Relations invariantes
entre nombres de décompositions de Goldbach
codées dans un langage à 4 lettres

Denise Vella-Chemla

Octobre 2014

1 Introduction

La conjecture de Goldbach binaire stipule que tout nombre pair sauf 2 est la somme de deux nombres premiers. Cette note présente un ensemble de relations invariantes découvertes entre certains nombres de décompositions de Goldbach codées dans un langage à 4 lettres. On essaiera d'utiliser ces relations invariantes pour aboutir à une démonstration par récurrence de la conjecture. On s'intéresse aux décompositions d'un nombre pair n en somme de deux nombres impairs $p+q$ avec $3 \leqslant p \leqslant n/2$, $n/2 \leqslant q \leqslant n-3$ et $p \leqslant q$. On appelle p un *sommant de premier rang* et q un *sommant de second rang* de n.

Notations : On désignera par :

- a : une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p et q premiers ;
- b : une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p composé et q premier ;
- c : une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p premier et q composé ;
- d : une décomposition de n de la forme $p+q$ avec p et q composés.

Exemple :

40	3	5	7	9	11	13	15	17	19
	37	35	33	31	29	27	25	23	21
l_{40}	a	c	c	b	a	c	d	a	c

2 Le tableau principal

On désigne par $T = (L, C) = (\ l_{n,m}\ )$ le tableau dont les éléments $l_{n,m}$ sont l'une des lettres a, b, c, d. L'indice n appartient à l'ensemble L des nombres pairs supérieurs ou égaux à 6. L'indice m, appartenant à l'ensemble C des nombres impairs supérieurs ou égaux à 3, est un élément de la liste des sommants de n de premier rang.

Considérons la fonction g définie ainsi :

$$\begin{array}{rccl} g: & 2\mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N}+1 \\ & x & \mapsto & 2\left\lfloor \dfrac{x-2}{4} \right\rfloor + 1 \end{array}$$

$g(6) = 3, g(8) = 3, g(10) = 5, g(12) = 5, g(14) = 7, g(16) = 7, etc.$

La fonction $g(n)$ définit le plus grand des sommants de premier rang associés à n.

Comme l'on ne prend en compte que les décompositions de n de la forme $p+q$ où $p \leqslant q$, seules apparaîtront dans le tableau les lettres $l_{n,m}$ telles que $m \leqslant 2\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor + 1$ de sorte que le tableau contient les éléments suivants : $l_{6,3}, l_{8,3}, l_{10,3}, l_{10,5}, l_{12,3}, l_{12,5}, l_{14,3}, l_{14,5}, l_{14,7}, etc.$

Voici le début du tableau.

C / L	3	5	7	9	11	13	15	17
6	a							
8	a							
10	a	a						
12	c	a						
14	a	c	a					
16	a	a	c					
18	c	a	a	d				
20	a	c	a	b				
22	a	a	c	b	a			
24	c	a	a	d	a			
26	a	c	a	b	c	a		
28	c	a	c	b	a	c		
30	c	c	a	d	a	a	d	
32	a	c	c	b	c	a	b	
34	a	a	c	d	a	c	b	a
36	c	a	a	d	c	a	d	a
...								

Figure 1 : mots des nombres pairs de 6 à 36

Remarques :

1) les mots situés sur les diagonales du tableau appelés *mots diagonaux* ont leurs lettres soit dans l'alphabet $A_{ab} = \{a, b\}$ soit dans l'alphabet $A_{cd} = \{c, d\}$.

2) un mot diagonal code des décompositions de même sommant de second rang.
Par exemple, sur la Figure 4, les lettres de la diagonale *aaabaa* qui commence à la lettre $l_{26,3} = a$ code les décompositions $3 + 23, 5 + 23, 7 + 23, 9 + 23, 11 + 23$ et $13 + 23$.

3) Désignons par l_n la ligne dont les éléments sont les $l_{n,m}$. La ligne l_n possède $\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$ éléments.

4) n étant fixé, appelons $C_{n,3}$ la colonne formée des $l_{k,3}$ pour $6 \leqslant k \leqslant n$.

Dans cette colonne $C_{n,3}$, distinguons deux parties, la "partie haute" et la "partie basse" de la colonne.

Notons $H_{n,3}$ la "partie haute" de la colonne, i.e. l'ensemble des $l_{k,3}$ où $6 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \frac{n+4}{2} \right\rfloor$.

Notons $B_{n,3}$ la "partie basse" de la colonne, i.e. l'ensemble des $l_{k,3}$ où $\left\lfloor \frac{n+4}{2} \right\rfloor < k \leqslant n$.

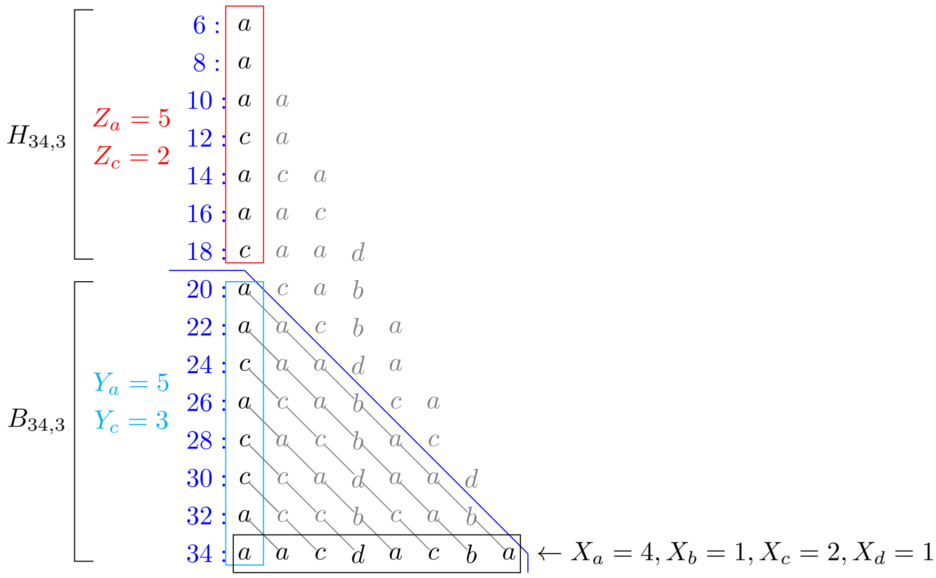


FIGURE 2 : $n = 34$

Pour mieux cerner les dénombrements de la section suivante, on utilisera la projection P de la ligne n sur la partie basse de la première colonne $B_{n,3}$ qui “associe” les lettres aux deux bouts d'une diagonale (elle associe à la lettre qui code la décomposition $p+q$ la lettre qui code la décomposition $3+q$). Si on considère l'application $proj$ telle que $proj(a) = proj(b) = a$ et $proj(c) = proj(d) = c$ alors, puisque 3 est premier, $proj(l_{n,2k+1}) = l_{n-2k+2,3}$. On peut comprendre l'effet de cette projection (qui préserve le sommant de second rang) en analysant les décompositions :

- si $p+q$ est codée par une lettre a ou une lettre b, cela correspond aux deux cas possibles dans lesquels q est premier, alors la décomposition $3+q$, contenant deux nombres premiers sera codée par la lettre a ;
- si $p+q$ est codée par une lettre c ou une lettre d, cela correspond aux deux cas possibles dans lesquels q est composé, alors la décomposition $3+q$, de la forme *premier* + *composé* sera codée par la lettre c.

On utilisera également dans la section suivante une projection P' de la ligne n sur la partie haute de la première colonne $H_{n,3}$ qui associe à la lettre qui code la décomposition $p+q$ la lettre qui code la décomposition $3+p$ (noter que le *sommant de premier rang* devient *sommant de second rang*) ; analysons l'effet qu'une telle projection aura sur les décompositions :

- si $p+q$ est codée par une lettre a ou une lettre c, cela correspond aux deux cas possibles dans lesquels p est premier, alors la décomposition $3+p$, contenant deux nombres premiers sera codée par la lettre a ;
- si $p+q$ est codée par une lettre b ou une lettre d, cela correspond aux deux cas possibles dans lesquels p est composé, alors la décomposition $3+p$, de la forme *premier* + *composé* sera codée par la lettre c.

