor a cinco la base puede definirse en el dominio complejo. A partir del quinto operador la base solo está definida por ahora como un natural:*

$$\boxed{\text{en}\, a\odot_n b, \text{si}\, n=5,6,7,\dots \text{ entonces}\, a\in\mathbb{N}, \text{si}\, n=1,2,3,4, \text{entonces}\, a\in\mathbb{C}.} \tag{1.14}$$

Remarcación 1.11. *Cuando trabajamos con operaciones de orden menor a cinco, para algunos valores del operando y el operante la operación puede no estar definida.*

***Ejemplo* 1.12.** $(-1)\odot_3\pi = (-1)^{\pi} = !?$, $(-\pi)\odot_4 2 = (-\pi)^{-\pi} = !?$.

También, para valores complejos del operando a (con la parte imaginaria distinta de cero) la cuarta operación es multivaluada **[1]** (operador $n=4$), pues por ejemplo

$$\begin{aligned} i\odot_4 2 &= i\odot_3 i = i^i = e^{\mathrm{iLni}} = e^{i\ln\left\{1\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right]\right\}} \\ &= e^{i\ln\left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}\right)} = e^{i\left(i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k},\ k\in\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

no obstante, podemos crear la definición que sigue.

Definición 1.13. ***Operaciones monovaluadas y multivaluadas.*** *Para* $z\in\mathbb{C}$, $m\in\mathbb{N}$, $z\odot_4 m$ *se define de acuerdo a su valor principal en términos del valor principal del logaritmo natural de un complejo (*$\ln$*)* ***[1]***, *y* $z\circledcirc_4 m$ *se define como el conjunto de todos los posibles valores que se pueden tomar en términos del logaritmo natural general (*Ln*)* ***[1]***. *Igualmente, para* z_1, $z_2\in\mathbb{C}$, $z_1\odot_3 z_2$ *se define de acuerdo a su valor principal en términos del valor principal del logaritmo natural de un complejo (*$\ln$*), y* $z_1\circledcirc_3 z_2$ *se define como el conjunto de todos los posibles valores que se pueden tomar en términos del logaritmo natural general (Ln).*

A $z\odot_4 m$ *y a* $z_1\odot_3 z_2$ *se les lamará 4-operación y 3-operación principales, respectivamente, mientras que a* $z\circledcirc_4 m$ *y a* $z_1\circledcirc_3 z_2$ *se les ha de llamar* 4*-operación y* 3*-operación generales, respectivamente. Y en general a* $a\odot_n b$ *se les llamará también* n*-operaciones principales (o simplemente* n*-operaciones, si el contexto lo permite) y a* $a\circledcirc_n b$ *se les ha de llamar* n*-operaciones generales; lo anterior siempre y cuando puedan definirse esas operaciones para ciertos valores de* a, b *y* n*, y solo cuando dichas operaciones arrojan varios resultados en términos de Ln pero un solo resultado en términos de ln. Si para una operación* n*-ésima podemos definir a dicha operación y ella nos genera un solo resultado en términos del* $\ln$ *de números reales o de otra operación (pues el logaritmo natural es monovaluado para un argumento real) para ciertos valores de operando, operante y operador, entonces para ese caso diremos que* $a\circledcirc_n b = a\odot_n b$.

***Ejemplo* 1.14.**

$$\begin{aligned} i\odot_4 2 &= i\odot_3 i = i^i \textit{(valor principal)} = e^{-\frac{\pi}{2}}, \textit{ pero} \\ i\circledcirc_4 2 &= i\circledcirc_3 i = i^i \textit{(todos los valores)} = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k},\ k\in\mathbb{Z}. \\ 3\circledcirc_4 2 &= 3\circledcirc_3 3 = 3^3 = 27 = 3\odot_3 3 = 3\odot_4 2 \textit{(nos da un solo valor).} \end{aligned}$$

1.2 n-operaciones inversas.

Definición 1.15. *Las* n*-operaciones inversas de las operaciones principales se definen de la manera usual en que se definen las operaciones inversas a las operaciones binarias, es decir*

$$\boxed{c\odot_{-n} m = a \ t.q.\ a\odot_n m = c}, \tag{1.15}$$

donde $a,c\in\mathbb{C}$*,* $m,n\in\mathbb{N}$ *y* $\odot_{-n}$ *se define como el operador inverso al operador* $\odot_n$*. Cabe mencionar que para ciertos valores del operando, el operante y el operador, las operaciones inversas* $c\odot_{-n}m$ *pueden no arrojar ningún valor a tal que* $a\odot_n m=c$*, o podrían dar muchos valores a (funciones multivaluadas).*

Ejemplo 1.16. $1\odot_{-3}2=\sqrt{1}=\pm 1$*;* $(-1)\odot_{-3}2=\sqrt{-1}=\pm i$*, por lo que dicho resultado no existe en el dominio y codominio reales.*

Ejemplo 1.17. $e^{-\frac{\pi}{2}}\odot_{-4}2=c$ *tal que* $c\odot_4 2=e^{-\frac{\pi}{2}}$*, es decir,* $c\,(op\,3)\,c=e^{-\frac{\pi}{2}}$*, o sea que* $c^c=e^{-\frac{\pi}{2}}$*, mas como sabemos del* ***ejemplo 1.14****,* i^i *(valor principal)=*$e^{-\frac{\pi}{2}}$*, por lo que* $e^{-\frac{\pi}{2}}\,(op-4)\,2=i$*. Además, claramente también pueden existir soluciones reales* c_R *tales que* $c_R^{c_R}=e^{-\frac{\pi}{2}}$*. Para encontrar dichas soluciones graficaremos la función* $x^x-e^{-\frac{\pi}{2}}$ *para encontrar sus raíces, obteniendo el gráfico siguiente:*

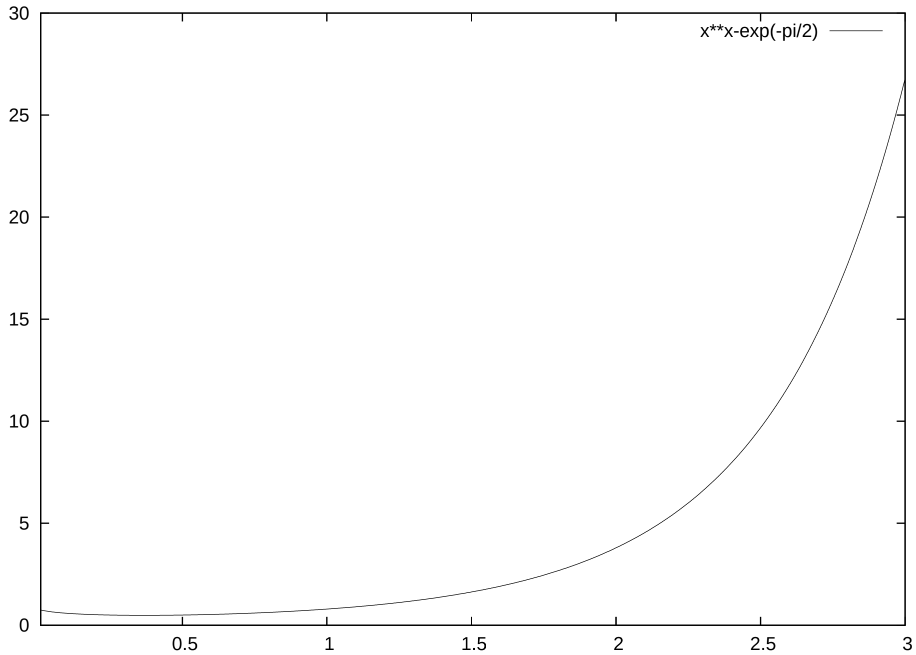

Figura 2.

donde vemos que dicha función no posee raíces reales positivas No obstante está abierta la posibilidad a más soluciones c complejas, a menos que se demostrara lo contrario.

Ahora definiremos a la operación inversa de una n-operación general.

