CONJECTURA LUI SMARANDACHE

OCTAVIAN CIRA

REZUMAT. Conjectura lui Smarandache afirmă că ecuaţia neliniară $p_{n+1}^x - p_n^x = 1$, unde p_n şi p_{n+1} sunt două numere prime consecutive, are soluţii mai mari ca 0.5 pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Conform conjecturii lui Legendre între două numere pătrate perfecte consecutive există cel puţin un număr prim.

În acest articol demonstrăm că dacă conjectura Legendre este adevărată şi se verifică ipoteza lui Riemann atunci şi conjectura lui Smarandache este adevărată.

1. INTRODUCERE

Conjectura lui Andrica afirmă că inegalitatea $p_{n+1}^{\frac{1}{2}} - p_n^{\frac{1}{2}} < 1$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, unde p_n şi p_{n+1} sunt numere prime consecutive, [1, 8, 12].

Conjectura lui Smarandache este: *ecuaţia*

$$p_{n+1}^x - p_n^x = 1 \ , \tag{1.1}$$

are soluţii > 0.5, *pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$, [13, 20, 23] şi este generalizarea conjecturii Andrica.

Constanta lui Smarandache este numărul $0.5671481302025396\ldots$, [13], soluţia ecuaţiei

$$127^x - 113^x = 1 \ . \tag{1.2}$$

În acest articol ne propunem să demonstrăm că nu există ecuaţie (1.1) în raport cu x, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, cu soluţii mai mici ca 0.5 .

Se cunosc următoarele conjecturi referitoare la extimarea gapurilor dintre două numere prime consecutive.

Conjectura lui Legendre, [7, 15]. *Pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *există* p *număr prim astfel încât*

$$n^2 < p < (n+1)^2 \ .$$

The smallest primes between n^2 and $(n+1)^2$ for $n = 1, 2, \ldots$, are 2, 5, 11, 17, 29, 37, 53, 67, 83, $\ldots$, [19, A007491].

The numbers of primes between n^2 and $(n+1)^2$ for $n = 1, 2, \ldots$ are given by 2, 2, 2, 3, 2, 4, 3, 4, $\ldots$, [19, A014085];

Date: 03 Oct. 2014.

Teorema lui Bertrand. Pentru orice întreg n, $n > 3$, există întotdeauna un număr p prim, astfel încât $n < p < 2(n-1)$. Teorema a fost enunţată de Bertrand în 1845.

Această afirmaţie a fost demonstrată pentru prima dată de Chebyshev în anul 1850. Ramanujan în 1919 , în articolul [14], şi Erdös în 1932, [4], au publicat câte o demonstraţie simplă a acestei teoreme.

Conjectura lui Brocard, [21, 12]. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem inegalitatea*

$$\pi(p_{n+1}^2) - \pi(p_n^2) \geq 4$$

adevărată, unde $\pi(x)$ este funcţia lui Reimann de numărare a numerelor prime $p \leq x$.

Conjectura lui Legendre afirmă că între p_n^2 şi a^2, unde $a \in (p_n, p_{n+1})$, există cel puţin două numere prime şi că între a^2 şi p_{n+1}^2 există, de asemenea, cel puţin două numere prime. Cu alte cuvinte, dacă conjectura lui Legendre este adevărat, atunci există cel puţin patru numere prime între p_n^2 şi p_{n+1}^2.

În consecinţă, în cazul în care conjectura lui Legendre este adevărată, atunci şi conjectura Brocard este, de asemenea, adevărată.

Conjectura lui Andrica, [1, 12, 8]. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem inegalitatea*

$$\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1 ,$$

adevărată.

Deoarece relaţia $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$ este echivalentă cu inegalitatea $\sqrt{p_n + g_n} < \sqrt{p_n} + 1$ deci şi cu relaţia (după ridicare la pătrat) $g_n < 2\sqrt{p_n} + 1$. Prin urmare avem forma echivalentă a conjecturii lui Andrica: *pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem inegalitatea*

$$g_n < 2\sqrt{p_n} + 1 ,$$

adevărată, unde $g_n = p_{n+1} - p_n$.

Paz în 2014, [12], a demonstrat că dacă conjectura lui Legendre este adevărată atunci şi conjectura Andrica este adevărată.

Conjectura lui Cramér [3, 18, 6, 16]. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem relaţia*

$$g_n = O(\ln(p_n)^2) , \tag{1.3}$$

unde $g_n = p_{n+1} - p_n$, sau altfel spus

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g_n}{\ln(p_n)^2} = 1 .$$

Cramér a dat o demonstraţie pentru relaţia

$$g_n = O\big(\sqrt{p_n}\ln(p_n)\big) ,$$

relaţie mult mai slabă ca relaţia (1.3), presupunând adevărată ipoteza lui Riemann.

Westzynthius a dovedit în 1931 că gap-urile cresc mai repede decât logaritmul numerelor prime, [24], adică avem

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g_n}{\ln(p_n)} = \infty \ .$$

Conjectura Cramér-Granville. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem inegalitatea

$$g_n < \kappa \cdot \ln(p_n)^2 \ , \tag{1.4}$$

adevărată pentru $\kappa > 1$, unde $g_n = p_{n+1} - p_n$.

Granville prin teorema lui Maier arată că inegalitatea lui Cramér (1.4) nu descrie în mod adecvat distribuţia numerelor prime. Granville propune $\kappa = 2e^{-\gamma} \approx 1.123\ldots$, luând în considerare numerele prime mici, [5, 8].