3 Dénombrements

1) On note :

- $X_a(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *premier* + *premier* ;
- $X_b(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *composé* + *premier* ;
- $X_c(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *premier* + *composé* ;
- $X_d(n)$ le nombre de décompositions de n de la forme *composé* + *composé*.

Les variables $X_a(n), X_b(n), X_c(n), X_d(n)$ dénombrent donc des assertions logiques.

$X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$ est le nombre d'éléments de la ligne de n.

Exemple : $n = 34$:
$X_a(34) = \#\{3+31, 5+29, 11+23, 17+17\} = 4$
$X_b(34) = \#\{15+19\} = 1.$
$X_c(34) = \#\{7+27, 13+21\} = 2$
$X_d(34) = \#\{9+25\} = 1$

2) Soit $Y_a(n)$ (resp. $Y_c(n)$) le nombre de a (resp. c) qui apparaissent dans $B_{n,3}$. On rappelle qu'il n'y a que des lettres a et c dans la première colonne car elle contient les lettres associées aux décompositions de la forme $3+x$ et que 3 est premier.

Exemple :

- $Y_a(34) = \#\{3+17, 3+19, 3+23, 3+29, 3+31\} = 5$
- $Y_c(34) = \#\{3+21, 3+25, 3+27\} = 3$

3) Compte-tenu de la projection P qui est une bijection, des définitions des lettres a, b, c, d, $Y_a(n) = X_a(n) + X_b(n)$ et $Y_c(n) = X_c(n) + X_d(n)$. Par suite, trivialement, $Y_a(n) + Y_c(n) = X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$.

Exemple :

$$\begin{array}{ll}
Y_a(34) & = \#\{3+17, 3+19, 3+23, 3+29, 3+31\} \\
X_a(34) & = \#\{3+31, 5+29, 11+23, 17+17\} \\
X_b(34) & = \#\{15+19\} \\
 & \\
Y_c(34) & = \#\{3+21, 3+25, 3+27\} \\
X_c(34) & = \#\{7+27, 13+21\} \\
X_d(34) & = \#\{9+25\}
\end{array}$$

4) Soit $Z_a(n)$ (resp. $Z_c(n)$) le nombre de a (resp. c) qui apparaissent dans $H_{n,3}$.

Exemple :

- $Z_a(34) = \#\{3+3, 3+5, 3+7, 3+11, 3+13\} = 5$
- $Z_c(34) = \#\{3+9, 3+15\} = 2$

$Z_a(n) + Z_c(n) = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor$.

Rappel des propriétés identifiées

$$Y_a(n) = X_a(n) + X_b(n) \tag{1}$$

$$Y_c(n) = X_c(n) + X_d(n) \tag{2}$$

$$Y_a(n) + Y_c(n) = X_a(n) + X_b(n) + X_c(n) + X_d(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor \tag{3}$$

$$Z_a(n) + Z_c(n) = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor \tag{4}$$

Ajoutons quatre nouvelles propriétés à celles-ci :

$$X_a(n) + X_c(n) = Z_a(n) + \delta_{2p}(n) \tag{5}$$

avec $\delta_{2p}(n)$ qui vaut 1 dans le cas où n est le double d'un nombre premier et qui vaut 0 sinon.

$$X_b(n) + X_d(n) = Z_c(n) + \delta_{2c-imp}(n) \tag{6}$$

avec $\delta_{2c-imp}(n)$ qui vaut 1 dans le cas où n est un double d'impair composé, et qui vaut 0 sinon.

$$Z_c(n) - Y_a(n) = X_d(n) - X_a(n) - \delta_{2c-imp}(n) \tag{7}$$

$$Z_c(n) - Y_a(n) = Y_c(n) - Z_a(n) - \delta_{4k+2}(n) \tag{8}$$

avec $\delta_{4k+2}(n)$ qui vaut 1 si n est un double d'impair et 0 sinon.

Les propriétés 1, 2 et 3 découlent simplement de la définition de la projection P.

Les propriétés 5 et 6 découlent simplement de la définition de la projection P'.

On note une certaine redondance entre les 3 booléens introduits ici que sont $\delta_{2p}(n), \delta_{2c-imp}(n)$ et $\delta_{4k+2}(n)$. L'assertion logique triviale $(\delta_{2p}(n) \vee \delta_{2c-imp}(n)) \rightarrow \delta_{4k+2}(n)$ est vérifiée.

4 Démonstrations

4.1 Utilitaires

Démontrons que si n est un double d'impair (i.e. de la forme $4k+2$), alors $\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor + 1$.
En effet, le membre gauche de l'égalité vaut $\left\lfloor \frac{(4k+2)-2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4k}{4} \right\rfloor = k$.
Le membre droit de l'égalité vaut $\left\lfloor \frac{(4k+2)-4}{4} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{4k-2}{4} \right\rfloor + 1 = (k-1)+1 = k$.

Démontrons que si n est un double de pair (i.e. de la forme $4k$), alors $\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor$.
$\left\lfloor \frac{4k-2}{4} \right\rfloor = k-1$ et $\left\lfloor \frac{4k-4}{4} \right\rfloor = k-1$.

On peut aussi exprimer cela de la façon suivante : si n est un double d'impair, $\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor = \frac{n-2}{4} = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor + 1$ tandis que si n est un double de pair, $\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor = \frac{n-4}{4} = \left\lfloor \frac{n-4}{4} \right\rfloor$.

4.2 Propriétés 7 et 8

4.2.1 Propriété 7

La propriété 7 énonce que $Z_c(n) - Y_a(n) = X_d(n) - X_a(n) - \delta_{2c-imp}(n)$ avec $\delta_{2c-imp}(n)$ qui vaut 1 si n est un double de composé impair et 0 sinon.

Par définition, $Z_c(n)$ compte le nombre de décompositions de la forme $\alpha = 3 + \textit{composé}$ avec *composé* strictement inférieur à $n/2$ (appelons E cet ensemble de décompositions). $Z_c(n)$ compte donc également le nombre de décompositions de n de la forme $\beta = \textit{composé} + y$ par bijection du sommant de second rang de la décomposition α sur le sommant de premier rang de la décomposition β. Or le nombre de décompositions de la forme $\textit{composé} + y$ est égal à $X_b(n) + X_d(n)$ par définition de ces variables.

Par définition, $Y_a(n)$ compte le nombre de décompositions de la forme $\gamma = 3 + \textit{premier}$ avec *premier* strictement supérieur à $n/2$ (appelons F cet ensemble de décompositions). $Y_a(n)$ compte donc également le nombre de décompositions de n de la forme $\eta = x + \textit{premier}$ par bijection du sommant de second rang de la décomposition γ sur le sommant de second rang de la décomposition η. Or le nombre de décompositions de la forme $x + premier$ est égal à $X_b(n) + X_a(n)$ par définition de ces variables.

Les décompositions de n de la forme *composé* $+$ *premier* sont à la fois dans E et dans F. En calculant $Z_c(n) - Y_a(n)$, on obtient également la valeur de $X_d(n) - X_a(n)$ par définition de ce que comptent les variables $Y_a(n), Z_c(n), X_d(n)$ et $X_a(n)$.

4.2.2 Propriété 8

Démontrons que $Z_c(n) - Y_a(n) = Y_c(n) - Z_a(n) - \delta_{4k+2}(n)$ avec $\delta_{4k+2}(n)$ qui vaut 1 si n est un double d'impair (il existe $k \geqslant 3$ tel que $n = 4k + 2$) et 0 sinon.

On utilise un raisonnement par récurrence :

i) On initialise les récurrences selon les 3 sortes de nombres à envisager : les doubles de pairs (de la forme $4k$, comme 16), les doubles d'impairs (donc de la forme $4k + 2$) qui sont premiers (comme 14) ou qui sont composés (comme 18).