Definición 1.18. *Las operaciones inversas de las operaciones generales* $z_1 \circledcirc_4 m$ *y* $z_1\circledcirc_3 z_2$*, donde* $z_1,\ z_2\in\mathbb{C}$*,* $m\in\mathbb{N}$*, se definen así:*

- *Si* $v,\ w,\ \{z_j\}\in\mathbb{C}$*,* $m\in\mathbb{N}$*, entonces* $w\circledcirc_{-4}m=v$ *t.q.* $v\circledcirc_4 m=\{z_j\}$ *(conjunto contable), donde existe un* $z_k\in\{z_j\}$ *tal que* $w=z_k$*. Como vemos, pudieran existir muchas v que satisfagan esa definición i.e.* $w\circledcirc_{-4}m$ *pudiera ser multivaluada a menos que se llegara a demostrar lo contrario.*
- *Si* $w,\ z\in\mathbb{C}$*, entonces* $w\circledcirc_{-3}z=w^{\frac{1}{z}}$*, de acuerdo a la teoría de variable compleja* ***[1]****.*

Y en general, para $a,b,c,\{d_j\}\in\mathbb{C}$ *y* $n\in\mathbb{N}$*,* $a\circledcirc_{-n}b=c$ *sii* $c\circledcirc_n b=\{d_j\}$ *t. q.* $\exists d_k\in\{d_j\}$ *y* $d_k=c$*. Aquí vemos que pudieran existir muchos números c que satisfagan dicha condición y entonces* $a\circledcirc_{-n}b$ *sería multivaluada, o podría no existir ningún c que cumpla con ello y entonces* $a\circledcirc_{-n}b$ *no estaría definida para esa tripleta particular de operando, operante y operador.*

Ejemplo* 1.19.** *$e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi} \circledcirc_{-4} 2 = c$ t. q. $c \circledcirc_4 2 = e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi}$, mas del* ***ejemplo 1.14 *vemos que $i \circledcirc_4 2 = \left\{e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}\right\}$ ($k \in \mathbb{Z}$), por lo que para $k = 1$ tendremos que $e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi} \in \left\{e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}\right\}$ i. e. $e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi} \circledcirc_{-4} 2 = i$ como un resultado dentro de otros posibles (si $e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi} \circledcirc_{-4} 2$ fuera multivaluada).*

Teorema 1.20. *Para operante $c = 1$, $n = 2, 3, 4 \ldots$, $a \in \mathbb{C}$, tenemos que*

$$\boxed{a \circledcirc_{-n} 1 = a \odot_{-n} 1 = a}, \tag{1.16}$$

además, dichas operaciones son monovaluadas e inyectivas; pues $a \circledcirc_n 1 = a \odot_n 1 = a$ por (1.9), y para $b \neq a$, $b\,(o\,\mathrm{pn})\,1 = b \neq a$ por el mismo (1.9), además si $b \circledcirc_{-n} 1 = a$, entonces $a \odot_n 1 = a = b$ por (1.9)

Definición 1.21. ***Operación cero.*** *Además definiremos de manera natural a la operación cero u operación identidad, para $a \in \mathbb{C}$ y $m \in \mathbb{N}$, como*

$$\boxed{a \circledcirc_0 m = a \odot_0 m = a}, \tag{1.17}$$

es decir, es la operación que deja a la base a intacta (operación que no opera sobre a).

Definición 1.22. ***Operación inversa.*** *Por lo tanto, por (1.17) queda completada la definición de operación principal inversa como*

$$\boxed{c \odot_{-n} m = a \,\mathrm{tal\,que}\, a \odot_n m = c, a, c \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}\, y\, n \in \mathbb{N}_0}; \tag{1.18}$$

y de operación general inversa como

$$\boxed{\begin{array}{c} c \circledcirc_{-n} m = a \,\mathrm{tal\,que}\, a \circledcirc_n m = \{c_i\}, \mathrm{con}\, c = c_k \in \{c_j\}, \\ a, c \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}\, yn \in \mathbb{N}_0 \end{array}}. \tag{1.19}$$

Definición 1.23. ***Operador inverso.*** *Y para los operadores (no así para las operaciones), podemos definir al operador inverso del operador $\odot_n$ (u $\circledcirc_n$) como el operador $\odot_{-n}$ (u $\circledcirc_{-n}$), para $n \in \mathbb{Z}$.*

Corolario 1.24. *El operador inverso de un operador inverso es el operador original.*
[Eso es una deducción evidente de la ***definición Operador inverso****.P*

Ejemplo 1.25. *Así pues, tenemos por ejemplo que el operador inverso del operador sustracción es el operador adición, y el operador inverso del operador inverso del operador $\odot_4$ es él mismo.*

Definición 1.26. ***Orden de una operación.*** *Ahora definiremos de manera general el orden de una operación $a \odot_n b$ (o $\odot_n$) o de un operador $\odot_n$ (o $\circledcirc_n$) como el número n, es decir*

$$\boxed{\mathrm{Ord}(a \odot_n b) = n \;\; y \;\; \mathrm{Ord}(a \circledcirc_n b) = n, n \in \mathbb{Z}\;}. \tag{1.20}$$

Una vez definidas las n-operaciones para n entero pasaremos a dar la siguiente definición.

Definición 1.27. ***Jerarquía de operaciones.*** *La jerarquía de operaciones que estableceremos es la usual jerarquía dada para las operaciones aritméticas, es decir, tendremos en orden descendente de prioridad (sin importar que se trate de operaciones principales o generales) que:*

1. *En primer lugar se respetará la asociatividad dada por los paréntesis, corchetes y llaves.*

2. *Operaciones binarias con operadores de orden n se ejecutarán con prioridad sobre operaciones de orden m cuando $|n| > |m|$.*

3. *Para operaciones del mismo orden en valor absoluto ($|n| = |m|$) las operaciones se realizarán de izquierda a derecha.*

Teorema 1.28. ***Exponente unidad.*** *A continuación estableceremos la siguiente propiedad general para $n \in \mathbb{Z} - \{-1, 1\}$ y $a \in \mathbb{C}$, basados en (1.9), (1.16) y (1.17):*

$$\boxed{a \circledcirc_n 1 = a \odot_n 1 = a}. \tag{1.21}$$

(no es casualidad que $a \cdot 1 = a^1 = a/1 = \sqrt[1]{a} = a$, aquí mostramos las razones de fondo).

Las expresiones (1.17), (1.18) y (1.19) nos inspira a establecer el siguiente corolario evidente.

Corolario 1.29. *El operador inverso del operador cero es él mismo:*

$$\boxed{a \circledcirc_{-0} m = a \circledcirc_0 m = a \odot_{-0} m = a \odot_0 m, a \in \mathbb{C}, m \in N}. \tag{1.22}$$

Teorema 1.30. ***Operaciones monovaluadas.*** *Para un dominio natural $\{p\}$ en la base, las n-operaciones generales de orden no negativo son monovaluadas (i. e. coinciden con las n-operaciones principales), con codominio natural e, inyectivas para distintas p' s y mismos operador n y operante $m \in \mathbb{N}$. Además, las n-operaciones generales de orden no positivo son monovaluadas, inyectivas para distintas bases y necesariamente de dominio natural cuando su codominio $\{p\}$ es natural, y dichas n-operaciones generales coincidirán con sus respectivas n-operaciones principales.*

Solución. *Para un operador n no negativo resulta que:*

-. *Para $n \leq 3$ resulta obvio que $p \circledcirc_n m$ es monovaluada, de codominio natural y que para distintos valores de p siempre tendremos resultados distintos. Por ejemplo, si $p^m = q^m$, entonces, aplicando logaritmos llegamos a que $p = q$.*

-. *Para $n \geq 4$ resulta que $p \circledcirc_n m = p \circledcirc_{n-1} p \ldots \circledcirc_{n-1} p = \cdots = ((p \circledcirc_3 p \ldots) \ldots) \equiv ((p^{p^{\cdots}}) \ldots)$, es decir, tendremos una expresión en términos de p' s elevadas a las p' s anidadas muchas veces, y como p es natural, entonces es cierto que la operación será monovaluada y de codominio natural. Ahora, para demostrar la inyectividad usaremos la inducción, donde si $p \neq q$ entoces sin pérdida de generalidad podemos decir que $p < q$. Así pues, para $n \leq 3$ tenemos que si $p_1 < q_1$ y $p_2 \leq q_2$, entonces $p_1 \odot_n p_2 < q_1 \odot_n q_2$ (por ejemplo, para $\odot_3$ tenemos que $p_2 \ln p_1 < q_2 \ln q_1$, de donde $p_1^{p_2} < q_1^{q_2}$), por lo que también será cierto que si $p < q$ entonces $p \odot_n m < q \odot_n m$. Ahora supondremos que dicha hipótesis se cumplen para algún $n = k$. por lo tanto para $n = k + 1$ y, $p_1 < q_1$, $p_2 \leq q_2$, tendremos que*

$$\begin{aligned} p_1 \odot_{k+1} p_2 &= \underbrace{p_1 \odot_k p_1 \odot_k \ldots p_1}_{p_2 \text{ veces}} = \underbrace{p_1 \odot_k p_1 \odot_k \ldots p_1}_{p_2 \text{ veces}} \underbrace{\odot_k 1 \odot_k 1 \ldots \odot_k 1}_{q_2 - p_2 \text{ veces}} \\ &< \underbrace{q_1 \odot_k q_1 \odot_k \ldots q_1}_{q_2 \text{ veces}} = q_1 \odot_{k+1} q_2 \end{aligned},$$

pues por hipótesis, $p_1 \odot_k p_1 < q_1 \odot_k q_1$, por lo que de igual forma $p_1 \odot_k p_1 \odot_k p_1 < q_1 \odot_k q_1 \odot_k q_1$, y así sucesivamente. Así que también se cumplirá la desigualdad $p \odot_{k+1} m < q \odot_{k+1} m$. Luego pues, si $p \neq q$ entonces no puede ser cierto que $p \odot_k m = q \odot_k m$. Y por último, para el caso particular de $m = 1$, la demostración es inmediata debido a (1.9).

