

文章编号: 1001-0920(0000)00-0000-00

## DS证据理论研究进展及相关问题探讨

韩德强<sup>1</sup>, 杨艺<sup>2</sup>, 韩崇昭<sup>1</sup>

- (1. 西安交通大学 智能网络与网络安全教育部重点实验室 电子与信息工程学院 综合自动化所, 西安 710049;
2. 西安交通大学 机械结构强度与振动国家重点实验室 航天航空学院, 西安 710049)

**摘要:** 在对证据理论的建模、推理、决策到评估各层面最新进展梳理的基础上, 对证据理论现有研究中存在的一些问题、混淆和误解结合仿真算例进行了分析和探讨, 包括证据理论与概率论的关系, 证据冲突及反直观结果的关系, 证据距离的定义以及证据理论的评价准则问题等. 最后对未来证据理论的发展方向进行了展望. 本文旨在为读者正确理解和使用证据理论提供参考和借鉴作用.

**关键词:** 证据理论; 反直观; 冲突; 证据距离; 概率论

**中图分类号:** TP181

**文献标识码:** A

### Advances in DS evidence theory and related discussions

HAN De-qiang<sup>1</sup>, YANG Yi<sup>2</sup>, HAN Chong-zhao<sup>1</sup>

- (1. Ministry of Education Key Lab for Intelligent Networks and Network Security, Institute of Integrated Automation, School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049 China;
2. State Key Laboratory for Strength and Vibration of Mechanical Structures, School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049 China. Correspondent: YANG Yi, E-mail: jiafeiyi@mail.xjtu.edu.cn)

**Abstract:** Based on the review of the development and recent advances in model, reasoning, decision and evaluation in evidence theory, some analyses and discussions on some problems, confusions and misunderstandings in evidence theory are provided together with some related numerical examples in this paper. The relations between evidence theory and probability theory, the evidence conflict and related counter-intuitive results, some definitions on distance of evidence and the evaluation criteria in evidence theory are covered in this paper. The future developing trends of evidence theory are also analyzed. This paper aims to provide reference for the correctly understanding and using of evidence theory.

**Key words:** Evidence theory; Counter-intuitive; Conflict; Distance of evidence; Probability theory

## 1 引言

Dempster-Shafer(DS)证据理论产生自上世纪六十年代. Dempster年提出了集值映射的概念 [1], 并诱导和定义了上、下概率. 上世纪七十年代, Shafer用信度函数对上、下概率重新进行了诠释, 创立了“证据的数学理论” [2]. Dempster还定义了著名的Dempster证据组合规则. 由于该理论中的最基本概念之一即为信度函数, 因此也被称作信度函数理论.

上世纪七八十年代, DS证据理论被引入人工智能领域 [3], 涌现了许多相关的理论和应用研究. 其中Smets提出了推理与决策双层结构的可传递信任模型(Transferable Belief Model, TBM) [4], 切断了概率与信度函数之间的关联, 完全基于信度函数描述不确定性. 近年来还出现了许多其他相关理论与方法, 如DSmT理论等 [5]. 还有学者将模糊集与证据理论相结合进行研究 [6]. 我国从上世纪80年代也逐步开展了证据理论的研究工作 [7,8], 后续出版的多部信息融

收稿日期: 2013-04-26; 修回日期: 2013-10-10.

**基金项目:** 国家重点基础研究发展计划(973)项目课题(No. 2013CB329405); 国家自然科学基金(No. 61104214, No. 61203222); 国家自然科学基金创新群体(No. 61221063); 教育部博士点基金(No. 20120201120036); 中国博士后科学基金特别资助(No. 201104670); 中央高校基本科研业务费专项资金资助(No. xjj2012104).

**作者简介:** 韩德强(1980—), 男, 副教授, 博士(后), 从事信息融合、不确定性推理与模式识别等研究; 杨艺(1980—), 女, 博士, 讲师, 从事遥感图像处理、证据理论等研究.

合专著 [9~12]都对证据理论做了专门介绍.

证据理论作为一种不确定性推理方法,为决策级不确定信息的表征与融合提供了强有力的工具,在信息融合、模式识别、和决策分析等领域得到了广泛应用 [13~15].在目前随机集理论 [9]特别是其方法层面还远未完善的情况下,证据理论是未来研究随机集的重要方法和途径之一.

本文首先对证据理论从建模、推理、决策到评估各层面最新进展进行梳理;其次,对现有研究中存在的种种误解、混淆等进行了分析探讨.结合一些简明算例对相关问题进行分析,旨在为证据理论的正确理解和应用提供一定的借鉴作用.最后对未来的发展方向进行了展望.

## 2 证据理论概要

辨识框架是证据理论中最基本的概念,取决于我们能知道什么和想知道什么.任一关注命题都对应于辨识框架 $\Theta$ 的一个子集.若(1)式成立 [2, 9],则称 $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ 为 $\Theta$ 上的基本信度赋值(Basic Belief Assignment, BBA),也称为mass函数:

$$m(\emptyset) = 0, \sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1 \quad (1)$$

$2^\Theta$ 表示 $\Theta$ 的幂集(powerset),即 $\Theta$ 所有子集所构成的集合.信任函数(Bel)和似真函数(Pl)定义为 [2, 9]:

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B), \forall A \subseteq \Theta \quad (2)$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad (3)$$

对于辨识框架 $\Theta$ 中的命题(或事件) $A$ ,可构成信度区间 $[Bel(A), Pl(A)]$ 用于描述命题 $A$ 发生可能性的取值范围.即,证据理论是利用信度区间来描述命题不确定性(Uncertainty).证据理论中的 $m(\Theta) \in [0, 1]$ ,即全集的mass赋值用于描述未知性(不知道).因此证据理论能够区分“不确定”和“不知道”.需要指出的是依据概率公理,全集的概率总为,即 $P(\Theta) = 1$ .

基于Dempster规则 [2, 9]可获取独立证据 $m_1, m_2$ 的组合或融合结果:

$$m(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \frac{\sum_{A_i \cap B_j = A} m_1(A_i)m_2(B_j)}{1-K}, & A \neq \emptyset \end{cases} \quad (4)$$

其中 $K = \sum_{A_i \cap B_j = \emptyset} m_1(A_i)m_2(B_j)$ 为冲突项.多个证据组合时,Dempster规则满足结合律和交换律,这有利于信息融合系统的分布式实现.该规则有时被误称为Dempster-Shafer组合规则.实际上该规则是Dempster最先独立提出的,准确的名称应为Dempster组合规则,这也是国际上通用的称呼.

## 3 证据理论研究进展

以下按照证据理论中不确定推理流程即1)证据建模(BBA生成、近似计算),2)证据组合与推理(冲突证据组合、条件证据),3)证据决策(BBA至概率的转换),4)证据评价(证据距离)的顺序对证据理论中的既有研究成果进行综述.