La propriété 8 est vraie pour $n = 14, 16$ et 18. Fournissons dans un tableau les valeurs des variables pour ces 3 nombres :

n	$Z_c(n)$	$Y_a(n)$	$Y_c(n)$	$Z_a(n)$	δ_{4k+2}
14	0	2	1	2	1
16	0	2	1	3	0
18	0	2	2	3	1

ii) On réécrit la propriété 8 sous la forme $Z_a(n) + Z_c(n) + \delta_{4k+2}(n) = Y_a(n) + Y_c(n)$.
Quatre cas sont à considérer : deux cas selon lesquels n est un double d'impair (premier ou composé) et $n + 2$ est un double de pair et deux cas selon lesquels n est un double de pair et $n + 2$ est un double d'impair (premier ou composé).

iia) *n double de pair et $n + 2$ double de premier* :

n	δ_{2p}	δ_{2c-imp}	δ_{4k+2}
n	0	0	0
$n+2$	1	0	1

On pose l'hypothèse que la propriété 8 est vraie pour n,

$$Z_a(n) + Z_c(n) + \delta_{4k+2}(n) = Y_a(n) + Y_c(n) \qquad (H)$$

Démontrons qu'elle est vraie pour $n + 2$,

$$Z_a(n + 2) + Z_c(n + 2) + \delta_{4k+2}(n + 2) = Y_a(n + 2) + Y_c(n + 2) \qquad (Ccl)$$

On a $Z_a(n + 2) = Z_a(n)$ et $Z_c(n + 2) = Z_c(n)$.

Rappelons la propriété 3 concernant les Y:

$$Y_a(n) + Y_c(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor \qquad (3)$$

Dans (Ccl), on peut, par l'hypothèse de récurrence et par la propriété (3), remplacer le membre gauche de l'égalité par $Z_a(n) + Z_c(n) + 1$ puis par $Y_a(n) + Y_c(n) + 1$ (par (H)) puis par $\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor + 1$ (par (3)) qui vaut $\left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor$.

Mais dans (Ccl), on peut également remplacer le membre de droite de l'égalité par $\left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor$ du fait de la propriété (3).

Il y a à nouveau pour $n+2$ égalité entre les membres gauche et droit de l'égalité, i.e. la propriété 8 est vérifiée par $n+2$. De l'hypothèse que la propriété est vraie pour n, on a démontré que la propriété est vraie pour $n+2$.

iib) *n double de pair et $n+2$ double de composé impair* :

n	δ_{2p}	δ_{2c-imp}	δ_{4k+2}
n	0	0	0
$n+2$	0	1	1

On pose l'hypothèse que la propriété 8 est vraie pour n,

$$Z_a(n) + Z_c(n) + \delta_{4k+2}(n) = Y_a(n) + Y_c(n) \qquad (H)$$

Démontrons qu'elle est vraie pour $n+2$,

$$Z_a(n+2) + Z_c(n+2) + \delta_{4k+2}(n+2) = Y_a(n+2) + Y_c(n+2) \qquad (Ccl)$$

On a $Z_a(n+2) = Z_a(n)$ et $Z_c(n+2) = Z_c(n)$.

On a $Y_a(n+2) = Y_a(n) + 1$ et $Y_c(n+2) = Y_c(n)$.

Rappelons la propriété 3 concernant les Y:

$$Y_a(n) + Y_c(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor \qquad (3)$$

Dans (Ccl), on peut, par l'hypothèse de récurrence et la propriété (3), remplacer le membre gauche de l'égalité par $Z_a(n) + Z_c(n) + 1$ puis par $Y_a(n) + Y_c(n) + 1$ (par (H)) puis par $\left\lfloor \dfrac{n-2}{4} \right\rfloor + 1$ (par (3)) qui vaut $\left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor$.

Mais dans (Ccl), on peut également remplacer le membre de droite de l'égalité par $\left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor$ du fait des évolutions de $Y_a(n)$ et $Y_c(n)$.

Il y a à nouveau pour $n+2$ égalité entre les membres gauche et droit de l'égalité, i.e. la propriété 8 est vérifiée par $n+2$. De l'hypothèse que la propriété est vraie pour n, on a démontré que la propriété est vraie pour $n+2$.

iic) *n double de premier et $n+2$ double de pair* :

n	δ_{2p}	δ_{2c-imp}	δ_{4k+2}
n	1	0	1
$n+2$	0	0	0

On pose l'hypothèse que la propriété 8 est vraie pour n,

$$Z_a(n) + Z_c(n) + \delta_{4k+2}(n) = Y_a(n) + Y_c(n) \qquad (H)$$

Démontrons qu'elle est vraie pour $n+2$,

$$Z_a(n+2) + Z_c(n+2) + \delta_{4k+2}(n+2) = Y_a(n+2) + Y_c(n+2) \qquad (Ccl)$$

On a $Z_a(n+2) = Z_a(n) + 1$ et $Z_c(n+2) = Z_c(n)$.

Rappelons la propriété 3 concernant les Y :

$$Y_a(n) + Y_c(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor \qquad (3)$$

Dans (Ccl), on peut, par l'hypothèse de récurrence et la propriété (3), remplacer le membre gauche de l'égalité par $Z_a(n) + Z_c(n) + 1$ puis par $Y_a(n) + Y_c(n)$ (par (H)) puis par $\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$ (par (3)) qui vaut $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$.

Mais dans (Ccl), on peut également remplacer le membre de droite de l'égalité par $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ du fait de la propriété (3).

Il y a à nouveau pour $n+2$ égalité entre les membres gauche et droit de l'égalité, i.e. la propriété 8 est vérifiée par $n+2$. De l'hypothèse que la propriété est vraie pour n, on a démontré que la propriété est vraie pour $n+2$.

iid) *n double de composé impair et $n+2$ double de pair* :

n	δ_{2p}	δ_{2c-imp}	δ_{4k+2}
n	0	1	1
$n+2$	0	0	0

On pose l'hypothèse que la propriété 8 est vraie pour n,

$$Z_a(n) + Z_c(n) + \delta_{4k+2}(n) = Y_a(n) + Y_c(n) \qquad (H)$$

Démontrons qu'elle est vraie pour $n+2$,

$$Z_a(n+2) + Z_c(n+2) + \delta_{4k+2}(n+2) = Y_a(n+2) + Y_c(n+2) \qquad (Ccl)$$

On a $Z_a(n+2) = Z_a(n)$ et $Z_c(n+2) = Z_c(n) + 1$.

Rappelons la propriété 3 concernant les Y :

$$Y_a(n) + Y_c(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor \qquad (3)$$

Dans (Ccl), on peut, par l'hypothèse de récurrence et la propriété (3), remplacer le membre gauche de l'égalité par $Z_a(n) + Z_c(n) + 1$ puis par $Y_a(n) + Y_c(n)$ (par (H)) puis par $\left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor$ (par (3)) qui vaut $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$.

Mais dans (Ccl), on peut également remplacer le membre de droite de l'égalité par $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ du fait de la propriété (3).

Il y a à nouveau pour $n+2$ égalité entre les membres gauche et droit de l'égalité, i.e. la propriété 8 est vérifiée par $n+2$. De l'hypothèse que la propriété est vraie pour n, on a démontré que la propriété est vraie pour $n+2$.

5 Evolution des variables

5.1 Dénombrements des décompositions de la forme $3+p$ (dites "basses")

1) $Z_a(n+2) = Z_a(n)$ et $Z_c(n+2) = Z_c(n)$ quand n est un double de pair. En effet, $Z_a(n)$ (resp. $Z_c(n)$) compte le nombre de nombres premiers (resp. composés impairs) strictement inférieurs à $\frac{n}{2}$ et il y a autant de nombres premiers (resp. composés impairs) inférieurs à un nombre pair qu'inférieurs à son successeur immédiat.

2) $Z_a(n+2) = Z_a(n) + 1$ et $Z_c(n+2) = Z_c(n)$ quand n est un double de nombre premier ;

3) $Z_a(n+2) = Z_a(n)$ et $Z_c(n+2) = Z_c(n) + 1$ quand n est un double de nombre composé impair.