Nicely a studiat valabilitatea conjecturii lui Cramér-Grandville, prin calcularea raportului

$$R = \frac{\ln(p_n)}{\sqrt{g_n}} \ ,$$

folosind gap-uri mari. El a constatat că pentru aceste gap-uri avem aproximaţia $R \approx 1.13\ldots$. Deoarece $1/R^2 < 1$, cu ajutorul raportului R nu putem obţine o justificare pentru conjectura lui Cramér-Granville. Un singur lucru este cert că $\kappa > 1$, [9].

Conjectura lui Oppermann, [11, 12]. *Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, în intervalele*

$$[n^2 - n + 1, n^2 - 1] \ \text{şi} \ [n^2 + 1, n^2 + n]$$

există cel puţin un număr p prim.

Conjectura lui Firoozbakht. Pentru orice n număr natural, $n > 4$, avem inegalitatea

$$g_n < \ln(p_n)^2 - \ln(p_n) \ , \tag{1.5}$$

adevărată, unde $g_n = p_{n+1} - p_n$, [17].

În anul 1982 Firoozbakht a verificat această conjectură până la 4.444×10^{12} folosind Tabela 1 cu gap-urile maximale.

Conjectura Paz, [12]. Dacă are loc conjectura lui Legendre atunci:

(1) Intervalul $[n, n+2\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1]$ conţine cel puţin un număr p prim pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;
(2) Intervalul $[n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1, n]$ sau $[n, n + \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1]$ conţin cel puţin un număr p prim, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$.

Remarca 1.1. According to Cases (1) and (2), if Conjecture Legendre is true, then Andrica's conjectureis also true, [12].

2. TEOREME

Face notaţia $\mathbb{P}_{\geq n} = \{p \mid p \text{ număr prim}, \ p \geq n\}$.

Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = q^x - p^x - 1$, unde p şi q sunt numere prime consecutive $q > p$. Este evident că ecuaţia $f(x) = 0$ este echivalentă cu ecuaţia (1.1).

Vom scrie funcţia f sub o formă echivalentă

$$f(x) = (p+g)^x - p^x - 1 \ , \tag{2.1}$$

unde $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ şi $g \in \mathbb{N}^*$ este gap-ul dintre p şi numărul prim consecutiv $q = p + g$. Astfel avem ecuaţia echivalentă cu ecuaţia (1.1)

$$(p+g)^x - p^x = 1 \ . \tag{2.2}$$

După cum bine se ştie pentru $p \geq 3$ avem $g \geq 2$.

Teorema 2.1. *Funcţia f dată de* (2.1) *este strict crescătoare şi convexă pe domeniul de definiţie.*

Demonstraţie. Calculăm derivata întâi şi derivata a doua a funcţiei f

$$f'(x) = \ln(p+g)(p+g)^x - \ln(p)p^x$$

şi

$$f''(x) = \ln(p+g)^2(p+g)^x - \ln(p)^2 p^x \ .$$

Atunci rezultă că $f'(x) > 0$ şi $f''(x) > 0$ pe intervalul $[0,1]$ deci prin urmare funcţia f este strict crescătoare şi convexă pe domeniul de definiţie. □

Corolarul 2.2. *Deoarece $f(0) = -1 < 0$ şi $f(1) = g - 1 > 0$, pentru că $g \geq 2$, pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ şi deoarece funcţia f este monoton crescătoare rezultă că ecuaţia $f(x) = 0$ are o unică soluţie în intervalul* $[0,1]$.

Teorema 2.3. *Fie funcţia $h(p,g) = f(1/2) = \sqrt{p+g} - \sqrt{p} - 1$, pentru $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$, $g \in \mathbb{N}^*$, şi $p > g \geq 2$, este negativă pentru orice g care îndeplineşte condiţia $2 \leq g < 2\sqrt{p} + 1$.*

Demonstraţie. Inecuaţia $\sqrt{p+g} - \sqrt{p} - 1 < 0$ în raport cu g are soluţia $-p \leq g < 2\sqrt{p} + 1$. Având în vedere condiţiile date rezultă că pentru g care îndeplineşte condiţiile $2 \leq g < 2\sqrt{p} + 1$ funcţia h este negativă pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$. □

Remarca 2.4. Condiţia ca $g < 2\sqrt{p} + 1$ este conjectura lui Andrica.

Fie funcţiile $g_A(p) = 1 + 2\sqrt{p}$ şi $g_\alpha(p) = \ln(p)^2 - \alpha \cdot \ln(p)$ pentru $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ şi $\alpha \geq 0$ un parametru real.

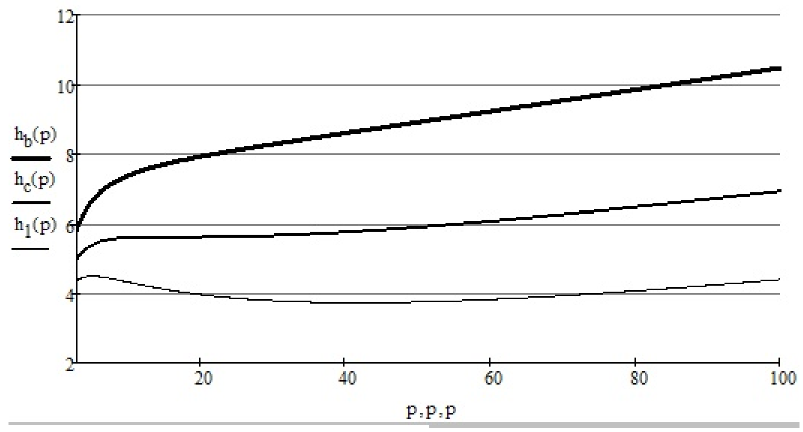

FIGURA 1. Funcţiile h_α

Teorema 2.5. *Inegalitatea* $h_\alpha(p) = g_A(p) - g_\alpha(p) > 0$ *este adevărată*

