Вывод рекуррентного соотношения ортогональных многочленов из процесса ортогонализации Грама-Шмидта, а также схема применения полученного рекуррентного соотношения

Сухопаров Станислав Юрьевич
s.suhoparov@gmail.com

8 ноября 2014 г.

Предисловие

В данной статье показан вывод рекуррентного соотношения для ортогональных многочленов из процесса ортогонализации Грама-Шмидта, а также в **Заключении** статьи показана схема применения данного рекуррентного соотношения и нахождение с её помощью ортогональных многочленов.

Построние ортогональной системы по линейно-независимой системе функций

Напомним, что процесс Грама-Шмидта, процесс построения ортогональной системы функций по системе линейно-независимых функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^m$ вылядит следующим образом:

$$\begin{cases} e_0 = \varphi_0 \\ e_1 = \varphi_1 - \frac{\langle \varphi_1, e_0 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0 \\ e_2 = \varphi_2 - \frac{\langle \varphi_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \frac{\langle \varphi_2, e_0 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0 \\ e_3 = \varphi_3 - \frac{\langle \varphi_3, e_2 \rangle}{\|e_2\|^2} e_2 - \frac{\langle \varphi_3, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \frac{\langle \varphi_3, e_0 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0 \\ \dots \\ e_m = \varphi_m - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\langle \varphi_m, e_k \rangle}{\|e_k\|^2} e_k \end{cases} \quad \text{- где } \|e_k\|^2 = \langle e_k, e_k \rangle$$

Если систему линейно-независимых функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^m$ определённую на $[x_1, x_n]$ заменами(f, l) можно привести к $\{t^k\}_{k=0}^m$ определённую на $[-1, 1]$, а потом произвести обратную замену(f^{-1}, l^{-1}):

$$\begin{cases} \{\varphi_k(x)\} \xrightarrow{f} \{t^k\} \\ x \xrightarrow{l} t \\ x \in [x_1, x_n], \quad t \in [-1, 1] \end{cases}$$

Тогда достаточно рассмотреть процесс ортогонализации системы $\{t^k\}_{k=0}^m$.
Отображение $x \in [x_1, x_n] \xrightarrow{l} t \in [-1, 1]$ производится чтобы получить симметрию относительно нуля, тогда система $\{t^k\}_{k=0}^m$ становится набором чётных и нечётных функций.

Далее считаем, что система $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^m$ отображена на симметричную относительно нуля область определения, поэтому обладает следующими свойствами:

$$\begin{cases} \varphi_k \varphi_j = \varphi_{k+j} \ - \\ \langle \varphi_k \varphi_j \rangle = \int_{-1}^{1} \varphi_k \varphi_j dt = \begin{cases} \neq 0, & k+j - \\ 0, & k+j \ - \end{cases} \quad - \end{cases}$$

Системы $\{\varphi_k\}_{k=0}^m$ и $\{e_k\}_{k=0}^m$ связаны процессом Грама-Шмидта:

$$\begin{cases} e_0 = \varphi_0 = 1 \\ e_1 = \varphi_1 - \frac{\langle \varphi_1 e_0, e_0 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0 = \varphi_1 - \langle \varphi_1, e_0 \rangle e_0 \\ e_2 = \varphi_2 - \frac{\langle \varphi_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \langle \varphi_2, e_0 \rangle e_0 \\ e_3 = \varphi_3 - \frac{\langle \varphi_3, e_2 \rangle}{\|e_2\|^2} e_2 - \frac{\langle \varphi_3, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \langle \varphi_3, e_0 \rangle e_0 \end{cases}$$

Рассмотрим первые три члена ортогональной последовательности e_1, e_2, e_3, в случае когда $\{\varphi_k\} = \{t^k\}$, с областью определения симметричной относительно нуля, $t \in [-1, 1]$, со скалярным произведением:
$\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \int_{-1}^{1} \varphi_k \varphi_j dt$, тогда:

$$\langle \varphi_1, e_0 \rangle = \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle = \langle t, 1 \rangle = 0$$

Таким образом:

$$e_1 = \varphi_1$$

Рассмотрим e_2, очевидно что $\varphi_2 = e_1 \varphi_1$ тогда e_2:

$$e_2 = e_1 \varphi_1 - \frac{\langle e_1 \varphi_1, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \frac{\langle e_1 \varphi_1, e_0 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0 \tag{1}$$

а так как $e_1 = \varphi_1$:

$e_2 = e_1 \varphi_1 - \frac{\langle e_1 \varphi_1, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1 - \langle e_1 \varphi_1, e_0 \rangle e_0$

$\langle e_1 \varphi_1, e_1 \rangle = \langle \varphi_1 \varphi_1, \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle = 0$