-. *Por lo tanto tendremos, debido a la definición* ***Operaciones monovaluadas y multivaluadas****, que $p \circledcirc_n m = p \odot_n m$.*

Ejemplo 1.31. $3 \circledcirc_5 2 = 3 \circledcirc_4 3 = 3 \circledcirc_3 3 \circledcirc_3 3 = (3^3)^3$, *que es monovaluado y de codominio natural; además, si cambiamos al 3 por cualquier otro natural, por ejemplo 4, tendremos $4 \circledcirc_5 2 = 4 \circledcirc_4 4 = 4 \circledcirc_3 4 \circledcirc_3 4 \circledcirc_3 4 = ((4^4)^4)^4$ que será claramente un resultado distinto al anterior.*

Para las operaciones inversas, con $n\in\mathbb{N}$*, tendremos que* $c\circledcirc_{-n}m=p$*, t. q.* $p\circledcirc_n m=c$*, mas por hipótesis p está en codominio natural, por lo que, debido a la demostración para n positivo,* $p\circledcirc_n m=p\odot_n m$*, i. e.* $c\circledcirc_{-n}m=c\odot_{-n}m$*. Además, nuevamente por la demostración para n positivo,* $p\odot_n m=c$ *es inyectivo y con c natural, y por lo tanto existe solo un* $p\in\mathbb{N}$ *tal que* $p\odot_n m=c$*, siendo entonces que* $c\odot_{-n}m=p$ *es monovaluado y c es natural. Por último, supongamos que* $c_1\odot_{-n}m=c_2\odot_{-n}m=p\in\mathbb{C}$*, lo cual implica que* $p\odot_n m=\{c_1,c_2\}\in\mathbb{C}$*, pero por definición* $\odot_n$ *es un operador monovaluado, así que* $c_1=c_2$*, y entonces* $c\odot_{-n}m=p\in\mathbb{C}$ *es inyectivo (aunque tal vez multivaluado), i.e. en nuestro caso particular* $c\odot_{-n}m=p\in\mathbb{N}$ *también es inyectivo.*

***Ejemplo* 1.32.** $a\circledcirc_{-2}2=2$ *t. q.* $2\circledcirc_2 2=a$*, por lo que* $2\cdot 2=a=4$.

Y para $n=0$ *obtenemos* $p\circledcirc_{-0}m=p\odot_0 m=p$*, debido a (1.22), por lo que claramente es una operación monovaluada, inyectiva y de dominio natural cuando el codominio es natural.*■

Del teorema anterior se deducen de forma inmediata los siguientes corolarios.

Corolario 1.33. *Las ecuaciones* $x\circledcirc_{-n}m=p$*, para x incógnita,* $n\in\mathbb{N}_0$ *y* $m,p\in\mathbb{N}$*, siempre poseen solución única y natural, la cual es* $x=p\odot_n m$*.*

Corolario 1.34. *Inyectividad.* *Para* $n\in\mathbb{N}_0$*,* $m\in\mathbb{N}$*,* $c\in\mathbb{C}$*, tenemos que* $c\odot_{-n}m$*, con c variable y n, m constantes, es una operación inyectiva, aunque no necesariamente monovaluada, excepto para el caso* $n=0$*, donde ahí obviamente la operación sí es monovaluada (ver **figura 3**).*

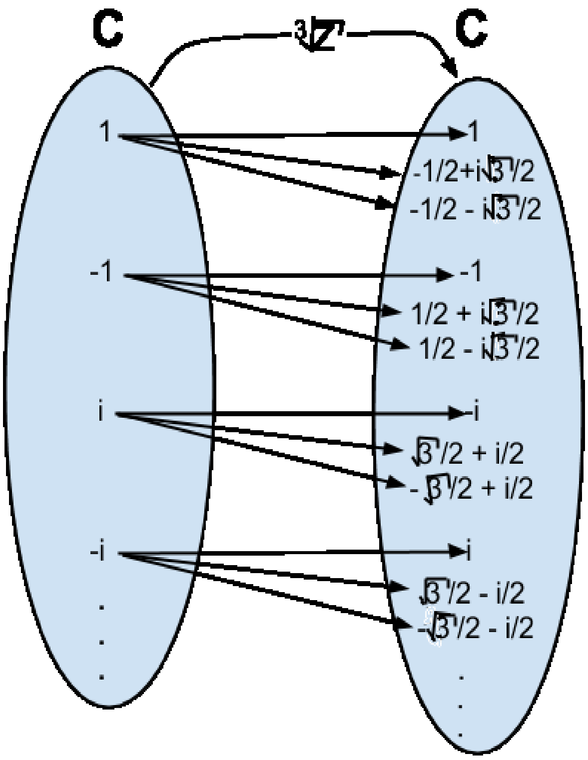

Figura 3.

Teorema 1.35. *Despejes.* *Tenemos, para* $n\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{N}$*, que*

$$\boxed{a\odot_{-n}m\odot_n m=a}, \tag{1.23}$$

siempre y cuando la operación inversa esté definida.

Mas para $n, m \in \mathbb{N}$

$$\boxed{a \odot_n m \odot_{-n} m = \{a_j\}}\text{, donde un } a_k = a \ , \tag{1.24}$$

para $a_k \in \{a_j\}$*; y para* $n = 0$, $m \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{a \odot_0 m \odot_{-0} m = a}. \tag{1.25}$$

Por último, para $n \in \mathbb{N}_0$, m, $a \in \mathbb{N}$*, y codominio natural, tenemos que*

$$\boxed{a \odot_n m \odot_{-n} m = a}. \tag{1.26}$$

Además, siempre estará definida la operación para el operador inverso $-n$ *en los últimos tres casos.*

Solución. *Para* n, $m \in \mathbb{N}$ *tenemos que* $a \odot_{-n} m = \{b_j\}$ *(la operación inversa pudiera ser multivaluada) t.q.* $\{b_j\} \odot_n m = a$ *(por (1.18)), así que* $a \odot_{-n} m \odot_n m = \{b_j\} \odot_n m = a$*; y para m∈*$\mathbb{N}$*, n=0, por (1.17) y (1.22) la demostración resulta obvia. Por otro lado, si* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $a \odot_n m = b$*, por lo que* $a \odot_n m \odot_{-n} m = b \odot_{-n} m = \{a_j\}$*, tal que* $a_k \odot_n m = b$*, mas como* $a \odot_n m = b$*, se sigue que* $a = a_k \in \{a_j\}$*, i.e.* $\{a_j\}$ *es no vacío y la operación inversa sí está definida; y si* $n = 0$*, por (1.17) y (1.22) resulta evidente que* $a \odot_0 m \odot_{-0} m = a$*. Por último, tenemos que para* $n = 1, 2, ...$ *y* m, $a \in \mathbb{N}$, $a \odot_n m = b \in \mathbb{N}$ *(**teorema Operaciones monovaluadas**), por lo que* $a \odot_n m \odot_{-n} m = b \odot_{-n} m = \{c_j\}$ *t.q* $\{c_j\} \odot_n m = b \in \mathbb{N}$ *, además* $\{c_j\}$ *es no vacío (operación inversa existe) pues por lo menos* $a \in \{c_j\}$*, entonces, por la inyectividad del **teorema Operaciones monovaluadas**,* $\{c_j\} = \{c\}$*, pero* $a \odot_n m = b$*, por lo que c=a, i.e.* $a \odot_n m \odot_{-n} m = a$*; y para* $n = 0$ *y* m, $a \in \mathbb{N}$ *tenemos a (1.25).*■

Ahora observemos que si tenemos la operación $a \odot_{n+1} a \odot_{-n} a$, con $a = 3, 4, 5, ...$, $n \in \mathbb{N}$ y si tenemos solo una imagen natural para el operador $\odot_{-n}$, obtendremos, debido al **teorema Operaciones monovaluadas**,

$$a \odot_{n+1} a \odot_{-n} a \;=\; \underbrace{a \odot_n a ... \odot_n a}_{a-1 \text{ veces}} \odot_n a \odot_{-n} a \;=\; \underbrace{a \odot_n a ... \odot_n a}_{a-1 \text{ veces}} \;=\; a \odot_{n+1} (a-1) \,.$$

Y para $a = 2$ y una imagen natural para el operador $\odot_{-n}$

$$2 \odot_{n+1} 2 \odot_{-n} 2 = 2 \odot_n 2 \odot_{-n} 2 = 2 = 2 \odot_{n+1} 1,$$

por (1.21) y el **teorema Operaciones monovaluadas**; es decir, tendremos el siguiente teorema.