(1) *pentru* $\alpha = 1$ *şi* $p \in \mathbb{P}_{\geq 3} \setminus \{7, 11, \ldots, 41\}$;
(2) *pentru* $\alpha = c = 4(\ln(4) - 1)$ *şi* $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$;
(3) *pentru* $\alpha = b = 6(\ln(4) - 1)$ *şi* $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ *şi funcţia* h_b *are creşterea cea mai rapidă.*

Demonstraţie. Funcţia h_α are formula

$$h_\alpha(p) = g_A(p) - g_\alpha(p) = 1 + 2\sqrt{p} + \alpha \cdot \ln(p) - \ln(p)^2$$

Derivata funcţiei h_α este

$$h_\alpha{}'(p) = \frac{\alpha - 2\ln(p) + \sqrt{p}}{p} .$$

Funcţia $h_1{}'(p)$ se anulează în valorile $5.099\ldots$ şi $41.816\ldots$ şi $h_1{}'(p) < 0$ pentru $\{7, 11, \ldots, 41\}$ şi $h_1{}'(p) > 0$ pentru $p \in \mathbb{P}_{\geq 3} \setminus \{7, 11, \ldots, 41\}$, de aceea funcţia $h_1(p)$ este crescătoare doar pe mulţimea $p \in \mathbb{P}_{\geq 3} \setminus \{7, 11, \ldots, 41\}$.

În $\alpha = c = 4(\ln(4) - 1) \approx 1.545\ldots$, funcţia h_c este crescătoare pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$. Deoarece $h_c{}'(p) > 0$ pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ şi deoarece

$$h_c(5) = 4\ln(5)\big(\ln(4) - 1\big) - \ln(5)^2 + 2\sqrt{5} + 1$$
$$\approx 5.3687127216027895\ldots .$$

rezultă că $h_c(p) > 0$ pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$.

În $\alpha = b = 6(\ln(4) - 1) \approx 2.317\ldots$, funcţia h_b are creşterea cea mai rapidă pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ (pentru că $h_b'(p) > h_\alpha'(p)$ pentru orice

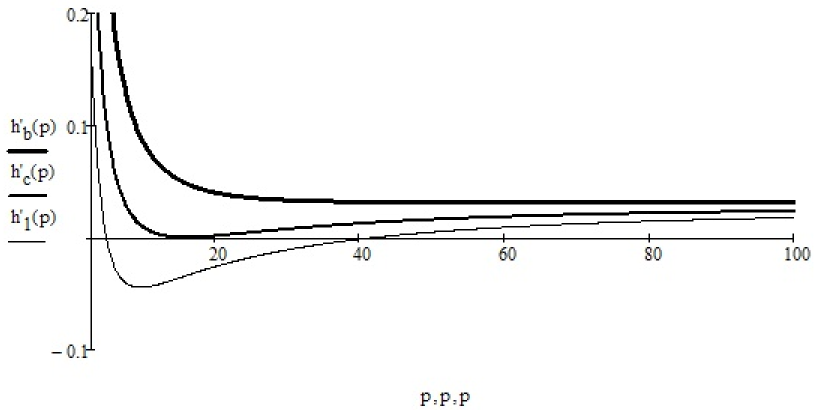

FIGURA 2. Derivatele funcţiilor h_α

$p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ şi $\alpha \geq 0$, $\alpha \neq b$). Deoarece $h_b{}'(p) > 0$ pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ şi deoarece

$$h_b(5) = 6\ln(5)\big(\ln(4) - 1\big) - \ln(5)^2 + 2\sqrt{5} + 1 \approx 6.612146301894512\ldots\ .$$

rezultă că $h_b(p) > 0$ pentru orice $p \in \mathbb{P}_3$.

□

Fie funcţiile:

(1) $g_A(p) = 2\sqrt{p} + 1$, funcţia lui Andrica ,
(2) $g_{CG}(p) = 2 \cdot e^{-\gamma} \cdot \ln(p)^2$, funcţia lui Cramér-Grandville ,
(3) $g_F(p) = \ln(p)^2 - \ln(p)$, funcţia lui Firoozbakht ,
(4) $g_C(p) = \ln(p)^2 - c \cdot \ln(p)$, unde $c = 4(\ln(4) - 1) \approx 1.545\ldots$.