таким образом e_2 вырожается через два предыдущих элемента e_1 e_0:

$$e_2 = \varphi_1 e_1 - \frac{\langle e_1 \varphi_1, e_0 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0 \tag{2}$$

Теперь будем рассматривать получаение e_3 через два предыдущих e_2, e_1: Для это умножим (2) на φ_1, и из расчёта $e_1 = \varphi_1$ и $\varphi_1^3 = \varphi_3$:

$$\varphi_1 e_2 = \varphi_3 - \langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\varphi_1$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 e_2 + \langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\varphi_1 \tag{3}$$

Подставим (3) в e_3 из процесса Грама-Шмидта:

$$e_3 = \varphi_3 - \frac{\langle\varphi_3, e_2\rangle}{\|e_2\|^2}e_2 - \frac{\langle\varphi_3, e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 - \langle\varphi_3, e_0\rangle e_0$$

Тогда:

$$e_3 = \varphi_1 e_2 + \langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\varphi_1 - \frac{\langle\varphi_1 e_2 + \langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\varphi_1, e_2\rangle}{\|e_2\|^2}e_2 - \frac{\langle\varphi_1 e_2 + \langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\varphi_1, e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 - \langle\varphi_3, e_0\rangle e_0 \tag{4}$$

Последний член из (4) равен нулю, так как: $\varphi_3 \cdot \varphi_0 = \varphi_3$ - нечётная функция, по определению скалярного произведения:

$$\langle\varphi_3, e_0\rangle = \langle\varphi_3, \varphi_0\rangle = 0$$

Распишем (4):

$$e_3 = \varphi_1 e_2 + \langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\varphi_1 - \frac{\langle\varphi_1 e_2 + \langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\varphi_1, e_2\rangle}{\|e_2\|^2}e_2 - \frac{\langle\varphi_1 e_2 + \langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\varphi_1, e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 =$$

$$\varphi_1 e_2 + \langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\varphi_1 - \frac{\langle\varphi_1 e_2, e_2\rangle}{\|e_2\|^2}e_2 - \frac{\langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\langle\varphi_1, e_2\rangle}{\|e_2\|^2}e_2 - \frac{\langle\varphi_1 e_2, e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 - \frac{\langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\langle\varphi_1, e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1$$

По аналогии с (1) оставим без изменений следующие члены:

$$\varphi_1 e_2; \quad \frac{\langle\varphi_1 e_2, e_2\rangle}{\|e_2\|^2}e_2; \quad \frac{\langle\varphi_1 e_2, e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1$$

Покажим что $\frac{\langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\langle\varphi_1, e_2\rangle}{\|e_2\|^2} = 0$ подставим e_2 как $e_2 = \varphi_2 - \langle\varphi_2, e_0\rangle e_0$
тогда $\langle\varphi_1, \varphi_2 - \langle\varphi_2, e_0\rangle e_0\rangle = \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle - \langle\varphi_2, e_0\rangle\langle\varphi_1, e_0\rangle$
$\langle\varphi_1, \varphi_2\rangle = 0 \;\; \langle\varphi_1, e_0\rangle = 0$

Таким образом имеем:

$$e_3 = \varphi_1 e_2 - \frac{\langle\varphi_1 e_2, e_2\rangle}{\|e_2\|^2}e_2 - \frac{\langle\varphi_1 e_2, e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 + \langle\varphi_1 e_1, e_0\rangle\varphi_1 - \frac{\langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\langle\varphi_1, e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1$$

Далее расмотрим разность последних двух членов, предыдущего соотношения:

$$\langle\varphi_1 e_1, e_0\rangle\varphi_1 - \frac{\langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\langle\varphi_1, e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 = \{\ \varphi_1 = e_1\} =$$

$$= \langle\varphi_1 e_1, e_0\rangle e_1 - \frac{\langle e_1\varphi_1, e_0\rangle\langle e_1, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle}e_1 = 0$$

Таким образом мы получили соотношение для e_3:

$$e_3 = \varphi_1 e_2 - \frac{\langle \varphi_1 e_2, e_2 \rangle}{\|e_2\|^2} e_2 - \frac{\langle \varphi_1 e_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1$$

Второй коэффициент $\frac{\langle \varphi_1 e_2, e_2 \rangle}{\|e_2\|^2} e_2$ также равен нулю, в этом легко убедится поставив в него e_2 из (2). В итоге e_3 получаем в виде:

$$e_3 = \varphi_1 e_2 - \frac{\langle \varphi_1 e_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1$$