5.2 Dénombrements des décompositions de la forme $3+q$ (dites "hautes")

Dans le cas où $n+2$ est un double d'impair, on ne fait qu'ajouter un nombre à l'intervalle $H_{n+2,3}$; si ce nombre $n-1$ est premier (resp. composé), $Y_a(n+2) = Y_a(n)+1$ (resp. $Y_c(n+2) = Y_c(n)+1$).

Dans le cas où $n+2$ est un double de pair, on ajoute un nombre à l'extrémité haute de l'intervalle et on enlève un nombre à l'extrémité basse de l'intervalle. De ce fait, 4 cas se présentent. Etudions la manière dont évolue l'ensemble de décompositions $H_{n+2,3}$.

- si $n-1$ et $\frac{n}{2}$ sont tous les deux premiers, on retire en bas et on ajoute en haut de l'intervalle $H_{n+2,3}$ deux lettres de même sorte, alors $Y_a(n+2) = Y_a(n)$;
- si $n-1$ est premier et $\frac{n}{2}$ est composé alors $Y_a(n+2) = Y_a(n)+1$;
- si $n-1$ est composé et $\frac{n}{2}$ est premier alors $Y_a(n+2) = Y_a(n)-1$;
- si $n-1$ et $\frac{n}{2}$ sont tous les deux composés, on retire en bas et on ajoute en haut de l'intervalle $H_{n+2,3}$ deux lettres de même sorte, alors $Y_a(n+2) = Y_a(n)$.

6 Utiliser les écarts entre variables

On va montrer que $X_a(n)$ ne peut jamais être nul pour $n \geqslant C$, i.e. que tout entier pair $n \geqslant C$ peut s'écrire comme une somme de deux nombres premiers, c'est-à-dire vérifie la conjecture de Goldbach.

Précisons davantage à quoi sont égales les variables $Z_a(n), Z_c(n), Y_a(n)$ et $Y_c(n)$.

- $Z_a(n)$ compte à 2 près le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à $\frac{n}{2}$;

$$Z_a(n) = \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Z_a}(n) \tag{9}$$

  avec $\delta_{Z_a}(n)$ égal à -2 si n est le double d'un nombre premier et égal à -1 sinon ;

- $Z_c(n)$ compte à 1 près le nombre de nombres composés impairs inférieurs ou égaux à $\frac{n}{2}$;

$$Z_c(n) = \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Z_c}(n) \tag{10}$$

  avec $\delta_{Z_c}(n)$ égal à 1 si n est le double d'un nombre premier et égal à 0 sinon ;

- $Y_a(n)$ compte à 1 près le nombre de nombres premiers qui sont compris entre $\frac{n}{2}$ et n ;

$$Y_a(n) = \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n) \tag{11}$$

  avec $\delta_{Y_a}(n)$ égal à $-1, 0$ ou 1 ($\delta_{Y_a}(n)$ est égal à 0 quand $n-1$ et $n/2$ sont tous les deux premiers ou bien tous les deux composés, $\delta_{Y_a}(n)$ est égal à -1 quand $n-1$ est premier tandis que $n/2$ est composé, et enfin, $\delta_{Y_a}(n)$ est égal à 1 quand $n-1$ est composé tandis que $n/2$ est premier) ;

- $Y_c(n)$ compte à 1 près le nombre de nombres composés impairs qui sont compris entre $\frac{n}{2}$ et n ;

$$Y_c(n) = \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n) \tag{12}$$

  avec $\delta_{Y_c}(n)$ égal à $-1, 0$ ou 1. Les valeurs de $\delta_{Y_c}(n)$ seront fournies de façon détaillée dans la section démontrant la propriété 12.

6.1 Démonstrations des propriétés 9, 10, 11 et 12

6.1.1 Propriété 9 : relation invariante portant sur $Z_a(n)$

i) Initialisation : (9) est vraie pour $n = 14, 16$, 18 et 20.

En effet, on a :

n	$Z_a(n)$	$\pi\left(\frac{n}{2}\right)$	$\delta_{Z_a}(n)$
14	2	4	-2
16	3	4	-1
18	3	4	-1
20	3	4	-1
22	3	5	-2

ii) Démontrons par récurrence que si (9) est vraie pour n, elle est vraie pour $n+2$.

On pose l'hypothèse que la propriété 9 est vraie pour n,

$$Z_a(n) = \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Z_a}(n) \qquad (H)$$

Démontrons qu'elle est vraie pour $n+2$,

$$Z_a(n+2) = \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Z_a}(n+2) \qquad (Ccl)$$

Distinguons 4 cas comme dans le paragraphe 4.2.2.

iia) n double de pair, $n+2$ double de premier.

Dans ce cas, $Z_a(n+2) = Z_a(n)$, $\pi\left(\frac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ et $\delta_{Z_a}(n) = -1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Z_a(n+2) &= Z_a(n) \\
&= \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Z_a}(n) \\
&= \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) - 1 + \delta_{Z_a}(n) \\
&= \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) - 1 - 1 \\
&= \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Z_a}(n+2)
\end{aligned}$$

avec $\delta_{Z_a}(n+2) = -2$ comme attendu puisque $n+2$ est un double de nombre premier.

iib) n double de pair, $n+2$ double de composé impair.

Dans ce cas, $Z_a(n+2) = Z_a(n)$, $\pi\left(\frac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\frac{n}{2}\right)$ et $\delta_{Z_a}(n) = -1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Z_a(n+2) &= Z_a(n) \\
&= \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Z_a}(n) \\
&= \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) - 1 \\
&= \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Z_a}(n+2)
\end{aligned}$$

avec $\delta_{Z_a}(n+2) = -1$ comme attendu puisque $n+2$ est un double de composé impair.

iic) n double de premier, $n+2$ double de pair.

Dans ce cas, $Z_a(n+2) = Z_a(n) + 1$, $\pi\left(\frac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\frac{n}{2}\right)$ et $\delta_{Z_a}(n) = -2$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned} Z_a(n+2) &= Z_a(n)+1 \\ &= \pi\left(\frac{n}{2}\right)+\delta_{Z_a}(n)+1 \\ &= \pi\left(\frac{n+2}{2}\right)-2+1 \\ &= \pi\left(\frac{n+2}{2}\right)-1 \\ &= \pi\left(\frac{n+2}{2}\right)+\delta_{Z_a}(n+2) \end{aligned}$$

avec $\delta_{Z_a}(n+2)=-1$ comme attendu puisque $n+2$ est un double de pair.

iid) n double de composé impair, $n+2$ double de pair.

Dans ce cas, $Z_a(n+2)=Z_a(n)$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right)=\pi\left(\dfrac{n}{2}\right)$ et $\delta_{Z_a}(n)=-1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned} Z_a(n+2) &= Z_a(n) \\ &= \pi\left(\frac{n}{2}\right)+\delta_{Z_a}(n) \\ &= \pi\left(\frac{n+2}{2}\right)-1 \\ &= \pi\left(\frac{n+2}{2}\right)+\delta_{Z_a}(n+2) \end{aligned}$$

avec $\delta_{Z_a}(n+2)=-1$ comme attendu puisque $n+2$ est un double de pair.

6.1.2 Propriété 10 : relation invariante portant sur $Z_c(n)$

i) Initialisation : (10) est vraie pour $n=14,16,18$ et 20.

On a :

n	$Z_c(n)$	$\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor$	$\pi\left(\frac{n}{2}\right)$	$\delta_{Z_c}(n)$
14	0	3	4	1
16	0	4	4	0
18	0	4	4	0
20	1	5	4	0
22	1	5	5	1

et on vérifie donc que (10) est vraie pour ces 4 nombres.

ii) Démontrons par récurrence que si (10) est vraie pour n, elle est vraie pour $n+2$.

On pose l'hypothèse que la propriété 10 est vraie pour n,

$$Z_c(n)=\left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-\pi\left(\frac{n}{2}\right)+\delta_{Z_c}(n) \qquad (H)$$

Démontrons qu'elle est vraie pour $n+2$,

$$Z_c(n+2)=\left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor-\pi\left(\frac{n+2}{2}\right)+\delta_{Z_c}(n+2) \qquad (Ccl)$$

Reprenons les 4 cas.

iia) n double de pair, $n+2$ double de premier.