Teorema 2.6. *Pentru funcţia*

$$h_{CG}(p) = h(p, g_{CG}(p)) = \sqrt{2e^{-\gamma}\ln(p)^2 + p} - \sqrt{p} - 1$$

avem $h_{CG}(p) < 0$ *pentru* $p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17\} \cup \{359, 367, \ldots\}$ *şi*

$$\lim_{p\to\infty} h_C G(p) = -1\ .$$

Demonstraţie. Afirmaţiile teoremei rezultă prin calcul direct într-un soft matematic. Vezi graficul din figura 3. □

Teorema 2.7. *Pentru funcţia*

$$h_F(p) = h(p, g_F(p)) = \sqrt{\ln(p)^2 - \ln(p) + p} - \sqrt{p} - 1$$

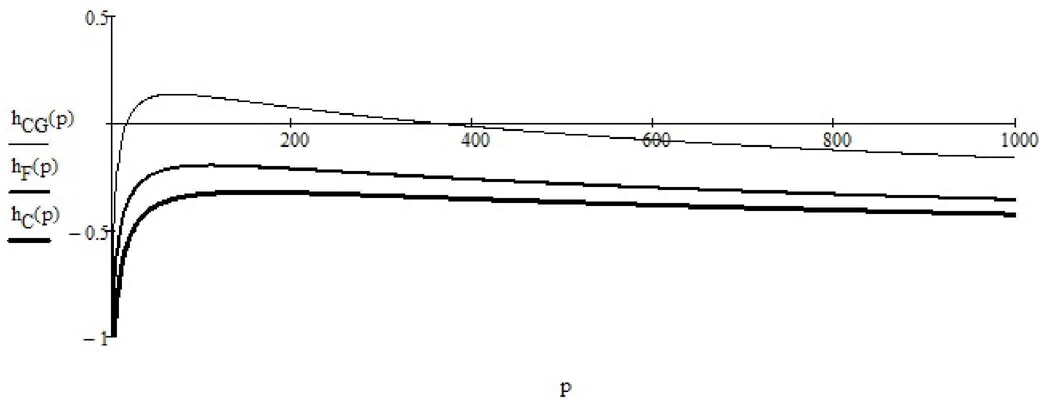

FIGURA 3. Graficele funcţiilor h_C h_F şi h_{CG}

avem maximul funcţiei în $p = 111.152\ldots$ *şi* $h_F(109) = -0.201205\ldots$ *iar* $h_F(113) = -0.201199\ldots$ *şi*

$$\lim_{p\to\infty} h_F(p) = -1 \ .$$

Demonstraţie. Afirmaţiile teoremei rezultă prin calcul direct într-un soft matematic. Vezi graficul din figura 3. □

Teorema 2.8. *Pentru funcţia*

$$h_C(p) = h(p, g_C(p)) = \sqrt{\ln(p)^2 - c\ln(p) + p} - \sqrt{p} - 1$$

avem maximul funcţiei în $p = 152.134\ldots$ *şi* $h_C(151) = -0.3105\ldots$ *iar* $h_C(157) = -0.3105\ldots$ *şi*

$$\lim_{p\to\infty} h_C(p) = -1 \ .$$

Demonstraţie. Afirmaţiile teoremei rezultă prin calcul direct într-un soft matematic. Vezi graficul din figura 3. □

Tabela 1: a gap-urilor maximale, [19, 9, 10]

#	n	p_n	g_n
1	1	2	1
2	2	3	2
3	4	7	4
4	9	23	6
5	24	89	8
6	30	113	14
7	99	523	18

#	n	p_n	g_n
8	154	887	20
9	189	1129	22
10	217	1327	34
11	1183	9551	36
12	1831	15683	44
13	2225	19609	52
14	3385	31397	72
15	14357	155921	86
16	30802	360653	96
17	31545	370261	112
18	40933	492113	114
19	103520	1349533	118
20	104071	1357201	132
21	149689	2010733	148
22	325852	4652353	154
23	1094421	17051707	180
24	1319945	20831323	210
25	2850174	47326693	220
26	6957876	122164747	222
27	10539432	189695659	234
28	10655462	191912783	248
29	20684332	387096133	250
30	23163298	436273009	282
31	64955634	1294268491	288
32	72507380	1453168141	292
33	112228683	2300942549	320
34	182837804	3842610773	336
35	203615628	4302407359	354
36	486570087	10726904659	382
37	910774004	20678048297	384
38	981765347	22367084959	394
39	1094330259	25056082087	456
40	1820471368	42652618343	464
41	5217031687	127976334671	468
42	7322882472	182226896239	474
43	9583057667	241160624143	486
44	11723859927	297501075799	490
45	11945986786	303371455241	500
46	11992433550	304599508537	514

#	n	p_n	g_n
47	16202238656	416608695821	516
48	17883926781	461690510011	532
49	23541455083	614487453523	534
50	28106444830	738832927927	540
51	50070452577	1346294310749	582
52	52302956123	1408695493609	588
53	72178455400	1968188556461	602
54	94906079600	2614941710599	652
55	251265078335	7177162611713	674
56	473258870471	13829048559701	716
57	662221289043	19581334192423	766
58	1411461642343	42842283925351	778
59	2921439731020	90874329411493	804
60	5394763455325	171231342420521	806
61	6822667965940	218209405436543	906
62	35315870460455	1189459969825483	916
63	49573167413483	1686994940955803	924
64	49749629143526	1693182318746371	1132
65	1175661926421598	43841547845541059	1184
66	1475067052906945	55350776431903243	1198
67	2133658100875638	80873624627234849	1220
68	5253374014230870	203986478517455989	1224
69	5605544222945291	218034721194214273	1248
70	7784313111002702	305405826521087869	1272
71	8952449214971382	352521223451364323	1328
72	10160960128667332	401429925999153707	1356
73	10570355884548334	418032645936712127	1370
74	20004097201301079	804212830686677669	1442
75	34952141021660495	1425172824437699411	1476

Notăm cu $a_n = \lfloor g_A(p_n) \rfloor$ (Andrica conjecture), cu $cg_n = \lfloor g_{CG}(p_n) \rfloor$ (Cramér-Grandville conjecture) cu $f_n = \lfloor g_F(p_n) \rfloor$ (Firoozbakht conjecture) şi cu $c_n = \lfloor g_C(p_n) \rfloor$. Prezentăm tabelul cu gapurile maximale, [9], şi valorile a_n, cg_n, f_n şi c_n.

