Funcţiile lui Smarandache – proprieţăţi elementare

Prezenta Notă este rezultatul unei selecţii din materialul trimis Redacţiei de către Minh Perez, Rehoboth, NM, SUA.

Funcţia Smarandache apare în literatura matematică cu mult timp în urmă (date istorice pot fi găsite în **J. Sándor** - *The Smarandache function introduced more than 80 years ago!* Octogon Mathematical Magazine, 9 (2001), no. 2, 920–921). **F. Smarandache** redescoperă şi cercetează această funcţie şi are meritul de a fi generat un curent de preocupări în privinţa acesteia.

Definim *funcţia Smarandache* $S(n)$ pe mulţimea $\mathbb{N}^*$ prin: $S(1) = 1$, iar pentru $n \geq 2$, $S(n)$ este cel mai mic număr natural pentru care $S(n)!$ se divide cu n.

În cele ce urmează, sunt adunate o serie de proprietăţi ale funcţiei Smarandache şi ale unor generalizări ale ei.

1. *Dacă p este prim, atunci $S(p) = p$. Reciproca este adevărată?* (**Anthony Begay**)

Soluţie. Dacă p este prim, atunci $r!$ nu este divizibil cu p pentru $r < p$. Pe de altă parte, $p!$ se divide cu p şi, cum este cel mai mic număr cu această proprietate, rezultă că $S(p) = p$. Reciproca nu este adevărată: lăsând la o parte cazul $S(1) = 1$, cu 1 neprim, avem contraexemplul $S(4) = 4$. Pot fi găsite alte contraexemple?

2. *Dacă n este liber de pătrate, iar p este cel mai mare factor prim din descompunerea sa, atunci $S(n) = p$.* (**Leonardo Motta**)

Soluţie. Fie $n = a \cdot b \cdot \ldots \cdot p$ descompunerea în factori primi a lui n, unde $a < b < \cdots < p$. Atunci $p!$ conţine în scrierea sa toţi divizorii primi ai lui n, deci $S(n) \leq p$. Pentru $r < p$, observăm că $r!$ nu se divide cu p, deci $S(n) \geq p$. Rămâne că $S(n) = p$, ceea ce doream.

În particular, $S(n) = p = \dfrac{n}{q} \leq \dfrac{n}{2}$ (deoarece în scrierea $n = p \cdot q$, avem $q \geq 2$) (**T. Yau**)

3. *Dacă p este prim, atunci $S(p^p) = p^2$.* (**Alecu Stuparu**)

Soluţie. Deoarece $S(p^p)$ trebuie să se dividă cu p, iar p este prim, rezultă că $S(p^p)$ trebuie să fie un multiplu nenul al lui p, fie acesta k_p. Mai mult, fiindcă $S(p^p)$ se divide cu p^p, trebuie să avem $k_p \geq p$ (se vede că $p(p-1)!$ se divide cu p^{p-1}, dar nu şi cu p^p). Atunci p^2 este cel mai mic număr al cărui factorial se divide cu p^p, de unde concluzia.

Asemănător pot fi definite *a doua şi a treia funcţie Smarandache*: $S_2(n)$ este cel mai mic număr natural pentru care $S_2(n)!!$ se divide cu n (unde $m!!$ este produsul numerelor nenule cel mult egale cu m, de aceeaşi paritate ca şi m); $S_3(n)$ este cel mai mic număr natural pentru care $S_3(n)!!!$ se divide cu n (unde $m!!!$ este produsul numerelor nenule cel mult egale cu m, care dau acelaşi rest ca şi m la împărţirea cu 3).

4. *Dacă $n \geq 3$ este un număr par liber de pătrate, iar p este cel mai mare factor prim din descompunerea sa, atunci $S_2(n) = 2p$.* (**Gilbert Johnson**)

Soluţie. Fie $n = 2 \cdot a \cdot b \cdot \ldots \cdot p$, cu $2 < a < b < \cdots < p$ numere prime. Dacă $S_2(n) = 2p - k$, unde $1 \leq k < 2p$, atunci $(2p - k)!!$ nu se divide prin p. Evident că

$(2p)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2a) \cdot \ldots \cdot (2b) \cdot \ldots \cdot (2p)$ se divide la n şi, cum este cel mai mic număr cu această proprietate, urmează concluzia.

5. *Fie p număr prim impar; să se determine $S_2\left(p^{k+2}\right)$, unde $p = 2k+1$.* (**Ivan Godunov**)

Soluţie. Ca în rezolvarea problemei **3**, se arată că $S_2\left(p^{k+2}\right) = p^2$.

6. *Dacă n este multiplu nenul al lui 3, atunci $S_3(n)$ este tot multiplu de 3.* (**K. L. Ramsharan**)

Soluţie. Fie $m = S_3(n)$; dacă m nu ar fi multiplu de 3, atunci $m!!! = m(m-3) \cdot \cdot (m-6) \ldots$ nu s-ar divide nici el cu 3 şi atunci $m!!!$ nu se divide cu n. Rămâne că $S_3(n)$ este multiplu de 3.

7. *Să se rezolve ecuaţia diofantică $S_2(x) = p$, unde p este un număr prim.* (**Gilbert Johnson**)

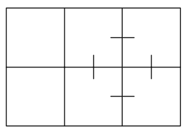
Soluţie. Pentru p prim fixat, vom determina numărul de numere naturale x astfel încât $S_2(x) = p$. Avem că $p!!$ se divide cu x, iar p este cel mai mic întreg cu această proprietate. Cum p este prim, x trebuie să fie multiplu de p.

a) Dacă $p = 2$, atunci $x = 2$.

b) Dacă $p > 2$, atunci x este produsul dintre p şi o combinaţie de 0, 1 sau mai mulţi dintre factorii 3, 5, ... , $p-2$. Notând $k = \dfrac{p-3}{2}$, avem $C_k^0 = 1$ soluţie cu un singur factor ($x = p$), C_k^1 soluţii cu doi factori ($x = p \cdot 3, p \cdot 5, \ldots, p \cdot (p-2)$), C_k^2 soluţii cu trei factori etc. Numărul total de soluţii este cel mult egal cu $C_k^0 + C_k^1 + \cdots + C_k^k = 2^k$.

Recreaţii ... matematice

Soluţiile problemelor enunţate la paginile 15 şi 26.



1. Înlăturând segmentele marcate se obţine o figură formată din trei pătrate.

2. Cu o tăietură făcută în veriga a treia obţinem trei bucăţi de lanţ formate din o verigă, două verigi şi patru verigi. În prima zi călătorul plaţeşte o verigă; a doua zi dă bucata formată din două verigi şi ia înapoi o verigă; a treia zi dă hangiului veriga izolată; a patra zi dă bucata din patru verigi şi primeşte ca rest celelalte trei verigi de la hangiu; a cincea zi dă iarăşi veriga izolată; a şasea zi dă bucata din două verigi şi ia veriga înapoi; în sfârşit, în a şaptea zi dă hangiului şi veriga rămasă.

Aşadar, este suficientă o singură în lanţ pentru a putea fi făcută plata convenită zilnic.

3. Iată interpretarea corectă a calculului efectuat: dacă există o soluţie în $\mathbb{R}$ a ecuaţiei $x^2 - x + 1 = 0$, aceasta poate fi -1. Egalitatea $3 = 0$, obţinută punând $x = -1$ în ecuaţie, arată că -1 nu este soluţie şi, deci, ecuaţia nu are soluţii în $\mathbb{R}$.