### 3.1 证据建模研究进展

#### 3.1.1 证据函数生成方法研究进展

基于证据理论进行不确定性表示和推理,首先要解决不确定性信息的表示问题,即mass函数(BBA)生成问题.BBA本质上是一种集值随机变量(随机集) [9],因此其生成问题本质上是有关集值随机变量的分布建模问题,(这一问题在数学领域仍然是一个未能很好解决的难题)这也是其难度的根源所在.在证据理论的实用过程中,BBA生成往往与具体应用密切相关.Selzer [16]依据目标类型数和环境加权系数生成BBA. Shafer [2]曾基于统计证据获取BBA. Bi [17]等人针对文本分类问题设计了三焦元组BBA. Valente等人 [18]针对声音识别问题,基于隶属度设计了生成BBA的多种方法.文献 [19]中,利用模糊c-均值聚类来实现BBA的获取.文献 [20]则是利用基于高斯模型假设的迭代估计来实现BBA获取.邓勇等 [21]提出了基于回转半径而得到相似度,进而得出BBA的方法.康兵义等人 [22]基于区间数理论和方法生成BBA. Dezert等人利用证据理论对阈值选取的不确定性进行建模,实现彩色图像边缘检测 [23].李世诚 [24]等借鉴马尔可夫随机场(MRF),生成BBA建立图像证据场.韩德强等 [25]基于多属性的不确定性区间生成BBA.邓鑫洋等 [26]面向决策问题设计提出了基于信度马尔可夫模型的BBA生成和推理方法.邱望仁等 [27]针对模糊时间序列预测问题设计了BBA生成方法.

也出现了一些一般性的通用方法.如Boudraa等 [28]、Florea等 [29]基于隶属度的BBA生成方法、韩德强等 [30]的基于隶属度与广义熵优化的方法等.

就目前的研究趋势而言,BBA生成越来越注重利用问题本身内在的不确定性,特别是对概率无法描述的不确定性进行建模,以充分发挥证据理论的优势.

#### 3.1.2 证据近似计算研究进展

Dempster组合规则最直观的一个缺陷是证据组合时会引起“焦元爆炸”问题.焦元数目随着辨识框架元素数目以指数形式递增,造成计算量激增.若辨识框架有 $n$ 个元素,则可能的焦元数目为 $2^n - 1$ 个.

以20个元素的辨识框架为例,所有可能焦元数目为 $1.048576 \times 10^7$ . 证据近似计算现有研究主要有两个分支:设计快速组合规则以及对BBA近似(简化).

快速组合规则方面, Kennes [31]提出了Dempster规则的一种优化算法. Barnett [3]的工作以及Shafer的层次化计算方法 [32]也是快速组合方法的代表. Moral等 [33]基于Monte-Carlo方法实现证据组合. Wickramaratne [34]提出基于Monte-Carlo和统计采样方法实现证据组合的简化计算.

证据函数近似研究工作方面, Voorbraak [35]等做了开创性的工作. Tessem [36]提出了著名的 $k-l-x$ 方法. Grabisch [37]提出了系列方法在BBA和其他一些测度函数(如可能性、概率)之间的关系,以简化BBA. Burger等 [38]受到Pignistic概率转换的启发,提出两种 $k$ -additive BBA. Denoeux [39]提出了层次化聚类方式实现BBA内层近似和外层近似. Dezert等人 [40]提出了层次化mass分配的方法实现BBA近似(近似度可控). 韩德强等 [41]还综合利用证据距离和不确定度量,以优化方式实现BBA近似.

## 3.2 证据组合与推理研究进展

### 3.2.1 冲突证据组合的研究进展

自1970年代Zadeh [42]对于证据理论的质疑开始,出现了越来越多的有关证据理论的争议,其中最为人所津津乐道的是高冲突证据组合时的反直观结果问题. 一种观点认为反直观结果是由Dempster规则造成,特别是其在处理冲突时的丢弃式处理方式. 因此持该观点的学者认为需要修改组合规则(特别是冲突的处理方式). 另外一些学者认为,反直观结果来自于证据源而非证据组合规则,在组合前对证据进行修正从物理上、数学上、逻辑上更合理 [43~45]. 更为重要的是,修改证据并不会破坏Dempster规则的交换律、结合律等良好的数学特性.

此外还存在一种观点,认为反直观结果来自于辨识框架的不完整. 如Smets提出了开放世界假设 [4], 邓勇等人 [46]也设计了非完备框架及相应组合方法.

上述方法大都属于组合式证据融合方法. 在杨艺等的工作中利用多因素排序融合方式实现了证据的选择性融合 [47]. 在权文等人的工作中基于最大熵方法实现证据组合 [48]. 随着研究的深入,有关冲突证据组合问题的新思路新方法将不断涌现. 当前有关证据理论领域的研究(特别是国内)主要集中在冲突证据组合方面. 相关研究工作的梳理可参见 [49,50].

相比修改组合规则而言,笔者更认同修正证据体的方式,因为对规则的修改往往会破坏Dempster规则

本身的交换律、结合律等优良性质. 实际上,如果是传感器失效或传感器报告不准确带来的证据冲突,此时将反直观结果完全归咎于组合规则并不合理.

### 3.2.2 条件证据研究进展

Dempster规则本质是对称的,并不区分所谓先验知识和作为证据的知识. 条件化(conditioning)与更新本质上是非对称的. 在概率框架内的条件化以及更新问题,包括条件概率定义、Bayes公式等已经相对成熟. 而在证据理论框架内当新的信息到来时,如何条件化以及更新一个证据体具有重要意义 [9, 51],但目前还没有形成成熟、统一的条件化及证据更新方法. 很多学者也纷纷致力于此: Dempster条件规则及TBM模型 [4]就是用来实现新到证据是完全确知情况下的证据更新. Jeffrey条件规则 [52]是在新到证据具有不确定性的情况下实现概率更新. Dubois和Prade [53]在证据理论框架内重新解释并推广了Jeffrey条件规则,实现了对mass函数及信度函数的更新. 他们提出了强、弱两种条件规则来实现证据更新 [54]. Ichihashi和Tanaka [55]、Wagner [56]以及Smets等 [57]也推广了Jeffrey规则. 韩德强等人 [58]定义了新的条件BBA,并基于此实现了类Jeffery规则更新.

上述研究工作中均是首先构造一个条件信度函数或条件BBA,然后根据新到证据及类Jeffrey规则实现证据更新. 还有学者把初始证据和新到证据看作是两个独立的随机集,构造了可递推实现的更新规则 [59]. 文献 [60]将即有证据和所定义的条件证据进行线性组合实现证据更新. 证据更新实际上是一种细致的逻辑及代数操作,无法简单判断优劣 [51].

### 3.2.3 相关证据组合研究进展

使用Dempster规则时,待组合证据间应彼此独立. 对独立性的要求可以从两个角度来理解. 首先,从数学角度Dempster规则本质上是一个伪“积”规则. 从随机集角度,证据组合相当于两个独立随机集的交通算 [9]. 比照概率框架来理解,积事件的概率相等于独立事件概率的积. 其次,从实际信息融合角度来看,如果被组合证据相关性过大,那融合的必要性就要大打折扣. 融合冗余性过大的信息并无太大实际价值.