Dans ce cas, $Z_c(n+2)=Z_c(n)$, $\left\lfloor\dfrac{n+2}{4}\right\rfloor=\left\lfloor\dfrac{n}{4}\right\rfloor$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right)=\pi\left(\dfrac{n}{2}\right)+1$ et $\delta_{Z_c}(n)=0$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Z_c(n+2) &= Z_c(n)\\
&= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Z_c}(n)\\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 1 + \delta_{Z_c}(n)\\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 1 + 0\\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Z_c}(n+2)
\end{aligned}$$

avec $\delta_{Z_c}(n+2) = 1$ comme attendu puisque $n+2$ est un double de nombre premier.

iib) n double de pair, $n+2$ double de composé impair.

Dans ce cas, $Z_c(n+2) = Z_c(n)$, $\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$, $\pi\left(\frac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\frac{n}{2}\right)$ et $\delta_{Z_c}(n) = 0$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Z_c(n+2) &= Z_c(n)\\
&= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Z_c}(n)\\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Z_c}(n)\\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 0\\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Z_c}(n+2)
\end{aligned}$$

avec $\delta_{Z_c}(n+2) = 0$ comme attendu puisque $n+2$ est un double de nombre composé impair.

iic) n double de premier, $n+2$ double de pair.

Dans ce cas, $Z_c(n+2) = Z_c(n)$, $\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$, $\pi\left(\frac{n+2}{4}\right) = \pi\left(\frac{n}{2}\right)$ et $\delta_{Z_c}(n) = 1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Z_c(n+2) &= Z_c(n)\\
&= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Z_c}(n)\\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n+2}{4}\right) - 1 + \delta_{Z_c}(n)\\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) - 1 + 1\\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Z_c}(n+2)
\end{aligned}$$

avec $\delta_{Z_c}(n+2) = 0$ comme attendu puisque $n+2$ est un double de pair.

iid) n double de composé impair, $n+2$ double de pair.

Dans ce cas, $Z_c(n+2) = Z_c(n) + 1$, $\left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$, $\pi\left(\frac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\frac{n}{2}\right)$ et $\delta_{Z_c}(n) = 0$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Z_c(n+2) &= Z_c(n)\\
&= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Z_c}(n)\\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - 1 - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 1 + \delta_{Z_c}(n)\\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) - 1 + 1\\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Z_c}(n+2)
\end{aligned}$$

avec $\delta_{Z_c}(n+2) = 0$ comme attendu puisque $n+2$ est un double de pair.

6.1.3 Propriété 11 : relation invariante portant sur $Y_a(n)$

Il s'agit de démontrer pourquoi la relation invariante portant sur $Y_a(n)$ et qui est :

$$Y_a(n) = \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n)$$

est toujours vérifiée. Pour cela, il convient de distinguer 16 cas, selon le caractère de primalité des quatre nombres $\frac{n}{2}$, $\frac{n+2}{2}$, $n-1$ et $n+1$, ces caractères de primalité ayant une influence sur les évolutions de $Y_a(n)$, de $\pi(n)$, de $\pi\left(\frac{n}{2}\right)$ et de $\delta_{Y_a}(n)$.

i) initialisation des récurrences : pour 5 cas sur 16, on est dans des cas de contradictions (on les a nommés $C1$ à $C5$ en bas de tableau, la contradiction provient pour $C1$ à $C4$ du fait qu'on ne peut avoir $n/2$ et $(n+2)/2$ qui sont premiers tous les deux puisque ce sont des entiers consécutifs) ; $C5$ est contradictoire car si $n-1$ et $n+1$ sont des nombres premiers jumeaux, leur “père” n est divisible par 3 et la moitié du père en question qui est $n/2$ ne peut être un nombre premier lui-aussi, ce qui est représenté par les 3 croix en première, troisième et quatrième colonnes). Pour les 11 cas restant, il convient d'initialiser les récurrences. Dans le tableau ci-dessous, on fournit les valeurs qui permettent d'aisément vérifier que pour des petits entiers, la propriété 11 est bien systématiquement vérifiée.

n	$n/2$ *est premier*	$(n+2)/2$ *est premier*	$n-1$ *est premier*	$n+1$ *est premier*	$Y_a(n)$	$\pi(n)$	$\pi(n/2)$	$\delta_{Y_a}(n)$
14	x	–	x	–	2	6	4	0
16	–	–	–	x	2	6	4	0
18	–	–	x	x	2	7	4	−1
20	–	x	x	–	3	8	4	−1
22	x	–	–	x	4	8	5	1
26	x	–	–	–	4	9	6	1
36	–	x	–	x	4	11	7	0
48	–	–	x	–	5	15	9	−1
50	–	–	–	–	6	15	9	0
56	–	x	–	–	7	16	9	0
60	–	x	x	x	6	17	10	−1
$C1$	x	x	x	x	–	–	–	–
$C2$	x	x	x	–	–	–	–	–
$C3$	x	x	–	x	–	–	–	–
$C4$	x	x	–	–	–	–	–	–
$C5$	x	–	x	x	–	–	–	–

ii) passage de n à $n+2$: Démontrons par récurrence que si (11) est vraie pour n, elle est vraie pour $n+2$.

On pose l'hypothèse que la propriété 11 est vraie pour n,

$$Y_a(n) = \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n) \qquad (H)$$

Démontrons qu'elle est vraie pour $n+2$,

$$Y_a(n+2) = \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n+2) \qquad (Ccl)$$

Etudions les 11 cas.

iia) $n+1$ composé, $(n+2)/2$ composé, $n/2$ premier, $n-1$ premier

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n)$, $\pi\left(\frac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\frac{n}{2}\right)$, $\delta_{Y_a}(n) = 0$ et $Y_a(n+2) = Y_a(n)$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_a(n+2) &= Y_a(n) \\
&= \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n) \\
&= \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_a}(n+2) = 0$ dans ce cas. Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iib) $n+1$ premier, $(n+2)/2$ composé, $n/2$ composé, $n-1$ composé

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n) + 1$, $\pi\left(\frac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\frac{n}{2}\right)$, $\delta_{Y_a}(n) = 0$ et $Y_a(n+2) = Y_a(n)$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_a(n+2) &= Y_a(n) \\
&= \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n) \\
&= \pi(n+2) - 1 - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_a}(n+2) = -1$ dans ce cas. Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iic) $n+1$ composé, $(n+2)/2$ composé, $n/2$ premier, $n-1$ composé

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n)$, $\pi\left(\frac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\frac{n}{2}\right)$, $\delta_{Y_a}(n) = 1$ et $Y_a(n+2) = Y_a(n) - 1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_a(n+2) &= Y_a(n) - 1 \\
&= \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n) - 1 \\
&= \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 1 - 1 \\
&= \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_a}(n+2) = 0$ dans ce cas. Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iid) $n+1$ premier, $(n+2)/2$ premier, $n/2$ composé, $n-1$ premier

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n) + 1$, $\pi\left(\frac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\frac{n}{2}\right) + 1$, $\delta_{Y_a}(n) = -1$ et $Y_a(n+2) = Y_a(n) + 1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_a(n+2) &= Y_a(n) + 1 \\
&= \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n) + 1 \\
&= \pi(n+2) - 1 - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 1 - 1 + 1 \\
&= \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_a}(n+2) = 0$ dans ce cas. Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iie) $n+1$ composé, $(n+2)/2$ premier, $n/2$ composé, $n-1$ premier

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n)$, $\pi\left(\frac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\frac{n}{2}\right) + 1$, $\delta_{Y_a}(n) = -1$ et $Y_a(n+2) = Y_a(n) + 1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_a(n+2) &= Y_a(n) + 1 \\
&= \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n) + 1 \\
&= \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 1 - 1 + 1 \\
&= \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_a}(n+2) = 1$ dans ce cas. Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iif) $n+1$ premier, $(n+2)/2$ premier, $n/2$ composé, $n-1$ composé

