A deflexão da luz pelo Sol. O cálculo de Einstein em 1916
(The deflection of light by the sun. The Einstein's calculation in 1916)

Valdir Monteiro dos Santos Godoi

valdir.msgodoi@gmail.com

1. Introdução

É bastante previsível que encontremos problemas no cálculo do desvio da luz ao passar nas proximidades do Sol, conforme feito por Einstein. Einstein obteve um valor em 1911[1] e o dobro deste valor em 1916[2], mas ao olharmos um e outro artigo ficamos sem condições de entender o que está errado em um e certo no outro, ou se ambos estão errados. Analisaremos aqui o segundo artigo, mais elaborado, completo, que dá o valor considerado correto: 1'',75. Em próximo artigo calcularemos este desvio segundo a teoria newtoniana, que é tido como igual a 0'',875, a metade do valor da Relatividade.

O mais importante aqui é a percepção da necessidade de se efetuarem mais verificações experimentais da deflexão da luz pelo Sol. Não bastaria apenas comparar posições de estrelas próximas ao Sol na ocorrência de um eclipse com as respectivas posições separadas por 6 meses. Devemos comparar as posições das estrelas também em dois momentos separados por 6 meses, mas agora na ausência de eclipses do Sol em ambas as datas. E quando houver os eclipses solares, comparar as posições destas estrelas nos eclipses também com relação aos dias (noites) anteriores ou posteriores. Somente assim teremos mais dados para concluir sobre a influência de uma massa M na passagem da luz próxima a ela.

2. O cálculo

No § 4 de [2] Einstein assume para a coordenada temporal x_4 uma unidade de medida tal que a velocidade da luz no vácuo, medida no sistema de coordenadas considerado local, seja igual a 1. Esta unidade especial de velocidade, assim, é c vezes menor que a unidade de velocidade habitualmente considerada, 1 m/s, para c = 299 792 458 (o valor da velocidade da luz no sistema MKS).

Nesta nova unidade, c' = 1 m'/s' deve ser a maior velocidade possível, no vácuo e na ausência de campos de gravidade, onde m' e s' devem ser os novos metros e segundos (unidades de distância e tempo), respectivamente, compatíveis com a nova unidade de velocidade. Este é um assunto pouco (ou nada) explorado nos textos de

Relatividade: não se pode alterar uma unidade composta sem alterar ao menos uma das unidades componentes.

No § 21 de [2], onde trata-se da teoria de Newton como primeira aproximação da Relatividade Geral, Einstein obtém para o potencial gravítico (em primeira ordem de aproximação)

$$V = -\frac{\chi}{8\pi}\int \frac{\rho d\tau}{r}, \qquad (1)$$

sendo χ uma constante.

Segundo a teoria newtoniana este mesmo potencial deve ser

$$V = -G\int \frac{\rho d\tau}{r}, \qquad (2)$$

na unidade convencional. Se o tempo está na nova unidade s’ e a unidade da constante G no sistema MKS é $m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$, podemos fazer 1 s = c s’ e 1 m = 1 m’, portanto

$$V = -\frac{G}{c^2}\int \frac{\rho d\tau}{r} \qquad (3)$$

é o valor do potencial gravitacional newtoniano na nova unidade temporal adotada por Einstein.

Igualando (1) e (3) obtemos

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^2} = 1{,}8664 \times 10^{-26}, \qquad (4)$$

usando o nosso valor habitual da velocidade da luz e $G = 6{,}674287 \times 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$. Entendamos então, e isto é importante, que os potenciais (2) e (3), se diferem, é porque não estão nas mesmas unidades de medidas.

No § 22 Einstein fornece os valores dos coeficientes $g_{\rho\sigma}$, em primeira ordem de aproximação (mais uma vez, pode-se ver que as “confirmações” experimentais da Relatividade Geral se fazem em primeira ordem de aproximação da teoria),

$$\begin{cases} g_{\rho\sigma} = -\delta_{\rho\sigma} - \alpha\frac{x_\rho x_\sigma}{r^3}\ (1 \le \rho, \sigma \le 3) \\ g_{\rho 4} = g_{4\rho} = 0\ (1 \le \rho \le 3) \\ g_{44} = 1 - \frac{\alpha}{r} \end{cases} \qquad (5)$$

sendo $\delta_{\rho\sigma}$ o delta de Kronecker, r a distância espacial

$$r = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \qquad (6)$$

e

$$\alpha = \frac{\chi M}{4\pi} = 2\frac{GM}{c^2} \qquad (7)$$

é o raio de Schwarzschild, onde M é a massa do corpo que gera o campo gravitacional.