相关证据组合的研究主要分两个流派. 其一,对证据源进行分析,分离出并去除相关部分然后再进行组合 [61,62]. 其二,定义可以适用于部分相关(或相关程度不明的)证据的新组合规则 [63,64],如基于最小承诺准则的(Least Commitment Principle)各类谨慎(cautious)组合规则等. 相关证据组合的研究对于证

据理论的实用化来说具有重要的意义. 随着研究的深入, 会有更多有价值的成果的涌现.

### 3.3 证据决策研究进展

#### 3.3.1 BBA至概率转换研究进展

基于证据理论完成不确定推理过后, 将面临最终的决策问题. 此时往往需要将BBA转换为概率. 这本质上是如何将复合焦元上的mass赋值汇聚到单点命题. 本节将总结既有的由BBA至概率的转换方法.

最为常用的概率转换方法即为Smets所提出的Pignistic概率转换 [4]. 对符合焦元的mass赋值采用了平均分配的策略. Sudano等 [65]基于单点信任函数与似真度函数提出了一系列的概率转换方法. Cuzzolin等人 [66]也做了类似的工作. 上述工作中, 复合焦元的分配主要依赖于mass赋值及单点信任、似真度函数取值, Dezert等 [5]时利用焦元势与mass赋值的信息构造了DSmP转换方法. 在Dezert和韩德强等 [40]还提出了层次化的概率转换方法.

除了将BBA转换至概率之外, 也有直接基于证据函数进行决策的方法, 详见 [67].

### 3.4 证据评价研究进展

有关证据评价方面的研究主要涉及不确定度量、证据距离、证据组合评价等. 本节仅对证据距离研究进行综述. 不确定度量研究进展可参见 [9,30,68]. 证据组合评价的研究进展可参见 [49].

#### 3.4.1 证据距离的研究进展

证据距离 [69]用于描述BBA间的差异性, 在聚类、分类、证据修正等领域都有重要的应用. 从构造方式上可以分为两类.

其一, 基于证据函数对应的其他测度 (如概率、模糊隶属度等) 间接定义, 如图1所示:

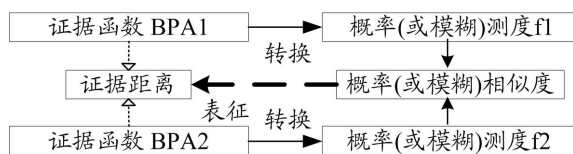


图1 证据距离的间接定义

1993年, Tessem等基于pignistic概率设计了pignistic概率距离 [36]描述证据相似性, 用于对证据组合近似计算算法的有效性评估. Bauer也做了类似的工作 [70]. Pignistic距离取得了比较多的应用, 但对其定义和使用中还存在着误解和误用 [71]. 韩德强等通过模糊距离间接定义了证据距离 [72]. 刘准轶等基于DSmP概率间接定义了证据距离 [73].

其二, 直接基于证据函数定义. Cuzzolin等学者设计提出了证据理论的几何解释 [74]. 在此基础上, Jousselme等人定义了Jousselme证据距离 [75]:

$$d_J(m_1, m_2) = \sqrt{\frac{1}{2}(m_1 - m_2)\mathbf{D}(m_1 - m_2)} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{D}$ 是一个 $2^n \times 2^n$ 的矩阵,  $n$ 为辨识框架元素个数.  $\mathbf{D}$ 中的元素 $D$ 定义为:  $D(B, C) = |B \cap C| / |B \cup C|$ . 两个证据间距离越小, 相似度越大. 2013年Jousselme等人 [76]证明了Jaccard矩阵的正定性, 从而印证了Jousselme距离是严格的距离, 满足非负性、对称性、自反性和三角不等式. 基于证据理论几何解释, 文成林等 [77]提出了角距离形式的定义.

随之涌现了许多证据距离的应用研究. 邓勇 [44]利用Jousselme证据距离定义了证据体间的相似度, 并由此生成权重修正待组合证据. Liu [78]利用Pignistic概率距离和Dempster组合冲突系数 $K$ 构成二元组, 用以描述证据体间的冲突. Ristic等 [79]利用证据距离在TBM框架中实现了基于多个不确定信息源的目标身份关联. Zouhal [80]基于BBA对应的pignistic概率引入了一种均方距离, 有效地提升了证据 $k$ -近邻分类器的正确率. Schubert [81]等人利用证据距离进行聚类分析, 取得了理想的聚类性能. Florea等 [82]还基于证据距离描述信息源的可靠性, 用于突发事件管理. 韩德强等 [83]利用证据距离定义了证据方差, 应用于加权证据组合. 杨艺等人 [84]基于证据距离构造了多分类器系统差异性度量. 韩德强等人基于Jousselme距离和不确定度相结合以优化方式实现对BBA的近似计算 [41].

## 4 证据理论中易混淆问题及误解探讨

### 4.1 证据理论与概率论的关系

如引言中所述, 证据理论源起自概率论并与之存在着千丝万缕的联系. 但许多文献中对概率论与证据理论之间的关系都存在着理解误区.

#### 4.1.1 证据函数与概率之间的关系

有不少国内文献 [87~91]中指出, BBA在满足一定条件时可以退化成概率, 即当BBA仅在单点子集上定义时就退化为概率. 但事实并非如此, 如例1所示.

例1: 设 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ , 在单点子集上定义的BBA为

$$m(\{\theta_1\}) = 0.2, m(\{\theta_2\}) = 0.3, m(\{\theta_3\}) = 0.5.$$

定义如下的概率:

$$P(\{\theta_1\}) = 0.2, P(\{\theta_2\}) = 0.3, P(\{\theta_3\}) = 0.5.$$

$P(\cdot)$ 与 $m(\cdot)$ 等同么? 根据概率可列可加性 [85,86], 可得 $P(\{\theta_1, \theta_2\}) = P(\{\theta_1\}) + P(\{\theta_2\}) = 0.5$ .

同时根据确定事件概率与可列可加性有

$$P(\{\Theta\}) = P(\{\theta_1\}) + P(\{\theta_2\}) + P(\{\theta_3\}) = 1.0.$$

$m(\cdot)$ 是在 $\Theta$ 的幂集上归一,除 $\{\theta_1\}, \{\theta_2\}, \{\theta_3\}$ 之外的任何焦元对应mass赋值均为0.因此有,

$$m(\{\theta_1, \theta_2\}) = 0 \neq m(\{\theta_1\}) + m(\{\theta_2\}) = 0.5$$

$$m(\{\Theta\}) = 0 \neq m(\{\theta_1\}) + m(\{\theta_2\}) + m(\{\theta_3\}) = 1.0$$

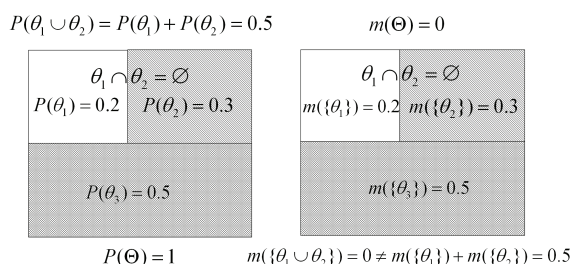


图 2 BBA与概率的区别

如图2,即便是在单点集上定义的BBA也并不满足可列可加性和全集赋值为1的性质,因而单点BBA也不是概率.单点BBA只是因为形式上与概率近似才被称作Bayesian证据函数[92],但它并非概率.