Teorema 1.36.

$$\boxed{a \odot_{n+1} a \odot_{-n} a = a \odot_{n+1} (a-1)}, \tag{1.27}$$

para $a = 2, 3, 4, ...$, $n \in \mathbb{N}$ *e imagen natural para el operador* $\odot_{-n}$*.*

***Remarcación* 1.37.** *Y si nuestro codominio no es natural, el teorema anterior sigue siendo válido pero sólo como un resultado entre otros posibles donde ya no se presenta la igualdad al tener resultados distintos en la parte derecha de dicha igualdad. Eso es debido a la multivaluación ya mencionada de las operaciones inversas.*

***Ejemplo* 1.38.** $2 \odot_4 2 \odot_{-3} 2 = 2 \odot_3 2 \odot_{-3} 2 = \sqrt{2^2} = \pm 2$*, donde* $+2 = 2 \in \mathbb{N} = 2 \odot_4 1$*. Mas por otro lado, si trabajamos con n-operaciones naturales (base e imagen naturales), entonces* $3 \odot_4 3 \odot_{-3} 3 = 3 \odot_3 3 \odot_3 3 \odot_{-3} 3 = \sqrt[3]{(3^3)^3} = 3^3 = 27 \in \mathbb{N} = 3^3 = 3 \odot_3 3 = 3 \odot_4 2$.

Basados en (1.14), en la **definición Operaciones monovaluadas y multivaluadas**, en (1.15), en la **definición** 1.18, en (1.17), (1.18), (1.19), en (1.22) y en lel **teorema Operaciones monovaluadas**, podemos establecer la siguiente remarcación.

Remarcación 1.39. *Para un operador de orden $n = -4, -3, ..., 3, 4$, la base puede definirse en el dominio complejo. A partir del operador cinco en valor absoluto la base solo está definida por ahora como un natural:*

$$\begin{array}{c} si\ en\ a \odot_n b\ ó\ en\ a \circledcirc_n b\ |n| < 5\ ,\ entonces\ a \in \mathbb{C}, \\ y\ si\ en\ a \odot_n b\ ó\ en\ a \circledcirc_n b\ |n| \geq 5\ ,\ entonces\ a \in \mathbb{N} \end{array}. \tag{1.28}$$

***Ejemplo* 1.40.** *$i \odot_{-5} 2 = c$ t.q. $c \odot_5 2 = i$, mas por el **teorema Operaciones monovaluadas**, claramente c no debe ser natural, i.e. $c \odot_5 2 = c \odot_4 c = !?$*

Definición 1.41. *En base a **remarcación 1.6** y (1.17) podemos extender (1.17) de la forma*

$$\boxed{a \circledcirc_0 b = a \odot_0 b = a\ ,\ a, b \in \mathbb{C}}. \tag{1.29}$$

De la misma manera podemos extender (1.22) de la manera siguiente.

Teorema 1.42. *El operador inverso del operador cero es él mismo:*

$$\boxed{a \circledcirc_{-0} b = a \odot_{-0} b = a \odot_0 b = a, a, b \in \mathbb{C}}. \tag{1.30}$$

Remarcación 1.43. *Las expresiones (1.29) y (1.30) son, en esta sección, los únicos casos en los que hemos considerado un dominio complejo en lugar de natural para el operante. Mas adelante definiremos un operante de dominio complejo para algunos operadores mayores a 3 o menores a -3.*

En seguida obtendremos algunas propiedades fundamentales y generalizaciones de las n-operaciones.

1.3 Propiedades de las n-operaciones.

Las siguientes propiedades generales de las n-operaciones son válidas siempre, debido al **teorema Operaciones monovaluadas** mas las razones que expliquemos en cada propiedad.

He aquí las propiedades:

Si escribimos $2 \odot_n 2$ resulta que aplicando la identidad (1.13) tenemos

$$\begin{aligned} 2 \odot_n 2 &= 2 \odot_{n-1} 2 = 2 \odot_{n-2} 2 = \cdots = 2 \odot_3 2 \\ &= 2 \odot_2 2 = 2 \odot_1 2 = 2^2 = 2 \cdot 2 = 2 + 2 = 4, \end{aligned}$$

es decir, tendremos el siguiente teorema.

Teorema 1.44.

$$\boxed{2 \circledcirc_n 2 = 2 \odot_n 2 = 4,\ \forall n \in \mathbb{N}} \tag{1.31}$$

(lo cual explica las razones profundas del por qué se presenta la curiosa igualdad $2^2 = 2 \cdot 2 = 2 + 2 = 4$).

Teorema 1.45. *Para un codominio natural,*

$$4 \odot_{-n} 2 = 2, n \in \mathbb{N}\ , \tag{1.32}$$

por la propiedad anterior y (1.26).

Para $n = 3, 4, 5, ..., m = 2, 3, 4, 5, ...$

$$1 \circledcirc_n m = 1 \odot_n m \ = \ \underbrace{1 \odot_{n-1} 1 \odot_{n-1} ... \odot_{n-1} 1}_{m \text{ veces}} \ = \ \underbrace{1 \odot_{n-1} 1 \odot_{n-1} ... \odot_{n-1} 1}_{m-1 \text{ veces}} \ = \ ... \ = \ 1,$$

debido a la propiedad (1.21). Y para $m = 1$ tenemos

$$1 \circledcirc_n 1 = 1,$$

también debido a (1.21). Es decir, es cierto el siguiente teorema.

Teorema 1.46.
$$\boxed{1 \circledcirc_n m = 1 \odot_n m = 1, n = 3, 4, 5, ...}, \tag{1.33}$$

Teorema 1.47. *Para un codominio natural,*

$$\boxed{1 \circledcirc_{-n} m = 1 \odot_{-n} m = 1,\ n = 3, 4, 5, ...}, \tag{1.34}$$

mas para codominio en general complejo

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} 1 \circledcirc_{-n} m \\ 1 \odot_{-n} m \end{array}\right\} = 1 \cup \{c_j\}, \text{ con los } c_k \in \mathbb{C},\ n = 3, 4, 5, ...}, \tag{1.35}$$

por (1.18), (1.33) y la multivaluación de las operaciones inversas.

Ejemplo 1.48. $1 \odot_3 2 = 1^2 = 1$; *pero* $1 \odot_{-3} 2 = \sqrt[2]{1} = \pm 1$, *mas* $+1 = 1 \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.49. $1 \odot_3 3 = 1^3 = 1$; *pero* $1 \odot_{-3} 2 = \sqrt[3]{1} = 1^3\Big(\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)\Big)$, *k=0,1,2, es decir,* $1 \odot_{-3} 2 = \left\{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right\}$, *mas tomando solo un codominio natural tenemos que* $1 \odot_{-3} 2 = 1$.

En seguida haremos un análisis particular de las n-operaciones 4^a y 5^a y de sus propiedades.

Chapter 2

n-operaciones 4^a y 5^a

2.1 n-operación 4^a

Hasta ahora hemos definido de manera estricta al operante dentro del dominio de los naturales. Lo que sigue es tratar de extender la definición del operante para valores racionales, reales e incluso complejos.

Dada una n-operación $a \odot_n b$, como sabemos, si $n \leq 3$, entonces a y b están perfectamente definidos en el dominio de los complejos. Para $n = 4$, debido a (1.14) a puede ser complejo, pero b se definía hasta ahora como estrictamente natural. Así que si tratamos de generalizar a $b = \frac{m}{n}$, con m, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ y con $m.c.d(m, n) = 1$ (fracción simplificada), entonces la nueva expresión será $a \odot_4 \frac{m}{n}$, la cual se podría definir como $a \odot_4 m \odot_{-4} n$ (tratando de generalizar la definición de las operaciones 2^a y 3^a con exponente fraccionario). Sin embargo se esperaría que se diera la igualdad $a \odot_4 m \odot_{-4} n = a \odot_{-4} n \odot_4 m$ (atendiendo nuevamente a la definición de exponente fraccionario para las operaciones 2ª y 3^a), la cual no es cierta en general. Por ejemplo para el operador 4^o tenemos que $2 \odot_4 3 \odot_{-4} 2 = 16 \odot_{-4} 2 = c$ *t. q.* $c^c = 16$, es decir $c = 2 \odot_4 3 \odot_{-4} 2 = 2.7454$, y por otro lado $2 \odot_{-4} 2 \odot_4 3 = d \odot_4 3$ tal que $d^d = 2$, es decir $d = 1.5596$, por lo que $2 \odot_{-4} 2 \odot_4 3 = 1.5596\,(o\,p\,4)\,3 = 1.5596^{1.5596^2} = 2.947\,7$. Es decir, $2 \odot_4 3 \odot_{-4} 2 \neq 2 \odot_{-4} 2 \odot_4 3$, por lo que ya no parece ser tan buena idea definir de la forma anteriormente planteada a las operaciones $a \odot_4 \frac{m}{n}$.

Así pues, cambiaremos de enfoque. Para ello primeramente veamos de qué forma son las expresiones $a \odot_4 m$, con m natural y a complejo.

$$a \odot_4 m \;=\; \underbrace{a \odot_3 a \odot_3 \ldots \odot_3 a}_{m \text{ veces}} \;=\; \underbrace{(((a^a)^a)^{\cdots})^a}_{m \text{ veces}} \;=\; a^{a^{m-1}}$$

Vemos que para $m = 1$ la fórmula también es válida debido a (1.9). Por lo tanto, basados en dicha fórmula, podemos definir las expresiones siguientes.