Alte referinţe pentru *maximal gaps* se găsesc pe site-urile [2, 22, 10]. Tabelul confirmă conjecturile prezentate în Tabela 2 de la $n \geq 9$ (adică de la al 9-lea număr prim, adică $p_9 = 25$, cel ce ocupă poziţia 5 în tabela *gap-urilor maximale*).

Tabela 2: a aproximaţiilor gap-urilor maximale

#	a_n	cg_n	f_n	c_n
1	3	0	-1	-1
2	4	1	0	-1
3	6	4	1	0
4	10	11	6	4
5	19	22	15	13
6	22	25	17	15
7	46	43	32	29
8	60	51	39	35
9	68	55	42	38
10	73	58	44	40
11	196	94	74	69
12	251	104	83	78
13	281	109	87	82
14	355	120	96	91
15	790	160	131	123
16	1202	183	150	143
17	1217	184	151	144
18	1404	192	158	151
19	2324	223	185	177
20	2330	223	185	177
21	2837	236	196	188
22	4314	264	220	211
23	8259	311	260	251
24	9129	318	267	257
25	13759	350	294	285
26	22106	389	328	317
27	27547	407	344	333
28	27707	408	344	334
29	39350	439	371	360
30	41775	444	375	365
31	71952	494	419	407
32	76241	499	423	412
33	95937	521	443	431
34	123978	546	464	452
35	131186	552	469	457
36	207142	598	510	497
37	287598	633	540	527

#	a_n	cg_n	f_n	c_n
38	299113	637	544	531
39	316583	643	549	536
40	413051	672	574	561
41	715476	734	628	614
42	853761	754	646	632
43	982163	771	660	646
44	1090874	783	671	657
45	1101584	784	672	658
46	1103811	785	672	658
47	1290905	803	689	674
48	1358957	810	694	679
49	1567786	827	709	694
50	1719108	838	719	704
51	2320599	875	752	736
52	2373770	878	754	739
53	2805843	899	773	757
54	3234157	918	788	773
55	5358046	983	846	830
56	7437486	1028	885	868
57	8850161	1051	906	889
58	13090804	1106	953	936
59	19065606	1159	1000	983
60	26171079	1206	1041	1023
61	29543826	1224	1057	1039
62	68977097	1353	1170	1151
63	82146088	1380	1194	1175
64	82296594	1380	1194	1175
65	418767467	1648	1430	1409
66	470534915	1668	1447	1426
67	568765768	1701	1476	1455
68	903297246	1783	1548	1526
69	933883765	1789	1553	1532
70	1105270694	1820	1580	1558
71	1187469955	1833	1592	1570
72	1267169959	1844	1602	1580
73	1293108884	1848	1605	1583
74	1793558286	1908	1658	1636
75	2387612050	1962	1705	1682