虽然BBA不等于概率,但需要指出的是证据理论从思想方法上可以看做是一种基于不精确概率(Imprecise Probability)[93]进行推理的理论与方法.所谓不精确概率是指对所关注命题的概率以区间形式描述(上、下概率构成区间,可类比于证据理论中的信度区间 $[Bel(A), Pl(A)]$ ).相较证据理论,不精确概率理论与方法所涵盖的内容更广,相关的数学约束更为严格[94].将证据理论与不精确概率进行结合以更好地处理不确定性信息是当前研究的热点之一[95].

#### 4.1.2 Dempster证据组合公式与Bayes公式的关系

在一些国内文献中[88, 91]都可以发现这样的论述,当mass函数为单点集上定义时(“退化”为概率),Dempster组合公式就退化为Bayes公式.果真如此么?例2:针对空中目标识别问题,可能的目标类型包括 $A: F15$ 及 $B: J10$ 依据目标类型设定辨识框架为 $\Theta = \{A, B\}$ .基于防空雷达观测到的目标特征为 $E$ .

相应空域出现 $F15$ 的先验概率为60%( $P(A) = 0.6$ ).基于雷达观测获取特征 $E$ ,有 $P(E|A) = 0.8, P(E|B) = 0.2$ ,依据Bayes公式,

$$\begin{cases} P(A|E) = P(E|A) \cdot P(A) / [P(E|A) \cdot P(A) + P(E|B) \cdot P(B)] \\ = 0.8 \cdot 0.6 / [0.8 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4] = 0.86 \\ P(B|E) = P(E|B) \cdot P(B) / [P(E|B) \cdot P(B) + P(E|A) \cdot P(A)] \\ = 0.2 \cdot 0.4 / [0.8 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4] = 0.14 \end{cases}$$

如果用单点BBA来描述上述证据,可得: $m_1(A) = 0.6, m_1(B) = 0.4, m_2(A) = 0.8, m_2(B) = 0.2$ ;基于Dempster组合规则, $m_{12} = m_1 \oplus m_2$ 可得:

$$m_{12}(A) = 0.86, m_{12}(B) = 0.14$$

据此,似乎可以推断出Dempster规则与Bayes公

式得到的结果是一致的.但实质上这里存在两个误区.首先Dempster公式中参与组合的证据是对等的,不存在先验与似然之分.本例中将先验和似然函数当作两个独立证据来看待,是不恰当的.

其次,本例中在构造似然函数时暗含了很强的假设即 $P(E|A) + P(E|B) = 1.0$ ,而这对Bayes公式来说并非必要条件.而如果要似然函数视作BBA,则其必须满足和为1.此外似然函数是条件概率的形式出现的,但证据理论中如何定义条件BBA还没有统一的认识.不能将概率中的似然函数等同于BBA使用.

此外,如前所述,单点BBA并非概率,因此说相应的Dempster组合规则退化为Bayes公式就无从谈起.因此Bayes公式并非Dempster组合规则的特例.

综上,概率论与证据理论是两套不同的理论框架.可以认为证据理论是对概率论的一种扩展,但这种扩展并不完备,不可退化.证据理论实际上是对概率论的不严谨或不成功的拓展,特别是在统计信息完备或者可精确获取时,基于证据理论的推理结果往往与概率统计的结果不一致,如例3所示.

例3:设口袋里一共有8个球(4个红球和4个黑球).4个红球分别为 $R_1, R_3, R_5, R_7$ (球体以奇数标注),4个黑球分别为 $B_2, B_4, B_6, B_8$ (球体上偶数标注).设 $E_1 = \{c_i, i = 1, 3, 5, 7\}$ (奇数编号), $E_2 = \{c_i, i = 2, 4, 6, 8\}$ (偶数编号), $E_1$ 和 $E_2$ 可认为是两种不同的观测或考察方式.设事件 $C$ 为看到 $B_8$ , $\bar{C}$ 为看不到 $B_8$ .辨识框架为 $\Theta = \{C, \bar{C}\}$ ,计算在所有球当中看到 $B_8$ 的可能.

首先生成单点BBA如下

$$E_1: \begin{cases} m_1(C) = P(B_8|E_1) = 0/4 = 0 \\ m_1(\bar{C}) = 1 - P(P(B_8|E_1)) = 1 \end{cases}$$

$$E_2: \begin{cases} m_2(C) = P(B_8|E_2) = 1/4 \\ m_2(\bar{C}) = 1 - P(P(B_8|E_1)) = 3/4 \end{cases}$$

由Dempster规则可得 $m_{12}(C) = 0, m_{12}(\bar{C}) = 1$

而在所有球中看到 $B_8$ 的概率为 $P(B_8|E_1 \cup E_2) = 1/8$ .显然二者所得结果不一致.由上述例题可知DS证据理论并不是概率论的一种严谨或成功的推广.

#### 4.2 证据冲突与反直观结果的关系

如前所述,高冲突证据利用Dempster规则进行组合时,会出现反直观的结果.较高的冲突程度真是这种反直观结果的起因么?

例4:设辨识框架为 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ ,其上定义了如下两个BBA[96]:

$$m_1(\{\theta_1\}) = a, m_1(\{\theta_1, \theta_2\}) = 1 - a$$

$$m_2(\{\theta_1, \theta_2\}) = b_1, m_2(\{\theta_3\}) = 1 - b_1 - b_2, m_2(\Theta) = b_2$$

由Dempster组合公式, 可得冲突系数 $K = m_{12}(\emptyset) = 1 - b_1 - b_2$  以及组合后的BBA

$$m_{12}(\{\theta_1\}) = a = m_1(\{\theta_1\}),$$

$$m_{12}(\{\theta_1, \theta_2\}) = 1 - a = m_1(\{\theta_1, \theta_2\}) = b_2.$$

只要 $K > 0$ , 结果就总是 $m_{12}(\cdot) = m_1(\cdot)$ . 这样的结果显然是反直观的, 因为后续的证据 $m_2$ 根本无法影响到组合的结果, 而 $m_2$ 本身并非空信度函数( $m(\Theta) = 1$ ). 实际上我们可以调节 $b_1$ 和 $b_2$ 的取值, 进而获取不同的冲突系数 $K$ . 也就是 $K$ 取值可以很高, 也可以很低. 像本例中的情形还可以举出很多, 因此无论冲突高低 [96], 基于Dempster规则进行证据组合都有可能获得反直观的结果.

### 4.3 证据距离与证据冲突的关系

有学者质疑 $K$ 无法很好地刻画证据间的冲突程度, 并且引入了证据距离来共同刻画冲突. 在Liu的工作中 [78], 就设计了二元组 $\langle K, d_J \rangle$ 来描述证据间冲突(其中 $d_J$ 为Jousselme证据距离 [75]). 许多学者都以此为基础将各种证据距离与冲突系数 $K$ 相结合来描述冲突, 并应用于改进的证据组合. 但证据距离真的适合于描述证据冲突么?