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n) + 1$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\dfrac{n}{2}\right) + 1$, $\delta_{Y_a}(n) = 0$ et $Y_a(n+2) = Y_a(n)$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned} Y_a(n+2) &= Y_a(n) \\ &= \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n) \\ &= \pi(n+2) - 1 - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 1 \\ &= \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n+2) \end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_a}(n+2) = 0$ dans ce cas. Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iig) $n+1$ composé, $(n+2)/2$ premier, $n/2$ composé, $n-1$ composé

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n)$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\dfrac{n}{2}\right) + 1$, $\delta_{Y_a}(n) = 0$ et $Y_a(n+2) = Y_a(n)$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned} Y_a(n+2) &= Y_a(n) \\ &= \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n) \\ &= \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 1 + 0 \\ &= \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n+2) \end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_a}(n+2) = 1$ dans ce cas. Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iih) $n+1$ premier, $(n+2)/2$ composé, $n/2$ composé, $n-1$ premier

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n) + 1$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\dfrac{n}{2}\right)$, $\delta_{Y_a}(n) = -1$ et $Y_a(n+2) = Y_a(n) + 1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned} Y_a(n+2) &= Y_a(n) + 1 \\ &= \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n) + 1 \\ &= \pi(n+2) - 1 - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) - 1 + 1 \\ &= \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n+2) \end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_a}(n+2) = -1$ dans ce cas. Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iii) $n+1$ composé, $(n+2)/2$ composé, $n/2$ composé, $n-1$ premier

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n)$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\dfrac{n}{2}\right)$, $\delta_{Y_a}(n) = -1$ et $Y_a(n+2) = Y_a(n) + 1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned} Y_a(n+2) &= Y_a(n) + 1 \\ &= \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n) + 1 \\ &= \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) - 1 + 1 \\ &= \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n+2) \end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_a}(n+2) = 0$ dans ce cas. Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iij) $n+1$ premier, $(n+2)/2$ composé, $n/2$ premier, $n-1$ composé

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n) + 1$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\dfrac{n}{2}\right)$, $\delta_{Y_a}(n) = 1$ et $Y_a(n+2) = Y_a(n) - 1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned} Y_a(n+2) &= Y_a(n) - 1 \\ &= \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n) - 1 \\ &= \pi(n+2) - 1 - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 1 - 1 \\ &= \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n+2) \end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_a}(n+2) = -1$ dans ce cas. Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iik) $n+1$ composé, $(n+2)/2$ composé, $n/2$ composé, $n-1$ composé

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n)$, $\pi\left(\frac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\frac{n}{2}\right)$, $\delta_{Y_a}(n) = 0$ et $Y_a(n+2) = Y_a(n)$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned} Y_a(n+2) &= Y_a(n) \\ &= \pi(n) - \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n) \\ &= \pi(n+2) - \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_a}(n+2) \end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_a}(n+2) = 0$ dans ce cas. Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

6.1.4 Propriété 12 : relation invariante portant sur $Y_c(n)$

Il s'agit de démontrer pourquoi la relation invariante portant sur $Y_c(n)$ et qui est :

$$Y_c(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n)$$

est toujours vérifiée.

i) initialisation des récurrences :

n	$n/2$ *est premier*	$(n+2)/2$ *est premier*	$n-1$ *est premier*	$n+1$ *est premier*	$Y_c(n)$	$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$	$\pi(n)$	$\pi(n/2)$	$\delta_{Y_c}(n)$
14	x	–	x	–	1	3	6	4	0
16	–	–	–	x	1	4	6	4	−1
18	–	–	x	x	2	4	7	4	1
20	–	x	x	–	1	5	8	4	0
22	x	–	–	x	1	5	8	5	−1
26	x	–	–	–	2	6	9	6	−1
36	–	x	–	x	4	9	11	7	−1
48	–	–	x	–	6	12	15	9	0
50	–	–	–	–	6	12	15	9	0
56	–	x	–	–	6	14	16	9	−1
60	–	x	x	x	8	15	17	10	0

On vérifie aisément que pour les petits entiers, la propriété 12 est bien systématiquement vérifiée.

ii) passage de n à $n+2$: Démontrons par récurrence que si (12) est vraie pour n, elle est vraie pour $n+2$.

On pose l'hypothèse que la propriété 12 est vraie pour n,

$$Y_c(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n) \qquad (H)$$

Démontrons qu'elle est vraie pour $n+2$,

$$Y_c(n+2) = \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n+2) \qquad (Ccl)$$

On retrouve ici les 11 cas identifiés pour la propriété 11 ; parfois, on a deux sous-cas, lorsque $n/2$ est composé, selon que n est un double de pair auquel cas $\left\lfloor \dfrac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor$ ou que n est un double d'impair auquel cas $\left\lfloor \dfrac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor + 1$.

Dans le tableau ci-dessous sont fournies les valeurs de $\delta_{Y_c}(n)$ selon les valeurs des booléens pertinents à considérer (en première colonne, on indique un numéro de ligne l_i utile dans la suite ; un exemple de petit nombre est fourni en avant-dernière colonne, pour fixer les idées ; la lettre correspondant au type de récurrence intervenant (cf après le tableau) est fournie en dernière colonne) :

	$n-1$ *est premier*	$n+1$ *est premier*	$n/2$ *est premier*	$(n+2)/2$ *est premier*	$\delta_{4k+2}(n)$	$\delta_{Y_c}(n)$	*ex*	*cas*
l_1	×	–	×	–	×	0	14	*a*
l_2	×	–	–	×	–	0	20	*e*
l_3	×	–	–	–	×	0	54	*i*
l_4	×	–	–	–	–	1	48	*i*
l_5	–	×	×	–	×	-1	22	*b*
l_6	–	×	–	×	–	-1	36	*f*
l_7	–	×	–	–	×	0	66	*j*
l_8	–	×	–	–	–	-1	16	*j*
l_9	–	–	×	–	×	-1	26	*c*
l_{10}	–	–	–	×	–	-1	56	*g*
l_{11}	–	–	–	–	×	0	50	*k*
l_{12}	–	–	–	–	–	-1	64	*k*
l_{13}	×	×	–	×	–	0	60	*d*
l_{14}	×	×	–	–	×	1	18	*h*
l_{15}	×	×	–	–	–	0	108	*h*

iia) $n+1$ composé, $(n+2)/2$ composé, $n/2$ premier, $n-1$ premier

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n)$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\dfrac{n}{2}\right)$, $\delta_{Y_c}(n) = 0$ et $Y_c(n+2) = Y_c(n)$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned} Y_c(n+2) &= Y_c(n) \\ &= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n) \\ &= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - 1 - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 0 \\ &= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n+2) \end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2) = -1$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors à l'un des cas des lignes l_6, l_8, l_{10} ou l_{12} car n étant un double d'impair, $n+2$ ne peut en être un). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iib) $n+1$ premier, $(n+2)/2$ composé, $n/2$ premier, $n-1$ composé

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n) + 1$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\dfrac{n}{2}\right)$, $\delta_{Y_c}(n) = -1$ et $Y_c(n+2) = Y_c(n) + 1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned} Y_c(n+2) &= Y_c(n) + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n) + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - 1 - \pi(n+2) + 1 + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) - 1 + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n+2) \end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2) = 0$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors à l'un des cas des lignes l_2, l_{13} ou l_{15} car n étant un double d'impair, $n+2$ ne peut en être un). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iic) $n+1$ composé, $(n+2)/2$ composé, $n/2$ premier, $n-1$ composé

Dans ce cas, $\pi(n+2)=\pi(n)$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right)=\pi\left(\dfrac{n}{2}\right)$, $\delta_{Y_c}(n)=-1$ et $Y_c(n+2)=Y_c(n)+1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_c(n+2) \quad &= Y_c(n)+1\\
&= \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-\pi(n)+\pi\left(\frac{n}{2}\right)+\delta_{Y_c}(n)+1\\
&= \left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor-1-\pi(n+2)+\pi\left(\frac{n+2}{2}\right)-1+1\\
&= \left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor-\pi(n+2)+\pi\left(\frac{n+2}{2}\right)+\delta_{Y_c}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2)=-1$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors à l'un des cas des lignes l_6, l_8, l_{10} ou l_{12} car n étant un double d'impair, $n+2$ ne peut en être un). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iid) $n+1$ premier, $(n+2)/2$ premier, $n/2$ composé, $n-1$ premier