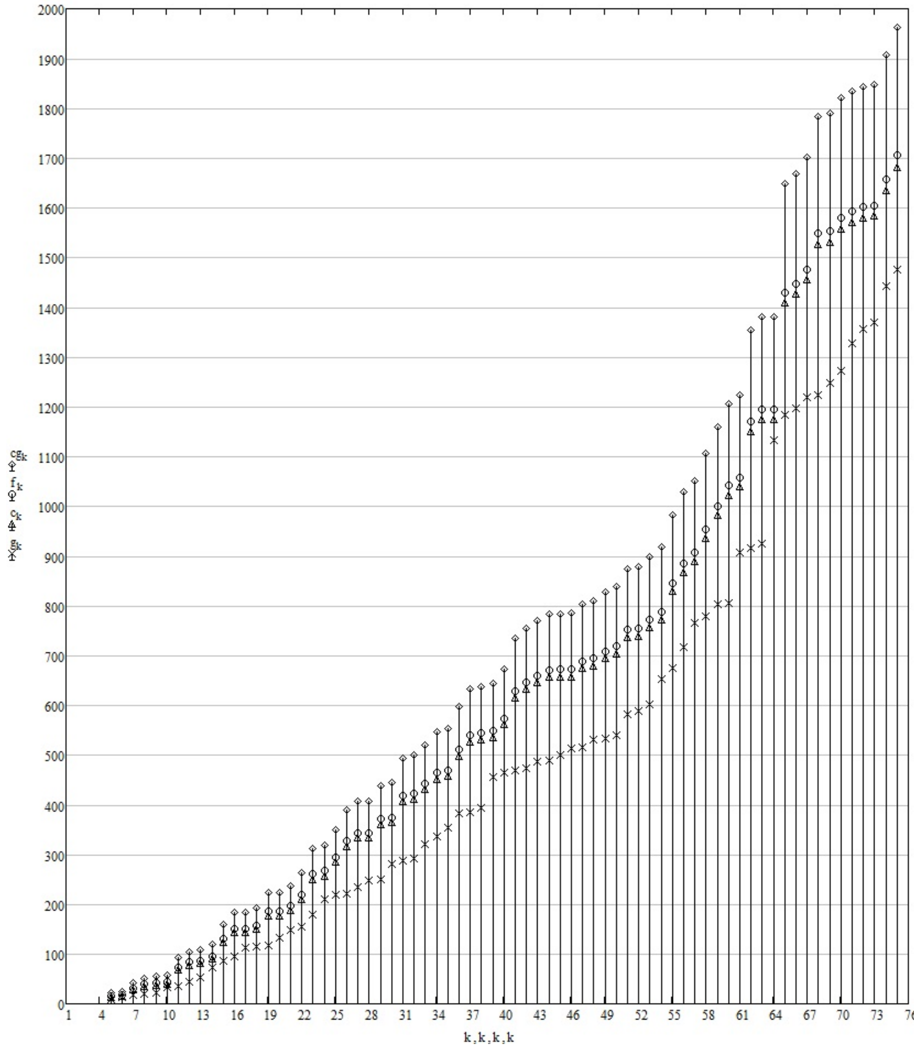

FIGURA 4. Graficul aproximării gapurilor maximale

Tabelul 2 şi graficul 4 verifică presupunerea că

$$p_{n+1} - p_n < \ln(p_n)^2 - \big(4(\ln(4) - 1)\big) \cdot \ln(p_n)$$

pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$.

Fie funcţiile $g_\alpha : \mathbb{P}_{\geq 3} \to \mathbb{R}_+$,

$$g_\alpha(p) = \ln(p)^2 - \alpha \cdot \ln(p)$$

şi $h_\alpha : \mathbb{P}_{\geq 3} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$, cu p fixat,

$$h_\alpha(p, x) = (p + g_\alpha(p))^x - p^x - 1$$

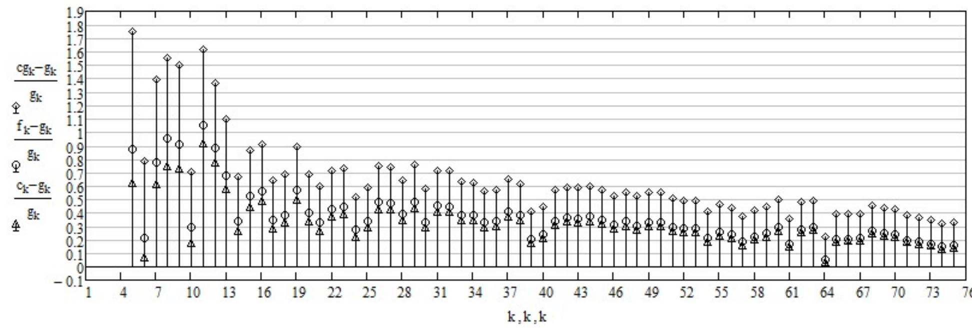

FIGURA 5. Erorile relative

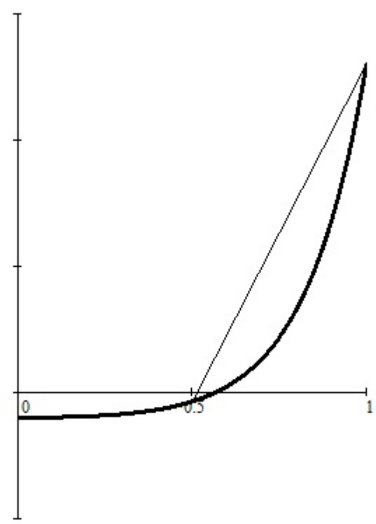

FIGURA 6. Funcţia f şi metoda secantei

care, conform teoremei 2.1, este strict crescătoare şi convexă pe domeniul de definiţie, iar conform corolarului 2.2 are o singură soluţie în intervalul $[0, 1]$.

Pentru ecuaţia $h_\alpha(p, x) = 0$ considerăm metoda secantei, cu iteraţiile iniţiale x_0 şi x_1 (vezi figura 6). Iteraţia x_2 este dată de formula

$$x_2 = \frac{x_1 \cdot h_\alpha(p, x_0) - x_0 \cdot h_\alpha(p, x_1)}{h_\alpha(p, x_1) - h_\alpha(p, x_0)} \;. \tag{2.3}$$

Dacă conjectura lui Andrica, $(p + g)^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}} - 1 < 0$ pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$, $g \in \mathbb{N}^*$ şi $p > g \geq 2$, este adevărată, atunci $h_\alpha(p, \frac{1}{2}) < 0$ (conform Remarca 1.1 dacă conjectura lui Legendre este adevărată atunci şi conjectura lui Andrica este adevărată). Deoarece funcţia $h_\alpha(p, \cdot)$ este strict crescătoare şi convexă iteraţia x_2 **aproximează prin**

lipsă soluţia ecuaţiei $h_\alpha(p,x) = 0$, (în raport cu x). După calcule simple avem că funcţia a care aproximează soluţia x_2 în funcţie de h_α, p, x_0 şi x_1 este:

$$a(p,h_\alpha,x_0,x_1) = \frac{x_1 \cdot h_\alpha(p,x_0) - x_0 h - \alpha(p,x_1)}{h_\alpha(p,x_1) - h_\alpha(p,x_0)}\ . \tag{2.4}$$

Considerăm funcţia $a_\alpha(p) = a(p,h_\alpha,\frac{1}{2},1)$, atunci avem

$$a_\alpha(p) = \frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{p}-\sqrt{\ln(p)^2-\alpha\ln(p)+p}}{2\big(\ln(p)^2-\alpha\ln(p)+\sqrt{p}-\sqrt{\ln(p)^2-\alpha\ln(p)+p}\big)}\ . \tag{2.5}$$

Teorema 2.9. *Funcţia $a_\alpha(p)$ care aproximează prin lipsă soluţia ecuaţiei* (2.2) *are valori în segmentul deschis* $(0.5,1)$ *pentru orice* $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ *dacă* $\alpha \geq c = 4(\ln(4)-1)$.