Definición 2.1.

$$\boxed{a \odot_4 p = a^{a^{p-1}}\ ,\ a \in \mathbb{C}\ ,\ p \in \mathbb{Q}}; \tag{2.1}$$

además

$$\boxed{a \odot_4 r = a^{a^{r-1}}\ ,\ a \in \mathbb{C}\ ,\ r \in \mathbb{R}}; \tag{2.2}$$

y en general

$$\boxed{z_1 \odot_4 z_2 = z_1^{z_1^{z_2-1}} (\text{valor principal})\ ,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}} \tag{2.3}$$

se define como la 4*-operación principal, y*

$$\boxed{z_1 \circledcirc_4 z_2 = z_1^{z_1^{z_2-1}} (\text{todos los valores})\ ,\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}}, \tag{2.4}$$

se define como la 4*-operación general, de manera análoga a la* ***definición Operaciones monovaluadas y multivaluadas****.*

Definición 2.2. *Y de igual manera, se definen las n-operaciones inversas como*

$$\boxed{z_1 \odot_{-4} z_2 = z_3\, t.\, q.\, z_3 \odot_4 z_2 \equiv z_3^{z_3^{z_2-1}} (\text{valor principal}) = z_1,\ z_j \in \mathbb{C}}, \tag{2.5}$$

y

$$\boxed{z_1 \circledcirc_{-4} z_2 = z_3\, t.\, q.\, z_3 \circledcirc_4 z_2 \equiv z_3^{z_3^{z_2-1}} = \{v_j\}\, t.\, q.\, v_k = z_1,\ z_j, v_j \in \mathbb{C}}, \tag{2.6}$$

de manera análoga a la ***definición 1.18****.*

Teorema 2.3. *Para un dominio real positivo en la base y complejo en el exponente, las n-operaciones de orden no negativo menor a cinco son monovaluadas e inyectivas para distintas bases r y mismos operador n y operante z, donde $r \neq 0$ para el operador 3 y $r \neq 0{,}1$ para el operador 4.*

Solución. *Para las n-operaciones no negativas con $n \leq 2$ la demostración es obvia.*

Para $n = 3$ tenemos que $r \circledcirc_3 z = r^z = e^{z \mathrm{Ln}\, r} = e^{z \ln r}$ (Pues el Ln *es monovaluado en los reales) $=e^{z_1} = z_2$, lo cual es claramente monovaluado. Además, si tenemos $r' \neq r$, entonces $r'^z = e^{z \ln r'} = e^{a'(x+iy)} = e^{a'x}(\cos(a'y) + i \sin(a'y))$, y por otro lado $r^z = e^{ax}(\cos(ay) + i \sin(ay))$; donde $a = \ln r \neq \ln r' = a'$. Por lo tanto $r'^z \neq r^z$, ya que la magnitud de r'^z es $e^{a'x}$, mientras que la de r^z es $e^{ax} \neq e^{a'x}$; además, si $r\prime > r$ (sin pérdida de generalidad), entonces $|r'^z| > |r^z|$.*

Por último, para $n = 4$ se tiene que $r \circledcirc_4 z = r^{r^{z-1}} = r^{z_1}$, donde el exponente $r^{z-1} = z_1 \in \mathbb{C}$ es monovaluado e inyectivo, como ya se demostró en el párrafo anterior, por lo que $r^{r^{z-1}} = r^{z_1}$ también será monovaluado; además, si $r^{r^{z-1}} = r'^{r'^{z-1}}$, entonces, $(x + iy - 1)\mathrm{lnr} + \ln \ln r = (x + iy - 1)\mathrm{lnr}' + \ln \ln r'$, donde $x + iy = z$, por lo que $iy \ln r = iy \ln r'$, i.e. $r' = r$, siendo de esa manera $r \circledcirc_4 z$ inyectivo para $r \neq 0{,}1$, pues $\ln \ln r$ se indefine en esos valores.

Definición 2.4. *Debido a las expresiones (2.3), (2.4), (2.5) y (2.6) vemos que ya podemos definir a expresiones como $z \circledcirc_5 m$, con $z \in \mathbb{C}$ y $m \in \mathbb{N}$, de la forma*

$$\boxed{z \odot_5 m = \underbrace{z \odot_4 z \ldots \odot_4 z}_{m\ veces}}; \tag{2.7}$$

e igualmente definimios a

$$\boxed{z \circledcirc_5 m = \underbrace{z \circledcirc_4 z \ldots \circledcirc_4 z}_{m\ veces}}, \tag{2.8}$$

y, de manera análoga a la ***definición 1.15*** *definimos a las operaciones inversas*

$$\boxed{\begin{array}{c} z \odot_{-5} m = c \text{ tal que } c \odot_5 m = z, \\ z \circledcirc_{-5} m = c \ \text{ t.q. } c \circledcirc_5 m = \{z_j\}\ ,\ t.\, q.\, z_k = z \end{array}}. \tag{2.9}$$

Lo anterior implica que la ***remarcación 1.39*** *se debe modificar por la siguiente remarcación.*

Remarcación 2.5. *Para un operador $n = -5, -4, ..., 4, 5$, la base puede definirse en el dominio complejo. A partir del operador seis en valor absoluto la base solo está definida por ahora como un natural:*

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{si en } a \odot_n b,\ |n| < 6\ ,\ \text{entonces } a \in \mathbb{C}, \\ \text{y si en } a \odot_n b,\ |n| \geq 6\ ,\ \text{entonces } a \in \mathbb{N} \end{array}}. \tag{2.10}$$

Solución. *Para $n \geq 6$ y $a, b \in \mathbb{Z}$, tenemos el problema $a \odot_n b =$!?. Y para $n \leq 5$ están (1.28), (2.7), (2.8) y (2.9).*■

Remarcación 2.6. *Ahora debemos generalizar la* ***remarcación 1.11*** *diciendo que para algunos valores de operando, operante y operador, la operación puede no estar definida*

***Ejemplo* 2.7.** $0\,(op\,4)\,z = 0^{0^{z-1}} = !?$

Ahora procederemos a hacer el análisis de la n-operación quinta.

2.2 n-operación 5^a

Para la quinta operación empezaremos desarrollando algunas definiciones particulares, para observar el patrón y con ello tratar de establecer la fórmula general pero con operante natural.

Teorema 2.8. ***Fórmulas particulares para la operación $5^{\underline{a}}$.*** *Para $z \circledcirc_5 2$, con $z \in \mathbb{C}$, debido a (2.4) tenemos*

$$\boxed{z \circledcirc_5 2 = z \circledcirc_4 z = z^{z^{z-1}} \ \textit{(todos los valores)}}, \tag{2.11}$$

y análogamente, debido a (2.3) tenemos

$$\boxed{z \odot_5 2 = z \odot_4 z = z^{z^{z-1}} \ \textit{(valor principal)}} \tag{2.12}$$

Para $z \odot_5 3$, $z \in \mathbb{C}$, resulta $z \odot_5 3 = z \odot_4 z \odot_4 z = z^{z^{z-1}} \odot_4 z = \left(z^{z^{z-1}}\right)^{\left(z^{z^{z-1}}\right)^{z-1}} = \left(z^{z^{z-1}}\right)^{z^{z^{z-1}\cdot(z-1)}} = z^{z^{z-1}\cdot z^{z^{z-1}\cdot(z-1)}} = z^{z^{(z-1)\cdot z^{z-1}\cdot(z-1)}} = z^{z^{(z-1)^2\cdot z^{z-1}}}$, es decir

$$\boxed{z \odot_5 3 = z^{z^{(z-1)^2\cdot z^{z-1}}} \ \textit{(valor principal)}}. \tag{2.13}$$

Para $z \odot_5 4$, $z \in \mathbb{C}$, usando el resultado anterior tendremos $z \odot_5 4 = z \odot_4 z \odot_4 z \odot_4 z = \left(z^{z^{(z-1)^2\cdot z^{z-1}}}\right) \odot_4 z = \left(z^{z^{(z-1)^2\cdot z^{z-1}}}\right)^{\left(z^{z^{(z-1)^2\cdot z^{z-1}}}\right)^{z-1}} = z^{z^{(z-1)^3\cdot z^{(z-1)^3\cdot z^{z-1}}}}$, por lo que

$$\boxed{z \odot_5 4 = z^{z^{(z-1)^3\cdot z^{(z-1)^3\cdot z^{z-1}}}} \ \textit{(valor principal)}}. \tag{2.14}$$

Análogamente, tenemos que

$$\boxed{z \odot_5 5 = z^{z^{(z-1)^4\cdot z^{(z-1)^6\cdot z^{(z-1)^4\cdot z^{z-1}}}}} \ \textit{(valor principal)}}, \tag{2.15}$$

y

$$\boxed{z \odot_5 6 = z^{z^{(z-1)^5\cdot z^{(z-1)^{10}\cdot z^{(z-1)^{10}\cdot z^{(z-1)^5\cdot z^{z-1}}}}}} \ \textit{(valor principal)}}. \tag{2.16}$$

Así que ya podemos comenzar a ver el patrón, según el cual inducimos que para $m = 2, 3, 4, \ldots$

$$z \odot_5 m = z^{z^{(z-1)^{\mathcal{C}_1^{m-1}}\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_2^{m-1}}\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_3^{m-1}}\cdot^{\cdots^{\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-2}^{m-1}}\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-1}^{m-1}}}}}}}}} \quad \text{(valor principal)}. \tag{2.17}$$