Dans ce cas, $\pi(n+2)=\pi(n)+1$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right)=\pi\left(\dfrac{n}{2}\right)+1$, $\delta_{Y_c}(n)=0$ et $Y_c(n+2)=Y_c(n)$.

n est obligatoirement un double de pair.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_c(n+2) \quad &= Y_c(n)\\
&= \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-\pi(n)+\pi\left(\frac{n}{2}\right)+\delta_{Y_c}(n)\\
&= \left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor-\pi(n+2)+1+\pi\left(\frac{n+2}{2}\right)-1+0\\
&= \left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor-\pi(n+2)+\pi\left(\frac{n+2}{2}\right)+\delta_{Y_c}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2)=0$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors au cas de la ligne l_1). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iie) $n+1$ composé, $(n+2)/2$ premier, $n/2$ composé, $n-1$ premier

Dans ce cas, $\pi(n+2)=\pi(n)$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right)=\pi\left(\dfrac{n}{2}\right)+1$, $\delta_{Y_c}(n)=0$ et $Y_c(n+2)=Y_c(n)$.

n est obligatoirement un double de pair.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_c(n+2) \quad &= Y_c(n)\\
&= \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-\pi(n)+\pi\left(\frac{n}{2}\right)+\delta_{Y_c}(n)\\
&= \left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor-\pi(n+2)+\pi\left(\frac{n+2}{2}\right)-1+0\\
&= \left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor-\pi(n+2)+\pi\left(\frac{n+2}{2}\right)+\delta_{Y_c}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2)=-1$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors à l'un des cas des lignes l_5 ou l_9). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iif) $n+1$ premier, $(n+2)/2$ premier, $n/2$ composé, $n-1$ composé

Dans ce cas, $\pi(n+2)=\pi(n)+1$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right)=\pi\left(\dfrac{n}{2}\right)+1$, $\delta_{Y_c}(n)=-1$ et $Y_c(n+2)=Y_c(n)+1$.

n est obligatoirment un double de pair.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_c(n+2) \quad &= Y_c(n)+1\\
&= \left\lfloor\frac{n}{4}\right\rfloor-\pi(n)+\pi\left(\frac{n}{2}\right)+\delta_{Y_c}(n)+1\\
&= \left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor-\pi(n+2)+1+\pi\left(\frac{n+2}{2}\right)-1-1+1\\
&= \left\lfloor\frac{n+2}{4}\right\rfloor-\pi(n+2)+\pi\left(\frac{n+2}{2}\right)+\delta_{Y_c}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2) = 0$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors au cas de la ligne l_1). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iig) $n+1$ composé, $(n+2)/2$ premier, $n/2$ composé, $n-1$ composé

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n)$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\dfrac{n}{2}\right) + 1$, $\delta_{Y_c}(n) = -1$ et $Y_c(n+2) = Y_c(n) + 1$.

n est obligatoirement un double de pair.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_c(n+2) &= Y_c(n) + 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n) + 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) - 1 - 1 + 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2) = -1$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors à l'un des cas des lignes l_5 ou l_9). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iih) $n+1$ premier, $(n+2)/2$ composé, $n/2$ composé, $n-1$ premier

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n) + 1$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

iih1) n double de pair, $\delta_{Y_c}(n) = 0$ et $Y_c(n+2) = Y_c(n)$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_c(n+2) &= Y_c(n) \\
&= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n) \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + 1 + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 0 \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2) = 1$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors aux cas des lignes l_3 ou l_{14}). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iih2) n double d'impair, $\delta_{Y_c}(n) = 1$ et $Y_c(n+2) = Y_c(n) - 1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_c(n+2) &= Y_c(n) - 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n) - 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - 1 - \pi(n+2) + 1 + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 1 - 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2) = 0$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors aux cas des lignes l_2, l_4, l_{13} ou l_{15}). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iii) $n+1$ composé, $(n+2)/2$ composé, $n/2$ composé, $n-1$ premier

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n)$, $\pi\left(\dfrac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\dfrac{n}{2}\right)$.

iii1) n double de pair, $\delta_{Y_c}(n) = 0$ et $Y_c(n+2) = Y_c(n)$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_c(n+2) &= Y_c(n) \\
&= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n) \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 0 \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2) = 0$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors aux cas des lignes l_7 ou l_{11}). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iii2) n double d'impair, $\delta_{Y_c}(n) = 1$ et $Y_c(n+2) = Y_c(n) - 1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_c(n+2) &= Y_c(n) - 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n) - 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - 1 - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 1 - 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2) = -1$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors aux cas des lignes l_6, l_8, l_{10} ou l_{12}). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iij) $n+1$ premier, $(n+2)/2$ composé, $n/2$ composé, $n-1$ composé

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n) + 1$, $\pi\left(\frac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\frac{n}{2}\right)$.

iij1) n double de pair, $\delta_{Y_c}(n) = -1$ et $Y_c(n+2) = Y_c(n) + 1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_c(n+2) &= Y_c(n) + 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n) + 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + 1 + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) - 1 + 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2) = 1$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors aux cas des lignes l_3 ou l_{14}). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iij2) n double d'impair, $\delta_{Y_c}(n) = 0$ et $Y_c(n+2) = Y_c(n)$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_c(n+2) &= Y_c(n) \\
&= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n) \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - 1 - \pi(n+2) + 1 + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 0 \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2) = 0$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors aux cas des lignes l_2, l_4, l_{13} ou l_{15}). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iik) $n+1$ composé, $(n+2)/2$ composé, $n/2$ composé, $n-1$ composé

Dans ce cas, $\pi(n+2) = \pi(n)$, $\pi\left(\frac{n+2}{2}\right) = \pi\left(\frac{n}{2}\right)$.

iik1) n double de pair, $\delta_{Y_c}(n) = -1$ et $Y_c(n+2) = Y_c(n) + 1$.

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_c(n+2) &= Y_c(n) + 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n) + 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) - 1 + 1 \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2) = 0$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors aux cas des lignes l_7 ou l_{11}). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

iik2) n double d'impair, $\delta_{Y_c}(n) = 0$ et $Y_c(n+2) = Y_c(n)$

Auquel cas,

$$\begin{aligned}
Y_c(n+2) &= Y_c(n) \\
&= \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n) \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - 1 - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + 0 \\
&= \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \pi(n+2) + \pi\left(\frac{n+2}{2}\right) + \delta_{Y_c}(n+2)
\end{aligned}$$

puisque $\delta_{Y_c}(n+2) = -1$ dans ce cas ($n+2$ correspond alors aux cas des lignes l_6, l_8, l_{10} ou l_{12}). Cela entraîne que (Ccl) est vérifiée.

6.2 Relations d'ordre entre variables

6.2.1 Etude des inégalités $Z_c(n) > Z_a(n), Z_a(n) > Y_a(n)$ et $Y_c(n) > Z_c(n)$

Des propriétés 9 et 10, on déduit que $Z_c(n) - Z_a(n) = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 2\,\pi\left(\frac{n}{2}\right) + \delta_{Z_c - Z_a}(n)$ avec $\delta_{Z_c - Z_a}(n)$ égal à $1, 2$ ou 3.

$Z_c(n) - Z_a(n)$ semble globalement croissante avec de petites oscillations. On constate que $Z_c(n) > Z_a(n)$ pour $n \geqslant 240$. A partir de ce nombre, l'inégalité stricte sera toujours vérifiée car $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ augmente plus souvent que $2\,\pi\left(\frac{n}{2}\right)$.