Demonstraţie. Conform teoremei 2.5 pentru $\alpha \geq c = 4(\ln(4)-1)$ avem $\ln(p)^2 - \alpha\cdot\ln(p) < 2\sqrt{p}+1$ pentru orice $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$.

Funcţia a_α se poate scrie sub forma

$$a_\alpha(p) = \frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{p}-\sqrt{\alpha+p}}{2\big(\alpha+\sqrt{p}-\sqrt{\alpha+p}\big)}\ .$$

după o analiză elementară rezultă că

$$\frac{1+\sqrt{p}-\sqrt{\alpha+p}}{2\big(\alpha+\sqrt{p}-\sqrt{\alpha+p}\big)} > 0\ ,$$

pentru $\alpha \in (-\infty, 1-2\sqrt{p}) \cup (0,+\infty) \cap (0, 1+2\sqrt{p})$, de unde rezultă că $a_\alpha(p) > 0.5$ pentru $p \in \mathbb{P}_{\geq 3}$ şi avem

$$\lim_{p\to\infty} a_\alpha(p) = \frac{1}{2}\ .$$

□

Corolarul 2.10. *Dacă conjectura lui Legendre este adevărătă atunci şi conjectura lui Andrica este adevărată, conform lui Paz* [12]. *Dacă Conjectura lui Andrica este adevărată atunci conjectura lui Cira este adevărată. Dacă conjectura lui Cira este adevărată atunci şi conjectura lui Smarandache este adevărată. În concluzie dacă conjectura lui Legendre este adevărată atunci şi conjectura lui Smarandache este adevărată.*

3. Constanta Smarandache

Soluţiile ecuaţiei (2.2) ordonate crescător folosind Tabela 2 a gapurilor maximale.

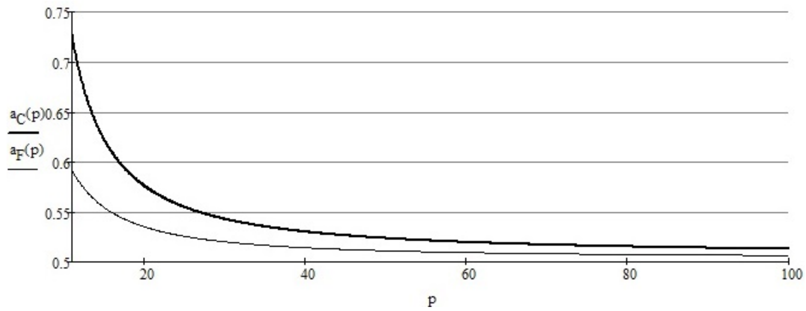

FIGURA 7. Graficul funcţiilor a_C şi a_F

Tabela 3: a soluţiilor ecuaţiei (2.2)

p	g	soluţia ecuaţiei (2.2)
113	14	0.5671481305206224...
1327	34	0.5849080865740931...
7	4	0.5996694211239202...
23	6	0.6042842019286720...
523	18	0.6165497314215637...
1129	22	0.6271418980644412...
887	20	0.6278476315319166...
31397	72	0.6314206007048127...
89	8	0.6397424613256825...
19609	52	0.6446915279533268...
15683	44	0.6525193297681189...
9551	36	0.6551846556887808...
155921	86	0.6619804741301879...
370261	112	0.6639444999972240...
492113	114	0.6692774164975257...
360653	96	0.6741127001176469...
1357201	132	0.6813839139412406...
2010733	148	0.6820613370357171...
1349533	118	0.6884662952427394...
4652353	154	0.6955672852207547...
20831323	210	0.7035651178160084...
17051707	180	0.7088121412466053...
47326693	220	0.7138744163020114...
122164747	222	0.7269826061830018...
3	2	0.7271597432435757...
191912783	248	0.7275969819805509...

p	g	soluţia ecuaţiei (2.2)
189695659	234	0.7302859105830866...
436273009	282	0.7320752818323865...
387096133	250	0.7362578381533295...
1294268491	288	0.7441766589716590...
1453168141	292	0.7448821415605216...
2300942549	320	0.7460035467176455...
4302407359	354	0.7484690049408947...
3842610773	336	0.7494840618593505...
10726904659	382	0.7547601234459729...
25056082087	456	0.7559861641728429...
42652618343	464	0.7603441937898209...
22367084959	394	0.7606955951728551...
20678048297	384	0.7609716068556747...
127976334671	468	0.7698203623795380...
182226896239	474	0.7723403816143177...
304599508537	514	0.7736363009251175...
241160624143	486	0.7737508697071668...
303371455241	500	0.7745991865337681...
297501075799	490	0.7751693424982924...
461690510011	532	0.7757580339651479...
416608695821	516	0.7760253389165942...
614487453523	534	0.7778809828805762...
1408695493609	588	0.7808871027951452...
1346294310749	582	0.7808983645683428...
2614941710599	652	0.7819658004744228...
1968188556461	602	0.7825687226257725...
7177162611713	674	0.7880214782837229...
13829048559701	716	0.7905146362137986...
19581334192423	766	0.7906829063252424...
42842283925351	778	0.7952277512573828...
90874329411493	804	0.7988558653770882...
218209405436543	906	0.8005126614171458...
171231342420521	806	0.8025304565279002...
1693182318746371	1132	0.8056470803187964...
1189459969825483	916	0.8096231085041140...
1686994940955803	924	0.8112057874892308...
43841547845541060	1184	0.8205327998695296...
55350776431903240	1198	0.8212591131062218...
80873624627234850	1220	0.8224041089823987...

p	g	soluţia ecuaţiei (2.2)
218034721194214270	1248	0.8258811322716928...
352521223451364350	1328	0.8264955008480679...
1425172824437699300	1476	0.8267652954810718...
305405826521087900	1272	0.8270541728027422...
203986478517456000	1224	0.8271121951019150...
418032645936712100	1370	0.8272229385637846...
401429925999153700	1356	0.8272389079572986...
804212830686677600	1442	0.8288714147741382...
2	1	1...