Ahora demostraremos que la fórmula anterior es verdadera por el método de inducción. Para ello primero suponemos que dicha fórmula es cierta para algún m, siendo que ya probamos su veracidad para $m = 2, 3, 4, 5, 6$, y demostraremos que entonces es cierta para $m+1$. Así pues:

$$z \odot_5 (m+1) =$$

$$\left(z^{z^{(z-1)^{\mathcal{C}_1^{m-1}}\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_2^{m-1}}\cdot^{\cdots^{\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-2}^{m-1}}\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-1}^{m-1}}}}}}}}\right)^{\wedge}\left(z^{z^{(z-1)^{\mathcal{C}_1^{m-1}}\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_2^{m-1}}\cdot^{\cdots^{\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-2}^{m-1}}\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-1}^{m-1}}}}}}}}\right)^{z-1}$$

$$= z^{z^{(z-1)^{\mathcal{C}_1^{m-1}}\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_2^{m-1}}\cdot^{\cdots^{\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-2}^{m-1}}\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-1}^{m-1}}}}}}} \cdot z^{z^{(z-1)^{\mathcal{C}_1^{m-1}}\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_2^{m-1}}\cdot^{\cdots^{\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-2}^{m-1}}\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-1}^{m-1}}}}}}}\cdot(z-1)}}$$

$$= z^{z^{(z-1)^{\mathcal{C}_1^{m-1}+\mathcal{C}_0^{m-1}}\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_2^{m-1}+\mathcal{C}_1^{m-1}}\cdot^{\cdots^{\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-2}^{m-1}+\mathcal{C}_{m-3}^{m-1}}\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-1}^{m-1}+\mathcal{C}_{m-2}^{m-1}}\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_m^m}}}}}}}},$$

mas por la fórmula de combinatorias

$$\mathcal{C}_k^n + \mathcal{C}_{k+1}^n = \mathcal{C}_{k+1}^{n+1},$$

del libro de la serie schaum **[3]**, tenemos que el resultado anterior coincide con la fórmula (2.17), pero para $m+1$.

Por otro lado, usando (1.9), tenemos que $z \odot_5 1 = 1$, *i.e.*

$$\boxed{z \odot_5 m = \begin{cases} z^{z^{(z-1)^{\mathcal{C}_1^{m-1}}} \cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_2^{m-1}}} \cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_3^{m-1}}} \cdot^{\cdots^{\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-2}^{m-1}}} \cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-1}^{m-1}}}}}} & \text{(valor principal)}, \ m = 2, 3, 4, \ldots \\ 1, & m = 1 \end{cases}}, \tag{2.18}$$

y

$$\boxed{z \circledcirc_5 m = \begin{cases} z^{z^{(z-1)^{\mathcal{C}_1^{m-1}}} \cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_2^{m-1}}} \cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_3^{m-1}}} \cdot^{\cdots^{\cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-2}^{m-1}}} \cdot z^{(z-1)^{\mathcal{C}_{m-1}^{m-1}}}}}} & \text{(todos los valores)}, \ m = 2, 3, 4, \ldots \\ 1, & m = 1 \end{cases}}. \tag{2.19}$$

Lo que sigue es comenzar a introducir el álgebra y el cálculo en las n-operaciones.

Chapter 3

Cálculo con las n-operaciones

3.1 Funciones

En base a las n-operaciones podemos expresar funciones de formas nuevas, por ejemplo

$$f(z, m, n) = z \odot_n m, \tag{3.1}$$

representa una función $f\colon \mathbb{C} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, donde el dominio para la tercera variable es $n = -5, -4, \ldots, 4, 5$, debido a (2.10). También

$$f_4(r_1, r_2) = r_1 \odot_4 r_2 \tag{3.2}$$

representa a la función $f_4\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Y

$$f_{n_0, m_0}(p) = p \odot_{n_0} m_0 \tag{3.3}$$

representa a la función $f_{n_0, m_0}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, para operante y operador fijos y, operando variable; todos naturales.

A continuación mostraremos dos gráficos de la función (3.2), con dominios $\{.01 \le r_1 \le 5, .01 \le r_2 \le 1.5\}$ y $\{.01 \le r_1 \le 7, .01 \le r_2 \le 2\}$; para ello nos basaremos en la fórmula (2.3).

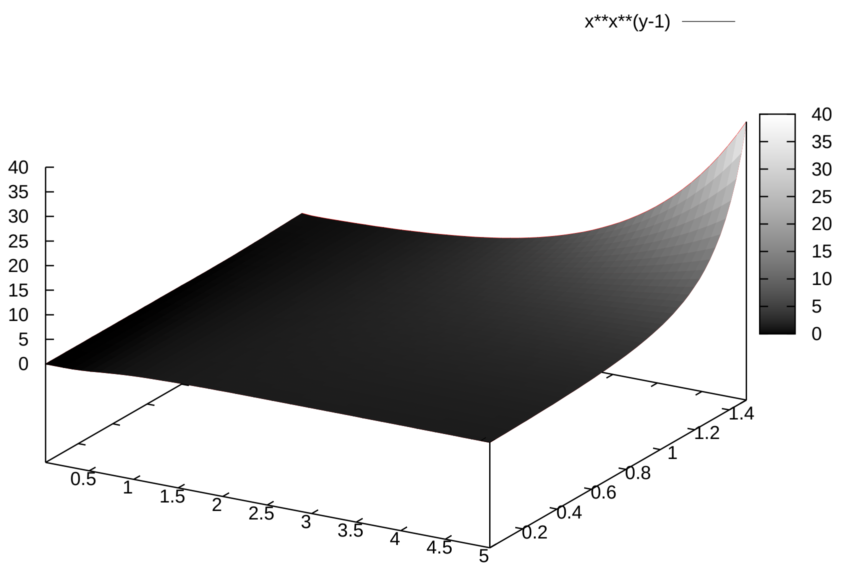

Figura 4.

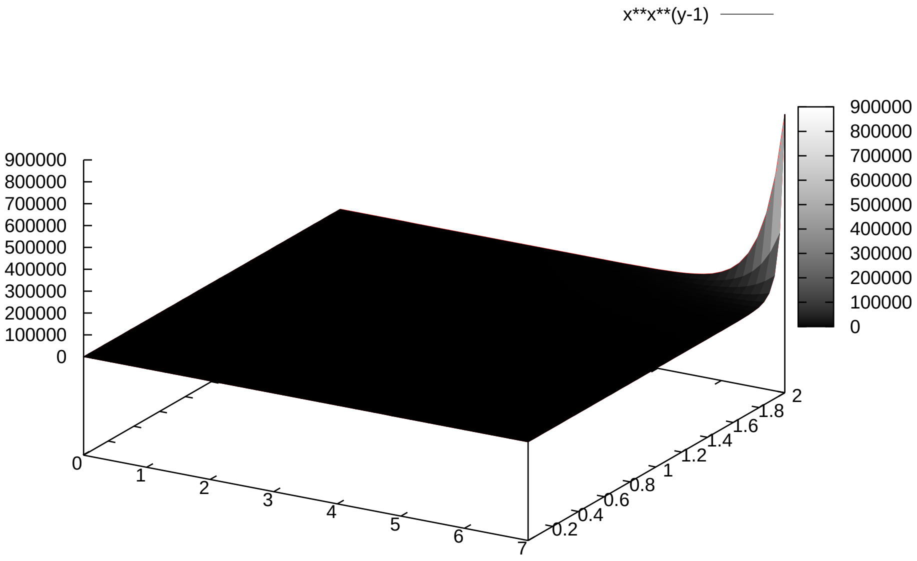

Figura 5.

También podemos definir funciones composición con los operadores, por ejemplo, si $f(x)$ es una función de variable real, entonces

$$e \odot_4 f(x) = e^{e^{f(x)-1}}, \tag{3.4}$$

debido a (2.3). Otro ejemplo es

$$(z+1) \odot_5 2 = (z+1)^{(z+1)^z}, \tag{3.5}$$

donde z es una variable compleja y hemos empleado (2.11).

Ahora trataremos con las funciones analíticas.

3.2 Funciones analíticas

Axioma 3.1. *Para los operadores individuales o combinaciones de ellos, de orden* $n=-3,-2,-1,1,2,3$*, con el operando, el operante o ambos variables en el dominio complejo, obtendremos funciones elementales y por lo tanto analíticas, por lo que en ellas podremos calcular derivadas e integrales de la manera usual* ***[2]***.

***Ejemplo* 3.2.** $2 \odot_3 z = 2^z$*, la cual es una función de variable compleja elemental y por lo tanto analítica.* $x \odot_2 2 \odot_3 y = x \cdot 2^y$*. Otros ejemplos de funciones analíticas son las funciones (3.4) y (3.5).*

Axioma 3.3. *Para operadores de orden* 0 *con operando constante* z_0 *y operante variable* z*, ambos complejos, tendremos la función constante*

$$\boxed{f(z) = z_0 \odot_0 z = z_0}, \tag{3.6}$$

debido a (1.29), la cual es analítica.