Des propriétés 9 et 11, on déduit que $Z_a(n) - Y_a(n) = 2\,\pi\left(\frac{n}{2}\right) - \pi(n) + \delta_{Z_a - Y_a}(n)$ avec $\delta_{Z_a - Y_a}(n)$ égal à $-3, -2, -1$ ou 0.

$Z_a(n) - Y_a(n)$ semble globalement croissante avec de petites oscillations. On constate que $Z_a(n) > Y_a(n)$ pour $n \geqslant 36$.

Des propriétés 10 et 12, on déduit que $Y_c(n) - Z_c(n) = 2\,\pi\left(\frac{n}{2}\right) - \pi(n) + \delta_{Y_c - Z_c}(n)$ avec $\delta_{Y_c - Z_c}(n)$ égal à $-2, -1, 0$ ou 1.

$Y_c(n) - Z_c(n)$ est une fonction croissante de n. On constate que $Y_c(n) > Z_c(n)$ pour $n \geqslant 24$.

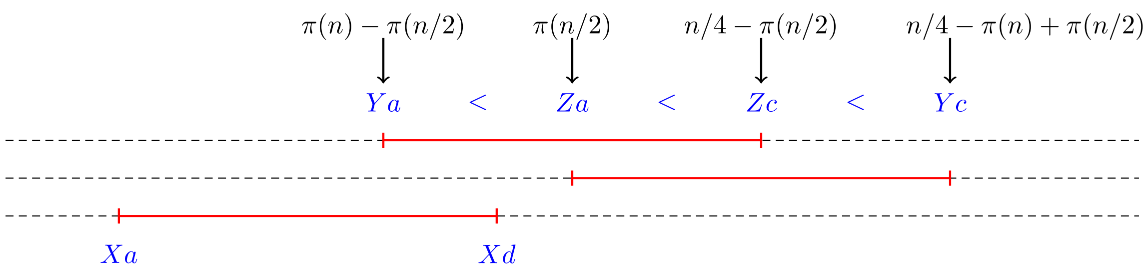
6.2.2 Ordre strict sur les 4 variables $Y_a(n), Y_c(n), Z_a(n)$ et $Z_c(n)$

Les variables $Y_a(n), Z_a(n), Z_c(n)$ et $Y_c(n)$ sont strictement ordonnées de la façon suivante :

$$Y_a(n) < Z_a(n) < Z_c(n) < Y_c(n)$$

pour tout $n \geqslant 240$.

Une représentation imagée des écarts entre variables est fournie ci-dessous, qui montre leur intrication :



6.3 D'autres propriétés

Des propriétés 9, 10, 11 et 12, on déduit :

- $Z_c(n) - Y_a(n) = \left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \delta_{Z_c - Y_a}(n)$ avec $\delta_{Z_c - Y_a}(n)$ égal à $-1, 0, 1$ ou 2 ;
- $Y_c(n) - Z_a(n) = \left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \delta_{Y_c - Z_a}(n)$ avec $\delta_{Y_c - Z_a}(n)$ égal à $0, 1, 2$ ou 3 ;
- $X_d(n) - X_a(n) = Z_c(n) - Y_a(n) + \delta_{2c-imp}(n) = \left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \delta_{X_d - X_a}(n)$ avec $\delta_{X_d - X_a}(n)$ égal à $-1, 0, 1$ ou 2.

On constate également par programme et il faudrait le démontrer rigoureusement que :

- $X_c(n) - X_b(n) = 2\pi\left(\dfrac{n}{2}\right) - \pi(n) + \delta_{X_c - X_b}(n)$ avec $\delta_{X_c - X_b}(n)$ égal à $-2, -1, 0$ ou 1.

De même, on déduit des égalités dont on dispose que :

- $X_a(n) + X_b(n) = \pi(n) - \pi\left(\dfrac{n}{2}\right) + \delta_{X_c - X_b}(n)$ avec $\delta_{X_a + X_b}(n)$ minuscule.

La fonction $\left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n)$ qui apparaît dans les membres droits des trois premières égalités ci-dessus est globalement croissante avec de petites oscillations. Elle s'annule pour $n = 122$.

Dans la mesure où $\left\lfloor \dfrac{n+2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor + 1$ quand n est un double de pair (i.e. pour un nombre pair sur deux) tandis que $\pi(n+2) = \pi(n) + 1$ quand $n+1$ est premier (beaucoup moins souvent que pour un nombre pair sur deux), pour tout n supérieur à une valeur petite (i.e. $n > 122$), on aura systématiquement $\left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) > 0$.

6.4 Etude de l'inégalité $X_a(n) > 0$

Pour être assuré que $X_a(n)$ soit toujours non nul, il faudrait montrer qu'à partir d'une certaine valeur de n, l'inégalité

$$X_d(n) > \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + 2$$

est toujours vérifiée.

En effet, cette inégalité, combinée avec l'invariant $X_d(n) - X_a(n) = \left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \delta_{X_d - X_a}(n)$, aurait pour conséquence qu'$X_a(n)$ serait toujours strictement positif.

On constate que

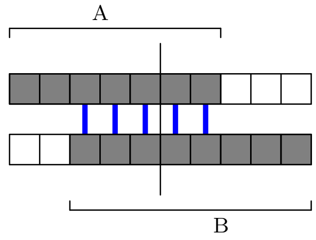
$$X_d(n) > \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + 2$$

à partir de $n \geqslant 30$.

Intuitivement, on comprend le phénomène à l'oeuvre : le nombre de nombres composés devient si grand par rapport au nombre de nombres premiers que chaque nombre composé a “beaucoup plus de chances” de se trouver complémentaire à n d'un nombre composé plutôt que d'un nombre premier. C'est ainsi qu'on constate qu'$X_d(n)$ devient vite plus grand que la somme $X_b(n) + X_c(n)$, chacun des deux termes de la somme étant quant à lui supérieur à $X_a(n)$.

6.5 Exercice subsidiaire

Posons comme exercice que l'on doive apparier bijectivement les nombres de deux ensembles ; dans le premier ensemble contenant k nombres, A sont composés et $k - A$ sont premiers tandis que dans le deuxième ensemble, contenant également k nombres, B nombres sont composés et $k - B$ sont premiers. Si $A \leqslant k/2$ et $B \leqslant k/2$, la bijection peut ne pas apparier forcément deux nombres composés. Mais dès que $A > k/2$ et $B > k/2$, un certain nombre d'appariements sont contraints d'associer un nombre composé du premier ensemble et un nombre composé du deuxième ensemble. On peut même aisément comprendre grâce au schéma ci-dessous que le nombre d'appariements associant bijectivement deux nombres composés est au moins égal à $A + B - k$.



6.6 $X_a(n)$ contrainte à être strictement positive

Parmi les nombres impairs compris entre 3 et $n/2$, très vite, plus de la moitié sont composés. De même, parmi les nombres impairs compris entre $n/2$ et $n - 3$, très vite, plus de la moitié sont composés.

Ainsi, il y a assez vite à la fois plus de la moitié des nombres qui peuvent être sommant de premier rang d'une décomposition de n qui sont composés et plus de la moitié des nombres qui peuvent être sommant de second rang d'une décomposition de n qui sont composés (i.e. $Y_c(n) > \left\lfloor \dfrac{n-2}{8} \right\rfloor$ et $Z_c(n) > \left\lfloor \dfrac{n-2}{8} \right\rfloor$) dès que $n \geqslant 244$. En effet, pour $n \geqslant 244$, $\left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor - \pi(n) + \pi\left(\dfrac{n}{2}\right) > \left\lfloor \dfrac{n-2}{8} \right\rfloor$ et $\left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor - \pi\left(\dfrac{n}{2}\right) > \left\lfloor \dfrac{n-2}{8} \right\rfloor$. $X_d(n)$ comptant les décompositions de la forme *composé* + *composé* est alors systématiquement supérieur à $Y_c(n) + Z_c(n) - \left\lfloor \dfrac{n-4}{4} \right\rfloor$ (cf exercice subsidiaire de la section précédente) et le restera définitivement, ce qui assure qu'$X_a(n)$ sera alors toujours strictement positif, ce qui prouve la conjecture de Goldbach binaire.