Continuando, e este § 22 é o último de [2], Einstein passa a investigar a influência que o corpo de massa M exerce sobre as propriedades métricas do espaço.

Deve ser válida a relação

$$ds^2 = g_{\mu v} dx_\mu dx_v \qquad (8)$$

que existe entre os comprimentos e tempos medidos localmente (ds) e as diferenças de coordenadas (dx_v). Usa-se, evidentemente, a convenção da soma.

Para a marcha dos raios luminosos num campo gravitacional estático, a velocidade da luz será dada pela equação

$$ds^2 = g_{\mu v} dx_\mu dx_v = 0. \qquad (9)$$

Convém mencionar que (9), de fato, só poderá valer para o movimento da luz. Não tem sentido algum, por exemplo, usá-la no estudo de um movimento de planetas, ou pior, no movimento de um automóvel na Terra. O que poderia significar a equação $ds = 0$?

De (9) e (5) podemos obter as quantidades $\frac{dx_1}{dx_4}$, $\frac{dx_2}{dx_4}$, $\frac{dx_3}{dx_4}$, componentes do vetor velocidade, e também a velocidade γ da luz (valendo $0 \le \gamma \le 1$)

$$\gamma = \sqrt{(\frac{dx_1}{dx_4})^2 + (\frac{dx_2}{dx_4})^2 + (\frac{dx_3}{dx_4})^2}, \qquad (10)$$

novamente em primeira ordem de aproximação, pois neste caso despreza-se os coeficientes $g_{\mu v}$ para $\mu \neq v \neq 4$, mantendo-se os coeficientes $g_{\mu\mu} \approx -1$, $1 \le \mu \le 3$, $g_{44} \approx 1$, e onde se assume implicitamente que $r \gg 1$.

Dividindo (9) por dx_4^2 obtemos então

$$g_{11}(\frac{dx_1}{dx_4})^2 + g_{22}(\frac{dx_2}{dx_4})^2 + g_{33}(\frac{dx_3}{dx_4})^2 = -g_{44}. \qquad (11)$$

Para o movimento da luz no plano x_1x_2 e “inicialmente” paralelo ao eixo x_2 consideramos $dx_3 = 0$ e assumimos também que a componente da velocidade da luz sobre o eixo x_1 é muito próxima de zero, ao contrário da componente sobre o eixo x_2, i.e., $\frac{dx_1}{dx_4} \approx 0$, ou ainda

$$g_{11}(\frac{dx_1}{dx_4})^2 + g_{22}(\frac{dx_2}{dx_4})^2 \approx g_{22}(\frac{dx_2}{dx_4})^2. \qquad (12)$$

Sendo assim, (11) pode ser aproximado por

$$g_{22}(\frac{dx_2}{dx_4})^2 = -g_{44} \qquad (13)$$

ou, igualando a componente x_2 da velocidade da luz à velocidade γ da luz,

$$\gamma^2 = \frac{-g_{44}}{g_{22}} = \frac{1-\frac{\alpha}{r}}{1+\alpha\frac{x_2^2}{r^3}}. \qquad (14)$$

A expansão de (14) em uma série de Taylor de duas variáveis até a primeira ordem (novamente a primeira ordem),

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy, \qquad (15)$$

dá então

$$\gamma \approx \sqrt{\frac{-g_{44}}{g_{22}}} \approx 1 - \frac{\alpha}{2r}(1 + \frac{x_2^2}{r^2}). \qquad (16)$$

Recorrendo agora ao princípio de Huyghens para determinar a curvatura (ou ângulo de deflexão por unidade de percurso) que um raio de luz adquire quando passa à distância Δ de uma massa M, se n for uma direção perpendicular à direção de propagação da luz esta deflexão é igual a

$$\frac{dB}{dx} = -\frac{\partial \gamma}{\partial n}. \qquad (17)$$

Para o movimento da luz numa região de dimensões astronômicas, (17) fornecerá o valor total desta deflexão integrando-se através dos limites de percurso da luz, da sua emissão na estrela até a posição do observador, e supondo-se a massa M na origem das coordenadas.