Axioma 3.4. *Para operadores de orden* 0 *con operando variable* z *y operante constante* z_0*, ambos complejos, tendremos la función identidad*

$$\boxed{f(z) = z \odot_0 z_0 = z}, \tag{3.7}$$

por (1.29), la cual es analítica.

Axioma 3.5. *Para la operación de orden* 0 *con operando y operante variables complejos, tendremos la función de dos variables*

$$\boxed{f(z_1, z_2) = z_1 \odot_0 z_2 = z_1}, \tag{3.8}$$

la cual es analítica.

Axioma 3.6. *Para la operación cuarta, debido a (2.3) resulta que para operando, operante o ambos variables complejas tenemos una función elemental y por lo tanto analítica.*

Axioma 3.7. *Para la operación quinta, si en ella la base es variable compleja y el exponente es constante natural, debido a (2.7) resultara una función elemental y por lo tanto analítica.*

Axioma 3.8. *Si tenemos combinaciones de las expresiones permitidas en el* ***axioma 3.1*** *y en los* ***axiomas 3.3-3.7****, entonces obtendremos una función elemental y por ende analítica.*

Ejemplo* 3.9.** $z \odot_1 \pi \odot_4 z \odot_3 z = z + \left(\pi^{\pi^{z-1}}\right)^z = z + \pi^{z\pi^{z-1}}$ *(valor principal), debido a la* ***definición Jerarquía de operaciones (Jerarquía de operaciones) *y a (2.3).*

Ahora estudiaremos las derivadas de las funciones analíticas

3.3 Derivadas

En el **axioma 3.1** hemos dicho que podemos calcular las derivadas de la manera usual para operadores $n = -3, -2, -1, 1, 2, 3$.

Por otro lado, debido a (3.6)-(3.8), tendremos el siguiente teorema.

Teorema 3.10. ***Derivadas de la operación cero.***

1	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z_0 \odot_0 z]$	$=$	0
2	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[z \odot_0 z_0]$	$=$	1
3	$\frac{\partial}{\partial z_1}[z_1 \odot_0 z_2]$	$=$	1
4	$\frac{\partial}{\partial z_2}[z_1 \odot_0 z_2]$	$=$	0

Tabla 1

Ahora estableceremos el siguiente teorema.

Teorema 3.11. ***Derivadas de la operación 4.***

1	$\frac{d}{d\,z}[z \odot_4 z_0]$	$=$	$z^{z_0-2}[1 + (z_0 - 1)\ln(z)]\,[z \odot_4 z_0]$
2	$\frac{d}{d\,z}[z_0 \odot_4 z]$	$=$	$z^{z-1}\ln^2(z_0)[z_0 \odot_4 z]$
3	$\frac{\partial}{\partial\,z_1}[z_1 \odot_4 z_2]$	$=$	$z_1^{z_2-2}[1 + (z_2 - 1)\ln(z_1)]\,[z_1 \odot_4 z_2]$
4	$\frac{\partial}{\partial\,z_2}[z_1 \odot_4 z_2]$	$=$	$z_1^{z_2-1}\ln^2(z_1)\,[z_1 \odot_4 z_2]$

Tabla 2

Demostración.

*Debido al **axioma 3.6**, a (2.3) y a las fórmulas de [2]*

$$\frac{d}{d\,x}\,a^{u(x)} = a^u \ln(a)\frac{d\,u}{d\,x}, \tag{3.9}$$

$$\frac{d}{d\,x}\,u(x)^{v(x)} = v\,u^{v-1}\,\frac{d\,u}{d\,x} + u^v \ln(u)\frac{d\,v}{d\,x}, \tag{3.10}$$

(ya muy conocidas) se deriva lo siguiente:

1. $\frac{d}{d\,z}\,[z\odot_4 z_0] = \frac{d}{d\,z}\,z^{z^{z_0-1}} = z^{z_0-1}\cdot z^{z^{z_0-1}-1} + (z_0-1)\,z^{z^{z_0-1}}\ln(z)\cdot z^{z_0-2} = z^{z_0-2}\cdot z^{z^{z_0-1}}[1+(z_0-1)\ln(z)] = z^{z_0-2}[1+(z_0-1)\ln(z)]\,[z\odot_4 z_0]$
2. $\frac{d}{d\,z}\,[z_0\odot_4 z] = \frac{d}{d\,z}\,z_0^{z_0^{z-1}} = z_0^{z_0^{z-1}}\ln(z_0)\cdot z_0^{z-1}\ln(z_0) = z_0^{z-1}\ln^2(z_0)\,[z_0\odot_4 z]$
3. $\frac{\partial}{\partial\,z_1}\,[z_1\odot_4 z_2] = z_1^{z_2-2}[1+(z_2-1)\ln(z_1)]\,[z_1\odot_4 z_2]$, *usando la **demostración 1** de este teorema.*
4. $\frac{\partial}{\partial\,z_2}\,[z_1\odot_4 z_2] = z_1^{z_2-1}\ln^2(z_1)\,[z_1\odot_4 z_2]$, *usando la **demostración 2** de este teorema.*■

3.4 Integrales

Teorema 3.12. *Debido a (3.6) y (3.7) podemos calcular las integrales indefinidas para las siguientes expresiones .*

$$\boxed{\int [z_0(op\,0)\,z]\,\mathrm{d}z = \int z_0 d\,z = z_0 z + C}, \tag{3.11}$$

$$\boxed{\int [z(op\,0)\,z_0]\,\mathrm{d}z = \int z\,d\,z = \frac{1}{2}\cdot z^2 + C}, \tag{3.12}$$

donde C es una constante compleja de integración.

Teorema 3.13. *Ahora presentamos las siguientes dos integrales para la 4-operación.*

$$\boxed{\int [z_0\odot_4 z]\,z_0^{z-1}\mathrm{d}z \;=\; \frac{1}{\ln^2(z_0)}\cdot[z_0\odot_4 z] + C,\, z_0\neq 0\ ,} \tag{3.13}$$

$$\boxed{\int \ln[z\odot_4(z_0)]\mathrm{d}z \;=\; \frac{1}{(z_0)}\ln[z\odot_4(z_0+1)] - \frac{1}{(z_0)^2}\cdot z^{z_0} + C,\ z_0\neq 0\ .} \tag{3.14}$$

Demostración.

- *Por el **axioma 3.6** podemos obtener la integral indefinida de la expresión analítica de la fórmula **2.** de la **tabla 2**, dándonos $\int\ [z_0\odot_4 z]\,z_0^{z-1}\ln^2(z_0)\,d\,z = z_0\odot_4 z + C$, de donde $\int\ [z_0\odot_4 z]\,z_0^{z-1}d\,z = \frac{1}{\ln^2(z_0)}\cdot[z_0\odot_4 z] + C$. Además si en la última fórmula $z_0=0$ tendremos una indefinición.*
- *Manipulando la expresión **1.** de la **tabla 2**, obtenemos $\frac{\frac{d\,[z\odot_4 z_0]}{d\,z}}{[z\odot_4 z_0]} = z^{z_0-2}[1+(z_0-1)\ln(z)]$, es decir $\frac{d\,[z\odot_4 z_0]}{[z\odot_4 z_0]} = z^{z_0-2}[1+(z_0-1)\ln(z)]\,d\,z$, lo cual se puede integrar idefinidamente de acuerdo al **axioma 3.6**, produciendo $\ln[z\odot_4 z_0] + C = \int\ z^{z_0-2}d\,z + \int\ z^{z_0-2}(z_0-1)\ln(z)\,d\,z = \frac{1}{z_0-1}\cdot z^{z_0-1} + (z_0-1)\int\ \ln\left(z^{z^{z_0-2}}\right)d\,z$, de donde despejando resulta $\int\ \ln\left(z^{z^{z_0-2}}\right)d\,z = \frac{1}{(z_0-1)}\ln[z\odot_4 z_0] - \frac{1}{(z_0-1)^2}\cdot z^{z_0-1} + C$, lo que es lo mismo a $\int\ \ln[z\odot_4(z_0-1)]\,d\,z = \frac{1}{(z_0-1)}\ln[z\odot_4 z_0] - \frac{1}{(z_0-1)^2}\cdot z^{z_0-1} + C$, por lo que con el cambio de variable $z_0\to z_0+1$ finalmente obtendremos $\int\ \ln(z\odot_4 z_0)d\,z = \frac{1}{(z_0)}\ln[z\odot_4(z_0+1)] - \frac{1}{(z_0)^2}\cdot z^{z_0} + C$. En esto último se puede ver claramente que dicha fórmula es válida para $z_0\neq 0$, pues para $z_0=0$ tenemos división entre cero.*■