Можно заметить, что e_3 как и e_2 вырожен через предыдущие элементы:

$$e_2 = \varphi_1 e_1 - \frac{\langle \varphi_1 e_1, e_0 \rangle}{\|e_0\|^2} e_0$$

$$e_3 = \varphi_1 e_2 - \frac{\langle \varphi_1 e_2, e_1 \rangle}{\|e_1\|^2} e_1$$

После чего можно предположить, что данное соотношение верно для элемента любого номера:

$$e_{n+1} = \varphi_1 e_n - \frac{\langle \varphi_1 e_n, e_{n-1} \rangle}{\|e_{n-1}\|^2} e_{n-1} \tag{5}$$

<u>Доказательство</u>: (5):

Проверим ортогональность e_{n+1} с элементом e_n:

$$\langle e_{n+1}, e_n \rangle = \langle \varphi_1 e_n, e_n \rangle - \frac{\langle \varphi_1 e_n, e_{n-1} \rangle}{\|e_{n-1}\|^2} \langle e_{n-1}, e_n \rangle = 0$$

Ортогональность $\langle e_{n+1}, e_n \rangle = 0$ и $\langle e_n, e_{n-1} \rangle = 0$ получаем автоматически. Докажем

что $\langle \varphi_1 e_n, e_n \rangle = 0$ верно для любого n.

e_n - с чётным номером состоит из чётных членов, и наоборот с e_n с нечётным состоит из нечётных членов. Таким образом умножением $\varphi_1 e_n$ все чётные члены переводит в нечётные (и наоборот). Поэтому $\varphi_1 e_n \cdot e_n$ всегда есть нечётная функция, а так как скалярное произведение есть интеграл в симетричных пределах имеем $\langle \varphi_1 e_n, e_n \rangle = 0$.

Проверим ортогональность e_{n+1} и e_{n-1}:

$$\langle e_{n+1}, e_{n-1} \rangle = \langle \varphi_1 e_n, e_{n-1} \rangle - \frac{\langle \varphi_1 e_n, e_{n-1} \rangle}{\|e_{n-1}\|^2} \langle e_{n-1}, e_{n-1} \rangle = \langle \varphi_1 e_n, e_{n-1} \rangle - \langle \varphi_1 e_n, e_{n-1} \rangle = 0$$

видно что ортогональность выполняется сразу.

Также выполнятеся ортогональность и для других элементов, проверку можно произвести подстановкой (5) в $\langle e_i, e_j \rangle$. Таким образом справедливость (5) считаем доказанной. #

Заключение

Таким образом ортогональные моночлены можно строить по системе линейно-независимых функций $\{\varphi_k\}_{k=0}^m = \{t^k\}_{k=0}^m$ определённых на симметричном относительно нуля интервале, по формуле:

$$e_{n+1} = t\ e_n - \frac{\langle t\ e_n, e_{n-1}\rangle}{\|e_{n-1}\|^2} e_{n-1} \tag{6}$$

где -

$$e_0 = \varphi_0 = 1, \quad e_1 = \varphi_1 = t$$

Получные многочлены иногда носят название многочленов Чебышева.[2]

Схема нахождения ортогональных многочленов

В схеме идёт получение ортогональной системы $\{\tilde{e}_k\}$ из линейно-независимой системы функций $\{\varphi_k\}$:

$$\begin{tikzcd}
\{\varphi_k\} \arrow[r, "f:\varphi_k\to t^k", "l:{[x_1,x_n]}\to{[-1,1]}"'] \arrow[d, dashed] & \{t^k\} \arrow[d, "(6)"] \\
\{\tilde{e}_k\} & \{e_k\} \arrow[l, "l^{-1}:{[-1,1]}\to{[x_1,x_n]}"', "f^{-1}:t^k\to\varphi_k"]
\end{tikzcd}$$

Нахождение ортогональных многочленов по вышеописанной схеме с применением формулы (6) может быть полезно при большом количестве экспериментальных точек, а также при вычислении большого колечества ортогональных функций(т.е $\{e_k\}_{k=0}^m$ для $m >> 1$), так как производится меньшее количество вычислений коэффициентов относительно классического рекуррентного соотношения[1]:

$$p_{n+1}(x) \ = \ (x - B_n)\ p_n(x) \ - \ C_n\ p_{n-1}(x)$$

Полученное соотношение (6) позволяет не вычислять коэффициенты B_n.

Ссылки:

1. В.М. Вержбицкий, «*Численные методы Математический анализ и обыкновенные диффиренциальные уравнения*», Москва Высшая Школа 2001. стр.104
2. Л.З. Румшиский «*Математическая обработка результатов экспериментов*», Москва 1971 стр.67

8 ноября 2014 г., Сухопаров Станислав Юрьевич