例5: 设辨识框架为 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ , 其上定义了2个mass函数分别为:

$$m_1(\{\theta_1\}) = m_1(\{\theta_2\}) = m_1(\{\theta_3\}) = 1/3;$$

$$m_2(\{\theta_1\}) = m_2(\{\theta_2\}) = m_2(\{\theta_3\}) = 1/3;$$

按照任意证据距离计算, 取值均为0. 计算其冲突系数为 $K = 2/3$ . 两个毫无二致的证据并非没有冲突. BBA本身就是具有不确定性的, 其本身存在自冲突(auto-conflict或self-conflict) [97]. 如果用证据距离来描述冲突显然是不够合理的. 证据距离本质上描述的是证据体间的差异度(或相似度). 冲突在某种程度上能够反映差异, 但二者并非同一概念.

例6: 设辨识框架为 $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ , 其上定义了2个mass函数分别为:

$$m_1(\{\theta_1\}) = m_1(\{\theta_2, \theta_3\}) = 1/2; m_2(\{\Theta\}) = 1.$$

本例中 $m_1$ 和 $m_2$ (空信度函数)间的冲突系数 $K = 0$ , 而其距离 $d_J$ 却并非为0. 从例5和例6可知, 距离与冲突是两个不同的概念. 在Destercke等人 [98]新近的工作中定义了冲突度量应该满足的一系列条件, 证据距离并不总能满足这些条件(详见文献 [98]).

综上, 描述证据差异性的证据距离虽然与证据冲突有一定的关联, 但本质上是两个概念, 距离并不适宜作为冲突度量.

### 4.4 由证据至概率转换方法的评价

基于BBA可以完成证据的描述与推理融合. 在进行决策时往往需要首先将BBA函数转换为概率. 最常用的是pignistic概率转换方法 [4].

$BetP_m(\theta_i) = \sum_{\theta_j \in B} m(B)/|B|, \forall B \subseteq \Theta$  (6) 本质上是将某一个焦元上的mass赋值平均分配给其包含的单点命题. 由于采用的是不偏不倚的平均分配方式, pignistic概率转换方法的信息损失较小.

在现有的针对概率转换方法的文献中 [5, 65, 66, 99~101], 往往是采取Shannon信息熵作为准则, 即转换后得到的Shannon熵越小, 决策会越清晰, 代表概率转换效果越好. 但需要注意的是, 信息熵小代表由证据函数至概率的转换过程中信息损失较大, 这将是一个负面的因素. 实际上Shannon信息熵并不足以评估概率转换方法的优劣. 如果片面强调信息熵的取值小, 也会招致极端的结果.

例9: 设辨识框架为:  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ ,  $m(\{\theta_1\}) = 0.20000001, m(\{\theta_2\}) = 0.19999999, m(\{\theta_1, \theta_2\}) = 0.6$  为 $\Theta$ 上定义的mass函数. 依据信息熵最小化原则得到的概率转换结果为:

$$P(\theta_1) = 0.80000001, P(\theta_2) = 0.19999999.$$

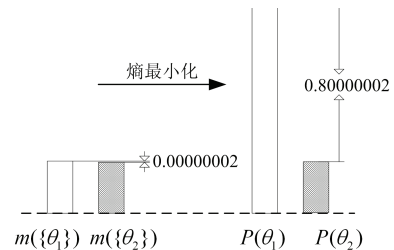


图3 差异极端放大

如图3所示, 仅仅因为 $m(\{\theta_1\}) > m(\{\theta_2\})$ , 混合焦元的mass赋值 $m(\{\theta_1, \theta_2\}) = 0.6$ 被全部分配给了 $\theta_1$ , 从而导致最终决策结果为 $\theta_1$ . 而实际上对于 $\theta_1$ 和 $\theta_2$ 的mass赋值非常接近, 而转换后的概率差异却极大. 因此过分强调信息熵的“小”是危险的. 单纯依靠信息熵不足以评价概率转换方法 [102].

## 5 结论与展望

在对证据理论新近发展的综述的基础上, 针对证据理论研究中存在的诸多误解、混淆结合算例进行了分析和探讨, 试图为研究人员正确使用DS证据理论提供借鉴作用. 证据理论本身在描述和刻画不确定性上是具有优势的, 但由于其是概率论的理论框架的不完备的拓展, 因此仍然存在诸多问题有待解决.

对未来证据理论的重点研究方向展望如下.

首先, 证据理论属于随机集的一种形式. 概率论

已经有了很成熟的统计学方法与工具. 而随机集目前虽然是个很好的描述工具, 但缺乏类似统计学的工具. 证据理论中诸如BBA生成等问题的解决, 本质上属于集值随机变量分布建模的问题; 组合规则的设计本质上是随机集间的代数操作(运算)设计问题. 这些都依赖于随机集(特别是其方法论层面)研究的深入. 这也是推进证据理论走向成熟与深入的最关键所在.

其次, 证据理论中的评价准则研究至关重要, 是上述证据理论领域诸项研究能否取得实质进展的瓶颈问题所在. 有了客观合理、体系化的评价准则, 方法的设计才有更严谨参照的标准, 从而跳出启发式设计的泥淖. 因此有关评价准则的研究将成为重点研究方向, 也是难点之所在.

最后, 在随机集理论与方法成熟之前, 在体系化的评价准则建立之前, 结合实际应用中的不确定性, 针对概率论无法描述和解决的应用问题, 采用证据理论描述、分析和解决, 从而拓展证据理论的应用范围也是一个很重要的研究方向. 更多具体问题的解决也将为一般性理论与方法的构建提供借鉴和支撑.

相信随着研究的深入, 证据理论会在理论和应用各个层面都得到进一步改进和提升, 从而进一步完善和丰富决策级信息融合理论与方法.