4. Concluzii

Prin urmare dacă conjectura Legendre este adevărată şi se verifică ipoteza lui Riemann atunci şi conjectura lui Smarandache este adevărată.

Conjectura tare a lui Smarandache este: *soluţiile ecuaţiilor* (1.1), *pentru* $n \in \mathbb{N}^*$, *sunt mai mari ca* $W(1) \approx 0.56714329040978387\ldots$, constanta lui Lambert, soluţia ecuaţiei $x \cdot e^x = 1$, [19, A030178].

După cum se ştie $c_S \approx 0.5671481305206224\ldots$, constanta lui Smarandache este mai mare ca şi $W(1) \approx 0.56714329040978387\ldots$, constanta lui Lambert, [19, A030178], cu $4.84 \cdot 10^{-6}$, [19, A038458].

Pentru a face demonstraţia acestei afirmaţii , cu tehnica de mai sus, va trebui să determinăm o funcţie de aproximare a gap-urilor mult mai bună.

Bibliografie

1. D. Andrica, *Note on a conjecture in prime number theory*, Studia Univ. Babes-Bolyai Math. **31** (1986), no. 4, 44–48.
2. C. Caldwell, *The prime pages*, `http://primes.utm.edu/n0tes/gaps.html`, 2012.
3. H. Cramér, *On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers*, Acta Arith. **2** (1936), 23–46.
4. P. Erdös, *Beweis eines satzes von tschebyschef*, Acta Scientifica Mathematica **5** (1932), 194–198.
5. A. Granville, *Harald Cramér and the distribution of prime numbers*, Scand. Act. J. **1** (1995), 12–28.
6. R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, 2nd ed., p. 7, Springer-Verlag, New York, 1994.
7. G. H. Hardy and W. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed., ch. §2.8 Unsolved Problems Concerning Primes and §3 Apendix, pp. 19 and 415–416, Oxford University Press, Oxford, England, 1979.

8. P. Mihăilescu, *On some conjectures in additive number theory*, Newsletter of the European Mathematical Society **1** (2014), no. 92, 13–16.
9. T. R. Nicely, *New maximal prime gaps and first occurrences*, Mathematics of Computation **68** (1999), no. 227, 1311–1315.
10. T. Oliveira e Silva, *Gaps between consecutive primes*, `http://sweet.ua.pt/tos/gaps.html`, 2014.
11. H. C. Orsted, G. Forchhammer, and J. J. Sm. Steenstrup (eds.), *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder*, pp. 169–179, `http://books.google.ro/books?id=UQgXAAAAYAAJ`, 1883.
12. G. A. Paz, *On Legendre's, Brocard's, Andrica's, and Oppermann's conjectures*, arXiv:1310.1323v2 [math.NT], 2 Apr 2014.
13. M. I. Petrescu, *A038458*, `http://oeis.org`, 3 Oct. 2014.
14. S. Ramanujan, *A proof of Bertrand's postulate*, Journal of the Indian Mathematical Society **11** (1919), 181–182.
15. P. Ribenboim, *The New Book of Prime Number Records*, 3rd ed., pp. 132–134 and 206–208 and 397–398, Springer-Verlag, New York, 1996.
16. H. Riesel, *Prime Numbers and Computer Methods for Factorization*, 2nd ed., ch. The Cramér Conjecture, pp. 79–82, MA: Birkhäuser, Boston, 1994.
17. C. Rivera, *Conjecture 30. The Firoozbakht conjecture*, `http://primesmagicgames.altervista.org/wp/competitions`, 22 Aug. 2012.
18. ______, *Problems & puzzles: Conjecture 007. – The Cramér's conjecture*, `http://www.primepuzzles.net/conjectures/conj_007.htm`, 03 Oct. 2014.
19. N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, `http://oeis.org`, 8 Oct. 2014.
20. F. Smarandache, *Conjectures which generalize Andrica's conjecture*, Octogon **7** (1999), no. 1, 173–176.
21. E. W. Weisstein, *Brocard's conjecture*, From MathWorld–A Wolfram Web Resource `http://mathworld.wolfram.com/BrocardsConjecture.html`, 26 Sept. 2014.
22. ______, *Prime gaps*, From MathWorld–A Wolfram Web Resource `http://mathworld.wolfram.com/PrimeGaps.html`, 26 Sept. 2014.
23. ______, *Smarandache constants*, From MathWorld–A Wolfram Web Resource `http://mathworld.wolfram.com/SmarandacheConstants.html`, 26 Sept. 2014.
24. E. Westzynthius, *Über die Verteilung der Zahlen die zu den n ersten Primzahlen teilerfremd sind*, Commentationes Physico-Mathematicae Helingsfors **5** (1931), 1–37.

* "AUREL VLAICU" UNIVERSITY OF ARAD, ROMÂNIA