Einstein assume que estrela e observador estão infinitamente afastados do Sol e integra (17), obtendo o ângulo de deflexão total (considerado positivo quando a concavidade da curva fica voltada para a origem, onde está a massa)

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} dx_2 = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{4GM}{c^2\Delta} \approx 8{,}488 \cdot 10^{-6} rad \approx 1'',75 \quad (18)$$

para o valor de γ obtido em (16), r dado por (6) e as constantes

G = 6,674287 x 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}
M = 1,989 x 10^{30} kg
c = 299 792 458 m s^{-1}
Δ = 6,96342 x 10^8 m

onde Δ é o raio do Sol, mais exatamente a distância em que os raios de luz emitidos da estrela passam do centro do Sol.

Não bastassem os termos de segunda ordem anteriormente eliminados, em mais de uma ocasião, também se deixa liberdade infinita para as distâncias das estrelas, e em especial para a distância da Terra, ao Sol. Seria possível supor que neste raciocínio estrela e observador deveriam estar simétrica e infinitamente afastados do Sol, mas também é possível provar, calculando a integral através de limites finitos, que mesmo com limites mais realísticos o valor obtido está de acordo com (18). É o que faremos na próxima seção.

Todas estas "estratégias" foram usadas para facilitar os cálculos, tirando do caminho tudo que é mais complicado, mas não foi dada nenhuma prova de que tal procedimento não conduzirá a resultados errados, a conclusões indevidas. Certamente não seria o trabalho de um matemático rigoroso, nem de físicos com viés matemático, físico-matemáticos.

3. A integração

Vamos agora integrar explicitamente a expressão indicada em (18) com a ajuda do manual de Spiegel[3], a fim de entendê-la com mais detalhes.

Usando γ dado por (16) obtemos

$$-\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} = \frac{\alpha}{2} x_1 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2} + \\ + \frac{3\alpha}{2} x_1 x_2^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-5/2} \quad (19)$$

Definindo

$$I_1 = \int (x_1^2 + x_2^2)^{-3/2} \, dx_2 \quad (20)$$

e

$$I_2 = \int x_2^2 (x_1^2 + x_2^2)^{-5/2}\, dx_2, \tag{21}$$

fazendo o movimento da luz em $x_3 = 0$ e no plano x_1x_2 temos

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} dx_2 = \frac{\alpha}{2} x_1 (I_1 + 3I_2). \tag{22}$$

Para calcular I_1 usamos a fórmula (14.196) de Spiegel[3],

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}, \tag{23}$$

e então (a menos da constante aditiva)

$$I_1 = \frac{x_2}{x_1^2\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{x_2}{x_1^2 r}. \tag{24}$$

Para obter I_2 usamos a fórmula (14.142) de Spiegel[3],

$$\int \frac{x^m dx}{(x^2+a^2)^n} = \int \frac{x^{m-2} dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - a^2 \int \frac{x^{m-2} dx}{(x^2+a^2)^n}, \tag{25}$$

donde, para m = 2 e n = 5/2,

$$I_2 = \int \frac{dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}} - x_1^2 \int \frac{dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^{5/2}} = I_1 - x_1^2 I_3. \tag{26}$$

Para a segunda integral de (26),

$$I_3 = \int \frac{dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^{5/2}}, \tag{27}$$

usamos a fórmula (14.139) de Spiegl[3],

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}. \tag{28}$$

Fazendo n = 5/2 em (28) obtemos

$$I_3 = \frac{x_2}{3x_1^2 (x_1^2+x_2^2)^{3/2}} + \frac{2}{3x_1^2} \int \frac{dx_2}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}} = \frac{x_2}{3x_1^2 r^3} + \frac{2}{3x_1^2} I_1. \tag{29}$$

Então, a partir de (22) e com o uso de (24), (26) e (29), obtemos a seguinte integral indefinida (a menos da constante aditiva):

$$I = \int -\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} dx_2 = \frac{\alpha}{2} x_1 (I_1 + 3I_2) = \frac{\alpha}{2} x_1 (4I_1 - 3x_1^2 I_3) \quad (30)$$
$$= \frac{\alpha}{2} x_1 \left(2I_1 - \frac{x_2}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^{\frac{3}{2}}} \right) = \alpha \frac{x_2}{r} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{2} \frac{x_1}{r^2} \right).$$

Para $|x_2| \gg x_1$ vale $r \to |x_2|$ e $\frac{x_2}{r} \to sgn(x_2)$, onde $sgn(x)$ é o sinal de x,

$$sgn(x) = \begin{cases} +1, x > 0 \\ -1, x < 0 \\ 0, \ x = 0 \end{cases} \quad (31)$$

e assim obtemos para (30)

$$I \to \frac{\alpha}{x_1} sgn(x_2) - \frac{1}{2} \alpha \frac{x_1}{x_2^2} sgn(x_2). \quad (32)$$

Fazendo com que os limites de integração sejam $-\infty$ e $+\infty$ temos então

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} dx_2 = I(x_2 \to +\infty) - I(x_2 \to -\infty) = \frac{2\alpha}{x_1}, \quad (33)$$

conforme (18) para $x_1 = \Delta$ e $\alpha = 2\frac{GM}{c^2}$.