Teorema 3.14. *Como casos particulares especiales de la fórmula (3.14) presentaremos las integrales*

$$\boxed{\int \ln\left[z \odot_4 (-1)\right] \mathrm{d}z \;=\; -\ln\left[z \odot_4 (0)\right] - \frac{1}{z} + C}, \tag{3.15}$$

$$\boxed{\int \ln\left[z \odot_4 (1)\right] \mathrm{d}z \;=\; \ln\left[z \odot_4 (2)\right] - z + C}, \tag{3.16}$$

$$\boxed{\int \ln\left[z \odot_4 (2)\right] \mathrm{d}z \;=\; \frac{1}{2}\ln\left[z \odot_4 (3)\right] - \frac{1}{4} z^2 + C}. \tag{3.17}$$

Teorema 3.15. *Por último, gracias al **axioma 3.6**, presentaremos más integrales para la 4-operación, obtenidas del formulario de la seria Schaum **[3]**, donde ahí aparecen en términos de $z^{z_0}\ln z$, pero aquí se expreserán en términos de $\ln[z \odot_4 z_0]$ mediante la transformación $\ln z^{z^{z_0-1}} = \ln[z \odot_4 z_0]$.*

1	$\int \ln[z \odot_4 0]\mathrm{d}z$	$=$	$\frac{1}{2}\ln^2 z$
2	$\int \ln^2[z \odot_4 1]\mathrm{d}z$	$=$	$\ln^2[z \odot_4 2] - 2\ln[z \odot_4 2] + 2z$
3	$\int \frac{1}{z}\ln^r[z \odot_4 1]\mathrm{d}z$	$=$	$\frac{\ln^{r+1} z}{r+1},\ r \in \mathbb{R}$
4	$\int \frac{\mathrm{d}z}{\ln[z \odot_4 2]}$	$=$	$\ln(\ln z)$
5	$\int \frac{\mathrm{d}z}{\ln[z \odot_4 1]}$	$=$	$\ln(\ln z) + \ln z + \frac{\ln^2 z}{2\cdot 2!} + \frac{\ln^3 z}{3\cdot 3!} + \cdots$
6	$\int \frac{\mathrm{d}z}{\ln[z \odot_4 r]}$	$=$	$\ln(\ln z) + (-r+2)\ln z + (-r+2)^2\frac{\ln^2 z}{2\cdot 2!} + (-r+2)^3\frac{\ln^3 z}{3\cdot 3!} + \cdots,\ r \in \mathbb{R}$
7	$\int \ln^r[z \odot_4 1]\mathrm{d}z$	$=$	$z\ln^r[z \odot_4 1] - r\int \ln^{r-1}[z \odot_4 1]\mathrm{d}z$
8	$\int z^s \ln^r[z \odot_4 1]\mathrm{d}z$	$=$	$\frac{z^{s+1}\ln^r[z \odot_4 1]}{s+1} - \frac{r}{s+1}\int z^s \ln^{r-1}[z \odot_4 1]\mathrm{d}z$

Tabla 3

Ahora veremos ejemplos de ecuaciones diferenciales que pueden surgir aplicando las n-operaciones, y sus soluciones.

3.5 Ecuaciones diferenciales

Con la 4-operación podemos expresar ecuaciones diferenciales de variable real como la siguiente:

$$\boxed{r \odot_4 y' = s,\ \ r, s = \text{ctes reales positivas}}, \tag{3.18}$$

la cual sabemos , debido al **axioma 3.6**, que es una expresión analítica para alguna función $y(x)$ que sea su solución; por lo tanto se pueden hacer integraciones en dicha ecuación y con ello resolverla. Así que, por la **definición 2.2**, tendremos la ecuación equivalente

$$r^{r^{y'-1}} = s,$$

y aplicando logaritmos repetidas veces obtendremos

$$\begin{aligned} r^{y'-1}\cdot \ln r &= \ln s, \\ r^{y'-1} &= \frac{\ln s}{\ln r}, \\ (y'-1)\ln r &= \ln\left(\frac{\ln s}{\ln r}\right), \\ y' &= \frac{1}{\ln r}\cdot \ln\left(\frac{\ln s}{\ln r}\right) + 1, \end{aligned} \tag{3.19}$$

de donde

$$\boxed{y=\left[\frac{1}{\ln r}\cdot\ln\left(\frac{\ln s}{\ln r}\cdot\right)+1\right]\cdot x+C}, \tag{3.20}$$

siendo $C=$cte de integración.

Note 3.16. En las ecuaciones diferenciales siguientes tendremos de igual manera debido al **axioma 3.6** expresiones analíticas y por lo tanto integrables.

Otra ecuación más general es la siguiente:

$$\boxed{r\odot_4 y'=f(x),\ \ r=\text{cte}},$$

la cual se resuelve de manera análoga a la anterior, para así obtener finalmente

$$\boxed{y=\frac{1}{\ln r}\int\ \ln\left(\frac{\ln f(x)}{\ln r}\cdot\right)\mathrm{d}x+x}, \tag{3.21}$$

o de manera equivalente

$$\boxed{y=\frac{1}{\ln r}\left[\int\ \ln\ln f(x)\mathrm{d}x-(\ln\ln r)x\right]+x}, \tag{3.22}$$

donde debe resolverse analíticamente para cada problema concreto la integral $\int\ \ln\left(\frac{\ln f(x)}{\ln r}\cdot\right)\mathrm{d}x$ o la integral $\int\ \ln\ln f(x)\mathrm{d}x$, según como resulte más fácil, o pueden emplearse métodos o numéricos.

Por ejemplo, para

$$\boxed{f(x)=e^x} \tag{3.23}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\ln r}\left[\int\ \ln\ln e^x\mathrm{d}x-(\ln\ln r)x\right]+x,\\ &= \frac{1}{\ln r}\left[\int\ \ln x\mathrm{d}x-(\ln\ln r)x\right]+x,\\ &= \frac{1}{\ln r}[x\ln(x)-x-(\ln\ln r)x]+x+C,\end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{y=\left\{\frac{1}{\ln r}[\ln(x)-1-(\ln\ln r)]+1\right\}x+C}. \tag{3.24}$$

Otro ejemplo es con

$$f(x)=e^{x^2},$$

en donde, con un procedimiento análogo al caso anterior, obtendremos finalmente

$$\boxed{y=\left\{\frac{1}{\ln r}\cdot[2(\ln x-1)-\ln\ln r]+1\right\}x+C}. \tag{3.25}$$

Otra ecuación aún más general es

$$\boxed{g(x)\odot_4 y'=f(x)}, \tag{3.26}$$

en donde, aplicando la fórmula (3.19), pero con funciones en lugar de constantes, llegamos a

$$\boxed{y=\int\ \frac{\ln\frac{\ln f(x)}{\ln g(x)}}{\ln g(x)}\mathrm{d}x+x}. \tag{3.27}$$

Por ejemplo, para

$$\boxed{f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\ \text{y}\ g(x)=e^x}, \tag{3.28}$$

resultará la expresión

$$\begin{aligned}
y &= \int \frac{\ln\left(\frac{\ln\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)}{\ln e^x}\right)}{\ln e^x}\mathrm{d}x + x \\
&= \int \frac{\ln\left(\ln\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)\right) - \ln\ln e^x}{\ln e^x}\mathrm{d}x + x \\
&= \int \frac{\ln\left(\frac{x^2}{2}\right) - \ln x}{x}\mathrm{d}x + x \\
&= \int \frac{2\ln x - \ln x - \ln 2}{x}\mathrm{d}x + x \\
&= \int \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{\ln 2}{x}\mathrm{d}x + x
\end{aligned}$$

es decir,

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\ln^2 x - (\ln 2)\cdot \ln x + x + C}. \tag{3.29}$$

Otro tipo de ecuación diferencial, esencialmente distinta a las anteriores, es la ecuación

$$\boxed{y \odot_4 y' = f(x)}, \tag{3.30}$$

la cual, por la **definición 2.1** es equivalente a

$$y^{y^{y'-1}} = f(x),$$

$i.e$ aplicando logaritmos de manera análoga al primer caso, llegamos a una expresión similar a la ecuación (3.19), es decir

$$\boxed{y' \;=\; \frac{1}{\ln y}\cdot \ln\left(\frac{\ln f(x)}{\ln y}\cdot\right) + 1}, \tag{3.31}$$

la cual en general es una ecuación muy difícil de resolver analíticamente, mas siempre existe la alternativa de los métodos numéricos.

Y en general, las ecuaciones diferenciales donde intervienen n-operaciones de orden mayor a tres son muy difíciles de resolver, ya que se trata de ecuaciones diferenciales no lineales con expresiones complejas, mas siempre está la opción práctica de los métodos numéricos.

Note 3.17. Para resolver las integrales de esta sección se utilizaron las fórmulas de integrales logarítmicas del libro de la serie schaum **[3]**.

Bibliography

[1] Erwin Kreiszig, Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería, Limusa-Noriega, México, D.F., 1990.

[2] I Bronshtein, K Semendiaev, Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes, Ediciones de Cultura Popular, México, 1977.

[3] Murray R. Spiegel, John Liu, Lorenzo Abellanas, Fórmulas y tablas de Matemática aplicada, Serie de Compendios Schaum, McGraw-Hill/Interamericana de España, Madrid, 2005.