#### 参考文献(References)

- [1] Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a multiple valued mapping [J]. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1967, 38(2): 325–339.
- [2] Shafer G. *A Mathematical Theory of Evidence* [M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1976.
- [3] Barnett J A. Computational methods for a mathematical theory of evidence [C]. In: *Proceedings of 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, Vancouver, Canada. USA: William Kaufmann 1981, 868–875.
- [4] Smets P, Kennes R. The transferable belief model [J]. *Artificial Intelligence*, 1994, 66(2): 191–234.
- [5] Smarandache F, Dezert J. *Applications and Advances of DSMT for Information Fusion (Vol3)*[M]. Rehoboth: American Research Press, 2009.
- [6] Aminravan F, Sadiq R, Hoorfar M, et al. Evidential reasoning using extended fuzzy Dempster-Shafer theory for handling various facets of information deficiency. *International Journal of Intelligent Systems*. 2011, 26(8): 731–758.
- [7] 段新生. 证据理论与决策、人工智能[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 1990.
- (Duan X S. *Evidence Theory and Decision, Artificial Intelligence* [M]. Beijing: Renmin University Press, 1990.)
- [8] 戴冠中, 潘泉, 张山鹰, 等. 证据推理的进展及存在问题. *控制理论与应用*, 1999, 16(04): 465–469.  
(Dai G Z, Pan Q, Zhang S Y, et al. The developments and problems in evidence reasoning [J]. *Control Theory and Applications*, 1999, 16(04): 465–469.)
- [9] 韩崇昭, 朱洪艳, 段战胜. 多源信息融合(第二版). 北京: 清华大学出版社, 2010. 86–87.  
(Han C Z, Zhu H Y, Duan Z S. *Multi-source Information Fusion (2nd Ed)*, Beijing: Tsinghua University Press, 2010. 86–87.)
- [10] 王润生. 信息融合[M]. 北京: 科学出版社, 2007.  
(Wang R S. *Information Fusion* [M]. Beijing: Science Press, 2007.)
- [11] 何友, 王国宏, 关欣. 信息融合理论及应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2010.  
(He Y, Wang G H, Guan X. *Information Fusion Theory with Applications* [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2010.)
- [12] 文成林, 徐晓滨. 多源不确定信息融合理论及应用—故障诊断与可靠性评估[M]. 科学出版社, 2012.  
(Wen C L, Xu X B. *Theories and Applications in multi-source uncertain information fusion — Fault Diagnosis and Reliability Evaluation* [M]. Science Press, 2012.)
- [13] Sevastianov P, Dymova L, Bartosiewicz P. A framework for rule-based evidential reasoning in the interval setting applied to diagnosing type 2 diabetes [J]. *Expert Systems with Applications*, 2012, 39(4): 4190–4200.
- [14] Mokhtari K, Ren Jun, Roberts C, Wang Jin. Decision support framework for risk management on sea ports and terminals using fuzzy set theory and evidential reasoning approach [J]. *Expert Systems with Applications*, 2012, 39(5): 5087–5103.
- [15] 姚爽, 郭亚军, 黄玮强. 基于证据距离的改进DS/AHP多属性群决策方法[J]. *控制与决策*, 2010, 25(6): 894–898.  
(Yao S, Guo Y J, Huang W Q. An improved method of aggregation in DS/AHP for multi-criteria group decision-making based on distance measure [J]. *Decision and Control*, 2010, 25(6): 894–898.)
- [16] Selzer F, Gutfinger D. LADAR and FLIR based sensor fusion for automatic target classification [C]. *Proceedings of SPIE*, Montreal, Canada, 1988: 236–246.
- [17] Bi Y X, Bell D, Guan J W. Combining evidence from classifiers in text categorization [C]. *Proceedings of the 8th International Conference on KES*, Wellington, New Zealand 2004: 521–528.

- [18] Valente F, Hermansky H. Combination of acoustic classifiers based on Dempster-Shafer theory of evidence [C]. Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2007: IV-1129–IV-1132.
- [19] Zhu Y M, Dupuis O, Kaftandjian V, et al. Automatic determination of mass functions in Dempster-Shafer theory using fuzzy c-means and spatial neighborhood information for image segmentation [J]. Optical Engineering, 2002, 41(4): 760–770.
- [20] Salzenstein F, Boudraa A O. Iterative estimation of Dempster Shafer's basic probability assignment: application to multisensor image segmentation [J]. Optical Engineering, 2004, 43(6): 1293–1299.
- [21] Deng Y, Jiang W, Xu X B, et al. Determining BPA under uncertainty environments and its application in data fusion [J]. Journal of Electronics(China), 2009, 26(1): 13–17.
- [22] 康兵义, 李娅, 邓勇, 等. 基于区间数的基本概率指派生成方法及应用[J]. 电子学报, 2012, 40(6): 1092–1096.  
(Kang B Y, Li Y, Deng Y, et al. Determination of basic probability assignment based on interval numbers and its Application [J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(6): 1092–1096.)
- [23] Dezert J, Liu ZhunGa, Mercier G. Edge Detection in Color Images Based on DSMT [C]. 14th international Conference on Information Fusion, Chicago, July, 2011.
- [24] 李世诚, 韩德强, 杨艺, 等. 基于邻域证据场的图像分割算法[C]. 第32届中国控制大会(CCC2013), 中国西安, 2013: 3828–3833.  
(Li S C, Han D Q, Yang Y, et al. An image segmentation algorithm based on neighborhood evidence field [C]. 32th Chinese Control Conference (CCC2013), Xi'an, China, 2013: 3828–3833)
- [25] Han D Q, Dezert J, Tacnet J -M, et al. A fuzzy-cautious OWA approach with evidential reasoning [C]. 15th International Conference on Information Fusion, FUSION 2012, Singapore, 2012: 278–285.
- [26] 邓鑫洋, 邓勇, 章雅娟, 等. 一种信度马尔可夫模型及应用[J]. 自动化学报, 2012, 38(4): 666–672.  
(Deng X Y, Deng Y, Zhang Y J, et al. A belief Markov model and its application [J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(4): 666–672.)
- [27] 邱望仁, 刘晓东. 基于证据理论的模糊时间序列预测模型[J]. 控制与决策, 2012, 27(1): 99–103.  
(Qiu W R, Liu X D. Fuzzy time series model for forecasting based on Dempster-Shafer theory [J]. Control and Decision, 2012, 27(1): 99–103.)
- [28] Boudraa A O, Bentabet A, Salzenstein F, et al. Dempster-Shafer's basic probability assignment based on fuzzy membership functions [J]. Electronic Letters on Computer Vision and Image Analysis, 2004, 4(1): 1–9.
- [29] Florea M C, Jusselme A -L, Grenier D, et al. Approximation techniques for the transformation of fuzzy sets into random sets [J]. Fuzzy Sets Systems, 2008, 159(3): 270–288.
- [30] Novel approaches for the Transformation of fuzzy membership function into basic probability assignment based on Uncertain optimization [J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. 2013, 21(2): 289–322.
- [31] Kennes R. Computational aspects of the Mobius transform of graphs [J]. IEEE Transactions on SMC, 1992, 22(2): 201–223.
- [32] Shafer G, Logan R. Implementing Dempster's rule for hierarchical evidence [J]. Artificial Intelligence, 1987, 33(3): 271–298.
- [33] Moral S, Salmeron A. A Monte Carlo algorithm for combining Dempster-Shafer belief based on approximate pre-computation [C]. in A. Hunter and S. Pearsons, Editors, Symbolic and quantitative approaches to reasoning and uncertainty (ECSQARU' 99), 1999: 305–315.
- [34] Wickramarathne T L, Premaratne K, Murthi M N. Monte-Carlo approximations for Dempster-Shafer belief theoretic algorithms [C]. in Proc. 14th International Conference on Information Fusion, Chicago, USA, July, 2011: 461–468.
- [35] Voorbraak F. A computationally efficient approximation of Dempster-Shafer theory [J]. International Journal of Man-Machine Studies, 1989, 30(5): 525–536.
- [36] Tessem B. Approximations for efficient computation in the theory of evidence [J]. Artificial Intelligence, 1993, 61(2): 315–329.
- [37] Grabisch M. Upper approximation of nonadditive measures by k-additive measures - the case of belief functions [C]. Proceeding of the 1st International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications, Ghent, Belgium, June 1999.
- [38] Burger T, Cuzzolin F. The barycenters of the k-additive dominating belief functions and the pignistic k-additive belief functions [C]. Proceeding of International Workshop on Belief Functions, Brest, France, 2010.
- [39] Denoeux T. Inner and outer approximation of belief structures using a hierarchical clustering approach [J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness, and Knowledge-based Systems, 9(4): 437–460, 2001.