Obtemos o mesmo valor para a declinação B se os extremos de integração não são simétricos, mas ainda infinitos, i.e.,

$$B = lim_{d \to +\infty, k>0} \int_{-kd}^{+d} -\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} dx_2 = \frac{2\alpha}{x_1}, \quad (34)$$

como é fácil de ver em (32).

Se os extremos de integração em (18) são finitos e simétricos obtemos de (30)

$$B = \int_{-D}^{+D} -\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} dx_2 = \alpha \frac{D}{\sqrt{D^2+x_1^2}} \left(\frac{2}{x_1} - \frac{x_1}{D^2+x_1^2}\right). \quad (35)$$

Para D = 1,496 x 10^{11} m, a distância média Terra-Sol, e $x_1 = \Delta$ = 6,96342 x 10^8 m, o raio médio do Sol, obtemos também B ≈ 1'',75 em (35), o mesmo ocorrendo para

$$B = \int_{-pD}^{+D} -\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} dx_2 \approx 1'', 75 \quad (36)$$

com p ≥ 0,20, aproximadamente.

Notamos nestes cálculos que $x_1 = \Delta$ é mantido fixo durante toda a integração, após a derivação parcial de γ em relação a x_1, $\frac{\partial \gamma}{\partial x_1}$, ou seja, no cálculo de Einstein a luz parte de $(\Delta, -\infty, 0)$ e vai a $(\Delta, +\infty, 0)$, mas tal procedimento traz implícito que não poderia haver desvio da luz, ou este seria completamente desprezível.

Para um pequeno desvio $\delta\Delta$ da luz é compreensível não se preocupar com essa diferença no percurso total, se o percurso é pequeno, mas já que integramos de $-\infty$ a $+\infty$ qualquer desvio $\delta\Delta$ mensurável, não nulo, não infinitesimal, produziria um desvio infinitamente grande em relação a $x_1 = \Delta$. Ou seja, não podemos considerar, despreocupadamente, que o Sol e o observador, bem como a estrela e o Sol, ora estão infinitamente distantes entre si, ora estão na distância astronomicamente correta.

Outro problema que ocorre é quando a luz está cruzando com o eixo x_1, i.e., está tangenciando a borda do Sol em $(\Delta, 0, 0)$. Nesta posição, por simetria, ela já deveria ter completado 50% de seu desvio total, o que ocasionaria a colisão deste fóton com o Sol, e não chegaria ao observador da Terra. Mas, como se diz na Física, varre-se tudo isso para debaixo do tapete.

Vamos então admitir, algo mais razoável, que a deflexão sofrida pela luz ocorra apenas nas imediações da sua passagem pela massa M (ou o Sol). Alcançada a deflexão total, sem ter colidido com o Sol em nenhum momento neste modelo simplificado, a luz seguiria em linha reta sua trajetória, até o observador.

Se B é o ângulo de deflexão e D é a distância do observador ao Sol então por trigonometria simples podemos estimar qual seria o deslocamento $\delta\Delta$ que a luz teria em relação ao observador:

$$\delta\Delta \approx D \text{ tg } B. \tag{37}$$

Sendo B o ângulo de 1'',75 ($\approx 8{,}488 \times 10^{-6}$ rad) obtido em (18) e D a distância da Terra ao Sol ($D_{TS} = 1{,}496 \times 10^{11}$ m) obtemos

$$\delta\Delta \approx 1\,269\,805 \text{ m}. \tag{38}$$

Subtraindo do valor de D os raios da Terra ($R_T = 6{,}371 \times 10^6$ m) e do Sol ($R_S = 6{,}96342 \times 10^8$ m) obtemos, para melhor estimativa,

$$\delta\Delta \approx (D_{TS} - R_T - R_S) \text{ tg } B \approx 1\,263\,840 \text{ m}, \tag{39}$$

próximo de 20% do raio da Terra, ou seja, um deslocamento (paralelo ao eixo x_1) bastante significativo, muito superior à largura de um olho humano, e mesmo de uma lente telescópica, radar, etc. Não é possível portanto concluir que foi o mesmo raio de luz (ou o correspondente fóton) que se desviou de um ângulo B em relação à posição que seria visto (ou medido), pelo mesmo observador (ou equipamento), na ausência da massa M (o Sol).

4. Conclusão

Vimos que

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} dx_2 \approx lim_{d\to+\infty,k>0} \int_{-kd}^{+d} -\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} dx_2 \qquad (40)$$
$$\approx \int_{-D}^{+D} -\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} dx_2 \approx \int_{-pD}^{+D} -\frac{\partial\gamma}{\partial x_1} dx_2 \approx 1'', 75$$

onde D é a distância Terra-Sol e p $\geq$ 0,20, aproximadamente, mas chama-nos a atenção que a confirmação experimental deste valor envolve a comparação de posições em duas datas diferentes, separadas por 6 meses[4]. Neste período de tempo é possível que os movimentos da Terra ou das estrelas influenciem nas medidas, talvez de maneira ainda hoje desconhecida. Por exemplo, a paralaxe anual da estrela *Próxima Centauri* é de 0'',765, embora a de estrelas mais afastadas seja menor. Isto já mostra, entretanto, que as chamadas *estrelas fixas* não são assim tão *fixas*, e que seria necessário repetir medições mais apuradas das posições das estrelas separadas por 6 meses, desta vez na ausência de eclipses solares, e também longe do Sol, para que novas análises possam ser efetuadas. Também deveríamos comparar a posição das estrelas não apenas no momento do eclipse, mas também em um dia (noite) posterior ou anterior a este eclipse. Assim poderemos ter mais dados para concluir sobre a influência de uma massa M na passagem da luz próxima a ela.

Em [5] vimos uma tabela extraída de [6] com dados sobre a declinação da luz de estrelas na passagem das proximidades do Sol. Vemos nesta tabela que em 21/09/1922, na Austrália, mais de 60 estrelas foram analisadas, chegando a um máximo de 145 estrelas. Embora eu não seja astrônomo, considero difícil que se encontre visualmente até 145 estrelas nas "proximidades" do Sol, mais exatamente visualizadas nas proximidades externas da borda do Sol. E se boa parte destas estrelas estavam mais afastadas do Sol o desvio da luz deveria ser menor que o valor considerado correto, de 1'',75, já que de (18) temos que este desvio é inversamente proporcional à distância Δ. Sendo assim, o ângulo de deflexão esperado para a luz das estrelas não é "sempre" de 1'',75, mas valores menores ou iguais a este, variando conforme a distância da luz ao centro do Sol. Na URSS, em 19/06/1936, foi obtido um desvio médio de (2,73 ± 0,31)'', com fotografias de 16 a 29 estrelas, o que contraria bastante a previsão da Relatividade Geral.

Vale lembrar que se o extremo inferior das integrais anteriores for igual a zero obteremos a metade de 1'',75, ou 0'',875, para o valor de B, devido à paridade do integrando. Ou seja, podemos supor que o Sol, sozinho, já é capaz de desviar qualquer raio de luz próximo a ele deste ângulo de 0'',875, inclusive a sua própria luz, sem a necessidade de ter mais nenhuma outra estrela visível na sua vizinhança. Claro que durante um eclipse solar este desvio deve ser ocultado pela passagem da Lua, e assim não poderemos observá-lo.

Referência Bibliográficas

1. Einstein, A., *Sobre a Influência da Gravidade na Propagação da Luz*, em Textos Fundamentais da Física Moderna, vol. I, O Princípio da Relatividade, trad. Annalen der Physik **35** (1911). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian (1983).
2. Einstein, A., *Os Fundamentos da Teoria da Relatividade Geral*, em Textos Fundamentais da Física Moderna, vol. I, O Princípio da Relatividade, trad. Annalen der Physik **49** (1916). Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian (1983).
3. Spiegel, M.R., *Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas*, coleção Schaum. São Paulo: McGraw-Hill (1973).
4. Weinberg, S., *Sonhos de uma Teoria Final*. Rio de Janeiro: ed. Rocco (1996).
5. Godoi, V.M.S., *A deflexão da luz pelo Sol – Revendo seus valores*, www.vixra.org/1411.0083 (2014).
6. Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, p. 193. New York: John Wiley & Sons, Inc. (1972).