- [40] Dezert J, Han D Q, Liu Z G, et al. Hierarchical DSmp transformation for decision-making under uncertainty [C]. 15th International Conference on Information Fusion, Singapore, 2012: 294–301.
- [41] Han D Q, Dezert J, Han C Z. New basic belief assignment approximations based on optimization [C]. 15th International Conference on Information Fusion, Singapore, 2012: 286–293.
- [42] Zadeh L A. A simple view of the Dempster-Shafer theory of evidence and its implication for the rule of combination [J]. AI magazine, 1986, 7(2): 85–90.
- [43] Haenni R. Are alternatives to Dempster’s rule of combination real alternative?: Comments on “About the belief function combination and the conflict management problem” [J]. Information Fusion, 2002, 3(4): 237–239.
- [44] Deng Y, Shi W K, Zhu Z F, et al. Combining belief functions based on distance of evidence [J]. Decision Support Systems, 2004, 38(3): 489–493.
- [45] Han DeQiang, Deng Yong, Han ChongZhao, et al. Weighted evidence combination based on distance of evidence and uncertainty measure [J]. Journal of Infrared and Millimeter Waves, 2011, 30(5): 396–400.
- [46] 邓勇, 蒋雯, 韩德强, 广义证据理论的基本框架[J]. 西安交通大学学报, 2010, 44(12): 119–124.  
(Deng Y, Jiang W, Han D Q. Basic frame of generalized evidence theory [J]. Journal of Xi’an Jiaotong University, 44(12): 119–124.)
- [47] 杨艺, 韩德强, 韩崇昭. 基于多准则排序融合的证据组合方法. 自动化学报, 2012, 38(5): 823–831.  
(Yang Y, Han D Q, Han C Z. Evidence combination based on multi-criteria rank-level fusion [J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(5): 823–831.)
- [48] 权文, 王晓丹, 王坚, 等. 一种基于置信最大熵模型的证据推理方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(6): 899–903.  
(Quan W, Wang X D, Wang J, et al. A combination rule of evidence theory based on brief max-entropy model [J]. Control and Decision, 2012, 27(6): 899–903.)
- [49] 杨风暴, 王肖霞. D-S证据理论的冲突证据合成方法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2010.  
(Yang F B, Wang X X. Combination Method of Conflictive Evidences in D-S Evidence Theory [M]. Beijing: National Defence Industry Press, 2010.)
- [50] Yang Y, Han D Q, Han C Z. Discounted combination of unreliable evidence using degree of disagreement [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013, 54(8): 1197–1216.
- [51] 韩德强. 基于证据推理的多源分类融合理论与方法研究[D]. 西安: 西安交通大学, 2008.  
(Han D Q. Research on theory and method of multi-source classification fusion based on evidential reasoning [D]. Xi’an: Xi’an Jiaotong University, 2008.)
- [52] Jeffrey R. The Logic of Decision[M]. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [53] Dubois D, Prade H. Updating with belief functions, ordinal conditional functions and possibility measures[C]. Proceedings of the 6th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, Amsterdam, 1990: 311–329.
- [54] Dubois D, Prade H. Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures[J]. Computational Intelligence, 1988, (4): 244–264.
- [55] Ichihashi H, Tanaka H. Jeffrey-like rules of conditioning for the Dempster-Shafer theory of evidence[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1989, 3(2): 143–156.
- [56] Wagner C G. Generalizing Jeffrey conditionalization[C]. Proceedings of the 8th Annual Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence, San Mateo, Ca, USA, 1992: 331–335.
- [57] Smets P. Jeffrey’s rule of conditioning generalized to belief functions[J]. Uncertainty in Artificial Intelligence, 1993: 500–505.
- [58] 韩德强, 韩崇昭, 杨艺. 条件证据及证据更新研究[C]. 第四届中国信息融合大会论文集, 武汉, 2012: 32–38.  
(Han D Q, Han C Z, Yang Y. Research on conditional evidence and evidence updating [C]. Proceedings of the 4th Chinese Information Fusion Conference, Wuhan, 2012: 32–38.)
- [59] Tang Y C, Sun S Q, Liu Y G. Conditional evidence theory and its application in knowledge discovery[M]//. Lecture Notes in Computer Science - Advanced Web Technologies and Applications. Springer Verlag: Berlin / Heidelberg, 2004: 500–505.
- [60] Kulasekera E C, Premaratne K, Dewasurendra DA, et al. Conditioning and updating evidence[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2004, 36 (1): 75–108.
- [61] 孙怀江, 杨静宇. 一种相关证据合成方法[J]. 计算机学报, 1999, 22(9): 1004–1007. (Sun H J, Yang J Y. A combination method for dependent evidences[J]. Chinese Journal of Computers, 1999, 22(9): 1004–1007.)
- [62] 肖文, 王正友, 王耀德. 一种相关证据的合成规则. 控制与决策, 2011, 26(5): 773–776. (Xiao W, Wang Z Y, Wang Y D. Combination rule for dependent evidences [J]. Control and Decision, 2011, 26(5): 773–776.)
- [63] Denoux T. Conjunctive and disjunctive combination of belief functions induced by non distinct bodies of

- evidence[J]. *Artificial Intelligence*, 2008, 172(2/3): 234–264.
- [64] Chao F, Yang S L. The combination of dependence-based interval-valued evidential reasoning approach with balanced scorecard for performance assessment [J]. *Expert Systems with Applications*, 2012, 39(3): 3717–3730.
- [65] Sudano J. Yet another paradigm illustrating evidence fusion [C]. *Proceedings of the 9th International Conference on Information Fusion*, Florence, July 2006: 1–7.
- [66] Cuzzolin F. On the properties of the Intersection probability [C]. *Proceedings of 10th European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty*, Verona, Italy, July, 2009: 287–298.
- [67] Lv W H. Decision-making rules based on belief interval with D-S evidence theory [M]// *Fuzzy Information 554 and Engineering*, pp. 619 – 627, 2007.
- [68] Jusselme A -L, Liu C S, Grenier D, et al. Measuring ambiguity in the evidence theory [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A*, 2006, 36(5): 890–903.
- [69] Jusselme A -L, Maupin P. Distances in evidence theory: Comprehensive survey and generalizations [J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2012, 53(2): 118–145.
- [70] Bauer M. Approximation algorithms and decision making in the Dempster-Shafer theory of evidence - an empirical study [J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 1997, 17(2-3): 217–237.
- [71] Han D Q, Deng Y, Han C Z, et al. Some notes on betting commitment distance in evidence theory. *Science China - Information Sciences*, 2012, 55(3): 558–565.
- [72] Han D Q, Dezert J, Han C Z, et al. New dissimilarity measures in evidence theory [C]. *Proc. of International Conference on Information Fusion*, Chicago, July, 2011.
- [73] Liu Z G, Dezert J, Pan Q, et al. Combination of sources of evidence with different discounting factors based on a new dissimilarity measure [J]. *Decision Support Systems*, 2011, 52(1): 133–141.
- [74] Cuzzolin F. A Geometric Approach to the Theory of Evidence [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part C : Applications and Reviews*, 2008, 38(4): 522–534.
- [75] Jusselme A -L, Grenier D, Bosse E. A new distance between two bodies of evidence [J]. *Information Fusion*, 2001, 2(2): 91–101.
- [76] Bouchard M, Jusselme A -L, Dore P -E. A proof for the positive definiteness of the Jaccard index matrix [J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2013, 54(5): 615–626.
- [77] Wen C L, Wang Y, and Xu X B. Fuzzy Information Fusion Algorithm of Fault Diagnosis Based on Similarity Measure of Evidence [M]// in *Advances in Neural Networks*, ser. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5264. Springer Berlin / Heidelberg, 2008, pp. 506–515.
- [78] Liu W R. Analyzing the degree of conflict among belief functions [J]. *Artificial Intelligence*, 2006, 170(11): 909–924.
- [79] Ristic B, Smets P. The TBM global distance measure for the association of uncertain combat ID declaration [J]. *Information Fusion*, 2006, 7(3): 276–284.
- [80] Zouhal L M, Denoeux T. An evidence-theoretic k-nn rule with parameter optimization [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part C: Applications and Reviews*, 1998, 28(2): 263–271.
- [81] Schubert J. Clustering decomposed belief functions using generalized weights of conflict[J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2008, 48(2): 466–480.
- [82] Florea M C, Bosse E. Crisis Management using Dempster Shafer Theory: Using dissimilarity measures to characterize sources' reliability. In: *Proceedings of C3I for Crisis, Emergency and Consequence Management*, Bucharest, Romania, meeting Proceedings RTO-MP-IST-086, 2009: 17-1–17-14
- [83] 韩德强, 邓勇, 韩崇昭等. 基于证据方差的加权证据组合[J]. *电子学报*, 2011, 39(3A): 153–157.  
(Han D Q, Han C Z. Weighted combination of conflicting evidence based on evidence variance [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 39(3A): 153–157.)
- [84] 杨艺, 韩德强, 韩崇昭. 一种基于证据距离的多分类器差异性度量[J]. *航空学报*, 2012, 33(6): 1093–1099.  
(Yang Y, Han D Q, Han C Z. A novel diversity measure of multiple classifier systems based on distance of evidence [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2012, 33(6): 1093–1099.)
- [85] Kolmogorov A N. *Foundations of the Theory of Probability*, 2nd English Edition. New York: Chelsea, 1956
- [86] 帕普利斯, 佩莱. 概率、随机变量与随机过程(第四版) [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2004.  
(Papoulis A, Pillai S U. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes* [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2004.)
- [87] 辛玉林, 安成锦, 徐世友, 等. 一种结合证据理论和Vague集信息融合方法[J]. *宇航学报*, 2011, 32(5): 1184–1189

- (Xin Y L, An J C, Xu S Y, et al. A New Algorithm of Information Fusion Combined Evidential Theory and Vague Set. *Journal of Astronautic*, 2011, 32(5): 1184–1189.)
- [88] 张强. 基于D-S证据理论的图像识别研究[D]. 北京: 华北电力大学, 2006.  
(Zhang Q. Study on Image Recognition based on Dempster-Shafer Evidence Theory[Master dissertation], Beijing: North China Electric Power University, 2006)
- [89] 肖明珠. 基于证据理论的不确定性处理研究及其在测试中的应用[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2008.  
(Xiao M Z. Study on the Uncertainty Processing based on Evidence Theory and Its Application in Test [Ph. D Dissertation], Xi'an: Xidian University, 2008.)
- [90] 梁伟光. 基于证据理论的在轨航天器故障诊断方法研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2011.  
(Liang W G. Fault Diagnosis of On-orbit Spacecraft based on Evidence Theory[Ph. D Dissertation], Heifei: University of Science and Technology of China, 2011.)
- [91] 冯楠, 解晶. 多重不确定环境下基于证据理论的安全风险评估模型[J]. *管理学报*, 2011, 8(4): 614–620, 627.  
(Feng N, Xie J. NIS security risk assessment model based on evidence theory in multi-uncertain environment. *Chinese Journal of Management*, 2011, 8(4): 614–620, 627.)
- [92] Quost B, Denoeux T, Masson M. Pairwise Classifier Combination in the Transferable Belief Model. In: *Proceedings of the 7th International Conference on Information Fusion*, Philadelphia, PA, USA, July, 2012, 437–444.
- [93] Walley P. Towards a unified theory of imprecise probability [J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2000, 24(2): 125–148.
- [94] Augustin T, Hable R. On the impact of robust statistics on imprecise probability models: A review [J]. *Structural Safety*, 32(6): 358–365.
- [95] Yu X, Ping Z, Li M. Dempster-Shafer Theory as an Applied Approach to Scenario Forecasting Based on Imprecise Probability[C]//*Computer and Information Technology (CIT), IEEE 12th International Conference on*. IEEE, 2012: 975–980.
- [96] Dezert J, Wang P, Tchamov A. On the validity of Dempster-Shafer theory. In: *Proceedings of the 15th International Conference on Information Fusion*, Singapore, July, 2012, 655–660.
- [97] Osswald C, Martin A. Understanding the large family of Dempster - Shafer theory's fusion operators - a decision-based measure, *International Conference on Information Fusion*, Florence, Italy, July 2006.
- [98] Destercke S, Burger T. Revisiting the Notion of Conflicting Belief Functions. In: *Proceedings of the 2nd International Conference on Belief Functions*, Compiègne, France, 2012, 153–160.
- [99] Sudano J. The system probability information content (PIC) relationship to contributing components, combining independent multisource beliefs, hybrid and pedigree pignistic probabilities [C]. *Proceedings of the 5th International Conference on Information Fusion*, Annapolis, July 2002: 1277–1283.
- [100] Sudano J, Belief fusion, pignistic probabilities, and information content in fusing tracking attributes [C]. *Proceedings of Radar Conference*, 2004: 218–224.
- [101] W. Pan, Yang H J. New methods of transforming belief functions to pignistic probability functions in evidence theory [C]. *Proceedings of International Workshop on Intelligent Systems and Applications*, 2009, Wuhan, China, May, 2009: 1–5.
- [102] Han D Q, Dezert J, Han C Z, et al. Is entropy enough to evaluate the probability transformation?. *Proceedings of the 13th International Conference on Information Fusion*, July, Edinburgh, UK, 2010, 1–7.